Bonus-Aufgabenblatt

Liebe VorkursteilnehmerInnen, da bis zum eigentlichen Semesterstart noch zwei Wochen Zeit sind, habe ich gegen die Langeweile einen weiteren Übungszettel erstellt.

Integralrechnung: partielle Integration

Für stetig differenzierbare Funktionen u und v gilt:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) \, \mathrm{d}x = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) \, \mathrm{d}x$$

Mit dieser Gleichung lässt sich das Integral über $u'v$ auf ein Integral über uv' zurückführen. Die Regel kann hilfreich sein, wenn die Funktion v durch Ableiten in eine einfachere Funktion v' übergeht.

Herleitung

Die partielle Integration ergibt sich aus der Produktregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Produktregel lautet:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Das lässt sich umformen zu:

$$u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$$

Integration von a bis b liefert dann nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)v(x))' \mathrm{d}x - \int_a^b u(x)v'(x) \mathrm{d}x$$

$$= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x$$

Beispiel

Das Integral $\int_1^2 3xe^x$ soll berechnet werden.

1. Die Funktionen u' und v sind festzulegen. (Eventuell muss man die Rolle von u' und v vertauschen, wenn das weitere Verfahren nicht zu einer Lösung führt.)
$$u'(x) = e^x \qquad v(x) = 3x$$

2. Eine Funktion u ist durch Integration zu bestimmen.
$$u(x) = e^x$$

3. Die Funktion v ist abzuleiten.
$$v'(x) = 3$$

4. Die Terme sind nun in die Formel einzusetzen.
$$\int_1^2 3xe^x = \int_1^2 u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x) \cdot v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [3xe^x]_1^2 - \int_1^2 3e^x\,\mathrm{d}x = [6e^2 - 3e] - [3e^x]_1^2$$
$$= 6e^2 - 3e - [3e^2 - 3e] = 6e^2 - 3e - 3e^2 + 3e = 3e^2$$

Aufgabe 1

Bestimmen Sie folgende Integrale:

a)
$$\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

b)
$$\int_{-2}^2 (2x+4)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

c)
$$\int_0^\pi \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

d)*
$$\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Lösungen (zur Kontrolle): a) π / b) $8\sin(2)$ / c) $\frac{\pi}{2}$ / d) 1

Integration mit Substitution

Für eine stetige Funktion g und eine stetig differenzierbare auf $[a, b]$ eineindeutige Funktion v gilt:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{v(a)}^{v(b)} g(x(v))\,\frac{1}{\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}}\,\mathrm{d}v$$

Schreiben wir die Ableitung $v'(x)$ als Differntialquotienten $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ dann wird diese Regel zu:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{v(a)}^{v(b)} g(x(v))\,\frac{\mathrm{d}x(v)}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}v$$

Beispiel

Das Integral $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ soll berechnet werden.

1. Die Funktion v ist festzulegen (hier $x \in [0, 1]$ wegen Integralgrenzen).

$$v(x) = 1 + x^2$$

2. Die Funktion v ist abzuleiten.

$$v'(x) = 2x$$

   d.h. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}v}{2x}$

3. Die Funktionswerte von v an den Integrationsgrenzen sind zu bestimmen.

$$v(0) = 1 \qquad v(1) = 2$$

4. Die Terme sind nun in die Formel einzusetzen.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{v}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{v}}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{v}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}) = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41$$

5. Beachte: Falls nicht von alleine alle Terme mit x verschwinden, muss man den Integranden weiter umformen, bis er nur noch Terme mit v enthält. Dazu kann man $v(x)$ umstellen nach $x(v)$ und einsetzen.

Aufgaben 2

Bestimmen Sie folgende Integrale mit Hilfe von Substitutionen:

a)

$$\int_{-1}^{1} 8(4x-1)^3 \, \mathrm{d}x$$

b)

$$\int_{0}^{1} 4x^3\sqrt{x^4+1} \, \mathrm{d}x$$

c)

$$\int_{0}^{2\pi/\omega} \cos(\varphi+\omega t) \, \mathrm{d}t$$

d)

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$$

e)*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3} \, \mathrm{d}t$$

Lösungen (zur Kontrolle): a) -272 / b) $\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{2}{3}$ / c) 0 d) $\frac{\pi}{4}$ / e) = d)