Gitteruntersuchungen zur Flavoursymmetrie von Staggered Quarks mit verbesserten Wirkungen

Diplomarbeit

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Axel Bicker

25. März 1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die moderne Physik beschreibt die Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen durch vier fundamentale Kräfte: elektromagnetische, schwache, starke Kraft und Gravitation. Die Lagrangedichten lassen sich jeweils aus dem Prinzip lokaler Eichinvarianz ableiten. Die Gravitation entzieht sich einer vereinheitlichten Beschreibung, die drei übrigen werden im sogenannten Standardmodell zusammmengefaßt. Das Standardmodell gilt aufgrund seiner Erfolge bei der Voraussage experimenteller Ergebnisse als weitgehend gesichert.

Die Teilchen selbst werden eingeteilt in Fermionen mit halbzahligem und Bosonen mit ganzzahligem Spin.

Die QCD (Quanten-Chromo-Dynamik) ist die Theorie, die der starken Kraft zugrundeliegt. Sie beschreibt die Wechselwirkung zwischen farbgeladenen Teilchen, also Quarks und Gluonen.

Quarks tragen elektrische Ladungen von $-1/3$, $2/3$ und haben Spin $1/2$. Sie treten in 6 Typen (Flavours) auf, die mittlerweile alle experimentell nachgewiesen sind: up, down,strange, charm, bottom und top. Zusätzlich besitzen sie drei Farbfreiheitsgrade und sind in diesen invariant unter lokalen $SU(3)_C$ Eichtransformationen. 8 Eichbosonen mit Spin 1 vermitteln die Wechselwirkung zwischen farbgeladenen Teilchen. Da die Bosonen selbst Farbladungen tragen, existiert eine Selbstwechselwirkung des Gluonfeldes.

Hadronen sind farbneutrale Bindungszustände von Quarks: Mesonen sind Paare aus einem Quark und seinem Antiquark, Baryonen sind Zustände aus drei Quarks mit jeweils unterschiedlichen Farbladungen.

Zur Untersuchung dieser Theorie gibt es zwei wesentliche Verfahren: Störungstheorie und Gitterregularisierung.

In Störungstheorie wird nach der Kopplungskonstanten entwickelt. Sie ist anwendbar, wenn die Kopplungen klein sind. In der QCD ist dies für kleine Abstände der Fall, das Phänomen wird asymptotische Freiheit genannt.

Sehr fruchtbar ist die Gitterregularisierung, da sie durch Monte-Carlo-Integration auf dem Computer ausgewertet werden kann. Die vierdimensionale Raumzeit wird durch ein euklidisches Gitter diskretisiert, mit endlicher Gitterkonstante a. Das auszuwertende Pfadintegral wird damit endlich-dimensional und frei von Divergenzen. Andererseits führt die Regularisierung zu neuen Fehlern, die durch endliche Gitterabstände und räumlich endliche Gitter hervorgerufen werden.

Die Gitterwirkung ist durch die Forderung, im Kontinuumlimes, also für verschwindende Gitterkonstante, die Kontinuumwirkung zu reproduzieren, nicht eindeutig festgelegt. Es ist daher möglich, durch optimierte Diskretisierungsschemata verbesserte Wirkungen zu finden. Sie approximieren die Kontinuumwirkung bei endlicher Gitterkonstante besser, indem sie die Fehler minimieren, die in niedriger Ordnung von a auftreten.

Es gibt zwei verschiedene Methoden zur Darstellung von Fermionen, nach Wilson, die nur einen einzelnen Flavour simuliert, und nach Kogut-Susskind, die im einfachsten Fall vier entartete Quarkflavours beschreibt. In dieser Arbeit werden Kogut-Susskind Fermionen verwendet.

Einer ihrer wesentlichen Vorzüge ist die Beibehaltung einer größeren Teilmenge der Kontinuumsymmetrien auf dem Gitter, insbesondere gibt es eine chirale Restsymmetrie.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Flavoursymmetrie. Sie ist auf dem Gitter verletzt, das heißt, die Quarkflavours sind trotz Massenentartung nicht austauschbar. In der Wirkung steht ein explizit flavourmischender Term, der im Kontinuumlimes verschwindet, und im Teilchenspektrum zeigt sich, daß Gitterzustände, die sich nur durch den Flavourgehalt unterscheiden, verschiedene Massen haben.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene verbesserte Wirkungen daraufhin zu untersuchen, inwieweit sie diese Verletzung der Flavoursymmetrie beheben. Dazu werden zwei Methoden angewendet, die analytische Untersuchung der Wirkung mit dem Ziel, den flavourmischenden Term in niedrigster Ordnung Störungstheorie zu bestimmen, und die numerische Bestimmung von Mesonmassen, um über die Massenentartung von Gitterzuständen ein Maß für die tatsächlich auftretende Verletzung der Flavoursymmetrie zu erhalten.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen der Arbeit kurz dargestellt: QCD im Kontinuum und in der Gitterformulierung.

Das zweite Kapitel beschreibt die Darstellung von Fermionen auf dem Gitter. Ausgehend von der naiven Formulierung und ihren Problemen wird die Kogut-Susskind Wirkung mit ihren Symmetrien angegeben.

Kapitel drei enthält die analytische Untersuchung von verschiedenen verbesserten Fermion-Wirkungen: Naik-Term, verbesserte Felder und Fat-Links. Daneben werden eine systematische Untersuchung nach Luo und verschiedene verbesserte Eichwirkungen vorgestellt.

Kapitel vier stellt Meson-Operatoren auf dem Gitter vor. Zunächst wird die Identifizierung von Gitterzuständen und Teilchen im Kontinuum entwickelt, dann die Bestimmung von Meson-Massen erläutert.

Anschließend werden in Kapitel fünf numerische Resultate für Mesonspektrum und Flavoursymmetrie angegeben und diskutiert. Aus den Mesonmassen erhält man ein Maß für die Flavoursymmetrie auf dem Gitter.

Es folgen eine Zusammenfassung sowie ein Anhang mit den wesentlichen Nebenrechnungen und einer Tabelle sämtlicher gemessenen Mesonoperatoren und -massen.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 QCD im Kontinuum

Die QCD ist als Eichtheorie formuliert. Ausgangspunkt ist die Dirac-Gleichung für Quarks. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz unter SU(3)-Transformationen im Farbraum führt zu kovarianten Ableitung D_μ und einem weiteren Term, der die Wechselwirkung der Gluonen darstellt. Die vollständige Lagrangedichte ist damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}_F(x) + \mathcal{L}_G(x) \\ &= \sum_{f,c,d} \bar{\psi}_c^f(x) \left(i\,\gamma^\mu\, \mathrm{D}_\mu^{cd} - m_f\, \delta^{cd} \right) \psi_d^f(x) - \frac{1}{4} F_{\mu,\nu}^k(x)\, F_k^{\mu,\nu}(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei ist $\psi_c^f(x)$ das Quarkfeld am Punkt x mit Farbladung c und Flavour f.

Die Gluonen werden dargestellt durch die bosonischen Eichfelder $A_\mu(x)$. Sie sind mit den acht Generatoren λ_k der Eichgruppe $\mathrm{SU}(3)_C$ verbunden durch reelle Funktionen $A_\mu^k(x)$:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{1}{2} A_\mu^k(x)\, \lambda_k \\ \mathrm{D}_\mu &= \partial_\mu + ig\, A_\mu(x) \\ F_{\mu,\nu}^k(x) &= \partial_\mu A_\nu^k(x) - \partial_\nu A_\mu^k(x) - g\, f_{l,m}^k A_\mu^l(x) A_\nu^m(x) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Die $f_{l,m}^k$ sind die Strukturkonstanten der SU(3), g die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung.

Diese Lagrangedichte ist wie gefordert invariant unter einer lokalen Eichtransformation $G(x) = \exp(-ig\, \alpha_k(x)\, \lambda^k)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = G(x)\, \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\, G^\dagger(x) \\ A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = G(x)\, A_\mu(x)\, G^\dagger(x) - \tfrac{i}{g}\, G(x)\, \partial_\mu\, G^\dagger(x) \end{aligned}$$

Damit geben wir die Zustandssumme an:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\ \exp(iS[A,\psi,\bar{\psi}]) \\ &= \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\ \exp(i\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)) \end{aligned}$$

Dabei treten zwei Probleme im Hinblick auf die numerische Auswertung auf:

- Der imaginäre Exponent wird umgangen, indem wir aus der Minkowski-Metrik in eine euklidische Metrik wechseln. Der wesentliche Übergang ist $x_0 \longrightarrow -ix_4$, x_4 reell. Damit ist die euklidische Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_E(x) = \sum_{f,c,d} \bar{\psi}_c^f(x) \left(\gamma_\mu^E\,\mathrm{D}_\mu^{cd} + m_f\,\delta^{cd}\right) \psi_d^f(x) + \frac{1}{4} F_{\mu,\nu}^k(x)\,F_k^{\mu,\nu}(x) \qquad (1.3)$$

  Die euklidischen Dirac-Matrizen γ_μ^E sind dabei $\gamma_4^E = \gamma_0^D$, $\gamma_k^E = -i\,\gamma_k^D$. Im folgenden rechnen wir immer im euklidischen Formalismus und verzichten auf die Indizes E.

- Das Integrationsmaß $\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}$ ist die Summe über alle Feldkonfigurationen, also eigentlich $\mathrm{d}A(x_1)\,\mathrm{d}\psi(x_1)\,\mathrm{d}\bar{\psi}(x_1)\ldots\mathrm{d}A(x_N)\,\mathrm{d}\psi(x_N)\,\mathrm{d}\bar{\psi}(x_N)$, für $N \longrightarrow \infty$. Zur numerischen Auswertung und zur Vermeidung von Divergenzen müssen wir eine Regularisierung vornehmen, in dieser Arbeit die Gitterregularisierung. Dann hat das Integral eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden und kann durch Monte-Carlo-Integration bestimmt werden.

1.2 QCD auf dem Gitter

Wir legen ein vierdimensionales, hyperkubisches Gitter mit Gitterkonstante a über das euklidische Volumen, welches betrachtet werden soll.

Jeder Gitterpunkt wird durch ein Zahlentupel $(x_1, \ldots, x_4)$ beschrieben, mit $x_i \in \mathbb{N}$. Bei Verwendung von N_σ Punkten in den räumlichen Dimensionen und N_τ in Zeitrichtung gibt es $\Omega = N_\sigma^3\,N_\tau$ Punkte, auf denen die Felder leben und ausgewertet werden müssen. An den Rändern wird das Gitter periodisch bzw. antiperiodisch geschlossen.

Durch Diskretisierung der Ableitungen und Ersetzen der Integrale $\int \mathrm{d}^4x$ durch Summen $\sum_x a^4$ wird die Kontinuumswirkung auf das Gitter übertragen. Die Gitterwirkung ist nicht eindeutig, die einzige Bedingung ist, daß im Kontinuumlimes $a \longrightarrow 0$ die euklidische Wirkung reproduziert wird. Die Zustandssumme ist damit mathematisch wohldefiniert.

Die Rechnung ist beschränkt auf das physikalische Volumen $V = (a\,N_\sigma)^3$. Ist dieses zu klein gewählt, verfälschen Finite-Size-Effekte die Meßergebnisse. Bei großer Gitterkonstante andererseits tauchen Effekte auf, die auf die Diskretisierung zurückgehen (Gitterartefakte).

Die Wirkung selbst ist einheitenlos, aber Felder und Operatoren sind mit Einheiten behaftet. Deshalb rechnen wir mit Gittergrößen, die durch Multiplikation mit entsprechenden Vielfachen des Gitterabstandes a einheitenlos werden. x, y bezeichnen Gitterpunkte, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ Einheitsvektoren auf dem Gitter.

Die Einführung des Gitters hat zwei Auswirkungen auf Fouriertransformierte von Feldern im Impulsraum: die Einführung der endlichen Gitterkonstanten beschränkt das Impulsintervall auf $[-(\pi/a), (\pi/a)]$ (UV-Cutoff). Durch die endliche Anzahl von Gitterpunkten N_μ in einer Raumrichtung wird außerdem ein IR-Cutoff eingeführt, Impulse treten nur als ganzzahlige Vielfache eines Minimalwertes auf.

Ein Beispiel für die Wahlfreiheit in der Wirkung sind die beiden folgenden Diskretisierungen der Ableitung:

$$\begin{array}{ll} \delta_\mu f(x) = \frac{1}{a}[f(x+\hat{\mu}) - f(x)] & \to f'(x) + \mathcal{O}(a) \ \text{, für } a \to 0 \\ \delta'_\mu f(x) = \frac{1}{2a}[f(x+\hat{\mu}) - f(x-\hat{\mu})] & \to f'(x) + \mathcal{O}(a^2) \ \text{, für } a \to 0 \end{array}$$

Die zweite Vorschrift liefert auf dem Gitter, bei endlichem a, eine bessere Approximation der Ableitung. Dies ist die Grundidee der verbesserten Wirkungen, die wir in Kapitel 3 betrachten.

Wir betrachten jetzt die Gluonwirkung auf dem Gitter. Beim fermionischen Anteil treten zusätzliche Probleme auf, die im nächsten Kapitel ausführlich diskutiert werden.

Zunächst werden zwei Objekte eingeführt, Linkvariable $U_\mu(x)$ und Plaquetten $P_{\mu,\nu}(x)$. Die erste enthält das Linienintegral über die gerichtete Verbindung zwischen zwei Gitterpunkten, die zweite ist das Produkt der vier Linkvariablen auf dem kleinsten geschlossenen Pfad:

$$U_\mu(x) = \exp\left(ig\int_x^{x+\hat{\mu}} dy_\mu\, A_\mu(y)\right) \tag{1.4}$$

$$P_{\mu,\nu}(x) = U_\mu(x)\, U_\nu(x+\hat{\mu})\, U_\mu^\dagger(x+\hat{\nu})\, U_\nu^\dagger(x) \tag{1.5}$$

Die Wilson-Formulierung für den Eichteil der Wirkung ist:

$$S_G[U] = \beta \sum_{x,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N}\text{Re Tr } P_{\mu,\nu}(x)\right) \tag{1.6}$$

Für kleine Gitterkonstanten a kann man durch Entwicklung in a zeigen, daß dies tatsächlich die Kontinuumswirkung reproduziert. Die Kopplung β hängt von g ab, es ist $\beta = 2N/(g^2) = 6/(g^2)$,

Die Gitterwirkung muß, wie die Kontinuumwirkung, invariant unter Eichtransformationen sein. Operatoren, die aus Produkten von Linkvariablen entlang geschlossener Pfade bestehen, erfüllen diese Bedingung.

Letztlich sind wir nicht an Gitterresultaten interessiert, sondern an Kontinuumsphysik. Dafür muß der Limes $a \to 0$ ausgeführt werden.

Die Gitterkorrelationslänge $\xi = 1/am$, m die kleinste Teilchenmasse, bestimmt den Abfall der Korrelationsfunktion. Physikalische Observablen nehmen nur dann endliche Werte an, wenn ξ divergiert.

Damit haben wir zwei Bedingungen für die Wahl der nackten Kopplungen g und am_q, über die wir die Simulation kontrollieren. am_q ist die nackte Quarkmasse im fermionischen Teil der Wirkung (vgl. Kapitel 2).

Daneben betrachten wir die entsprechenden renormierten Kopplungen $g^R(g, am_q)$, $m_q^R(g, am_q)$. Die physikalische Korrelationslänge ist $1/(am_q^R)$. Lokal können wir diese Funktionen invertieren und schreiben $g(g^R, m_q^R)$, $am_q(g^R, am_q^R)$.

Wir betrachten renormierte Vertexfunktionen bei festgehaltenem g^R. Man kann zeigen, daß in Störungstheorie bis zu k Loops gilt:

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i; g^R, m_q^R, am_q) \;=\; \Gamma_R^{(n)}(p_i; g^R, m_q^R, 0) \;+\; O(a^2(\ln\, a)^k)$$

Durch Ableiten folgt:

$$a\,\frac{d}{da}\,\Gamma_R^{(n)}(p_i; g^R, m_q^R, am_q) \;=\; O(a^2(lna)^k) \tag{1.7}$$

Die Korrekturen auf der rechten Seite heißen Skalenverletzung und können in der Nähe des Kontinuums vernachlässigt werden. Es gilt:

$$\Gamma_R^{(n)} = Z_R^{(n/2)}(g, am_q^R)\,\Gamma^{(n)}(p_i; g, m_q^R, am_q^R)$$

Dabei ist Z_R die Renormierung der Wellenfunktion und am_q durch am_q^R ausgedrückt. Durch Einsetzen in Gl. 1.7 ergibt sich für nackte Vertexfunktionen Γ_0:

$$\left\{ a\frac{\partial}{\partial a} \;-\; \beta_L \frac{\partial}{\partial g} \;+\; n\,\gamma_L \right\}\,\Gamma_0^{(n)} \;=\; 0$$

Die Koeffizientenfunktionen sind $\beta_L(g, am_q^R) = -a\,\partial g/\partial a$ und $\gamma_L(\beta, am_q^R) = (1/2)$ $a(\partial \ln Z_R)/\partial a$, die Ableitungen jeweils bei β^R konstant.

Damit ist das Verhalten der Vertexfunktion unter Variation von am_q^R beschrieben. Die Funktionen β_L, γ_L sind in der Nähe des Kontinuums störungstheoretisch bekannt und universell, also unabhängig von der betrachteten Observablen. Dies ist eine Folge der asymptotischen Freiheit der QCD: die effektive Quark-Gluon- bzw. Gluon-Gluon-Kopplung ist klein für kleinste Abstände.

Die Funktionen β_L, γ_L geben an, wie die Kopplungen vom Gitterabstand abhängen. Sie beschreiben das Skalenverhalten der Observablen beim Übergang zum Kontinuum, aber auch das Skalenfenster, den Kopplungsbereich, in dem physikalisch sinnvolle Ergebnisse erzielt werden können.

Diese Überlegungen haben Konsequenzen für die numerischen Untersuchungen im letzten Teil der Arbeit.

Wir betrachten Quotienten von Gittergrößen, bei denen sich die a-Abhängigkeit in erster Näherung herauskürzt.

Die physikalische Quarkmasse wird nicht durch die Kopplung am_q beschrieben, sondern über den Quotienten $(m_\pi/m_\rho)^2$, der zur renormierten Quarkmasse proportional ist.

Kapitel 2

Fermionen auf dem Gitter

Dieses Kapitel beschreibt die Fermion-Wirkungen auf dem Gitter. Der Abschnitt 2.1 beschreibt die Grundideen bis zur Formulierung der Kogut-Susskind-Wirkung. Abschnitt 2.2 diskutiert den Flavourgehalt.

2.1 Von der Naiven zur Staggered Formulierung

2.1.1 Naive Fermionwirkung

Der fermionische Anteil der Gitterwirkung wird über eine Fermionmatrix M formuliert. Dabei diskretisieren wir die euklidische Wirkung unter Benutzung des Ableitungsoperators δ'_μ ganz direkt und beschränken uns auf einen Quarkflavour (N_f=1) und verschwindende Eichfelder ($A_\mu = 0$, also $U_\mu = \mathbb{1}$):

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_{x,y,a,b} a^4 \, \bar{\psi}_\alpha(x) \, M^{\alpha\beta}(x,y) \, \psi_\beta(y) \qquad (2.1) \\ M_{\alpha\beta}(x,y) &= \delta_{\alpha\beta}\delta(x,y)m \, + \, \frac{1}{2a} \sum_\mu \gamma^\mu_{\alpha\beta} \left[\delta(x+\hat{\mu},y) - \delta(x-\hat{\mu},y)\right] \end{aligned}$$

Dies ist die naive Fermionwirkung, α, β bezeichnen die Dirac-Indices.

Es treten zwei wesentliche Probleme auf: die Antivertauschungseigenschaften der Fermionen erschweren die numerische Auswertung des Integrals, und die obige Formulierung liefert 16 entartete Quarks und muß deshalb modifiziert werden.

Betrachten wir zuerst die erste Schwierigkeit. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Fermionen antikommutieren, daher müssen sie im Pfadintegral durch Grassmann-wertige Felder dargestellt werden, für die gilt:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i \, \theta_j \, + \theta_j \, \theta_i = 0$$

Ein Rechner kann mit diesen Zahlen nicht umgehen, daher umgehen wir sie unter Benutzung der analytischen Gleichung 2.2, mit Grassman-Variablen $\theta_i, \bar{\theta}_i$:

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_N \, d\bar{\theta}_1 \dots d\bar{\theta}_N \, \exp\left(-\theta M \bar{\theta}\right) \; = \; \det M \qquad (2.2)$$

Wir können also den fermionischen Anteil der Wirkung bestimmen, indem wir die Determinante der Fermionmatrix berechnen.

Die Observablen in dieser Arbeit sind auf Eichfeldkonfigurationen bestimmt, die in der Quenched Approximation erzeugt worden sind. Dabei wird die Determinante der Fermion-Matrix auf 1 gesetzt, es bleibt eine reine Eichtheorie zu berechnen. Interne Quarkschleifen, also ein Teil der Vakuumpolarisationseffekte, werden vernachlässigt.

Das zweite Problem hängt direkt mit der Wirkung zusammen. Wir betrachten die oben angegebene Wirkung im Impulsraum:

$$S \;=\; \frac{1}{\Omega}\sum_p \tilde{\bar{\psi}}(p)\;\left\{\frac{1}{a}\sum_\mu\;\gamma^\mu i\sin(p_\mu a)\;+\;m\right\}\tilde{\psi}(p)$$

Der Ausdruck in $\{\}$ stellt das Inverse des freien Propagators $G(p)$ im Impulsraum dar. Damit erhalten wir:

$$G(p) = \frac{m\;-\;\sum_\mu \frac{i}{a}\,\gamma^\mu\,\sin(p_\mu a)}{m^2\;+\;\frac{1}{a^2}\,\sum_\mu[\,\sin(p_\mu a)]^2}$$

Die Pole dieses Ausdrucks stellen die Energie der möglichen Gitterfermionen dar. Zu jeder Energie gibt es 16 Lösungen für p, $p =\;(0,0,0,0)$, $(0,0,0,(\pi/a))$, $\ldots$,$((\pi/a)$, (π/a), (π/a),$(\pi/a))$.

Die naive Fermionwirkung beschreibt also 16 massenentartete Quarks anstelle von einem. In einer freien Theorie wäre das akzeptabel, aber bei einer Wechselwirkung mit Eichfeldern verfälschen die überzähligen Quarks die Meßergebnisse, da sie in virtuellen Schleifen eingehen.

Es gibt zwei verschiedene Strategien, mit diesem Problem fertig zu werden, die Wilson- und die Kogut-Susskind- oder Staggered-Fermion-Formulierung.

In der Wilson-Wirkung [23] wird die Fermion-Verdopplung explizit aufgehoben durch einen Korrekturterm, der die Masse der sogenannten Doppler im Kontinuumlimes $a\;\rightarrow\;0$ divergieren läßt. Der Zustand $p\;=\;(0,0,0,0)$ bleibt als einziges physikalisches Teilchen übrig.

$$M_{W\,\alpha\beta}(x,y) =\; \delta_{\alpha\beta}\delta(x,y)\,(m{+}\frac{4r}{a}) + \frac{1}{2a}\sum_\mu[(\delta_{\alpha\beta}r{-}\gamma^\mu_{\alpha\beta})\delta(x{+}\hat{\mu},y){+}(\delta_{\alpha\beta}r{+}\gamma^\mu_{\alpha\beta})\delta(x{-}\hat{\mu},y)]$$

Der Wilson-Parameter r kann zwischen 0 und 1 frei gewählt werden, für $r = 0$ ergibt sich wiedre die naive Fermion-Wirkung.

2.1.2 Kogut-Susskind Wirkung

Die Kogut-Susskind- oder Staggered-Fermion-Wirkung [10] geht einen anderen Weg: wir beschränken uns formal auf Quarkfelder mit einem Flavour und eliminieren durch Diagonalisieren der Dirac-Matrizen die Dirac-Komponenten bis auf eine. Dieses χ-Feld wird simuliert.

Um wieder zu einer Spinor-Flavour-Interpretation zu kommen, fassen wir jeweils 16 Gitterpunkte zu einem Hyperkubus zusammen. Diese Würfel der Ausdehnung 2^4 bilden selbst ein grobes Gitter. Darauf wird ein neues Feld $q^{\alpha a}$ definiert, mit 4 Dirac-Komponenten α und 4 Flavours a. Die 16 Komponenten werden durch Linearkombination der χ-Einträge innerhalb des Hyperkubus bestimmt.

Es ist also hilfreich, Operatoren und Wirkungen in der Staggered-Formulierung für Simulation und Analyse in beiden Formulierungen anzugeben.

Das Verfahren wird motiviert durch die Kählersche Formulierung der Dirac-Gleichung. Die Differentialform, die das Feld beschreibt, ist an jedem Ort $\Phi_H(x)$. Der Index H durchläuft die 16 geordneten Teilmengen einer vier-elementigen Menge.

Dies entspricht den 16 Einträgen im Hyperkubus in der Kogut-Susskind Formulierung.

Zur Realisierung des Programms beginnen wir mit der naiven Fermionwirkung 2.1 und führen eine lokale Transformation der Fermionfelder durch:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi'(x) = A(x)\,\psi(x)\\ \bar\psi(x) &\to \bar\psi'(x) = \bar\psi(x)\,A^\dagger(x)\end{aligned}$$

Die $A(x)$ werden so gewählt, daß sie die Dirac-Matrizen in der Wirkung in Einheits-Matrizen umwandeln:

$$A^\dagger(x)\,\gamma^\mu\,A(x+\hat\mu) \;=\; \eta_\mu(x)\,\mathbb{1}$$

Man kann zeigen, daß $A(x) = \gamma_1^{x_1}\gamma_2^{x_2}\gamma_3^{x_3}\gamma_4^{x_4}$ diese Bedingung erfüllt. Für den Phasenfaktor η gilt dann $\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1+\ldots+x_{\mu-1}}$.

Die Fermionwirkung in den neuen Feldern ist dann:

$$\begin{aligned}S_F &= \sum_{x,y,\alpha,\beta} a^4\,\bar\psi'_\alpha(x)\,M'^{\alpha\beta}(x,y)\,\psi'_\beta(y)\\ M'_{\alpha\beta}(x,y) &= \delta_{\alpha\beta}\left\{\delta(x,y)m \;+\; \frac{1}{2a}\sum_\mu \eta_\mu(x)\,[\delta(x+\hat\mu,y)-\delta(x-\hat\mu,y)]\right\}\end{aligned}$$

Offensichtlich sind die verschiedenen Dirac-Komponenten des ψ'-Feldes völlig entkoppelt. Wir ersetzen es daher durch das Feld χ, das nur eine Dirac-Komponente besitzt.

$$\begin{aligned}S_F &= \sum_{x,y} a^4\,\bar\chi(x)\,M_{KS}(x,y)\,\chi(y) \qquad (2.3)\\ M_{KS}(x,y) &= \delta(x,y)m \;+\; \frac{1}{2a}\sum_\mu \eta_\mu(x)\,[\delta(x+\hat\mu,y)-\delta(x-\hat\mu,y)]\\ &\text{oder}\\ S_{KS} &= \sum_{x,\mu} a^4\,\eta_\mu(x)\,\bar\chi(x)\,\frac{1}{2a}[\chi(x+\hat\mu)-\chi(x-\hat\mu)] \;+\sum_x a^4\,m\,\bar\chi(x)\chi(x)\end{aligned}$$

Dies ist die Kogut-Susskind oder Staggered-Fermion-Wirkung in den χ-Feldern. Bevor wir die Untersuchung in den q-Feldern vornehmen, betrachten wir die Symmetrien der Wirkung.

2.1.3 Symmetrien der Kogut-Susskind-Wirkung

Die QCD im Kontinuum ist invariant unter Poincaré-Transformationen und unter der lokalen Eichgruppe $SU(3)_{Color}$. Für verschwindende Quarkmassen kommen dazu die chiralen Transformationen aus der Gruppe $U_V(N) \otimes U_A(N) = U_V(1) \otimes SU_V(N) \otimes SU_A(N) \otimes U_A(1)$, wobei N die Anzahl der Flavours ist. Diese Symmetrien sind im einzelnen:

- $U_V(1)$, die Baryonenzahl-Erhaltung.

- $SU_V(N)$, die verallgemeinerte Isospin-Transformation für massenentartete Quarkflavours.

- $SU_A(N)$: aus der Invarianz von Operatoren unter diesen Chiralitätstransformationen folgt die Symmetrie von Zuständen verschiedener Parität. Daraus folgt Massenentartung von Paritätspartnern, die aber nicht beobachtet wird, obwohl die physikalischen Quarkmassen vernachlässigbar klein sind gegen die typischen Energien der QCD-Wechselwirkung, die Vorbedingung $m_q \sim 0$ also näherungsweise gut erfüllt ist. Es bietet sich die Vermutung an, daß diese Symmetrie spontan gebrochen ist, da das Vakuum nicht invariant ist.

  Dann muß es nach Goldstone $N^2 - 1$ masselose Teilchen geben, die zwischen den Zuständen des Vakuums vermitteln. Kandidat ist das Pion. Seine kleine, aber nicht verschwindende Masse entspricht der Verletzung der Vorbedingung, $m_q = 0$.

- $U_A(1)$, die axiale Flavoursingulett-Symmetrie ist durch Quantenkorrekturen explizit gebrochen.

Die Generatoren dieser Gruppen sind $G_V = (\mathbb{1} \otimes T_V)$ und $G_A = (\gamma_5 \otimes T_A)$, wobei die ersten Operatoren auf die Spinorkomponenten wirken und die zweiten die jeweiligen Flavourgruppen generieren.

Auf dem Gitter ist die $SU(3)_{Color}$ voll erhalten, während die Poincaré-Gruppe auf diskrete Symetrietransformationen reduziert wird (vgl Abschnit 4.1.1).

Die chiralen Symmetrien werden durch das Nielsen-Ninomiya-Theorem verknüpft mit dem Auftreten von "Fermion-Verdopplung": Aufspaltung eines einzelnen Fermions der Kontinuumstheorie in ein Paar entarteter Fermionen mit unterschiedlicher Chiralität auf dem Gitter. Unter ziemlich allgemeinen Bedingungen wurde gezeigt, daß sich solche Fermion-Doppler nur vermeiden lassen durch zusätzliche Massenterme in $O(a)$, die die volle chirale Symmetrie brechen. Dies ist der Hintergrund der Schwierigkeiten, die mit der naiven Gitterwirkung aufgetreten sind.

Bei Wilson-Fermionen gibt es entsprechend keine Fermion-Verdopplung, aber auch keine chiralen Symmetrien.

Kogut-Susskind-Fermionen stellen dagegen einen Kompromiß dar: die Anzahl der Doppler ist von 16 auf 4 reduziert, die vier massenentarteten Quarkflavours in der

Formulierung in den q-Feldern (Gl. 2.9), dafür bleiben Reste der chiralen Symmetrie erhalten.

Wir gehen jetzt zurück zur Gleichung 2.3 und betrachten die folgende Transformation:

$$\begin{array}{ll} \chi(x) \to \chi'(x) = U_o\, \chi(x) & ,\, x \text{ ungerade} \\ \chi(x) \to \chi'(x) = U_e\, \chi(x) & ,\, x \text{ gerade} \\ \bar\chi(x) \to \bar\chi'(x) = \bar\chi(x)\, U_e^\dagger & ,\, x \text{ ungerade} \\ \bar\chi(x) \to \bar\chi'(x) = \bar\chi(x)\, U_o^\dagger & ,\, x \text{ gerade} \end{array}$$

Dabei sind U_o, U_e komplexe Zahlen aus U(1), x heißt ungerade (gerade), falls $|x| = x_1 + \ldots + x_4$ ungerade (gerade) ist. Unter der Transformation ist der kinetische Term der Wirkung invariant (für x ungerade, x gerade geht analog):

$$\begin{aligned} \bar\chi(x)[\chi(x+\hat\mu) - \chi(x-\hat\mu)] &\to \bar\chi'(x)\,[\chi'(x+\hat\mu) - \chi'(x-\hat\mu)] \\ &= \bar\chi(x)\, U_e^\dagger\, [U_e\, \chi(x+\hat\mu) - U_e\, \chi(x-\hat\mu)] \\ &= \bar\chi(x)\,[\chi(x+\hat\mu) - \chi(x-\hat\mu)] \end{aligned}$$

Der Massenterm transformiert zu:

$$m\, \bar\chi(x)\chi(x) \to m\bar\chi(x) U_e^\dagger U_o \chi(x)$$

Er ist invariant für $m = 0$ oder $U_o = U_e$.

Es liegt also eine chirale Symmetrie $(U_o(1) \otimes U_e(1))$ vor, die im Fall nichtverschwindender Masse auf die diagonale Untergruppe $U_o = U_e$ reduziert wird.

2.2 Flavour-Interpretation

In diesem Abschnitt geben wir die Kogut-Susskind-Wirkung in den q-Feldern an, zunächst für den bereits in 2.1.2 behandelten freien Fall, dann unter Berücksichtigung der Eichfelder.

2.2.1 Die freie Wirkung

Wir gehen wieder aus von der Kogut-Susskind-Wirkung 2.3 in vier Dimensionen und mit Eichfeldern $U_\mu = \mathbb{1}$:

$$S_{KS} = \sum_{x,\mu} a^4\, \eta_\mu(x)\, \bar\chi(x)\, \frac{1}{2a}[\chi(x+\hat\mu) - \chi(x-\hat\mu)] + \sum_x a^4\, m\, \bar\chi(x)\chi(x)$$

Die Idee ist jetzt, das Gitter in Hyperkuben von je 2^4 Punkten zu unterteilen. Durch die 16 χ-Felder wird dann ein Eintrag des Feldes q bestimmt, das auf dem groben Gitter der Hypercubes lebt und 16 Dirac-Flavour Komponenten hat.

Für die Durchführung der Rechnung werden zunächst einige Variable und Beziehungen eingeführt:

Die Koordinate x, mit $x_1, \ldots, x_4 = 0, 1, 2, \ldots, N_\sigma - 1$ wird ersetzt durch die Koordinate y auf dem groben Gitter, $y_1, \ldots, y_4 = 0, 2, \ldots, N_\sigma - 2$ und einen Vektor ξ, der die Position innerhalb des Hyperkubus angibt, also $\xi_1, \ldots, \xi_4 = 0, 1$. Damit folgende Vereinbarungen:

$$\begin{aligned} x &= y + \xi \\ \sum_x &= \sum_{y,\xi} \\ \chi_\xi(y) &= \chi(y+\xi) = \chi(x) \end{aligned}$$

Außerdem wird eine neue Additionsvorschrift benötigt, die zwei Vektoren ξ, ξ' zu einem neuen Hyperkuben-Vektor addiert:

$$\xi' \oplus \xi \ : \ (\xi' \oplus \xi)_\mu = ({\xi'}_\mu + \xi_\mu) \bmod 2$$

Damit konstruieren wir einen Ausdruck zur Selektion von Hyperkuben-Vektoren, die sich nur hinsichtlich ihrer μ-Komponente unterscheiden:

$$\bar{\delta}_{\xi', \xi\oplus\hat{\mu}} = \Pi_\nu \, \delta_{{\xi'}_\nu, (\xi\oplus\hat{\mu})_\nu}$$

Die neuen Quarkfelder $q^{\alpha,a}(y)$ mit Flavour-Index a und Dirac-Spinor-Index α werden definiert:

$$\begin{aligned} q^{\alpha,a}(y) &= \frac{1}{8} \sum_\xi \gamma^\xi_{\alpha,a} \chi_\xi(y) \qquad (2.4) \\ \bar{q}^{a,\alpha}(y) &= \frac{1}{8} \sum_\xi \bar{\chi}_\xi(y) \, {\gamma^\xi}^\dagger_{a,\alpha}, \\ \text{mit:} \qquad & \gamma^\xi = \gamma_1^{\xi_1} \, \gamma_2^{\xi_2} \, \gamma_3^{\xi_3} \, \gamma_4^{\xi_4} \end{aligned}$$

Schließlich führt man noch Symbole $\Gamma^\mu_{\xi',\xi}$, $\tilde{\Gamma}^\mu_{\xi',\xi}$ ein:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\xi',\xi} &= \frac{1}{4} \mathrm{tr} \, ({\gamma^{\xi'}}^\dagger \, \gamma_\mu \, \gamma^\xi) \\ \tilde{\Gamma}^\mu_{\xi',\xi} &= \frac{1}{4} \mathrm{tr} \, ({\gamma^{\xi'}}^\dagger \, \gamma_5 \, \gamma^\xi \, \gamma_5 \, \gamma_\mu) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\xi',\xi} &= \eta_\mu(\xi) \, \bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}} \qquad (2.5) \\ \tilde{\Gamma}^\mu_{\xi',\xi} &= (-1)^{\xi_\mu} \, \eta_\mu(\xi) \, \bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}} \\ &= (-1)^{\xi_\mu} \, \Gamma^\mu_{\xi',\xi} \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Beweise zu diesen und den folgenden Gleichungen finden sich im Anhang, Abschnitt A.1.

$\Gamma^{\mu}_{\xi',\xi}$, $\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\xi',\xi}$ erlauben eine einfache Beschreibung des Zusammenhangs zwischen dem Feld $\chi_\xi(y)$ auf dem feinen Gitter und dem Quarkfeld $q^{\alpha a}(y)$:

$$\sum_{\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y)\, \Gamma^{\mu}_{\xi',\xi}\, \chi_\xi(y) \quad = \quad 16\, \bar{q}(y)\, (\gamma_\mu \,\otimes\, \mathbb{1})\, q(y) \tag{2.7}$$

$$\sum_{\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y)\, \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\xi',\xi}\, \chi_\xi(y) \quad = \quad 16\, \bar{q}(y)\, (\gamma_5 \,\otimes\, t_{\mu 5})\, q(y) \tag{2.8}$$

Dabei ist t_μ die transponierte Matrix γ_μ^{T}, also $t_{\mu 5} = t_\mu t_5 = \gamma_\mu^{\mathsf{T}} \gamma_5^{\mathsf{T}} = (\gamma_{5\mu})^{\mathsf{T}}$. Die Notation $(A \otimes B)$ steht für das direkte Produkt, wobei A auf die Dirac-Spinor-Indices und B auf die Flavour-Indices wirkt:

$$\bar{q}(y)\, (A \,\otimes\, B)\, q(y) \;=\; \bar{q}^{a\alpha}(y)\, A^{\alpha\beta}\, B^{ab}\, q^{\beta b}(y)$$

Als letzten Teil des Formalismus benötigen wir Differentialoperatoren, die auf den Hyperkuben leben und damit auf die neuen Quark-Felder wirken:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\mu\, f(y) \quad &= \quad \frac{1}{4a}\, (f(y+2\,\hat{\mu}) \;-\; f(y-2\,\hat{\mu})) \\ \Delta_\mu\, f(y) \quad &= \quad \frac{1}{4a^2}\, (f(y+2\,\hat{\mu}) \;-\; 2\, f(y) \;+\; f(y-2\,\hat{\mu})) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Kogut-Susskind-Wirkung in den Quark-Feldern:

$$S_{KS} = \sum_{y,\mu} (2a)^4\, \bar{q}(y)\, [(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, m \;\;+\;\; (\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})\, \mathrm{D}_\mu \;+\; a\, (\gamma_5 \otimes t_{\mu 5})\, \Delta_\mu] q(y) \tag{2.9}$$

Die Rechnung findet sich wieder im Anhang, Abschnitt A.1.

Sie beschreibt die Dynamik der Quarkfelder im Kontinuum (Gl. 1.3) mit zwei Problemen:

- Wir haben, wie bereits angemerkt, vier massenentartete Quarkflavours. Es gibt Näherungsverfahren, mit denen zwei entartete Flavours simuliert werden können, was der physikalischen Situation mit u,d-Quarks entspricht.
- Es gibt einen expliziten Term in $O(a)$, der verschiedene Flavours mischt und auf diese Weise die Flavoursymmetrie bricht.

2.2.2 Chirale Symmetrie

Wir betrachten jetzt die Realisierung der oben diskutierten Rest-Symmetrie $(U_o(1) \otimes U_e(1))$ in diesem Formalismus. Dazu führen wir zunächst Projektoren P_e, P_o ein, die auf die geraden bzw. ungeraden Gitterpunkte x des feinen Gitters projizieren:

$$\begin{aligned} P_e \quad &= \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \;+\; \gamma_5 \otimes t_5) \\ P_o \quad &= \quad \frac{1}{2}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \;-\; \gamma_5 \otimes t_5) \end{aligned}$$

Zur Überprüfung berechne man 2 tr $(\gamma^{\xi\,\dagger}\, P_e\, q(y))$.

Damit definieren wir eine Transformation, $U_o,\, U_e \in U(1)$ wie in 2.1.3:

$$\begin{aligned}
q(y) \quad &\to \quad q'(y) \;=\; (U_o\, P_o \,+\, U_e\, P_e)\, q(y) \\
&= \quad \frac{1}{2}\, U_o\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \,-\, \gamma_5 \otimes t_5)\, q(y) \,+\, U_e\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \,+\, \gamma_5 \otimes t_5)\, q(y) \\
&= \quad \frac{1}{2}\, (U_e \,+\, U_o)\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, q(y) \,+\, (U_e \,-\, U_o)\, (\gamma_5 \otimes t_5)\, q(y) \\
\bar{q}(y) \quad &\to \quad \bar{q}'(y) \;=\; \bar{q}(y)\, (P_o\, U_e^\dagger \,+\, P_e\, U_o^\dagger) \\
&= \quad \frac{1}{2}\bar{q}(y)\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \,-\, \gamma_5 \otimes t_5)\, U_e^\dagger \,+\, \bar{q}(y)\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \,+\, \gamma_5 \otimes t_5)\, U_o^\dagger) \\
&= \quad \frac{1}{2}\bar{q}(y)\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, (U_e^\dagger \,+\, U_o^\dagger) \,+\, \bar{q}(y)\, (\gamma_5 \otimes t_5)\, (U_o^\dagger \,-\, U_e^\dagger)
\end{aligned}$$

Es gibt zwei Fälle, unter der die Wirkung invariant ist gegen diese Transformation:

- Wähle $U_o = U_e$. Dann ist offensichtlich $q' = U_o q$, $\bar{q}' = \bar{q} U_o^\dagger = \bar{q} U_o^{-1}$. Damit bleibt nur ein konstanter Vorfaktor übrig.

  Diese Wahl entspricht der $U(1)$, die die Baryonzahl-Erhaltung liefert.

- Mit der Wahl $U_o = -U_e$ ergibt sich $q' = -U_o\, (\gamma_5 \otimes t_5)\, q(y)$, $\bar{q}' = \bar{q}\, (\gamma_5 \otimes t_5)\, U_o^\dagger$. Auch unter dieser Transformation ist die Wirkung invariant.

  Diese Wahl liegt in der $SU_A(4)$.

Die letzte Beobachtung ist im folgenden sehr wichtig: wir sehen, daß ein Teil der $SU_A(4)$-Symmetrie der Kontinuumstheorie auf dem Gitter erhalten bleibt. Da auch die spontane Brechung nicht aufgehoben ist, muß es ein Goldstone-Teilchen geben. Wir werden es in in Abschnitt 4.1 benutzen, um die Verletzung der Flavoursymmetrie zu messen.

2.2.3 Wirkung mit Eichfeldern

In der bisherigen Rechnung sind die Eichfelder U_μ vernachlässigt, das heißt, zu $\mathbb{1}$ angenommen worden. Den Flavourgehalt der Wirkung mit nicht-trivialen Eichfeldern bestimmen wir nur in Tree-Level und in der Entwicklung nach dem Gitterabstand [9]. Die zugrundeliegende Wirkung ist:

$$\begin{aligned}
S_{KS} \quad = \quad & \sum_{x,\mu} a^4\, \eta_\mu(x)\, \bar{\chi}(x)\, \frac{1}{2a}[U_\mu(x)\, \chi(x+\hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x-\mu)\, \chi(x-\hat{\mu})] \\
& + \sum_x a^4\, m\, \bar{\chi}(x)\chi(x)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dies entspricht Gl. 2.3. Die Linkvariablen zwischen den $\bar{\chi}, \chi$-Feldern machen den Ausdruck eichinvariant.

Produkte von Eichfeldern $U_\mu(x)$ entlang eines Pfades bezeichnen wir durch die Punkte, die den Pfad spezifizieren. Innerhalb von Hyperkuben ist dabei die in der folgenden Zeile angegebene Reihenfolge vorausgesetzt.

$$
\begin{aligned}
U(y; y+\xi) &= U_1(y)^{\xi_1}\, U_2(y+\xi_1\,\hat{1})^{\xi_2} \\
&\quad \ldots\, U_4(y\,+\,\xi_1\,\hat{1}+\,\xi_2\,\hat{2}+\,\xi_3\,\hat{3})^{\xi_4} \\
U(y+\xi; y+\xi+\hat{\mu}) &= U_\mu(y+\xi)
\end{aligned}
$$

Die Quarkfelder $q^{\alpha a}(y)$ werden wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
q^{\alpha a}(y) &= \frac{1}{8}\sum_\xi \gamma^{\xi\,\alpha a}\, U(y; y+\xi)\, \chi_\xi(y) \\
\bar{q}^{a\alpha}(y) &= \frac{1}{8}\sum_\xi \bar{\chi}_\xi(y)\, U^\dagger(y; y+\xi)\, (\gamma^{\xi\, a\alpha})^\dagger
\end{aligned}
$$

Umgekehrt gilt:

$$
\begin{aligned}
\chi_\xi(y) &= 2\, U^\dagger(y; y+\xi)\ \operatorname{tr}\,(\gamma^{\xi\,\dagger}\, q(y)) \\
\bar{\chi}_\xi(y) &= 2\ \operatorname{tr}\,(\bar{q}(y)\,\gamma^\xi)\, U(y; y+\xi)
\end{aligned}
$$

Nach diesen Vorbemerkungen geben wir die wesentlichen Schritte und Zwischenresultate der Rechung an. Der Massenterm wird dabei vernachlässigt, da er sich nicht anders als im Fall trivialer Eichfelder verhält.

Zuerst werden die beiden in μ-Richtung verschobenen Feldeinträge in y, ξ-Notation geschrieben:

$$
\begin{aligned}
U_\mu(x)\,\chi(x+\hat{\mu}) &= \sum_{\xi'} \bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}}[\ \delta_{\xi_\mu,0}\, U(y+\xi'; y+2\,\hat{\mu}+\xi)\,\chi_\xi(y+2\,\hat{\mu}) \\
&\qquad + \delta_{\xi_\mu,1}\, U(y+\xi'; y+\xi)\,\chi_\xi(y)] \\
U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\,\chi(x-\hat{\mu}) &= \sum_{\xi'} \bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}}[\ \delta_{\xi_\mu,0}\, U(y+\xi'; y+\xi)\,\chi_\xi(y) \\
&\qquad + \delta_{\xi_\mu,1}\, U(y+\xi'; y-2\,\hat{\mu}+\xi)\,\chi_\xi(y-2\,\hat{\mu})]
\end{aligned}
$$

Damit wird aus dem kinetischen Teil der Wirkung:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2a}\sum_{x,\mu} a^4\, \eta_\mu(x)\, \bar{\chi}(x)\, [U_\mu(x)\,\chi(x+\hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x-\mu)\,\chi(x-\hat{\mu})] \\
= \ & \frac{1}{2a}\sum_{y,\xi,\xi',\mu} a^4\, \bar{\chi}_{\xi'}(y)\, \eta_\mu(\xi)\, \bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}} \\
& \qquad [\ \ \delta_{\xi_\mu,0}(U(y+\xi'; y+2\,\hat{\mu}+\xi)\ \chi_\xi(y+2\,\hat{\mu})\ -\ U(y+\xi'; y+\xi)\ \chi_\xi(y)) \\
& \qquad +\ \delta_{\xi_\mu,1}(U(y+\xi'; y+\xi)\ \chi_\xi(y)\ -\ U(y+\xi'; y-2\,\hat{\mu}+\xi)\ \chi_\xi(y-2\,\hat{\mu}))] \\
= \ & \frac{2}{a}\sum_{y,\xi,\xi',\mu} a^4\ \operatorname{tr}\,(\bar{q}(y)\gamma^{\xi'})\Gamma^\mu_{\xi',\xi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\ \delta_{\xi_\mu,0}\ (U(y;y+\xi')\,U(y+\xi';y+2\,\hat\mu+\xi)\,U(y+2\,\hat\mu+\xi;y+2\,\hat\mu))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\mathrm{tr}\ (\gamma_\xi^\dagger\, q(y+2\,\hat\mu))\\
&+\delta_{\xi_\mu,1}\ (U(y;y+\xi')\,U(y+\xi';y+\xi)\,U(y+\xi;y))\ \mathrm{tr}\ (\gamma_\xi^\dagger\, q(y))\\
&-\delta_{\xi_\mu,0}\ (U(y;y+\xi')\,U(y+\xi';y+\xi)\,U(y+\xi;y))\ \mathrm{tr}\ (\gamma_\xi^\dagger\, q(y))\\
&-\delta_{\xi_\mu,1}\ (U(y;y+\xi')\,U(y+\xi';y-2\,\hat\mu+\xi)\,U(y-2\,\hat\mu+\xi;y-2\,\hat\mu))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\mathrm{tr}\ (\gamma_\xi^\dagger\, q(y-2\,\hat\mu))]
\end{aligned}
$$

Die vier Terme im letzten Ausdruck kommen zustande, da die beiden Terme $\bar\chi(x)$ $\chi\ (x+\hat\mu)$, $\bar\chi(x)\chi(x-\hat\mu)$ je nach Lage von x innerhalb des Hyperkuben über dessen Rand hinausgreifen. Die drei Produkte von Linkmatrizen folgen dem Pfad von y nach $x=y+\xi'$, der Verschiebung von $x=y+\xi'$ nach $x\pm\hat\mu=y*+\xi$ und dem Pfad $y*+\xi$ nach $y*$, mit $y*=y-2\,\hat\mu,\ y$ bzw. $y+2\,\hat\mu$.

Um diese Ausdrücke auszuwerten, entwickeln wir nach der Kopplungsstärke g (Tree-Level):

$$
\begin{aligned}
U_\mu(x) &= \exp(ig\int_x^{x+\hat\mu} A_\mu(x')\,dx'_\mu)\\
&= \exp(iga\,A_\mu\,(x+\frac{1}{2}\hat\mu)\ +\ iga^3\frac{1}{24}\partial_\mu^2\,A_\mu(x+\frac{1}{2}\hat\mu)\ +O(ga^4)) \qquad (2.11)\\
&= 1\ +\ iga\left(A_\mu(x)+\frac{1}{2}a\partial_\mu A_\mu(x)+\frac{1}{6}a^2\partial_\mu^2 A_\mu(x)+O(a^3)\right)+O(a^2g^2)
\end{aligned}
$$

Damit kommt man zu folgendem Ergebnis für den kinetischen Teil der Wirkung:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{a}\sum_{y,\xi',\xi,\mu} a^4\ \mathrm{tr}\ (\bar q(y)\gamma^{\xi'})\ \{\ &\Gamma^\mu_{\xi',\xi}\,a\,[2\ (\partial_\mu\ +\ ig\,A_\mu)\ ]\\
&+\tilde\Gamma^\mu_{\xi',\xi}\,a^2\,[2\ (\partial_\mu^2\ +\ 2ig\,A_\mu\,\partial_\mu\ +\ (\partial_\mu\,A_\mu))\ ]\\
&-\Gamma^\mu_{\xi',\xi}\,a^2\,[2ig\sum_k \xi_k\ F_{\mu,k}]\}\qquad \mathrm{tr}\ (\gamma^{\xi\,\dagger}\ q(y))\\
+\ O(a^2,g)&
\end{aligned}
$$

Dabei ist der Feldstärketensor $F_{\mu,\nu}$ nach Gl. 1.2 definiert. In Tree-Level wird aus dem Gitteroperator D_μ die bekannte kovariante Ableitung:

$$\mathrm{D}_\mu \to \partial_\mu\ +\ ig\,A_\mu,\ \text{für}\ a\ \to\ 0$$

Außerdem benötigen wir einen Tensor $T_{[\mu,\nu]}$:

$$T_{[\mu,\nu]}=(\gamma_\mu-\gamma_\nu)\otimes\mathbb{1}\ +\ \frac{1}{2}\gamma_5^\dagger\,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\otimes(t_\mu+t_\nu)^\dagger t_5^\dagger$$

Damit kann man ein wichtiges Zwischenresultat zeigen, nämlich:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mu,\nu,\xi',\xi} a^4\ 4iga\ \ \mathrm{tr}\ (\bar q(y)\gamma^{\xi'})\ \xi_\nu\ \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\ F_{\mu,\nu}\ \mathrm{tr}\ (\gamma^{\xi\,\dagger}q(y))\\
=\ &\sum_{\mu,\nu}(2a)^4\ \frac{1}{4}iga\ \bar q(y)^{a\,\alpha}\ T_{[\mu,\nu]_{\alpha\,a\,b\,\beta}}\ F_{\mu,\nu}(y)\ q(y)^{\beta\,b}
\end{aligned}
$$

Aus diesen Bausteinen erhält man die Kogut-Susskind-Wirkung mit Eichfeldern, in Tree-Level und nach der Gitterkonstante a entwickelt:

$$\begin{aligned} S \;=\; \sum_{y,\mu} (2a)^4\, \bar{q}(y) \,\{ \;\; & (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, m \;+\; (\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})\, \mathrm{D}_\mu \;+ \\ & a\, (\gamma_5 \otimes t_{\mu 5})\, \mathrm{D}_\mu^2 \;-\; \frac{1}{4} i g a \sum_\nu T_{[\mu,\nu]}\, F_{\mu,\nu}(y) \} \, q(y) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Der Term in a, der die Flavoursymmetrie explizit verletzt, ist unverändert gegenüber der Wirkung ohne Eichfeld (Gl. 2.9). Es kommt eine weitere Korrektur in $O(ag)$ dazu.

Kapitel 3

Verbesserte Wirkungen

Nach der Untersuchung der Kogut-Susskind-Wirkung im letzten Kapitel betrachten wir jetzt verschiedene verbesserte Wirkungen.

Solche Wirkungen nutzen die Freiheit aus, daß die Gitterwirkung nur im Limes verschwindender Gitterkonstante die Kontinuumwirkung reproduzieren muß. Darüberhinaus haben wir die Freiheit, die Wirkung so zu wählen, daß Gitterartefakte in niedrigen Ordnungen von a klein werden. Auf diese Weise lassen sich auch auf groben Gittern bessere Diskretisierungen erzielen.

Das Ziel ist es, zu untersuchen, wie sich verschiedene Verbesserungen in Bezug auf die Flavorsymmetrie auswirken. Dazu muß die Wirkung von der Formulierung in χ-Feldern zurückübertragen werden in die q-Felder auf dem groben y-Gitter, wo flavoursymmetriebrechende und -erhaltende Terme explizit auftauchen.

3.1 Verbesserungen zur Eichwirkung

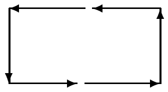
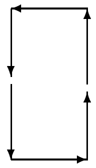
In der numerischen Auswertung werden auch Auswirkungen verschiedener Verbesserungen der Eichwirkung auf die Flavoursymmetrie untersucht. Daher stellen wir hier die entsprechenden Ideen kurz vor, bevor wir ab dem folgenden Abschnitt Fermionwirkungen behandeln.

Die Standard-Eichwirkung Gl. 1.6 liefert für kleine a die Kontinuumwirkung mit Fehlern in $O(a^2)$.

Durch Addition von Korrekturtermen zur Wirkung können die Fehler weiter verringert werden. Sie müssen die störenden Terme in a^2 eliminieren, ohne in niedrigerer Ordnung die korrekten Terme zu beeinflussen. Da auch die Korrekturterme eichinvariant sein müssen, bilden wir sie aus den nächstgrößeren geschlossenen Loops.

Die folgende Wirkung liefert bei Entwicklung nach a die Kontinuumwirkung mit Fehlern ab $O(a^4)$:

$$S_{TL} = \beta \sum_{x,\mu<\nu} \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \; \Box_{\mu,\nu} (x) \right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2N}\ \mathrm{Re\ Tr}\ \left(\right.\right.$$

$$_{\mu,\nu}(x) \; +$$

$$\left.\left._{\mu,\nu}(x)\right)\right) \qquad (3.1)$$

(3.2)

Wirkungen, die in niedrigster Ordnung der Kopplung die Fehler in der Gitterkonstanten möglichst minimieren, heißen Tree-level-verbessert. Der Ansatz folgt dem Symanzik-Improvement-Scheme [21].

Nach Lepage und Mackenzie [11] ist die Beziehung zwischen Kontinuum- und Gitteroperatoren zusätzlich kompliziert durch sogenannte Tadpole-Diagramme. Die Gitter-Operatoren sind so konstruiert, daß sie in niedrigster Ordnung g für $a \to 0$ den Kontinuumoperator ergeben. Für die Linkvariable aus Gl. 1.4 bedeutet das:

$$U_\mu(x) = \exp\left(ig\int_x^{x+\hat{\mu}} dy_\mu\, A_\mu(y)\right) \to 1 \,+\, iga\, A_\mu(x)$$

Der folgende Term der Entwicklung sollte durch einen Vorfaktor a^2g^2 unterdrückt sein, aber bei Untersuchung des Vakuumerwartungswertes dieses Ausdrucks findet man, daß A_μ^2 eine quadratische Divergenz liefert und der Beitrag effektiv mit g^2 eingeht. Eines dieser Gitterartefakte ist der sogenannte Tadpole-Loop.

Das Problem wird umgangen, indem die Eichfelder reskaliert werden: $U_\mu \to (1/u_0)\, U_\mu$. u_0 ist der Erwartungswert des Eichfeldes in fester Eichung und wird bestimmt aus der vierten Wurzel des Plaquettenerwartungswertes, in den die U_μ viermal eingehen.

Durch Weiterführung des Symanzik-Improvement-Schemes bis zur Ordnung g^2 ergibt sich eine 1-loop-verbesserte Wirkung [22]. Berücksichtigung der Tadpole-Verbesserung liefert die 1-Loop-tadpole-verbesserte Wirkung [1], die in Abschnitt 5.2.2 untersucht wird.

3.2 Naik-Wirkung und verbesserte Felder

Es folgt jetzt die Untersuchung der verbesserten Fermionwirkungen. Die Naik-Wirkung [19] beinhaltet neben der Kopplung zum nächsten Nachbarn auch eine zum drittnächsten. Sie liefert finite Differenzenquotienten, die die Kontinuumsableitung mit Fehlern in $O(a^4)$ approximieren. Im Nebeneffekt verbessert sie die Dispersions-Relation $E(p)$ auf dem Gitter.

Das Ziel hier ist es, die Naik-Wirkung auf ihren Flavour-Gehalt zu untersuchen und letztlich zu sehen, inwieweit sie die Flavoursymmetrie beeinflußt und eventuell verbessert.

Naik-Fermionen sind durch die folgende Wirkung beschrieben:

$$S_N \;=\; \sum_{x,\mu} a^4\bar{\chi}(x)\;\eta_\mu(x)\frac{1}{2a}\left[\frac{9}{8}\left(\chi(x+\hat{\mu}) - \chi(x-\hat{\mu})\right)\right.$$

$$- \frac{1}{24} \left(\chi(x+3\,\hat\mu) - \chi(x-3\,\hat\mu)\right)\Big] \;+\; \sum_x a^4\, m\, \bar\chi(x)\chi(x) \quad (3.3)$$

Die Rechnung verläuft analog zur Standard-Kogut-Susskind-Wirkung. Zunächst werden die Felder in y, ξ-Koordinaten umgeschrieben.

Nach dem Einsetzen in die Wirkung (wie üblich nur der kinetische Teil) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \sum_{y,\mu,\xi',\xi} a^4\, \eta_\mu(\xi)\bar\chi_{\xi'}(y)\, \bar\delta_{\xi',\xi\oplus\hat\mu}\, \frac{1}{2a}\, \frac{1}{24} \\
& \quad [\ \delta_{\xi_\mu,0}\, (-\,\chi_\xi(y+2\,\hat\mu) \;+\; 27\,\chi_\xi(y+\hat\mu) \;-\; 27\,\chi_\xi(y) \;+\; \chi_\xi(y-\hat\mu)) \\
& \quad +\delta_{\xi_\mu,1}\, (-\,\chi_\xi(y+\hat\mu) \;+\; 27\,\chi_\xi(y) \;-\; 27\,\chi_\xi(y-\hat\mu) \;+\; \chi_\xi(y-2\,\hat\mu))] \\
= & \sum_{y,\mu,\xi',\xi} a^4\, \bar\chi_{\xi'}(y)\, \bar\delta_{\xi',\xi\oplus\hat\mu}\, \frac{1}{2a}\, \frac{1}{48} \\
& \quad \{\ \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, [-\chi_\xi(y+2\,\hat\mu) \;+26\,\chi_\xi(y+\hat\mu) \;-26\,\chi_\xi(y-\hat\mu) \;+\chi_\xi(y-2\,\hat\mu)] \\
& \quad +\tilde\Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, [-\chi_\xi(y+2\,\hat\mu) \;+28\,\chi_\xi(y+\hat\mu) \;-54\,\chi_\xi(y) \;+28\,\chi_\xi(y-\hat\mu) \;-\chi_\xi(y-2\,\hat\mu)]\ \}
\end{aligned}$$

Die Terme lassen sich mithilfe der Differentialoperatoren D_μ, Δ_μ zusammenfassen. Man erhält als Ergebnis, zusammen mit dem Massenterm:

$$\begin{aligned}
S_N \;=\; & \sum_{y,\mu} a^4\, \bar q(y)\, \{\ (\gamma_\mu\otimes \mathbb{1})\, [\mathrm{D}_\mu - \frac{a^2}{6}\mathrm{D}_\mu\,\Delta_\mu] \;+\; (\gamma_5\otimes t_{\mu 5})\, [a\,\Delta_\mu - \frac{a^3}{6}\Delta_\mu^2]\ \}\, q(y) \\
& + \sum_y a^4\, m\, \bar q(y)\, (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})\, q(y)
\end{aligned}$$

Von Naik-Fermionen ist keine Verbesserung der Flavour-Symmetrie zu erwarten, da die flavourbrechenden Terme in führender Ordnung unverändert sind.

Eine andere Verbesserung besteht darin, die Felder $\chi(x)$ durch verbesserte Felder $\chi^I(x)$ zu ersetzen. Diese werden so gewählt, daß die Wirkung, in den Quarkfeldern $q^I(y)$ geschrieben, keine Korrekturen in $O(a)$ mehr hat.

Um die Rechnung zu motivieren, betrachten wir zunächst die Wirkung 2.9 im Impulsraum. Die Herleitung findet sich im Anhang, Abschnitt A.1:

$$\begin{aligned}
S_{KS} \;=\; & \frac{(2\pi)^4}{\Omega} \sum_{p,\mu} \tilde{\bar q}(p)\, \{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})\, (\frac{i}{2a}\, \sin(2a\,p_\mu)) \;-\; a\,(\gamma_5\otimes t_{\mu 5})\, (\frac{1}{a}\, \sin(a\,p_\mu))^2\}\tilde q(p) \\
& + \frac{(2\pi)^4}{\Omega} \sum_p \tilde{\bar q}(p)\, m\, (\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})\, \tilde q(p) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Hier ist der $O(a)$-Term deutlich herausgestellt.

Diese Beiträge können wir vermeiden, indem wir die Fermion-Felder direkt im Impulsraum definieren. Die Rechnung wurde durchgeführt von Golterman und Smit [5]. Dazu werden die Impulse k, $k_\mu \in (0, 2\pi/a)$, zerlegt in $k = p+\pi_\xi$, mit $p_\mu \in (0, \pi/a)$

und $\pi_\xi = (\pi/a)\,\xi_\mu$. $\xi' \cdot \xi$ bezeichnet das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(p) &= \frac{1}{8} \sum_{\xi',\xi} (-1)^{\xi'\cdot\xi}\, \gamma^{\xi'}\, \tilde{\chi}(p+\pi_\xi) \\
\tilde{\bar{\psi}}(p) &= \frac{1}{8} \sum_{\xi',\xi} (-1)^{\xi'\cdot\xi}\, \gamma^{\xi'}\, \tilde{\bar{\chi}}(p+\pi_\xi)
\end{aligned}$$

Mit diesen Feldern ist die Wirkung:

$$\begin{aligned}
S_{KS} &= \frac{2\,\pi^4}{\Omega} \sum_{p,\mu} \tilde{\bar{\psi}}(p)\, (\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})\, (\frac{i}{a}\, \sin(a\, p_\mu))\, \tilde{\psi}(y) \\
&\quad + \frac{2\,\pi^4}{\Omega} \sum_{p} \tilde{\bar{\psi}}(p)\, m\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, \tilde{\psi}(y) \;+\; O(a^2)
\end{aligned}$$

Diese Wirkung ist exakt bis in $O(a^2)$, aber der Preis dafür liegt in den Feldern $\psi(y)$, $\bar{\psi}(y)$: wie man durch Fourier-Rücktransformation einsieht, sind sie nicht-lokale Summen der χ-Felder.

Um sowohl Korrektheit bis $O(a^2)$ als auch lokale Quarkfelder $q(y)$ beizubehalten, verbessern wir die Fermionfelder $\chi(x)$ nach Luo [13]:

$$\begin{aligned}
\chi_\xi^I(y) &= (1 - a \sum_\mu A_\mu\, \mathrm{D}_\mu)\, \chi_\xi(y) \\
\bar{\chi}_\xi^I(y) &= \bar{\chi}_\xi(y)\, (1 - a \sum_\mu A_\mu\, \overleftarrow{\mathrm{D}}_\mu)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den kinetischen Term:

$$\sum_{y,\xi',\xi,\mu} a^4\, [\bar{\chi}_{\xi'}^I(y) + a \sum_\nu \delta_{\xi'_\nu,1} \mathrm{D}_\nu \bar{\chi}_{\xi'}^I(y)]\, [\Gamma^\mu_{\xi',\xi} \mathrm{D}_\mu + a\, \tilde{\Gamma}^\mu_{\xi',\xi}\, \Delta_\mu]\, [\chi_\xi^I(y) + a \sum_\nu \delta_{\xi_\nu,1} \mathrm{D}_\nu \chi_\xi^I(y)]$$

Mithilfe der üblichen Unformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sum_{y,\xi',\xi,\mu} a^4\, \{\, \bar{\chi}_{\xi'}^I(y)\, [\, \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, \mathrm{D}_\mu \;-\; a^2\, \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, \Delta_\mu \mathrm{D}_\mu \\
+ a^2\, \tilde{\Gamma}^\mu_{\xi',\xi} (\sum_{\nu',\nu} \delta_{\xi'_\nu,1}\, \delta_{\xi_{\nu'},1}\, (-\mathrm{D}_\nu\, \mathrm{D}_\mu\, \mathrm{D}_{\nu'}))\,]\, \chi_\xi^I(y) \\
+ O(a^3)]\, \}
\end{aligned}$$

Die Umformung des Massentermes ist hier nicht trivial, es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\sum_{y,\xi',\xi,\mu} a^4\, [\bar{\chi}_{\xi'}^I(y) \;+\; a \sum_\nu \delta_{\xi'_\nu,1}\, \mathrm{D}_\nu\, \bar{\chi}_{\xi'}^I(y)]\, m\, [\chi_\xi^I(y) \;+\; a \sum_\nu \delta_{\xi_\nu,1}\, \mathrm{D}_\nu\, \chi_\xi^I(y)] \\
= &\sum_{y,\xi} a^4\, m\, \{\, \bar{\chi}_\xi^I(y)\, \chi_\xi^I(y) \;+\; a^2\, \bar{\chi}_\xi^I(y) \tilde{\Gamma}^\mu_{\xi',\xi} (\sum_{\nu',\nu} \delta_{\xi'_\nu,1}\, \delta_{\xi_{\nu'},1}\, (-\mathrm{D}_\nu\, \mathrm{D}_{\nu'}))\,]\, \chi_\xi^I(y) \}
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich für die Kogut-Susskind-Wirkung mit verbesserten Feldern:

$$\begin{aligned} S_{KS} &= \sum_{y,\mu} (2a)^4\, \bar{q}(y)\, [\, (\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})\, \mathrm{D}_\mu \;+\; (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) m\,]\, q(y) \\ &\quad - \sum_{y,\xi'\xi,\mu} a^4\, \bar{\chi}^I_{\xi'}(y)\, a^2 \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, [\, \Delta_\mu \mathrm{D}_\mu \;+\; (\sum_{\nu',\nu} \delta_{\xi'_\nu,1}\, \delta_{\xi_{\nu'},1}\, \mathrm{D}_\nu\, (\mathrm{D}_\mu + m)\, \mathrm{D}_{\nu'})\,]\, \chi^I_\xi(y) \\ &\quad + a^4\, O(a^3) \end{aligned}$$

Die gemischte Notation soll betonen, daß wir in $O(a^0)$ dasselbe Ergebnis erhalten wie für die Standard-Felder. Die Ordnung a fällt heraus, dafür treten Korrekturterme in $O(a^2)$ auf, die sich nicht mehr ohne weiteres in den Quarkfeldern ausdrücken lassen.

Schließlich kann man beide Verbesserungen kombinieren und die Naik-Wirkung mit Luo-verbesserten Feldern betrachten.

Eine Rechnung analog zu den beiden vorhergehenden liefert folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} S_{N,I} &= \sum_{y,\mu} (2a)^4\, \bar{q}(y)\, [\, (\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})\, \mathrm{D}_\mu \;+\; (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) m\,]\, q(y) \\ &\quad - \sum_{y,\xi'\xi,\mu} a^4\, \bar{\chi}^I_{\xi'}(y)\, a^2\, \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, [\, \frac{7}{6}\, \Delta_\mu \mathrm{D}_\mu \;+\; (\sum_{\nu',\nu} \delta_{\xi'_\nu,1}\, \delta_{\xi_{\nu'},1}\, \mathrm{D}_\nu\, (\mathrm{D}_\mu + m)\, \mathrm{D}_{\nu'})\,]\, \chi^I_\xi(y) \\ &\quad + a^4\, O(a^3) \end{aligned}$$

Die Terme in $O(a^2)$ können vereinfacht werden durch Verbesserung der χ- Felder in höheren Ordnungen.

3.3 Fat-Links und P4-Wirkung

Eine andere Modifikation der Kogut-Susskind-Wirkung ist die Verwendung von sogenannten Fat-Links $U_{\mathrm{fat}\,\mu}$ anstelle der Eichfelder U_μ in der Wirkung 2.10 [15], mit $U_{\mathrm{fat}\,\mu}$:

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{fat}\,\mu}(x) &= \frac{1}{1+6\omega}\, \Big(U_\mu(x) \;+\; \omega \sum_{\nu\neq\mu} U_\nu(x)\, U_\mu(x+\hat\nu)\, U^\dagger_\nu(x+\hat\mu) \\ &\qquad + U^\dagger_\nu(x-\hat\nu)\, U_\mu(x-\hat\nu)\, U_\nu(x+\hat\mu-\hat\nu) \Big) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Das Fat-Weight ω gibt das relative Gewicht der sechs 3-Link-Terme an, die Staples genannt werden.

Bei Messung auf statischen Konfigurationen kann man das Eichfeld nach der Vorschrift 3.5 transformieren, statt in jedem Operator die Fat-Links neu zu berechnen.

Diese Fat-Links haben zwei Eigenschaften:

- Wie man durch die übliche Entwicklung nach a und g zeigen kann, gilt für Fat-Links:

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{fat}\,\mu} \;=\; & \frac{1}{1+6\,\omega}\Big[(1+6\,\omega)\Big(1\;+\;iag\,(A_\mu(x)+\frac{1}{2}a\partial_\mu A_\mu(x)+\frac{1}{6}a^2\partial_\mu^2 A_\mu(x))\Big) \\
& +\omega\sum_{\nu\neq\mu} ia^3 g\,\frac{1}{2}\partial_\nu^2\,A_\mu(x)\;+O(a^4 g)\Big]\;+\;O(a^2 g^2)
\end{aligned}
$$

  Im Vergleich zu Gl. 2.11 erscheint in der betrachteten Ordnung der Reihe ein zusätzlicher Term, der Ableitungen $\partial_\nu^2 A_\mu(x)$ senkrecht zur Link-Richtung darstellt.

  Bis zu der in 2.12 untersuchten Ordnung unterscheiden sich die Fat-Links nicht von den gewöhnlichen Link-Variablen, die dort gewonnenen Aussagen gelten auch hier.

- Sie gehen durch lokale Mittelung aus den benachbarten Links hervor. Dies entspricht dem Smearing in der reinen Eichtheorie. Die Konfiguration der Fat-Links ist daher glatter als die Ausgangskonfiguration.

Eine grobe Vorstellung vom Einfluß der Fat-Links auf die Flavour-Symmetrie-Brechung vermittelt folgende Überlegung:

Die Flavoursymmetriebrechung wird verursacht von Gluonen mit hohem Impuls, die das Fermion von einer Ecke der Brillouin-Zone in eine andere überführen und damit den Flavourgehalt verändern können [12].

Auf einer durch Mittelung geglätteten Konfiguration sind entsprechend hochenergetische Gluonen unterdrückt. Daher sollte die Verletzung der Flavoursymetrie verringert werden.

Die P4-Wirkung wird ebenfalls numerisch, aber nicht analytisch untersucht, und daher hier kurz vorgestellt.

Sie verbessert die Rotationssymmetrie bis zur Ordnung $O(p^4)$ und enthält 1-Link Terme und 3-Link Terme der Form U_{Hook} :

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{Hook}\;\mu,\nu} \;&=\; U_\mu(x)\,U_\mu(x+\hat\mu)\,U_\nu(x+2\hat\mu)\;+\;U_\nu(x)\,U_\mu(x+\hat\nu)\,U_\mu(x+\hat\mu+\hat\nu) \\
S_{P4} \;&=\; \sum_{x,\mu} a^4\bar\chi(x)\;\eta_\mu(x)\frac{1}{2a}\Big[\frac{3}{4}\,(U_\mu(x)\,\chi(x+\hat\mu)-U_\mu^\dagger(x-\hat\mu)\chi(x-\hat\mu)) \\
&+\frac{1}{24}\sum_{\nu\neq\mu}(U_{\mathrm{Hook}\;\mu,\nu}(x)\,\chi(x+2\,\hat\mu+\hat\nu)\;-\;(U_{\mathrm{Hook}\;\mu,-\nu}(x)\,\chi(x+2\,\hat\mu-\hat\nu) \\
&\qquad +(U_{\mathrm{Hook}\;-\mu,\nu}(x)\,\chi(x-2\,\hat\mu+\hat\nu)\;-\;(U_{\mathrm{Hook}\;-\mu,-\nu}(x)\,\chi(x-2\,\hat\mu-\hat\nu)\Big] \\
&+\sum_x a^4\,m\,\bar\chi(x)\chi(x)
\end{aligned}
$$

Die P4-Wirkung wird diskutiert in [20].

3.4 Systematische Untersuchung nach Luo

Luo [14] verwendet das Symanzik-Improvement-Schema, um eine Gitterwirkung für Staggered Quarks zu finden, die auch in $O(a^2)$ exakt ist.

Dazu gibt Luo eine Basis für alle Operatoren der Dimension 6 an, die invariant sind unter den Transformationen aus der Gitter-Symmetrie-Gruppe. Eine Linearkombination davon wird zur Kogut-Susskind Wirkung addiert. Die Vorfaktoren werden so gewählt, daß der störende Beitrag in a^2 gerade kompensiert wird.

Die Dimension ist 3/2 für die Fermionfelder und 1 für Masse m und Differentialoperatoren D_μ. Damit ergeben sich 2 Typen von 6-dimensionalen Operatoren, Vier-Fermion-Terme und bilineare Ausdrücke.

Das Ziel im Rahmen dieser Arbeit ist es lediglich, die Ausdrücke, die Luo in den Feldern $\chi_\xi(y)$ angibt, auf das feine Gitter zu übertragen und in den Feldern $\chi(x)$ auszudrücken. Dabei beschränken wir uns auf die bilinearen Terme.

Zuerst eine abkürzende Notation. Sie erlaubt es, die Dirac-Flavour-Struktur auch in Verbindung mit den Feldern $\chi_\xi(x)$ herauszustellen:

- $U(x';x)$ bezeichnet das Produkt der Linkvariablen entlang des kürzesten Pfades von x' nach x, gegebenenfalls den Mittelwert.
- $\mathrm{D}_\mu(y',y)$ ist als Kronecker-Symbol zu lesen, das die Punkte y heraushebt, an denen eine Funktion für die Gitterableitung im Punkt y' ausgewertet werden muß. Es gilt $D_\mu\, f(y') = \sum_y D_\mu(y',y)\, f(y) = \sum_y 1/4a\, [\delta(y'+2\hat{\mu}-y) - \delta(y'-2\hat{\mu}-y)]\, f(y)$. $\Delta_\mu(y',y)$ ist analog definiert.
- Als drittes Element verwenden wir $\overline{(\gamma_S \otimes t_F)}_{\xi',\xi} = 1/4\ \mathrm{tr}\ (\gamma^{\xi'\,\dagger}\gamma_S\gamma^\xi\gamma_F^\dagger)$. Damit ist $\sum \bar{\chi}_{\xi'}\overline{(\gamma_S \otimes \gamma_F)}_{\xi',\xi}\chi_\xi\ =\ 16 \sum\ \ \bar{q}\ (\gamma_S \otimes \gamma_F)\ q$.

Bei den folgenden Definitionen werden die Hyperkuben-Indices ξ', ξ unterdrückt:

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y) &= \overline{(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})}\,\mathrm{D}_\mu(y',y) \ +\ a\overline{(\gamma_{\mu5}\otimes t_{\mu5})}\,\Delta_\mu(y',y)\\
\not{\mathrm{D}}(y',y) &= \sum_\mu \overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\\
\mathrm{D}^2(y',y) &= \sum_\mu \overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\\
\mathrm{D}^3(y',y) &= \sum_\mu \overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\\
(\mathrm{D}\not{\mathrm{D}}\mathrm{D})(y',y) &= \sum_{\mu,\nu} \overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\overline{(\gamma_\nu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\nu(y',y)\overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)
\end{aligned}
$$

In dieser Schreibweise wird die Standard Kogut-Susskind-Wirkung zu:

$$
S_{KS}\ =\ \sum_{y',y,\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y')\ \sum_\mu\ \overline{(\gamma_\mu\otimes\mathbb{1})}\,\bar{\mathrm{D}}_\mu(y',y)\,U(y'+\xi';y+\xi)\ \chi_\xi(y)
$$

Einsetzen für Γ^μ und $\bar{\mathrm{D}}$ und ausmultiplizieren führt direkt auf die alte Form zurück.

Mit diesem Rüstzeug geben wir Luos bilineare Operatoren der Dimension sechs an. Die ersten 5 sind invariant unter allen Transformationen der Gittersymmetrie-Gruppe, die beiden letzten nur für den Fall verschwindender Massen.

$$\mathcal{O}_1 = \sum_{y',y,\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \mathrm{D}^3(y',y)\, U(y'+\xi';y+\xi)\, \chi_\xi(y) \tag{3.6}$$

$$\mathcal{O}_2 = \sum_{y',y,\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \frac{1}{2}[\mathrm{D}^2\not{\mathrm{D}} - \not{\mathrm{D}}\mathrm{D}^2](y',y)\, U(y'+\xi';y+\xi)\, \chi_\xi(y) \tag{3.7}$$

$$\mathcal{O}_3 = \sum_{y',y,\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y')\frac{1}{2}[\mathrm{D}^2\not{\mathrm{D}} + \not{\mathrm{D}}\mathrm{D}^2 - 2\not{\mathrm{D}}^3](y',y)U(y'+\xi';y+\xi)\chi_\xi(y) \tag{3.8}$$

$$\mathcal{O}_4 = \sum_{y',y,\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y')[\mathrm{D}^2\not{\mathrm{D}} + \not{\mathrm{D}}\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D}\not{\mathrm{D}}\mathrm{D}](y',y)U(y'+\xi';y+\xi)\chi_\xi(y) \tag{3.9}$$

$$\mathcal{O}_5 = \sum_{y',y,\xi',\xi} \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \not{\mathrm{D}}^3(y',y)\, U(y'+\xi';y+\xi)\, \chi_\xi(y) \tag{3.10}$$

$$\mathcal{O}_6 = \sum_{y',y,\xi',\xi} m\, \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \not{\mathrm{D}}^2(y',y)\, U(y'+\xi';y+\xi)\, \chi_\xi(y) \tag{3.11}$$

$$\mathcal{O}_7 = \sum_{y',y,\xi',\xi} m\, \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \mathrm{D}^2(y',y)\, U(y'+\xi';y+\xi)\, \chi_\xi(y) \tag{3.12}$$

Für die Umrechnung auf das feine Gitter führen wir eine graphische Notation ein: die Pfade, die $\bar{\chi}$- und χ-Felder verbinden und entlang derer die Produkte von Link-Matrizen genommen werden, werden als Pfeile dargestellt. Das Gewicht ist entlang des jeweiligen Pfades angegeben oder als Vorfaktor des Zielpunktes, wenn dieser nur auf einem Pfad zu erreichen ist.

Um das Verfahren zu veranschaulichen, führen wir zunächst die Rückrechnung vom groben auf das feine Gitter für die Standard-Wirkung vor und greifen dabei auf eine symbolische Notation zurück:

$$\begin{aligned}
&\bar{\chi}_{\xi'}(y')\left((\gamma_\mu\otimes 1\!\!1)_{\xi',\xi}\,\mathrm{D}_\mu(y',y) \;+\; a\,(\gamma_5\otimes t_{\mu5})_{\xi',\xi}\,\Delta_\mu(y',y)\right)U(y'+\xi';y+\xi)\chi_\xi(y)\\
=\;&\frac{1}{4a}\left(\Gamma^\mu_{\xi',\xi}\; \text{-}\chi_\xi \longleftarrow\!\!\longleftarrow \underset{\bar{\chi}_{\xi'}}{\cdot} \longrightarrow\!\!\longrightarrow \chi_\xi \;+\; \tilde{\Gamma}^\mu_{\xi',\xi}\;\; \chi_\xi \longleftarrow\!\!\longleftarrow \overset{\text{-}2\chi_\xi}{\underset{\bar{\chi}_{\xi'}}{\cdot}} \longrightarrow\!\!\longrightarrow \chi_\xi\right)\\
=\;&\frac{1}{4a}\eta_\mu\Bigg(\delta_{\xi_\mu,0}\;\; \text{-}\chi \longleftarrow\!\!\longleftarrow \underset{\bar{\chi}}{\rightleftarrows} \longrightarrow \chi \;+\; \delta_{\xi_\mu,1}\;\; \rightleftarrows\!\overset{\text{-}\chi}{\longleftarrow} \underset{\bar{\chi}}{\cdot} \longrightarrow\!\!\longrightarrow \longrightarrow \chi\\
&\qquad +\,\delta_{\xi_\mu,0}\;\; \chi \longleftarrow\!\!\overset{\text{-}2\chi}{\longleftarrow} \underset{\bar{\chi}}{\rightleftarrows} \longrightarrow \chi \;-\; \delta_{\xi_\mu,1}\;\; \rightleftarrows\!\overset{\chi}{\longleftarrow} \underset{\bar{\chi}}{\cdot} \overset{\text{-}2\chi}{\rightrightarrows} \longrightarrow \chi\Bigg)\\
=\;&\frac{1}{4a}\eta_\mu\left(\delta_{\xi_\mu,0}\;\; \longleftarrow \text{-}2\chi \leftarrow \bar{\chi} \rightarrow 2\chi \;+\; \delta_{\xi_\mu,1}\;\; \text{-}2\chi \leftarrow \bar{\chi} \rightarrow 2\chi \longrightarrow\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a}\eta_\mu \left(-\chi \leftarrow \bar{\chi} \rightarrow \chi \right) \\
&= \frac{1}{2a}\eta_\mu \, \bar{\chi}(x) \left[U_\mu(x)\, \chi(x+\hat{\mu}) \; + \; U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\, \chi(x-\hat{\mu}) \right]
\end{aligned}
$$

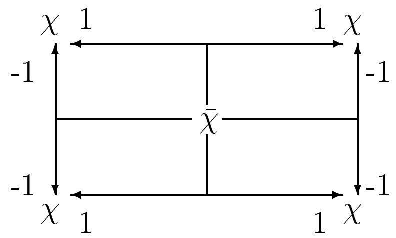
Der dritte Rechenschritt ist dabei der wesentliche: hier sind die Differentialoperatoren auf dem y-Gitter und die μ-Komponenten von ξ' und ξ eingetragen. Da ξ und ξ' durch $\sum_{\xi',\xi} \bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}}$ verbunden sind (vgl. Definition von $\Gamma^\mu_{\xi',\xi}$), wird entweder der Anfangs- oder die Endpunkte des Termes gegenüber dem Differentialoperator verschoben. Das negative Vorzeichen kommt von $\tilde{\Gamma}^\mu$. Bei der weiteren Rechnung zeigt sich, daß das Ergebnis für die Fälle $\xi_\mu = 0, 1$ gleich ist und die Fallunterscheidung daher aufgegeben werden kann.

Als relativ einfache Beispiele rechnen wir im Anhang, in Abschnitt A.2 die Operatoren $\mathcal{O}_6$ und $\mathcal{O}_7$ auf das x-Gitter zurück.

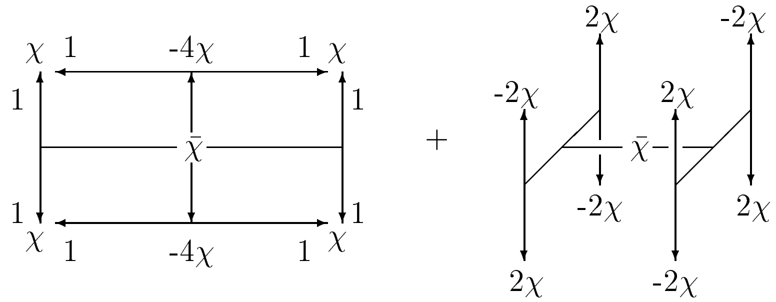
Im folgenden sind die Ergebnisse für alle sieben Terme angegeben. Dabei muß die Summation $\sum_{x,\mu,\ldots} a^4$ jeweils ergänzt werden.

$$\mathcal{O}_1 = \frac{1}{a^3} \; 2\chi \longleftarrow -6\chi \longleftarrow \bar{\chi} \longrightarrow 6\chi \longrightarrow -2\chi$$

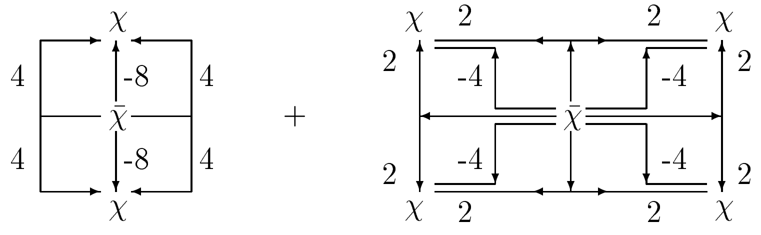
$\mathcal{O}_2 = \frac{1}{a^3}$



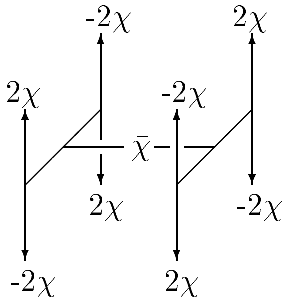
$\mathcal{O}_3 = \frac{1}{a^3}$



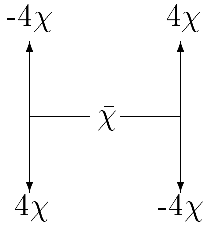
$\mathcal{O}_4 = \frac{1}{a^3}$



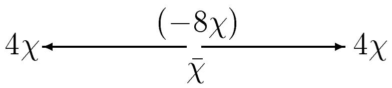
$$\mathcal{O}_5 = \frac{1}{a^3}$$



$$\mathcal{O}_6 = \frac{m}{a^2}$$



$$\mathcal{O}_7 = \frac{m}{a^2}$$



Wie man sieht, enthält $\mathcal{O}_4$ den Fat-Link-Term. $\mathcal{O}_1$ liefert den Naik-Term. Die U_{Hook} -Terme der P4-Wirkung stehen in $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ und $\mathcal{O}_4$.

Kapitel 4

Mesonen auf dem Gitter

Die letzten Abschnitte haben einige Aussagen über die zu erwartende Restauration der Flavoursymmetrie für verschiedene Wirkungen gemacht. Diese Ergebnisse werden jetzt durch numerische Simulationen überprüft und erweitert.

Dazu betrachten wir Gitteroperatoren, die nach Gittersymmetrien klassifiziert werden. Im Kontinuumlimes liegen mehrere Gitterdarstellungen der Symmetriegruppe in der gleichen Kontinuumdarstellung, daher sollten die Massen der entsprechenden Zustände entartet sein. Insbesondere ist die Messung dieser Massenentartung bei verletzter Flavourszmmetrie eine Möglichkeit, Aussagen über die approximative Restauration zu gewinnen.

Es ist bekannt, daß die Massenunterschiede der verschiedenen ρ-Operatoren sehr klein sind, die Pion-Operatoren dagegen sehr sensitiv eine Verletzung der Flavoursymmetrie anzeigen. Der Grund liegt in der teilweisen Erhaltung der chiralen Symmetrie, vgl. Abschnitt 2.2.2: ein Pion-Operator ist mit einer spontan gebrochenen, auch bei $a \neq 0$ kontinuierlichen chiralen Symmetrie verbunden und daher als Goldstone-Teilchen masselos im chiralen Limes. Die anderen Operatoren, als π_2 zusammengefaßt, entsprechen den nicht realisierten Teilsymmetrien und bleiben daher massiv. Einer der Pion-Operatoren liefert also aufgrund seines Flavourgehaltes eine andere Masse. Die Massendifferenz zwischen Goldstone-Pion und π_2 liefert ein Maß für die Verletzung der Flavoursymmetrie.

4.1 Meson-Operatoren

4.1.1 Diskrete Symmetriegruppe

Es folgt eine kurze Darstellung der Gruppenstruktur der diskreten Symmetrien in der Gitterwirkung. Ihre Lage innerhalb der Kontinuum-Symmetriegruppe gibt Aufschluß über die Verbindung zwischen Gitteroperatoren und Teilchenzuständen des Kontinuums. Wir gehen wieder von der Wirkung 2.3 aus.

Die diskreten Symmetrietransformationen liegen in der diskreten Untergruppe der Poincaré-Gruppe, während die in Abschnitt 2.2.2 diskutierten chiralen Restsymmetrien kontinuierlich sind.

- Drehungen $R_{\mu,\nu}$ um 90^o
- Verschiebungen S_μ um eine Gittereinheit
- Gitter-Raumspiegelung I_s
- Gitter-Ladungskonjugation C_0

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß Verschiebungsoperatoren im allgemeinen nicht miteinander vertauschen. Dies ist verständlich im Formalismus der Quark-Felder q auf dem y-Gitter: der einfache Operator S_μ respektiert nicht die Grenzen der Hyperkuben und bewirkt daher neben der Translation auch eine Flavourtransformation.

Daher führt man einen Operator $T_\mu = S_\mu^2$ ein, der durch Verschiebung um zwei Gitterplätze die Flavourstruktur des Fermionfeldes nicht beeinflußt.

Damit kann man formal einen Operator $T_\mu^{1/2}$ definieren, der eine flavourinvariante Verschiebung um einen Gitterpunkt liefert, wobei die Vorzeichen so gewählt werden, daß $T_\mu^{1/2}$, $T_\nu^{1/2}$ vertauschen.

Der Operatorquotient $\Xi_\mu = T_\mu^{-1/2}\, S_\mu$ wird als reine Flavourtransformation interpretiert. Die Operatoren $\Xi_\mu, T_\mu^{1/2}$ sind im Ortsraum vollständig nichtlokal.

Die Gruppe der diskreten Symmetrietransformationen der Kogut-Susskind-Wirkung ist damit:

$$\left\{R_{\mu,\nu}, I_s, C_0, \Xi_\mu, T_\mu^{1/2}\right\}$$

In der Minkowski-Feldtheorie werden Teilchen durch Eigenwerte von hermiteschen Operatoren beschrieben. Im euklidischen Fall entsprechen dem Operatoren, die mit der Zeitumkehr vertauschen. Damit verkleinert sich die Gruppe relevanter Symmetrietransformationen zu:

$$\left\{R_{i,j}, I_s, C_0, \Xi_\mu, T_i^{1/2}\right\}$$

Mit der Beschränkung auf Gitterzustände in Ruhe wird die Wirkung von Translationsoperatoren trivial: Die Operatoren $T_i^{1/2}$ vertauschen mit allen anderen Operatoren, die die Symmetriegruppe H_{RF} des Ruhesystems darstellen.

$$H_{RF} = \{R_{i,j}, I_s, C_0, \Xi_\mu\} \tag{4.1}$$

Irreduzible Darstellungen dieser Gruppe klassifizieren ruhende Teilchen.

Man kann zeigen [4], daß Matrizen D, die eine mesonische Darstellung bilden, miteinander vertauschen. Mit Darstellungen der Flavourtransformationen $X_\mu = D(\Xi_\mu)$ kann die Gruppe faktorisiert werden. $P = \Xi_4\, I_s$ ist die Paritätstransformation.

$$H_{RF,m} = \bar{H}_{RF} \times \{1, X_4\} \times \{1, X_1X_2X_3\} \times \{1, P\} \times \{1, C_0\}$$

Dabei ist $\bar{H}_{RF}$ die Gruppe, die von den räumlichen Rotationen und den Flavourtransformationen $\tilde{X}_m = X_m X_1 X_2 X_3$ gebildet wird.

Damit können mesonische Zustände bezeichnet werden durch eine irreduzible Darstellung $\bar{r}$ von $\bar{H}_{RF}$ und die Vorzeichen σ_t, σ_{123}, σ und τ_0, die jeweils den Faktoren X_4, X_{123}, P und C_0 entsprechen.

4.1.2 Gitter-Operatoren und Teilchenzustände

Meson-Operatoren im Formalismus der q-Felder haben eine Form, die der Kontinuumformulierung entspricht:

$$O_M = \sum_y \bar{q}^{a,\alpha}(y)\,\Gamma_{\alpha,\beta}\,T_{a,b}\,q^{\beta,b}(y) = \sum_y \bar{q}(y)\,(\Gamma\otimes T)\,q(y)$$

Dabei koppelt Γ die Dirac- und T die Flavouranteile der Quarks.

In den χ-Feldern werden daraus Phasenfaktoren ϕ, wie schon bei den ursprünglichen Rechnungen zur Kogut-Susskind-Wirkung gesehen. Der allgemeinste, zeitlich lokale Operator ist:

$$O_M(t) = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{\vec{x},\,\vec{d}\in\mathcal{D}} \bar{\chi}(\vec{x},t)\phi(\vec{x})U(\vec{x},t;\vec{x}+\vec{d},t)\chi(\vec{x}+\vec{d},t) \tag{4.2}$$

Die Menge $\mathcal{D}$ enthält die Verschiebungen zwischen den beiden Punkten, an denen die χ-Felder ausgewertet werden. Sie laufen über 0 bis 3 Linkvariable. Die Operatoren heißen entsprechend lokale bzw. 1-, 2-, 3-Link-Operatoren. $\mathcal{D}$ enthält nur räumliche Verschiebungen, $|\mathcal{D}|$ ist die Anzahl der Elemente in $\mathcal{D}$.

$H_{RF,m}$ klassifiziert diese Gitteroperatoren auf dem Gitter. Durch die Einbettung von $H_{RF,m}$ in die Kontinuumdarstellung können sie darüber hinaus mit Teilchenzuständen des Kontinuums identifiziert werden.

Wegen des nicht-lokalen Operators $T_4^{1/2}$, der in P und Ξ_4 eingeht, haben die Operatoren keine definierten Werte für σ, σ_t. Daher greifen wir zurück auf σ_s, die I_s-Parität, und beschränken die Symmetriegruppe auf die Geometric Time Slice Group (GTS), die von den Ξ_i, $R_{k,l}$ und I_s gebildet wird. Es gilt folgende Entsprechung:

Ein Feld, das sich unter GTS transformiert wie $(\bar{r}^{\sigma_s\sigma_{123}}, \tau_0)$, erzeugt Teilchenzustände mit den $H_{RF,m}$ Quantenzahlen $(\bar{r}^{\sigma_t\sigma_{123}}, \sigma = \sigma_s\sigma_t, \tau_0)$ für $\sigma_t = \pm 1$. Dabei betrachten wir nur die niedrigsten Spinzustände.

Der einfachste Meson-Operator, $\sum_x \bar{\chi}(x)\,\chi(x)$ hat die GTS-Klasifizierung ($\mathbf{1}^{++}$, $+$) und liefert die Teilchenzustände 0_S^{++} und 0_A^{-+}, mit Indizes S, A für Singulett- oder adjungierte Zustände. Eine vollständige Übersicht findet sich in [4].

Zu dieser Identifikation von Gitteroperatoren und Kontinuumzuständen folgen zwei Anmerkungen:

- Jeder Symmetrieoperator tritt nur mit einem festen Wert von τ_0 auf. Den ladungskonjugierten Zustand erhält man durch Verwendung von zeitlich nichtlokalen Operatoren. Dabei wird $\bar{\chi}(\vec{x},t)\chi(\vec{y},t)$ ersetzt durch $(1/2)[\bar{\chi}(\vec{x},t)\chi(\vec{y},t+1) - \bar{\chi}(\vec{x},t+1)\chi(\vec{y},t]$.

Für diese Arbeit wurden ausschließlich zeitlich lokale Operatoren verwendet, räumlich lokal oder vom 1-Link-Typ.

- Verschiedene Meson-Operatoren entsprechen im Kontinuum demselben physikalischen Zustand, modulo Flavourgehalt. Von den hier betrachteten Operatoren liefern vier Pionen:

$$\sum_x \bar{\chi}(x)\chi(x) \tag{4.3}$$

$$\sum_x \eta_4\zeta_4\bar{\chi}(x)\chi(x) \tag{4.4}$$

$$\sum_x \epsilon\bar{\chi}(x)\zeta_i\Delta_i\chi(x) \tag{4.5}$$

$$\sum_x \eta_4\zeta_4\epsilon\bar{\chi}(x)\zeta_i\Delta_i\chi(x) \tag{4.6}$$

  Die Erläuterung der Vorzeichenfaktoren und eine vollständige Liste der Operatoren ist in B angegeben.

Die vier Pion-Operatoren sind Goldstone-Bosonen zur Symmetrie unter $SU_A(4)$. Diese ist aber durch Terme in der Wirkung explizit verletzt bis auf die in Abschnitt 2.2.2 besprochene Untergruppe. Daher sind drei Pion-Operatoren massiv und werden als π_2 bezeichnet, nur Operator 4.4 wird im chiralen Limes masselos als Goldstone-Teilchen zur spontan gebrochenen Restsymmetrie.

Wir erwarten also, daß alle Pionmassen auf dem Gitter gegen 0 gehen im limes $a \to 0$, da dann die volle Symmetrie wiederhergestellt sein sollte. Das Goldstone-Pion allerdings hat auch bei endlichem Gitterabstand a eine verschwindende Masse im limes $m_q \to 0$.

4.2 Mesonenmassen

Die Massen von Mesonen werden aus dem Zeitverhalten des Korrelators bestimmt.

Die Korrelationsfunktion für Mesonen ist:

$$C(t) \; = < O_M(t)O_M^\dagger(0) >_{C,U}$$

Zu mitteln ist über alle χ-, U-Konfigurationen. Für $O_M(t)$ ist jeweils der ganze Ausdruck 4.2 einzusetzen.

Diese Funktion können wir auch über Quarkpropagatoren $G_{ij}(x,x')$ ausdrücken. Der Propagator ist die Zweipunkt-Korrelationsfunktion des Quarkfeldes, er wird durch Inversion der Fermionmatrix bestimmt und beschreibt die Propagation eines Quarks vom Punkt x nach x'. Mit Farbindizes i,j haben wir $G_{ij}(x',x) = < \chi_i(x')\,\bar{\chi}_j(x) >$ und damit:

$$\begin{aligned} < \bar{\chi}_i(x)\,\chi_k(x)\,\bar{\chi}_j(x')\chi_l(x') >_C \;&=\; G_{lj}(x',x')\,G_{ki}(x,x) \\ &\quad -G_{kj}(x,x')\,G_{li}(x',x) \end{aligned}$$

Dabei beschreibt die erste Zeile nicht-zusammenhängende Beiträge. Für nicht-flavourdiagonale Meson-Operatoren müssen diese im Kontinuumlimes verschwinden, da Quarks verschiedener Flavour am selben Ort durch einen Loop gekoppelt würden.

Damit findet man die Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sigma_s\, \phi(\vec{0})\, V_s \sum_{\vec{x}} \frac{1}{|\mathcal{D}|^2} \sum_{\vec{d},\vec{d}' \in \mathcal{D}} \phi(\vec{x}) \\ & \quad \mathrm{Re}\, \Big\langle G(\vec{0},0;\vec{x}+\vec{d}',t)^{a,b}\, U(\vec{x}+\vec{d}',t;\vec{x},t)^{b,c} \\ & \quad G(\vec{x},t;\vec{0}+\vec{d},0)^{c,d}\, U(\vec{0}+\vec{d},0;\vec{0},0)^{d,a} \Big\rangle_U \end{aligned} \tag{4.7}$$

σ_s ist 1 für lokale und -1 für 1-Link-Terme.

Man kann zeigen, daß die Korrelationsfunktion folgende Gestalt hat [18]:

$$\begin{aligned} C(t) &= \sum_n A_{n,+} \left[e^{-E_{n,+}t} + e^{E_{n,+}(t-N_t)} \right] \\ & \quad + \sum_n A_{n,-} (-1)^t \left[e^{-E_{n,-}t} + e^{E_{n,-}(t-N_t)} \right] \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet E_n die Energien der verschiedenen Teilchenzustände, die dem Operator entsprechen. Da wir Teilchen mit verschwindendem Impuls betrachten, sind dies direkt die Massen. Nachdem die schwereren Zustände ausgestorben sind, dominieren die Grundzustände das Verhalten.

Der cosh tritt auf, da das Gitter zeitlich periodisch ist. Die Beiträge zu den Indizes $+,-$ gehören zu den Zuständen mit σ_t= +,-.

Unter Vernachlässigung höherer Anregungen können wir die Korrelationsfunktion ausdrücken als:

$$\begin{aligned} C(t) &= A_+ \cosh(m_+(\frac{1}{2}N_t - t)) \\ & \quad + A_- \,(-1)^t \cosh(m_-(\frac{1}{2}N_t - t)) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bei numerisch ermitteltem Verlauf der Korrelationsfunktion lassen sich somit die Teilchenmassen bestimmen.

Kapitel 5

Numerische Resultate

5.1 Algorithmen und Verfahren

Die Messung wurde auf 57 gespeicherten Konfigurationen der Gittergröße $16^3 \times 30$ durchgeführt.

Die Konfigurationen sind mit einer 2×1 tree-level-verbesserten Wirkung (Gl. 3.1) bei $\beta = 4.10$ erzeugt.

Die untersuchten Wirkungen unterscheiden sich im fermionischen Anteil. Zur Referenz in den Grafiken bezeichnen wir sie wie folgt:

1. Standard Kogut-Susskind Wirkung.
2. Kogut-Susskind-Wirkung mit Fat-Links, das Fat-Weight ω ist 0.2. Dabei werden Fat-Links nur für die Inversion benutzt. In den Ein-Link-Operatoren sind die Quarkpropagatoren an Quelle und Senke jeweils durch einen Link verbunden, hier wird kein Fat-Link verwendet, um keine Beiträge aus anderen Zeitschichten einzumischen.
3. Wie (2), mit $\omega = 0.4$.
4. Naik-Wirkung mit Standard-Links.
5. Naik-Wirkung mit Fat-Links. Dabei sind auch die 3-Link-Terme aus Fat-Links aufgebaut.
6. P4-Wirkung mit Standard-Feldern.
7. P4-Wirkung mit Fat-Links. Auch hier sind die 3-Link-Terme Produkte aus Fat-Links.

5.1.1 Propagatoren und Korrelationsfunktion

Der Quarkpropagator wird bestimmt durch Inversion der Fermionmatrix $(m\mathbb{1} + D)$, wobei D die Wechselwirkung enthält. Mit einen Quellfeld ϕ, das nur im Quellpunkt einen nicht-verschwindenden Eintrag hat, bestimmt man die Propagatoren χ nach folgender Gleichung:

$$(m\mathbb{1} + D)\chi = \phi$$

Durch even-odd-ordering wird die Gleichung vereinfacht und schließlich mit dem Conjugate-Gradient-Verfahren gelöst.

Das Verfahren wird für jeden der drei Farbindizes wiederholt. Bei den 1-link-Mesonen benötigen wir neben dem Propagator vom Ursprungsort auch die von den 6 räumlich benachbarten Punkten ausgehenden. Damit sind 21 Inversionen pro Konfiguration notwendig.

Um den Ausdruck 4.7 auszuwerten, benutzen wir die folgende Relation, die sich aus der Anwendung der Ladungskonjugation C_0 auf die χ-Felder ergibt:

$$G^*_{ij}(x', x) = (-1)^{|x|}\, G_{ji}(x', x)$$

In 4.7 benutzen wir die Relation in folgender Form:

$$G(\vec{x}, t; \vec{d}, 0) = G(\vec{d}, 0; \vec{x}, t)^\dagger\, \eta_4(x)\, (-1)^t(-1)$$

Damit ergibt sich die Form des Mesonkorrelators, die auch im Programm verwendet wurde:

$$\begin{aligned} C(t) \quad = \quad & -\sigma_s\, \phi(\vec{0})\, (-1)^t\, V_s \sum_{\vec{x}} \frac{1}{|\mathcal{D}|^2} \sum_{\vec{d},\vec{d'} \in \mathcal{D}} \phi(\vec{x})\, \eta_4(\vec{x}) \\ & \mathrm{Re}\, \Big\langle G(\vec{0}, 0; \vec{x} + \vec{d'}, t)^{a,b}\, U(\vec{x} + \vec{d'}, t; \vec{x}, t)^{b,c} \\ & \quad G(\vec{0} + \vec{d}, 0; \vec{x}, t)^{*d,c}\, U(\vec{0} + \vec{d}, 0; \vec{0}, 0)^{d,a} \Big\rangle_U \end{aligned}$$

Für lokale Mesonen reduziert sich die Spur über Links und Quarkpropagatoren auf das Betragsquadrat des Propagators.

Die solcherart bestimmten Werte der Korrelationsfunktion werden herausgeschrieben und an den Ansatz 4.8 gefittet. In zwei Fällen taucht einer der beiden Kanäle nicht auf, in diesem Fall wurde der entsprechende Term vor dem Fit explizit ausgeschaltet.

Zwei Beispiele für Korrelationsfunktionen zeigen die Abbildungen 5.1 und 5.2. Beide sind mit P4-Wirkung und Fat-links gemessen.

Abbildung 5.1 zeigt einen Fall, wo nur ein Teilchenzustand angeregt wird. Man erkennt in der in y logarithmierten Darstellung die V-Form des Cosinus Hyperbolicus. An den Rändern liegen die Datenpunkte höher, dies geht auf Anregungen von Zuständen höherer Massen zurück. Im Zentrum sind die Werte ungenauer, hier werden die Grenzen der numerischen Genauigkeit erreicht.

Abbildung 5.2 ist der typische Fall, in dem zwei Teilchenzustände angeregt werden. Der eine zeigt sich in der V-Form, der andere erzeugt die erkennbaren Oszillationen. Zusammen mit den oben beschriebenen Effekten erschwert dies natürlich den Fit.

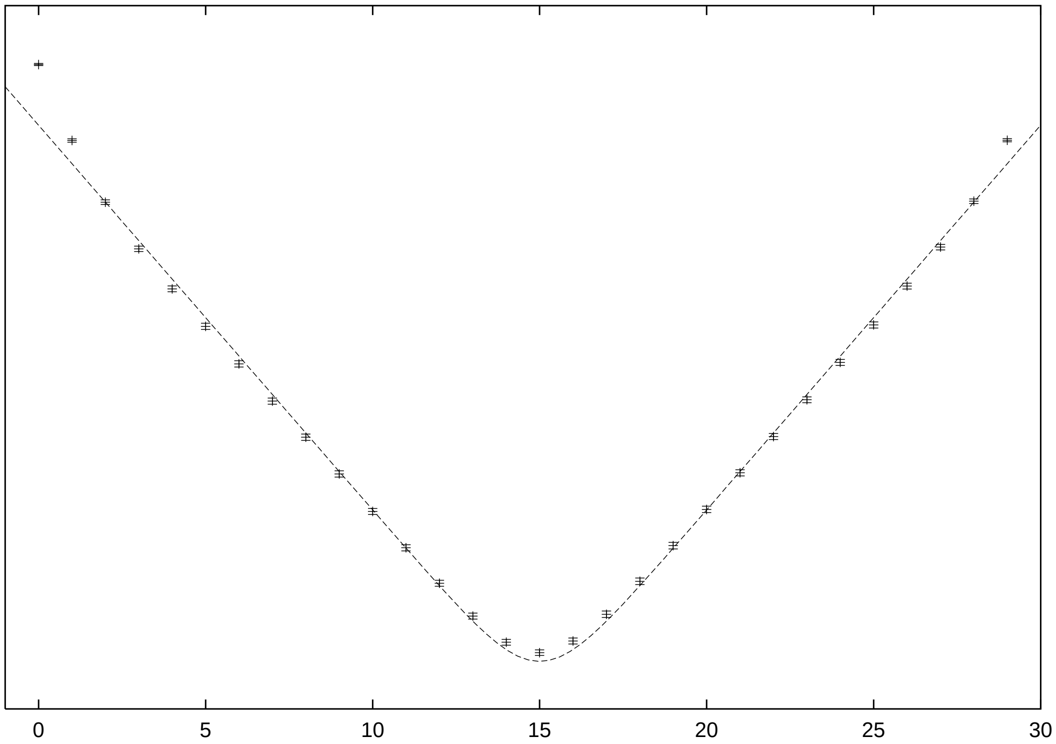


Abbildung 5.1: π-Korrelator (Operator 2) Meßwerte mit Fitfunktion

Um trotzdem zu zuverlässigen Ergebnissen zu kommen, werden für jeden Korrelator mehrere Fits durchgeführt, bei denen sukzessive Randpunkte vernachlässigt werden. Damit fällt der Einfluß der höher angeregten Zustände ab, aber die Ungenauigkeit steigt an.

Ein typisches Beispiel zeigt Abbildung 5.3. Zwischen dem Bereich der überhöhten Massen und dem Bereich unzuverlässiger Daten liegt ein Plateau, mit stabilem Massenwert und kleinem Fehler. Eine Mittelung über diesen Bereich liefert das Endergebnis, die Masse des entsprechenden Zustandes.

Leider sind die Verhältnisse nicht immer so klar wie im Beispiel. Insbesondere war es notwendig, die Lage des Plateaus von Fit zu Fit anzupassen.

Immerhin liefert die Verwendung von 1-link-Operatoren zwei Pion-Operatoren ohne Partner, das Goldstone-Pion und ein π_2. Damit ist eine genaue Untersuchung zur Flavour-Symmetrie möglich.

5.1.2 Performance

Es folgen einige Anmerkungen zur Performance. Die Rechnungen wurden durchgeführt auf einem Quadrics-Parallelrechner QH2 mit 256 Knoten.

Tabelle 5.1.2 enthält die Anzahl N_{CG} der CG-Schritte pro Inversion und eine Abschätzung für die Rechenzeit t_I pro Inversion aus der Laufzeit der Mesonenrou-

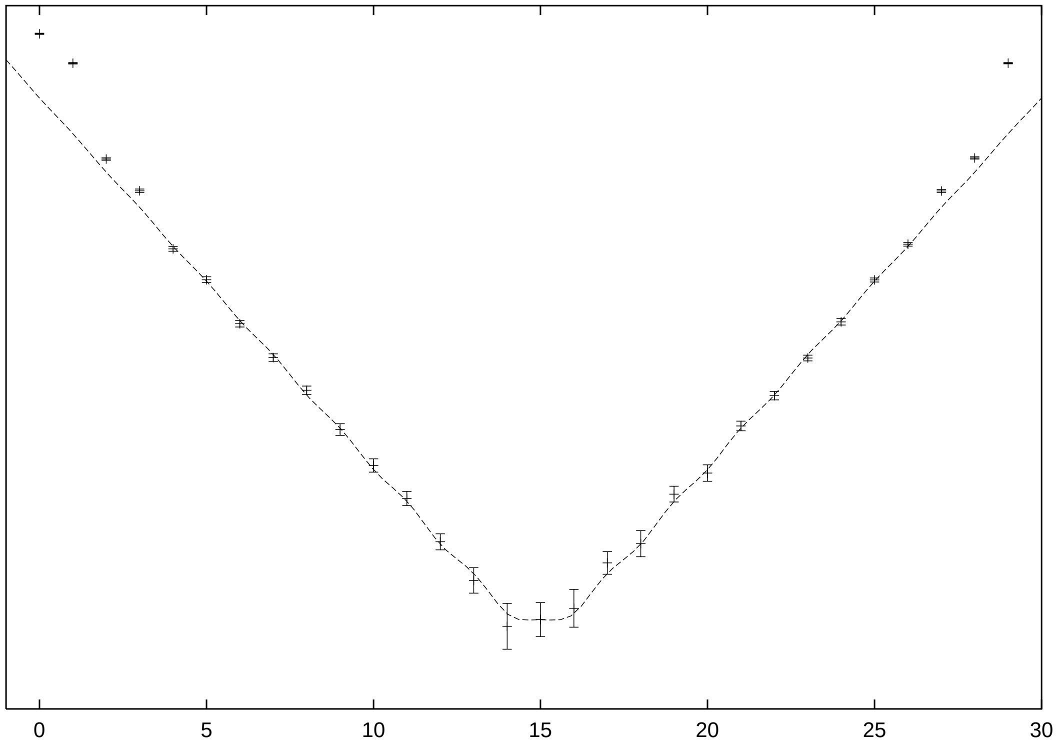


Abbildung 5.2: ρ/b_1-Korrelator (Operator 4) Meßwerte mit Fitfunktion

tine. Die Daten basieren jeweils auf der Auswertung nur einer Konfiguration, eine detailliertere Untersuchung zeigt aber, daß die Ergebnisse auf den verschiedenen Konfigurationen um weniger als 10% voneinander abweichen.

t_I ist in sec angegeben, ein Gewicht der Fat-Links ω von 0 bedeutet Rechnung ohne Fat-Links.

Wirkung	Residuum	m_q=0.01		m_q=0.02		m_q=0.05	
		N_{CG}	t_I	N_{CG}	t_I	N_{CG}	t_I
Std , $\omega = 0$	10^{-11}	830	13.5	460	7.5	206	3.5
Std , $\omega = 0.2$	10^{-11}	559	9.2	310	5.2	142	2.4
Std , $\omega = 0.4$	10^{-11}	532	8.9	297	5.0	136	2.3
Naik , $\omega = 0$	10^{-9}	671	27.8	381	15.5	180	7.7
Naik , $\omega = 0.2$	10^{-9}	442	17.6	264	10.8	121	5.3
P4 , $\omega = 0$	10^{-9}	413	116.0	221	64.7	88	25.0
P4 , $\omega = 0.2$	10^{-9}	257	73.6	151	43.1	72	20.0

Wie man sieht, beschleunigen Fat-Links die Rechnung. Sie stellen eine Konfiguration lokaler Mittelwerte dar, die glatter ist als die Ausgangskonfiguration und

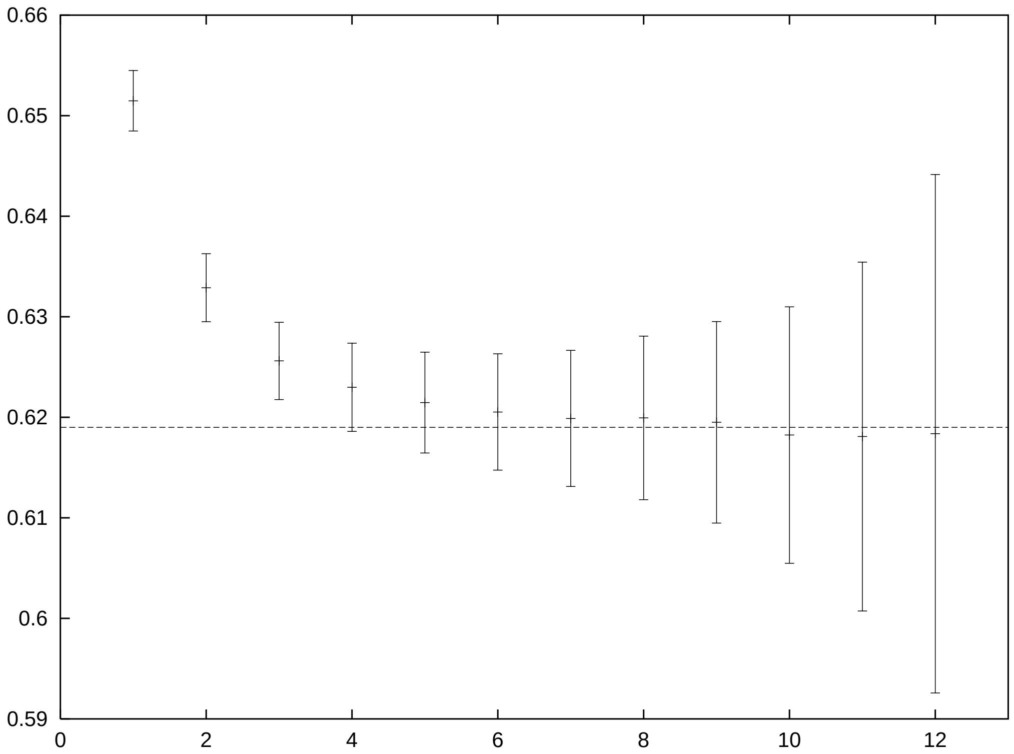


Abbildung 5.3: π-Massen in Abhängigkeit vom Fitbereich (Operator 2)

daher weniger CG-Schritte pro Inversion benötigt. Die Berechnung der Fat-Links erfolgt einmal für jede Konfiguration und kostet quasi keine Zeit.

Das Fat-Weight ω wurde nur für die Standard-Wirkung variiert. Der Wert $\omega = 0.4$ verstärkt die Effekte, die auch bei 0.2 zu beobachten sind.

Die Naik- und insbesondere P4-Wirkung beziehen ebenfalls Links von entfernteren Gitterpositionen mit ein. Der Inverter benötigt auch hier weniger CG-Schritte als mit der Standard-Wirkung, aber die Zeit steigt drastisch, da die komplexeren Objekte jedesmal neu ausgewertet werden müssen.

5.2 Resultate

5.2.1 Ergebnisse für die Mesonenmassen

Die numerischen Resultate der einzelnen Simulationen sind in den Tabellen B.1 bis B.3 im Anhang zusammengefaßt.

Die Fehler sind nach folgender Vorschrift angegeben: im Plateaubereich werden mittlerer Fehler der Datenpunkte und Streuung der Daten um den Mittelwert abgeschätzt. Der größere Wert wird als Maß für den Fehler auf dem Massenwert angenommen, der kleinere liefert eine Tendenz auf diesen Wert, ebenso wie Länge des Plateubereiches und Anteil der Punkte, für die der Fit an die Korrelationsfunktion tatsächlich konvergiert.

Eine ganze Reihe von Massen konnte nicht bestimmt werden. Neben allgemeinen numerischen Problemen kann man in zwei Fällen konkreter angeben, worin die Schwierigkeiten bestehen: für eine Reihe von Zuständen wachsen die Fehler der Korrelationsfunktion über die akzeptablen Grenzen, bevor sie das Plateau erreicht hat. Dies ist insbesondere für die a_0 der Fall.

Andere Kanäle werden sehr stark von einem der beiden Partner dominiert, dessen Amplitude um Größenordnungen über der des anderen liegt. Damit ist ein präziser Fit für den unterdrückten Partner nur schwer möglich. Dies betrifft insbesondere die a_1 und b_1 in Partnerschaft mit dem ρ.

Viele Operatoren, etwa die ρ/a_1- und ρ/b_1-Kanäle, liefern bei Messungen mit Fat-Link-Konfigurationen bessere Ergebnisse.

Betrachten wir jetzt die Meßergebnisse unter verschiedenen physikalischen Gesichtspunkten:

Wie oben diskutiert, sollten verschiedene Operatoren für dasselbe Teilchen bei derselben Wirkung konsistente Resultate für die Massen ergeben. Das ist für ρ und π_2 der Fall, die Massen weichen um höchstens 10 % vom jeweiligen Mittelwert ab. Dies wird erklärt durch Meßfehler und unvollständige Restauration der Flavoursymmetrie.

Zur Prüfung der a_1 und b_1 liegen nicht genug Ergebnisse vor, um eine Aussage zu machen.

Wir erwarten, daß zumindest die Relationen der Teilchenmassen des Kontinuums in unseren Ergebnissen widergespiegelt werden: schwerere Teilchen sollen auch auf dem Gitter schwerer sein. Dazu die folgende Übersicht, bei der die genauesten Gitterresultate mit der Standard-Wirkung verwendet werden ($am_q = 0.05, \omega = 0.2$) und über Teilchen, die mehrfach vorkommen, gemittelt wurde:

Meson	m_{Exp} [MeV]	m_{Lattice}
π	138	0.57(1)
ρ	770	0.87(4)
ω	783	0.88(3)
f_0	980	1.12(8)

Für a_0, b_0, a_1 können keine zuverlässigen Aussagen gemacht werden. Mit dieser Ausnahme stimmen die Relationen also mit dem Kontinuum überein.

Die chirale Störungstheorie sagt die Abhängigkeit der Mesonmassen von der Quarkmasse voraus. Wir finden in Abb. 5.4 und 5.5 bestätigt, daß m_π^2 und m_ρ jeweils linear in am_q sind. Für die anderen Teilchen kann man keine Aussage treffen.

Insbesondere untersuchen wir das Pion-Splitting: dabei werden für die verschiedenen Wirkungen die quadrierte Masse von π und π_2 über $a\,m_q$ aufgetragen. Nach den Überlegungen in 4.1.2 sollten im Kontinuumlimes alle Pionmassen gegen 0 gehen, während im chiralen Limes bei endlichem Gitterabstand nur die Masse des

Goldstone-π verschwindet und die π_2 eine endliche Masse behalten. Der Plot der quadrierten Massen erlaubt einen einfachen Geradenfit.

Die Ergebnisse in Abb.5.4 zeigen, daß diese Erwartung in allen Fällen erfüllt ist. Die Verwendung von Fat-Links macht im wesentlichen das π_2 leichter, so daß die Differenz der Pionmassen nahezu konstant wird. Die Massenänderung des Pion ist nicht so deutlich ausgeprägt. Dieses Bild ist im wesentlichen dasselbe für Kogut-Susskind, Naik und P4-Wirkung, und ein direkter Vergleich dieser Wirkungen ohne Fat-Links zeigt, daß sie sich bis auf eine Skalierung gleich verhalten.

5.2.2 Diskussion der Flavoursymmetrie

Um die Ergebnisse für verschiedene Wirkungen in Beziehung setzen zu können, bestimmen wir im vorab noch physikalische Quarkmasse und Gitterabstand.

Ein Maß für den physikalischen Gitterabstand bietet die ρ-Masse am_ρ im chiralen Limes. Abb. 5.5 zeigt die entsprechenden Plots. Die Ergebnisse werden verglichen mit experimentellen Daten, bei denen der Gitterabstand aus der String-Tension gestimmt wird. Aus $\sqrt{\sigma} = 420$ MeV, $m_\rho = 770$ MeV und $a\sqrt{\sigma} = 0.377$ [3] ergibt sich $am_\rho = 0.691$ für die ρ-Masse auf dem Gitter.

Für Standard-, Naik- und P4-Wirkung ohne Verwendung von Fat-Links stimmen die Ergebnisse innerhalb der Fehler mit dem Erwartungswert überein. Die Resultate unter Verwendung von Fat-Links dagegen liefern übereinstimmend zu niedrige Werte.

Die MILC-Collaboration [16], deren Resultat zum Vergleich eingetragen ist, beobachtet ein qualitativ ähnliches Verhalten.

Der zweite physikalische Parameter ist die Quarkmasse. Wir berücksichtigen sie, indem wir die Daten gegen $(m_\pi/m_\rho)^2$ plotten.

Ein geeignetes Maß für die Verletzung der Flavoursymmetrie ist die Größe Δ_π:

$$\Delta_\pi = \frac{m_{\pi_2}^2 - m_\pi^2}{m_\rho^2 - m_\pi^2} \tag{5.1}$$

Δ_π für die verschiedenen Wirkungen ist in Abb. 5.6 geplottet. Dabei ist folgendes anzumerken:

Der Plot zeigt deutlich, daß die Wirkungen, die Fat-Links verwenden, die Flavoursymmetrie schwächer brechen als solche ohne Fat-Links. Demgegenüber sind die Ergebnisse für die Kogut-Susskind-, Naik- und P4-Wirkung bei jeweils gleichem Fat-Weight ω untereinander fast konsistent.

Die Fehler der Fat-Link-Daten sind deutlich kleiner, was direkt auf die genauere Bestimmung der ρ-Masse zurückgeht.

Demzufolge ist die Verwendung von Fat-Links geeignet, die Flavoursymmetrie zu verbessern. Die Modifikation der Kogut-Susskind-Wirkung um den Naik- oder P4-Term hat dagegen keinen erkennbaren Einfluß.

Für die Kogut-Susskind-Wirkung haben wir zwei Werte für das Fat-Weight ω untersucht, $\omega = 0.2$ und $\omega = 0.4$. Die Resultate unterscheiden sich nur geringfügig,

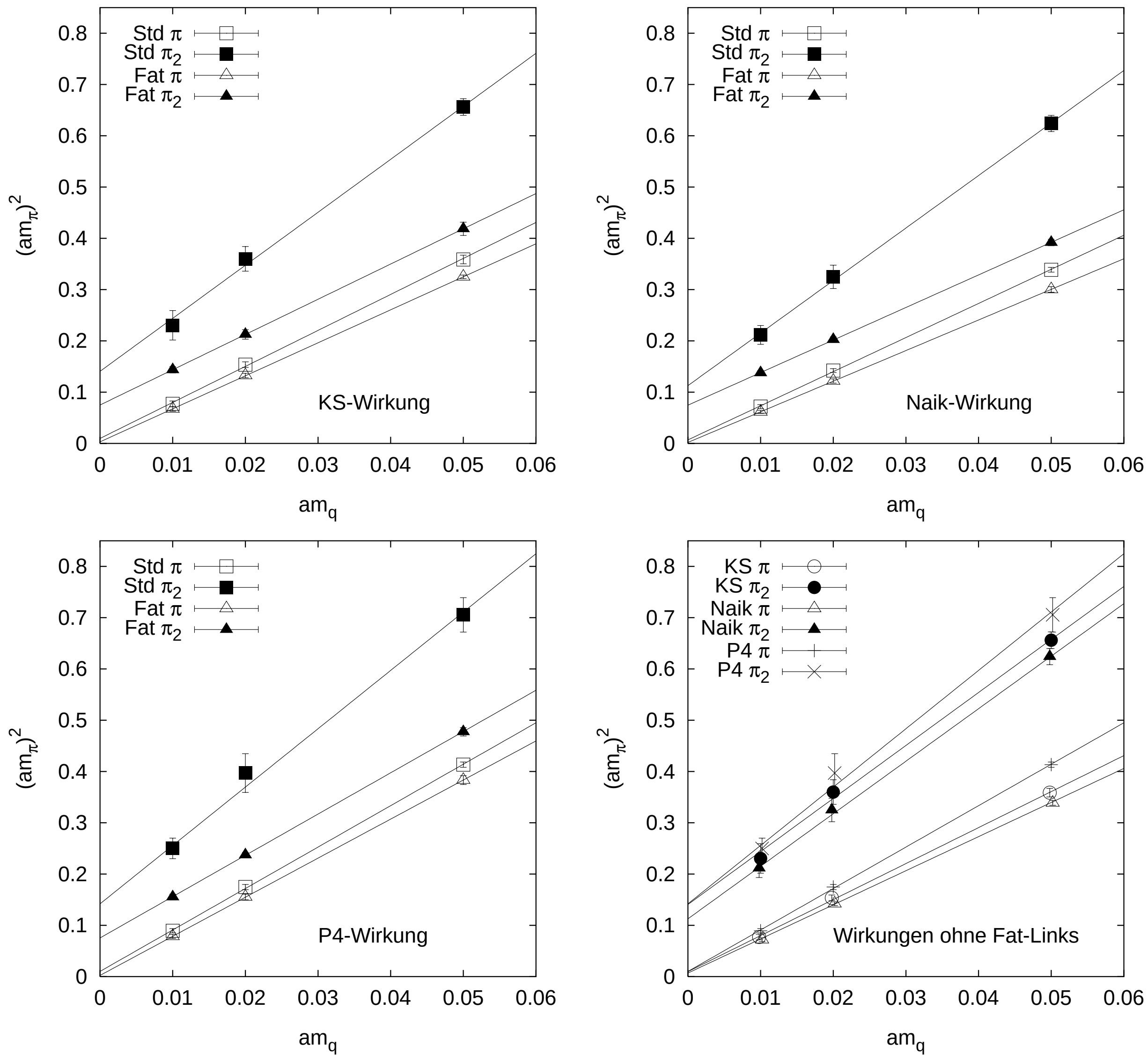


Abbildung 5.4: Pionsplitting: die quadrierten Massen von π und π_2 (Operatoren 2, 7) sind über am_q aufgetragen und in den chiralen Limes extrapoliert. Die ersten drei Graphen zeigen Resultate für jeweils eine Fermionwirkung unter Verwendung von Standard- und Fat-Link-Konfigurationen mit $\omega = 0.2$. Der vierte Graph zeigt dieselben Massen im direkten Vergleich der drei Wirkungen, gemessen auf Standard-Konfigurationen.

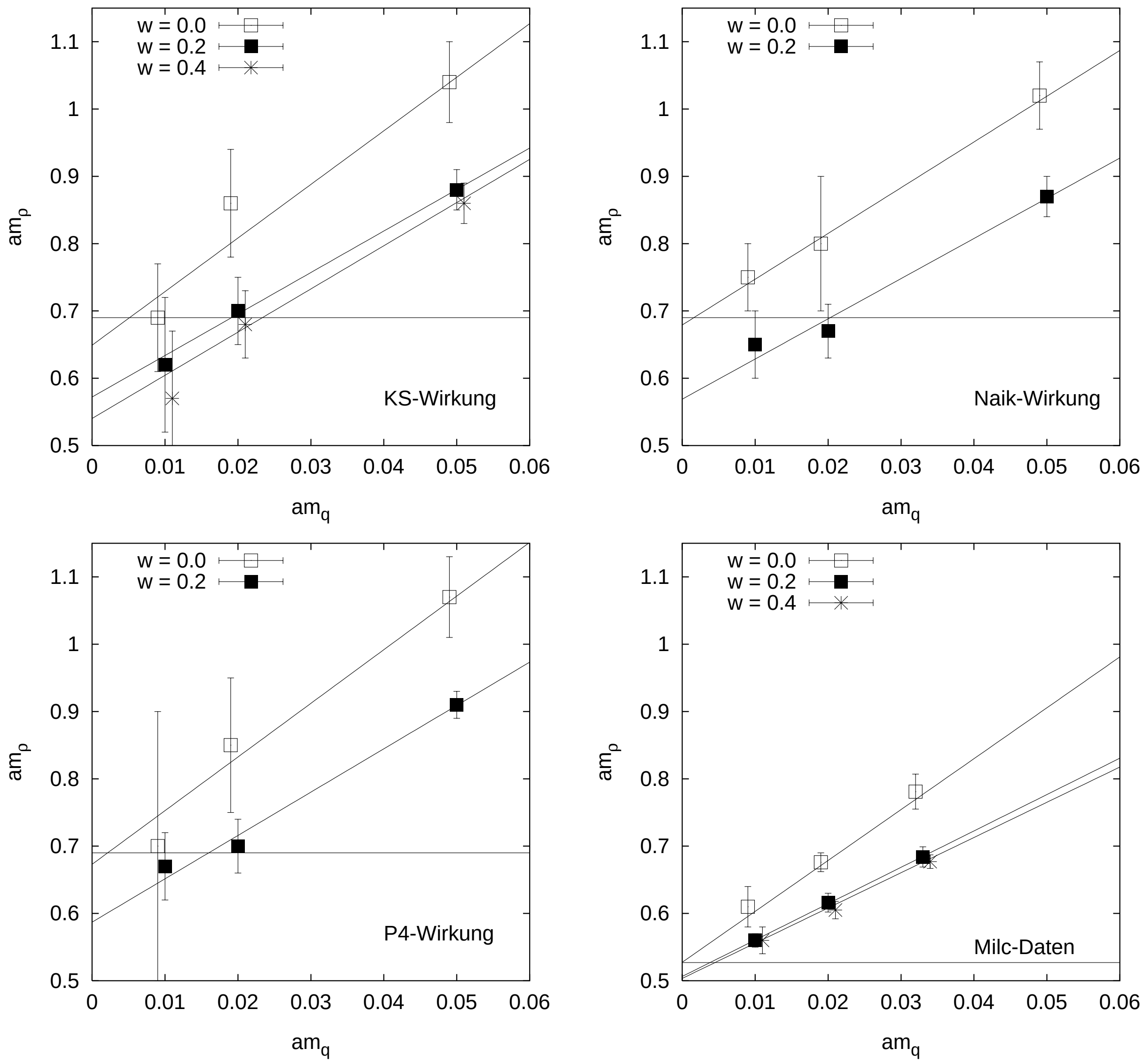


Abbildung 5.5: ρ-Massen als Funktion der nackten Quarkmasse: Die ersten drei Plots zeigen die ρ-Masse (Operator 4) für jeweils eine Fermion-Wirkung, auf Standard- und Fat-Link-Konfigurationen gemessen. w bezeichnet das Fat-Weight ω. Die horizontale Linie zeigt einen Vergleichswert, der aus experimentellen Daten und der Gitter-String-Tension bestimmt wurde. Der vierte Plot zeigt die Daten der Milc-Collaboration für die Kogut-Susskind-Wirkung. Der veränderte Vergleichswert der ρ-Masse geht auf den abweichenden β-Wert zurück.

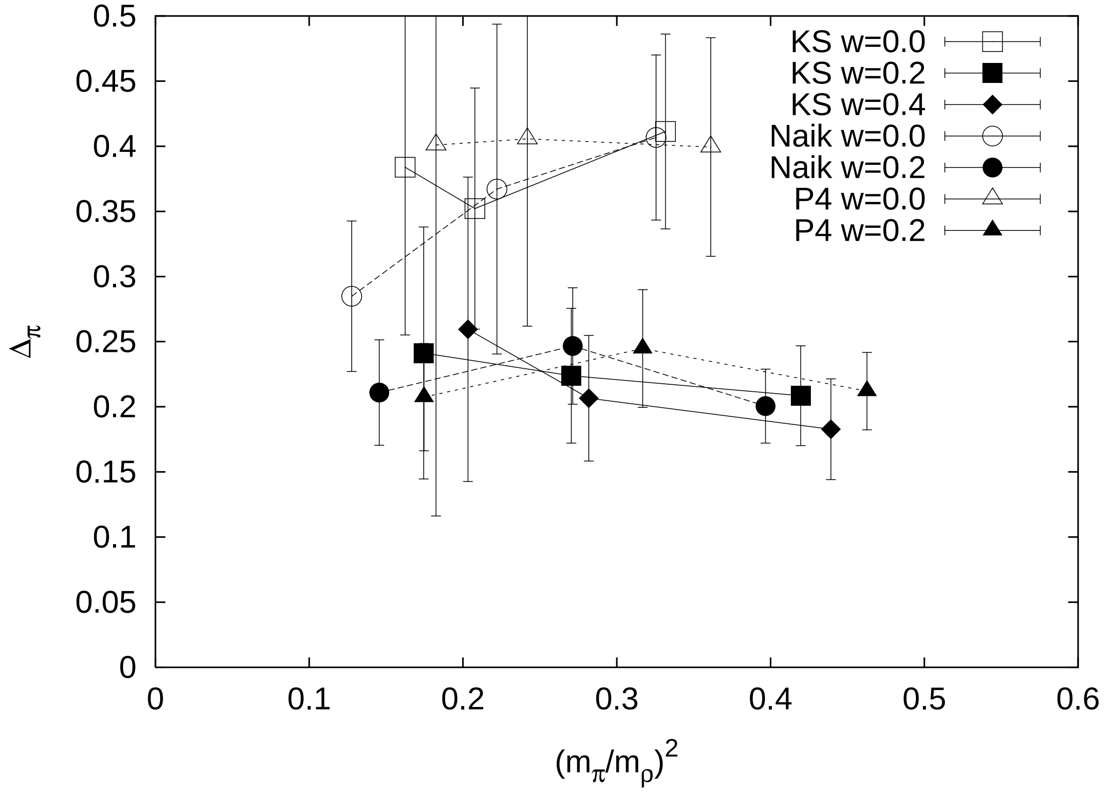


Abbildung 5.6: Verletzung der Flavoursymmetrie für die verschiedenen Wirkungen. Geplottet ist Δ_π gegen $(m_\pi/m_\rho)^2$, was die physikalische Quarkmasse angibt. Dargestellt sind Werte für Kogut-Susskind, Naik und P4-Wirkung, jeweils mit Standard- und Fat-Link-Operatoren. w bezeichnet das Fat-Weight ω.

daher beschränken wir uns für Naik- und P4-Wirkung auf einen Wert von ω.

Die MILC-Collaboration hat in [15] ebenfalls den Einfluß von Fat-Links untersucht. Die Daten sind aufgrund der abweichenden Eichwirkungen und β-Werte nicht direkt vergleichbar, bestätigen aber den beobachteten Effekt von Fat-Links auf die Flavour-Symmetrie.

Bei einem Vergleich von Kogut-Susskind und Naik-Wirkung [16] ergibt sich, daß es bei Verwendung derselben Eichwirkung keinen wesentlichen Unterschied gibt.

Der Vergleich mit Literaturergebnissen bestätigt unsere Resultate. Außerdem ermöglicht er eine Untersuchung, welchen Einfluß verschiedene Eichwirkungen auf die Flavoursymmetrie haben.

Dazu betrachten wir die Kogut-Susskind- und Naik-Wirkungen jeweils mit Standard-, Tree-Level verbesserten und 1-Loop-Tadpole verbesserten Eichfeldern. Die Resultate zeigt Abb. 5.7.

Hier ist eine andere Darstellung gewählt, bei der die Quarkmasse $(m_\pi/m_\rho)^2$ konstant gehalten wird. Zu jedem β-Wert wird ein Plot der Δ_π gegen m_π/m_ρ erstellt und ein Wert für $m_\pi/m_\rho = 0.5$ interpoliert. Genauso wird am_ρ ermittelt. Dieses Punktepaar wird benutzt, verschiedene Wirkungen zu vergleichen. Da unsere gesamten Messungen bei $\beta = 4.1$ vorgenommen sind, erhalten wir jeweils einen Punkt.

Wo ausreichend viele Datenpunkte vorhanden sind, ist eine gefittete Ursprungsgerade eingezeichnet. Die gute Verträglichkeit mit den Daten zeigt, daß Δ_π im Kontinuumlimes verschwindet und damit die theoretische Erwartung erfüllt, daß die Pionen selbst bei endlicherQuarkmasse im Kontinuumlimes massenentartet sind.

Das Bild unterscheidet sich bei Naik- und Kogut-Susskind-Wirkung praktisch nicht. Die 1-Loop-Tadpole verbesserte Wirkung zeigt eine deutlich kleinere Verletzung der Flavoursymmetrie als die Standard-Eichwirkung. Die Tree-level-verbesserte Wirkung liegt dazwischen, nur wenig schlechter als die 1-Loop-Tadpole-Wirkung. Hier sind weitere Rechnungen bei anderen β-Werten notwendig, um dieses Resultat zu verifizieren.

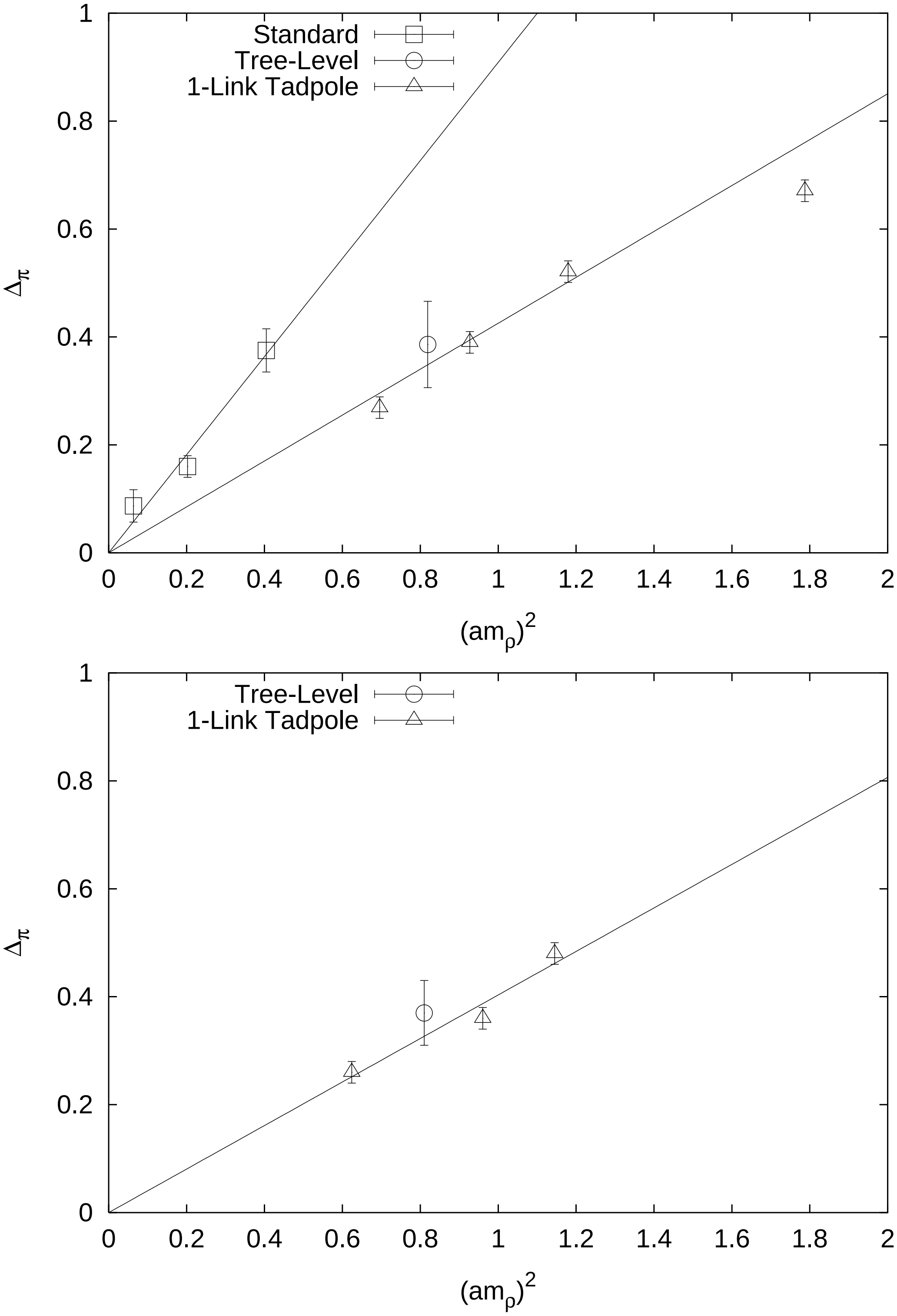


Abbildung 5.7: Verletzung der Flavoursymmetrie für die Kogut-Susskind-Wirkung (oben) und für die Naik-Wirkung (unten) mit verschiedenen Eichwirkungen. Geplottet ist Δ_π gegen den Gitterabstand am_ρ bei konstanter Quarkmasse ($m_\pi/m_\rho = 0.5$). Die Daten zur Tree-Level-verbesserten Wirkung stammen aus dieser Arbeit, die übrigen aus [15], [8], [7] und [16]

Zusammenfassung

Die Arbeit untersucht den Einfluß von verschiedenen verbesserten Wirkungen auf die Flavoursymmetrie im Rahmen der Kogut-Susskind-Formulierung.

In einer analytischen Rechnung werden verschiedene Wirkungen auf ihren Flavourgehalt untersucht. Dazu werden sie von der Gitterformulierung in den $\bar{\chi}$, χ-Feldern in die Spinor-Flavour-Notation $q^{a\alpha}$ übertragen.

Dabei zeigt sich, daß die Naik-Wirkung und die Luo-verbesserten Felder die Flavoursymmetrie nicht weniger verletzen als die Standard-Wirkung.

Außerdem liegt eine Darstellung in den $\bar{\chi}, \chi$-Feldern vor für die 7 Basisoperatoren für eine $O(a^2)$-verbesserte Kogut-Susskind-Wirkung nach Luo. Es wird deutlich, wie P4-, Naik- und Fat-Link-Verbesserung in diesem Schema erfaßt werden.

Die Brechung der Flavoursymmetrie äußert sich im Teilchenspektrum, insbesondere im Pionsplitting. Die numerische Analyse ermittelt daraus die Verletzung der Flavoursymmetrie.

Die Ergebnisse zeigen, daß Naik- und P4-Wirkung praktisch keinen Einfluß auf die Flavoursymmetrie haben. Die Verwendung von Fat-Links dagegen führt zu einer Verbesserung. Die Verletzung der Flavoursymmetrie wird auf etwa 50% reduziert, wenn man sie durch Δ_π ausdrückt (Gl. 5.1).

Im Vergleich mit Literaturdaten wurde auch der Einfluß verbesserter Eichwirkungen auf die Flavoursymmetrie untersucht. Sie ist am stärksten verletzt für die Standard-, weniger für die Tree-level- und die 1-Loop-Tadpole-verbesserte Eichwirkung.

Anhang A

Nebenrechnungen

A.1 Rechnungen zur Kogut-Susskind-Wirkung

Hier folgen Beweise und einige Zwischenergebnisse zur Standard-Formulierung der Kogut-Susskind-Wirkung.

Wir benötigen die folgenden Hilfsrelationen. Sie sind alle durch einfaches Einsetzen nachzurechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\ \mathrm{tr}\ (\gamma^{\xi'\,\dagger}\gamma^{\xi}) &= \delta_{\xi',\xi} && \text{(A.1)}\\
\gamma_\mu\gamma^{\xi} &= \eta_\mu(\xi)\,\gamma^{\xi\oplus\hat{\mu}} && \text{(A.2)}\\
\gamma_\mu\gamma^{\xi} &= (-1)^{|\xi|}\,(-1)^{\xi_\mu}\,\gamma^{\xi}\gamma_\mu && \text{(A.3)}\\
&\quad \text{mit } |\xi| = \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 &&\\
\gamma_5\gamma^{\xi} &= (-1)^{|\xi|}\,\gamma^{\xi}\gamma_5 && \text{(A.4)}\\
\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\xi',\xi} &= \Gamma^{\mu}_{\xi',\xi}\,(\delta_{\xi_\mu,0}\ -\ \delta_{\xi_\mu,1}) && \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

Mit Gl. A.1,A.2 wird Gl. 2.5 gezeigt:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}_{\xi',\xi} &= \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}\ (\gamma^{\xi'\dagger}\gamma_\mu\gamma^{\xi})\\
&= \frac{1}{4}\eta_\mu(\xi)\ \mathrm{tr}\ (\gamma^{\xi'\dagger}\gamma^{\xi\oplus\hat{\mu}})\\
&= \eta_\mu(\xi)\ \bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}}
\end{aligned}$$

Für Gl. 2.6 benötigt man zusätzlich Gl. A.3, A.4. Relation 2.7 folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi',\xi}\ \bar{\chi}_{\xi'}(y)\ \Gamma^{\mu}_{\xi',\xi}\ \chi_\xi(y)\\
=\ &\sum_{\xi',\xi}\ \bar{\chi}_{\xi'}(y)\ \frac{1}{4}\ \mathrm{tr}\ (\gamma^{\xi'\,\dagger}\,\gamma_\mu\,\gamma^{\xi})\chi_\xi(y)\\
=\ &\sum_{\xi',\xi}\ \bar{\chi}_{\xi'}(y)\ \left(\frac{1}{4}\ (\gamma^{\xi'\,\dagger})^{a\alpha}\,\gamma_\mu^{\alpha\beta}\,\gamma^{\xi\,\beta b}\mathbb{1}^{\,ba}\right)\chi_\xi(y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\,(\sum_{\xi'} \bar{\chi}_{\xi'}(y)(\gamma^{\xi'\,\dagger})^{a\alpha})\;\gamma_\mu^{\alpha\beta}\;\mathbb{1}^{ba}(\sum_{\xi} \gamma^{\xi,\,\beta b}\;\chi_\xi(y)\,)\\
&= 16\;\bar{q}^{a\alpha}(y)\;\gamma_\mu^{\alpha\beta}\;\mathbb{1}^{ba}\;q^{\beta b}(y)\\
&= 16\;\bar{q}(y)\;(\gamma_\mu\,\otimes\,\mathbb{1})\;q(y)
\end{aligned}
$$

Der Beweis von Gl. 2.8 geht analog. Eine weitere nützliche Relation ist:

$$
\sum_y\,(\mathrm{D}_\mu\,f(y)\,)\;g(y)\;=\;-\sum_y\;f(y)\;\mathrm{D}_\mu\,g(y)
$$

Der Beweis wird durch einfaches Nachrechnen geführt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_y\,(\mathrm{D}_\mu\,f(y)\,)\;g(y)\\
=\;&\sum_y\,\frac{1}{4a}(\,f(y+\hat{\mu})\,g(y)\,)\;-\;\sum_y\,\frac{1}{4a}(\,f(y-\hat{\mu})\,g(y)\,)\\
=\;&\sum_y\,\frac{1}{4a}(\,f(y)\,g(y-\hat{\mu})\,)\;-\;\sum_y\,\frac{1}{4a}(\,f(y)\,g(y+\hat{\mu})\,)\\
=\;&-\sum_y\;f(y)\;\mathrm{D}_\mu\,g(y)
\end{aligned}
$$

Mit diesen Relationen wird die eigentliche Rechnung relativ kurz. Wir betrachten zuerst den kinetischen Term in der Wirkung und schreiben die Felder um:

$$
\begin{aligned}
\sum_x\;\bar{\chi}(x)\,\chi(x+\hat{\mu})\;&=\;\sum_{y,\xi}\;\bar{\chi}(y+\xi)\,\chi(y+\xi+\hat{\mu})\\
&=\;\sum_{y,\xi',\xi}\;\bar{\chi}(y+\xi')\,\delta_{\xi',\xi}\,\chi(y+\xi+\hat{\mu})\\
&=\;\sum_{y,\xi',\xi}\;\bar{\chi}(y+\xi')\,\delta_{\xi',\xi}\,(\;\;\delta_{\xi_\mu,0}\,\chi(y+(\xi+\hat{\mu}))\\
&\qquad\qquad\qquad +\,\delta_{\xi_\mu,1}\,\chi((y+2\hat{\mu})+(\xi-\hat{\mu}))\;)\\
&=\;\sum_{y,\xi',\xi}\;\bar{\chi}_{\xi'}(y)\,\delta_{\xi',\xi}\,(\delta_{\xi_\mu,0}\,\chi_{\xi+\hat{\mu}}(y)+\delta_{\xi_\mu,1}\,\chi_{\xi-\hat{\mu}}(y+2\,\hat{\mu}))\\
&=\;\sum_{y,\xi',\xi}\;\bar{\chi}_{\xi'}(y)\,(\;\;\delta_{(\xi-\hat{\mu})_\mu,0}\,\delta_{\xi',\xi-\hat{\mu}}\,\chi_\xi(y)\\
&\qquad\qquad +\,\delta_{(\xi+\hat{\mu})_\mu,1}\,\delta_{\xi',\xi+\hat{\mu}}\,\chi_\xi(y+2\,\hat{\mu})\\
&=\;\sum_{y,\xi',\xi}\;\bar{\chi}_{\xi'}(y)\;\bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}}\;(\,\delta_{\xi_\mu,0}\,\chi_\xi(y+2\,\hat{\mu})\;+\;\delta_{\xi_\mu,1}\,\chi_\xi(y))
\end{aligned}
$$

Das $\delta_{\xi_\mu,1/0}$ unterscheidet dabei zwischen den Fällen, in denen $y+\xi+\hat{\mu}$ in einem anderen bzw. im selben Hyperkubus liegt wie $y+\xi$.

Analog gilt für den zweiten Term der Summe:

$$
\sum_x\;\bar{\chi}(x)\,\chi(x-\hat{\mu})=\sum_{y,\xi',\xi}\;\bar{\chi}_{\xi'}(y)\;\bar{\delta}_{\xi',\xi\oplus\hat{\mu}}\;(\,\delta_{\xi_\mu,0}\,\chi_\xi(y)\;+\;\delta_{\xi_\mu,1}\,\chi_\xi(y-2\,\hat{\mu}))
$$

Damit finden wir für den kinetischen Term in der Wirkung:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{x,\mu} a^4\, \eta_\mu(x)\, \bar\chi(x)\, \frac{1}{2a}\Big[\chi(x+\hat\mu) - \chi(x-\hat\mu)\Big] \\
= & \sum_{y,\mu,\xi',\xi} a^4\, \bar\chi_{\xi'}(y)\, (\eta_\mu(\xi)\, \bar\delta_{\xi',\xi\oplus\hat\mu})\, \frac{1}{2a}\Big[\, \delta_{\xi_\mu,0}\, (\chi_\xi(y+2\,\hat\mu) - \chi_\xi(y)\,) \\
& \qquad + \delta_{\xi_\mu,1}\, (\chi_\xi(y) - \chi_\xi(y-2\,\hat\mu)\,)\Big] \\
= & \sum_{y,\mu,\xi',\xi} a^4\, \bar\chi_{\xi'}(y)\, \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, \frac{1}{2a}\, \Big[\frac{1}{2}\, (\delta_{\xi_\mu,0} + \delta_{\xi_\mu,1})\, (\chi_\xi(y+2\,\hat\mu)\; - \;\chi_\xi(y-2\,\hat\mu)) \\
& \qquad + \frac{1}{2}\, (\delta_{\xi_\mu,0} - \delta_{\xi_\mu,1})\, (\chi_\xi(y+2\,\hat\mu)\; - 2\,\chi_\xi(y))\; + \;\chi_\xi(y-2\,\hat\mu))\Big] \\
= & \sum_{y,\mu,\xi',\xi} a^4\, \bar\chi_{\xi'}(y)\, \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, \Big[(\delta_{\xi_\mu,0} + \delta_{\xi_\mu,1})\, \mathrm{D}_\mu\; + \;(\delta_{\xi_\mu,0} - \delta_{\xi_\mu,1}) a\, \Delta_\mu\Big]\, \chi_\xi(y) \\
= & \sum_{y,\mu,\xi',\xi} a^4\, \bar\chi_{\xi'}(y)\, [\, \Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, \mathrm{D}_\mu\; + \; a\, \tilde\Gamma^\mu_{\xi',\xi}\, \Delta_\mu\,]\, \chi_\xi(y) \\
= & \sum_{y,\mu} (2a)^4\, \bar q(y)\, [(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})\, \mathrm{D}_\mu\; + \; a\, (\gamma_5 \otimes t_{\mu 5})\, \Delta_\mu] q(y)
\end{aligned}
$$

Der Massenterm läßt sich einfach umschreiben:

$$
\begin{aligned}
\sum_x a^4\, m\, \bar\chi(x)\, \chi(x) \quad &= \sum_{y,\xi',\xi} a^4\, m\, \bar\chi_{\xi'}(y)\, \delta_{\xi',\xi}\, \chi_\xi(y) \\
&= \sum_{y,\xi',\xi} \frac{1}{4}\, a^4\, m\, \bar\chi_{\xi'}(y)\;\; \mathrm{tr}\, (\gamma^{\xi',\dagger}\gamma^{\xi})\, \chi_\xi(y) \\
&= \sum_y 16 a^4\, m\, \bar q(y) (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) q(y)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Gleichung 2.9 gezeigt.

Abschließend folgt die Fouriertransformation der Kogut-Susskind-Wirkung. Zunächst betrachten wir Quarkfelder und Differentialoperatoren:

$$
\begin{aligned}
q(y) \quad &= \quad \frac{(2\pi)^4}{\Omega}\, \sum_p\, e^{i\,2a\,py}\, \tilde q(p) \\
\bar q(y) \quad &= \quad \frac{(2\pi)^4}{\Omega}\, \sum_p\, e^{-i\,2a\,py}\, \tilde{\bar q}(p) \\
\mathrm{D}_\mu\, q(y) \quad &= \quad \frac{1}{4a}\, \frac{(2\pi)^4}{\Omega}\, \sum_p\, (e^{i\,2a\,(y+\hat\mu)p}\; - \; e^{i\,2a\,(y-\hat\mu)p})\, \tilde q(p) \\
&= \quad \frac{(2\pi)^4}{\Omega}\, \frac{1}{4a}\, \sum_p\, e^{i\,2a\,yp}\, [\exp(i\,2a\,\hat\mu p)\; - \; \exp(-i\,2a\,\hat\mu p)\,]\, \tilde q(p) \\
&= \quad \frac{(2\pi)^4}{\Omega}\, \sum_p\, \exp(i\,2a\,yp)\, \frac{i}{2a}\, \sin(2a\,p_\mu)\, \tilde q(p)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu\, q(y) &= \frac{1}{4a}\frac{(2\pi)^4}{\Omega} \sum_p \exp(i\,2a\,yp)\,[\exp(i\,2a\,p_\mu) \;+\; \exp(-i\,2a\,p_\mu) \;-\; 2]\;\tilde{q}(p) \\
&= \frac{(2\pi)^4}{\Omega} \sum_p \exp(i\,2a\,yp)\,\frac{1}{2a}\,(\cos(2a\,p_\mu) \;-\; 1)\;\tilde{q}(p) \\
&= -\frac{(2\pi)^4}{\Omega} \sum_p \exp(i\,2a\,yp)\,\frac{1}{a}\,(\sin^2(a\,p_\mu)\,)\;\tilde{q}(p)
\end{aligned}$$

Damit transformieren die einzelnen Terme der Wirkung wie folgt:

Der Massenterm:

$$\begin{aligned}
&\sum_y m\,\bar{q}(y)\,q(y) \\
=\;& \left(\frac{(2\pi)^4}{\Omega}\right)^2 \sum_{y,p,p'} m\;\exp(i\,2a\,(p'-p)\,y)\;\tilde{\bar{q}}(p')\tilde{q}(p) \\
=\;& \frac{(2\pi)^4}{\Omega}\sum_{p,p'} m\;\delta_{p',p}\;\tilde{\bar{q}}(p')\tilde{q}(p) \\
=\;& \frac{(2\pi)^4}{\Omega} m\;\sum_p\;\tilde{\bar{q}}(p)\tilde{q}(p)
\end{aligned}$$

Der flavourdiagonale Teil des kinetischen Terms:

$$\begin{aligned}
&\sum_{y,\mu} \bar{q}(y)\;(\gamma_\mu\otimes \mathbb{1})\;\mathrm{D}_\mu\,q(y) \\
=\;& \left(\frac{(2\pi)^4}{\Omega}\right)^2 \sum_{y,p,p',\mu} \tilde{\bar{q}}(p)\;(\gamma_\mu\otimes \mathbb{1})\;(\frac{i}{2a}\sin(2a\,p'_\mu))\;\exp(i\,2a\,(p'-p)y)\;qt(p) \\
=\;& \frac{(2\pi)^4}{\Omega}\sum_{p,\mu}(\frac{i}{2a}\sin(2a\,p_\mu))\;\tilde{\bar{q}}(p)\;(\gamma_\mu\otimes \mathbb{1})\;\tilde{q}(p)
\end{aligned}$$

Analog für den flavourbrechenden Term:

$$\begin{aligned}
&\sum_{y,\mu} \bar{q}(y)\;(\gamma_5\otimes t_{\mu 5})\;\Delta_\mu\,q(y) \\
=\;& -\frac{(2\pi)^4}{\Omega}\sum_{p,\mu}(\frac{1}{a}\sin^2(a\,p_\mu))\tilde{\bar{q}}(p)\;(\gamma_5\otimes t_{\mu 5})\;\tilde{q}(p)
\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung 3.4 gezeigt.

A.2 Beispiele zu den Luo-Operatoren

Als erstes Beispiel führen wir die Rechnung zu $\mathcal{O}_7$ im Standard-Formalismus aus Abschnitt 3.4 vor:

$$\mathcal{O}_7 \;=\; \sum_{y',y,\xi',\xi} m\,\bar{\chi}(y')\,\mathrm{D}^2(y',y)\,U(y'+\xi';y+\xi)\,\chi(y)$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \sum_{y',y'',y,\xi',\xi} m\, \bar{\chi}(y')\, \overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})} \Big[\overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}\, \mathrm{D}_\mu(y',y'') \;+\; a\overline{(\gamma_{5\mu} \otimes t_{\mu 5})}\, \Delta_\mu(y',y'') \Big] \\
& \qquad \times \overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})} \Big[\overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}\, \mathrm{D}_\mu(y'',y) \;+\; a\overline{(\gamma_{5\mu} \otimes t_{\mu 5})}\, \Delta_\mu(y'',y) \Big] \\
& \qquad\qquad U(y'+\xi'; y+\xi)\, \chi(y) \\
= \quad & \sum_{y',y'',y,\xi',\xi} m\, \bar{\chi}_{\xi'}(y') \Big[\overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}\, \frac{1}{4a} (\delta(y' + 2\hat{\mu} - y'') - \delta(y' - 2\hat{\mu} - y'')) \\
& \qquad + a\, \overline{(\gamma_5 \otimes t_{\mu 5})}\, \frac{1}{4a^2} (\delta(y' + 2\hat{\mu} - y'') \\
& \qquad\qquad + \delta(y' - 2\hat{\mu} - y'') - 2\,\delta(y' - y'')) \Big] \\
& \qquad \times \Big[\overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}\, \frac{1}{4a} (\delta(y'' + 2\hat{\mu} - y) - \delta(y'' - 2\hat{\mu} - y)) \\
& \qquad + a\, \overline{(\gamma_5 \otimes t_{\mu 5})}\, \frac{1}{4a^2} (\delta(y'' + 2\hat{\mu} - y) \\
& \qquad\qquad + \delta(y'' - 2\hat{\mu} - y) - 2\,\delta(y'' - y)) \Big] \\
& \qquad\qquad U(y'+\xi'; y+\xi)\, \chi(y) \\
= \quad & \sum_{y',y,\xi',\xi} m\, \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \frac{1}{16a^2} \sum_\mu \\
& \Big[\quad \overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})} \Big(\delta(y' + 4\hat{\mu} - y) - 2\,\delta(y' - y)) + \delta(y' - 4\hat{\mu} - y) \Big) \\
& + \overline{(\gamma_{\mu 5} \otimes t_{\mu 5})} \Big(\delta(y' + 4\hat{\mu} - y) - 2\,\delta(y' + 2\hat{\mu} - y) \\
& \qquad + 2\,\delta(y' - 2\hat{\mu} - y) - \delta(y' - 4\hat{\mu} - y) \Big) \\
& + \overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})} \Big(\delta(y' + 4\hat{\mu} - y) - 4\,\delta(y' + 2\hat{\mu} - y) + 6\,\delta(y' - y) \\
& \qquad - 4\,\delta(y' - 2\hat{\mu} - y) + \delta(y' - 4\hat{\mu} - y) \Big) \\
& - \overline{(\gamma_{\mu 5} \otimes t_{\mu 5})} \Big(\delta(y' + 4\hat{\mu} - y) - 2\,\delta(y' + 2\hat{\mu} - y) \\
& \qquad + 2\,\delta(y' - 2\hat{\mu} - y) - \delta(y' - 4\hat{\mu} - y) \Big) \Big] \\
& \qquad\qquad U(y'+\xi'; y+\xi)\, \chi(y) \\
= \quad & \sum_{y',y,\xi',\xi} m\, \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \frac{1}{16a^2} \sum_\mu \\
& \Big[\overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})} \Big(4\,\delta(y' + 2\hat{\mu} - y) - 8\,\delta(y' - y) + 4\,\delta(y' - 2\hat{\mu} - y) \Big) \Big] \\
& \qquad\qquad U(y'+\xi'; y+\xi)\, \chi(y) \\
= \quad & \sum_{y',\xi'} m\, \bar{\chi}_{\xi'}(y')\, \frac{4}{16a^2} \sum_\mu \Big[\quad U(y' + \xi';\, y' + 2\hat{\mu} + \xi')\, \chi_{\xi'}(y' + 2\hat{\mu} + \xi')
\end{aligned}
$$

$$- 2\,U(y' + \xi';\, y' + \xi')\,\chi_{\xi'}(y' + \xi')$$
$$+ U(y' + \xi';\, y' - 2\hat{\mu} + \xi')\,\chi_{\xi'}(y' - 2\hat{\mu} + \xi')\Big]$$

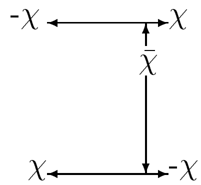
$$= \sum_{x,\mu} m\,\bar{\chi}(x)\,\frac{1}{4a}\Big(U(x, x + 2\hat{\mu})\,\chi(x + 2\hat{\mu}) - 2\,\chi(x) + U(x, x - 2\hat{\mu})\,\chi(x - 2\hat{\mu})\Big)$$

Wie man sieht, fallen die Terme in $\overline{(\gamma_{\mu 5} \otimes t_{\mu 5})}$ weg, es bleiben nur Ausdrücke in $\overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})} = \delta_{\xi',\xi}$ stehen: in allen Hyperkuben werden nur Positionen mit gleichem Index ξ verknüpft. Diese Beonderheit hat die Rechnung stark vereinfacht.

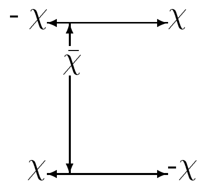
Unter Verwendung der vereinbarten graphischen Darstellung führen wir die Rechnung für $\mathcal{O}_6$ vor. Die Koordinaten sind so gewählt, daß die $\hat{\mu}$-Richtung nach rechts und die $\hat{\nu}$-Richtung nach oben weisen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_6 &= \sum_{y',y,\xi',\xi} m\,\bar{\chi}_{\xi'}(y')\,\not{D}^2{}_{\xi',\xi}(y', y)\,U(y' + \xi'; y + \xi)\,\chi_{\xi}(y) \\
&= \sum_{y',y'',y,\xi',\xi,\mu,\nu} m\,\bar{\chi}(y')\,\overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}\Big[\overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}\,\mathrm{D}_\mu(y', y'') + a\overline{(\gamma_{5\mu} \otimes t_{\mu 5})}\,\Delta_\mu(y', y'')\Big] \\
&\qquad \times \overline{(\gamma_\nu \otimes \mathbb{1})}\Big[\overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}\,\mathrm{D}_\nu(y'', y) + a\overline{(\gamma_{5\nu} \otimes t_{\nu 5})}\,\Delta_\nu(y'', y)\Big] \\
&\qquad U(y' + \xi'; y + \xi)\,\chi(y) \\
&= \sum_{y',y,\xi',\xi,\mu,\nu} m\,\bar{\chi}_{\xi'}(y')\Big[\ \overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}\,\mathrm{D}_\mu(y', y'')\,\overline{(\gamma_\nu \otimes \mathbb{1})}\,\mathrm{D}_\nu(y'', y) \\
&\qquad + a\,\overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}\,\mathrm{D}_\mu(y', y'')\,\overline{(\gamma_5 \otimes t_{\nu 5})}\,\Delta_\nu(y'', y) \\
&\qquad + a\,\overline{(\gamma_5 \otimes t_{\mu 5})}\,\Delta_\mu(y', y'')\overline{(\gamma_\nu \otimes \mathbb{1})}\,\mathrm{D}_\nu(y'', y) \\
&\qquad + a\,\overline{(\gamma_5 \otimes t_{\mu 5})}\,\Delta_\mu(y', y'')\overline{(\gamma_5 \otimes t_{\nu 5})}\,\Delta_\nu(y'', y)\Big] \\
&\qquad U(y' + \xi'; y + \xi)\,\chi(y)
\end{aligned}$$

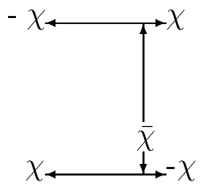
$$= \sum_{\mu,\nu,y} \frac{m}{16a^2}\Big[\ \delta_{\xi_\nu,0}\,\delta_{\xi_\mu,0}$$



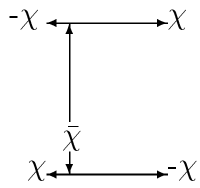
$$+ \ \delta_{\xi_\nu,0}\,\delta_{\xi_\mu,1}$$

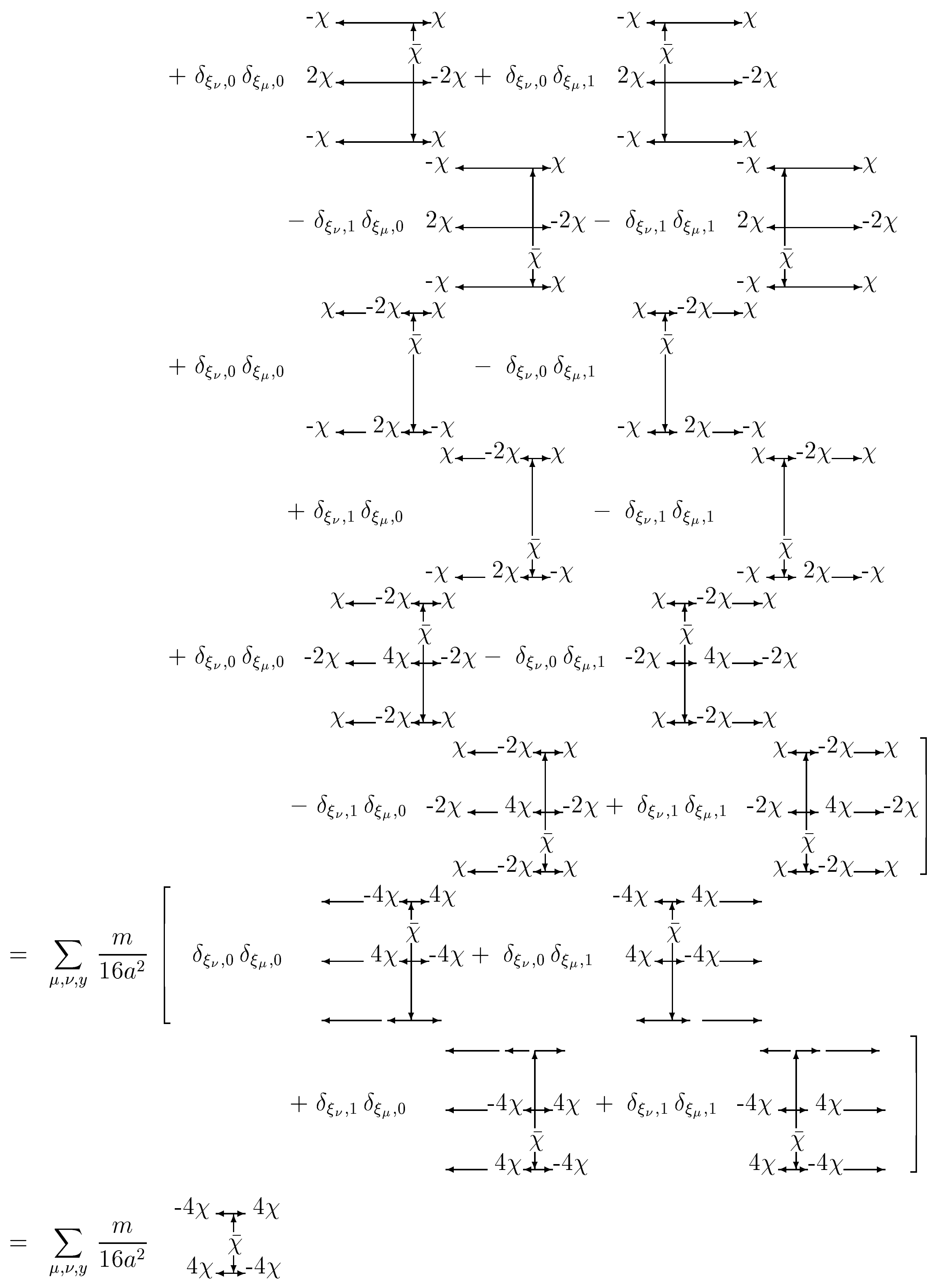


$$+ \ \delta_{\xi_\nu,1}\,\delta_{\xi_\mu,0}$$



$$+ \ \delta_{\xi_\nu,1}\,\delta_{\xi_\mu,1}$$





Der wesentliche Schritt ist dabei der dritte: jede der vier Zeilen ist in graphische

Notation übersetzt, wobei jeweils vier verschiedene Fälle für die μ, ν-Komponenten von ξ unterschieden werden. Damit sind auch ${\xi'}_{\mu,\nu}$ bekannt.

Die einzelnen Terme werden konstruiert, indem zunächst der erste Ableitungsoperator (in ν-Richtung) mit den ν-Komponenten der Hyperkuben-Indizes kombiniert wird: ${\xi'}_\nu$ verschiebt die Position von $\bar{\chi}$ gegenüber dem Mittelpunkt des Differentialoperators, und ξ_ν wird an den Enden addiert, um den Ansatzpunkt für den zweiten Differentialoperator zu finden. In μ-Richtung wird das Verfahren wiederholt.

Zusammenfassen der Beiträge zeigt, daß das Ergebnis unabhängig von $\xi_{\mu,\nu}$ ist, also unabhängig von der Position im Hyperkubus.

In der Summe über alle y ist der Volumenfaktor $(2a)^4$. Gekürzt gegen den Vorfaktor von $1/16$ bleibt a^4, das korrekte Volumenelement der Summe über die x gehört.

Anhang B

Numerische Ergebnisse

Die folgende Tabelle enthält die untersuchten Operatoren. Die Summation über alle x ist zu ergänzen, Δ_i bedeutet $\Delta_i\chi(\vec{x},t) = 1/2[\chi(\vec{x}+\hat{\imath},t)+\chi(\vec{x}-\hat{\imath},t)]$. Die verschiedenen Vorzeichenfaktoren sind wie folgt definiert: $\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1+\ldots+x_{\mu-1}}$, $\zeta_\mu(x) = (-1)^{x_{\mu+1}+\ldots+x_4}$, $\epsilon(x) = (-1)^{x_1+\ldots+x_4}$.

Es ist jeweils die Klassifizierung nach (GTS) angegeben (vgl. Abschnitt 4.1.2): $r^{\sigma_s\sigma_{123}}, \tau_0$, mit $\sigma_s, \sigma_{123}, \tau_0$ Quantenzahlen zu I_s, X_{123} und C_0.

Alle diese Operatoren regen Zustände mit $\sigma_t = +, -$ an. Daher haben wir jeweils zwei Teilchenzustände, für die das entsprechende Meson und eine Klassifizierung nach (J_F^{PC}) und angegeben sind. Das F steht für die Darstellung der Flavour-Grupe, Singulett (S) oder adjungiert (A). P ist die Parität, C die Ladungskonjugation.

Operator			σ_t=+		$\sigma_t = -$	
Nr	Operator	(GTS)	Zustand	Meson	Zustand	Meson
1	$\bar{\chi}\chi$	$1^{++},+$	0_S^{++}	f_0	0_A^{-+}	π
2	$\eta_4\zeta_4\,\bar{\chi}\chi$	$1^{+-},+$	0_A^{+-}	–	0_A^{-+}	π
3	$\eta_i\epsilon\zeta_i\,\bar{\chi}\chi$	$3''''^{+-},+$	1_A^{++}	a_1	1_A^{--}	ρ
4	$\eta_4\zeta_4\,\eta_i\epsilon\zeta_i\,\bar{\chi}\chi$	$3''''^{+-},+$	1_A^{+-}	b_1	1_A^{--}	ρ
5	$\bar{\chi}\eta_i\Delta_i\chi$	$3^{-+},-$	1_S^{--}	ω	1_A^{+-}	b_1
6	$\eta_4\zeta_4\,\bar{\chi}\eta_i\Delta_i\chi$	$3^{--},+$	1_A^{--}	ρ	1_A^{++}	a_1
7	$\bar{\chi}\epsilon\zeta_i\Delta_i\chi$	$3''^{--},+$	0_A^{-+}	π	0_A^{+-}	–
8	$\eta_4\zeta_4\,\bar{\chi}\epsilon\zeta_i\Delta_i\chi$	$3''^{-+},-$	0_A^{-+}	π	0_A^{++}	a_0
9	$\eta_i\epsilon\zeta_i\,\bar{\chi}\eta_j\Delta_j\chi$	$6^{--},-$	1_A^{--}	ρ	1_A^{++}	a_1
10	$\eta_4\zeta_4\,\eta_i\epsilon\zeta_i\,\bar{\chi}\eta_j\Delta_j\chi$	$6^{-+},+$	1_A^{--}	ρ	1_A^{+-}	b_1

Die folgenden Tabellen enthalten zu den Quarkmassen am_q= 0.05, 0.02 und 0.01 die Ergebnisse für die Massen der untersuchten Teilchen für die verschiedenen Wirkungen.

Wirkung	**Std**			**Naik**		**P4**	
Fat-Weight ω	0	0.2	0.4	0	0.2	0	0.2
Nr_{Action}	1	2	3	4	5	6	7
lokale Mesonen							
1 f_0/π_2							
f_0	1.1(3)	1.12(8)	1.08(6)	1.1(1)	1.2(2)	1.15(8)	–
π_2	0.75(12)	0.65(2)	0.64(3)	0.79(15)	0.63(2)	0.85(15)	0.70(2)
2 $-/\pi$							
Goldstone-π	0.600(4)	0.570(3)	0.570(3)	0.582(4)	0.548(5)	0.643(4)	0.619(7)
3 a_1/ρ							
a_1	–	0.9(5)	1.0(4)	–	–	–	–
ρ	1.11(8)	0.87(3)	0.85(5)	–	0.86(2)	–	0.92(3)
4 b_1/ρ							
b_1	0.8(2)	–	–	–	–	–	0.7(2)
ρ	1.04(6)	0.88(3)	0.86(3)	1.02(5)	0.87(3)	1.07(6)	0.91(2)
1-Link Mesonen							
5 ω/b_1							
ω	1.10(5)	0.88(3)	0.88(2)	1.01(8)	0.89(2)	1.06(4)	0.93(2)
b_1	–	–	–	–	–	–	0.7(2)
6 ρ/a_1							
ρ	0.96(10)	0.9(1)	0.8(1)	0.94(4)	0.86(6)	1.0(1)	0.97(7)
a_1	0.85(15)	–	–	0.91(8)	–	0.9(2)	–
7 $\pi_2/-$							
π_2	0.81(1)	0.647(9)	0.633(9)	0.79(1)	0.626(5)	0.84(2)	0.691(6)
8 π_2/a_0							
π_2	0.84(2)	0.68(3)	0.68(2)	0.85(3)	0.68(3)	0.91(3)	0.74(3)
a_0	1.0(1)	1.1(1)	1.2(1)	1.1(1)	1.2(2)	1.18(8)	–
9 ρ/a_1							
ρ	1.15(10)	0.87(4)	0.86(5)	–	0.87(6)	1.14(6)	0.89(3)
a_1	–	–	–	–	–	0.8(2)	–
10 ρ/b_1							
ρ	0.94(5)	0.83(2)	0.86(3)	0.92(5)	0.84(4)	1.02(8)	0.88(4)
b_1	–	–	1.0(2)	0.9(5)	–	–	–
am_q =**0.05**, $\beta = 4.1$, Gittergröße $16^3 \times 30$, 57 Konfigurationen (quenched)							

Tabelle B.1: Mesonenmassen zu $am_q = 0.05$. Die ersten Zeilen geben die Wirkung an, wie üblich bedeutet $\omega = 0$ eine Messung ohne Fat-Links. Die Nummer der Wirkung Nr_{Action} paßt zu den Graphen im Abschnitt 5.2. Die Operatoren sind mit ihren Nummern bezeichnet und in der jeweils folgenden Zeile die Massen angegeben, oder ein –, falls eine Messung nicht möglich war.

Wirkung	**Std**			**Naik**		**P4**	
Fat-Weight ω	0	0.2	0.4	0	0.2	0	0.2
Nr_{Action}	1	2	3	4	5	6	7
lokale Mesonen							
1 f_0/π_2							
f_0	1.0(4)	–	1.0(2)	1.0(2)	–	1.0(1)	–
π_2	–	0.50(8)	0.45(5)	0.7(4)	0.48(6)	–	0.50(7)
2 $-/\pi$							
Goldstone-π	0.390(5)	0.364(6)	0.361(5)	0.377(5)	0.349(6)	0.418(6)	0.394(7)
3 a_1/ρ							
a_1	–	–	–	–	–	–	–
ρ	0.7(4)	0.7(1)	0.62(9)	0.6(4)	0.69(6)	0.9(3)	0.73(10)
4 b_1/ρ							
b_1	–	–	–	–	–	–	–
ρ	0.86(8)	0.70(5)	0.68(5)	0.8(1)	0.67(4)	0.85(10)	0.70(4)
1-Link Mesonen							
5 ω/b_1							
ω	1.0(2)	0.7(1)	0.75(4)	0.7(2)	0.7(1)	0.8(3)	0.77(4)
b_1	–	–	–	–	–	–	–
6 ρ/a_1							
ρ	0.7(1)	0.64(8)	0.62(8)	–	0.7(1)	0.74(10)	0.76(9)
a_1	–	–	–	–	–	–	–
7 $\pi_2/-$							
π_2	0.60(2)	0.46(1)	0.446(8)	0.57(2)	0.450(6)	0.63(3)	0.487(5)
8 π_2/a_0							
π_2	0.59(2)	0.51(4)	0.50(3)	0.61(3)	0.53(2)	0.64(5)	0.55(2)
a_0	0.7(2)	–	–	0.9(2)	–	0.9(2)	–
9 ρ/a_1							
ρ	1.1(2)	0.64(8)	0.62(8)	–	–	–	0.69(5)
a_1	–	–	–	–	–	–	–
10 ρ/b_1							
ρ	0.8(2)	0.68(3)	0.71(5)	0.65(5)	0.65(6)	0.7(1)	0.6(1)
b_1	–	–	–	–	–	–	–
am_q =**0.02**, $\beta = 4.1$, Gittergröße $16^3 \times 30$, 57 Konfigurationen (quenched)							

Tabelle B.2: Mesonenmassen zu $am_q = 0.02$. Erläuterungen vgl. B.1

Wirkung	**Std**			**Naik**		**P4**	
Fat-Weight ω	0	0.2	0.4	0	0.2	0	0.2
Nr_{Action}	1	2	3	4	5	6	7
lokale Mesonen							
1 f_0/π_2							
f_0	–	–	0.9(3)	–	–	–	–
π_2	–	0.4(2)	0.35(15)	–	0.4(1)	–	0.45(20)
2 $-/\pi$							
Goldstone-π	0.278(3)	0.259(8)	0.257(6)	0.268(7)	0.248(6)	0.299(7)	0.280(7)
3 a_1/ρ							
a_1	–	–	–	–	0.2(2)	–	0.3(2)
ρ	–	0.4(2)	0.3(2)	–	0.5(1)	–	0.6(2)
4 b_1/ρ							
b_1	–	–	–	–	–	–	–
ρ	0.69(8)	0.6(1)	0.6(1)	0.75(5)	0.65(5)	0.7(2)	0.67(5)
1-Link Mesonen							
5 ω/b_1							
ω	0.7(2)	0.6(1)	0.6(1)	–	0.4(1)	–	0.5(1)
b_1	0.3(2)	0.4(3)	–	–	–	–	–
6 ρ/a_1							
ρ	0.6(3)	0.7(2)	0.85(15)	0.7(2)	0.6(1)	–	0.6(1)
a_1	–	–	–	–	–	–	–
7 $\pi_2/-$							
π_2	0.48(3)	0.379(8)	0.365(8)	0.46(2)	0.371(6)	0.50(2)	0.394(7)
8 π_2/a_0							
π_2	0.45(2)	0.46(8)	0.42(8)	0.48(8)	0.45(9)	0.50(9)	0.48(6)
a_0	–	–	–	–	–	–	–
9 ρ/a_1							
ρ	–	0.5(1)	0.5(1)	–	0.5(1)	–	0.6(2)
a_1	–	–	–	–	–	–	–
10 ρ/b_1							
ρ	0.6(2)	0.5(1)	0.62(8)	0.6(2)	0.54(4)	0.6(1)	0.57(4)
b_1	–	–	–	–	–	–	–
am_q =**0.01**, $\beta = 4.1$, Gittergröße $16^3 \times 30$, 57 Konfigurationen (quenched)							

Tabelle B.3: Mesonenmassen zu $am_q = 0.01$. Erläuterungen vgl. B.1

Literaturverzeichnis

[1] Alford, M. et al., *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 42* (1995) 787

[2] Altmeyer, R. Diplomarbeit, 1990

[3] Beinlich, B. et. al., [hep-lat/ 9707023]

[4] Golterman, M. F. L. *Nuclear Physics B 273* (1986) 663

[5] Golterman, M. F. L. und Smit, J. *Nuclear Physics B245* (1984) 61

[6] Golterman, M. F. L. und Smit, J. *Nuclear Physics B255* (1985) 328

[7] Gupta, R., Guralnik, G. S., Kilcup, G. und Sharpe, S. R. *Physical Review D 43* (1991) 2003

[8] Ishizuka, N., Fukugita, M., Mino, M., Okawa, M. und Ukawa, A. *Nuclear Physics B 411* (1994) 875

[9] Kluberg-Stern, H. et al., *Nuclear Physics B 220* (1983) 447

[10] Kogut, J. und Susskind, L., *Physical Review D 11* (1975) 395; Banks, T., Kogut, J. und Susskind, L., *Physical Review D 13* (1976) 1043; Susskind, L., *Physical Review D 16* (1977) 3031

[11] Lepage, G. P., und Mackenzie, P. B., *Physical Review D 48* (1993) 2250

[12] Lepage, G. P., [hep-lat/ 9707026]

[13] Luo, Y., *Physical Review D 55* (1997) 353, [hep-lat/ 9604025]

[14] Luo, Y., *Physical Review D 57* (1998) 265, [hep-lat/ 9702013]

[15] MILC-Collaboration, *Physical Review D 55* (1997) 1133, [hep-lat/ 9609036]

[16] MILC-Collaboration, [hep-lat/ 9712010]

[17] Montway, I. und Münster, G., *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press (1994)

[18] MT_C-Collaboration, *Nuclear Physics B389* (1993) 445

[19] Naik, S., *Nuclear Physics B 316* (1989) 238; Heller, U. M. *priv. Comm*,

[20] Peikert, A., et al., Proceedings Lattice 97, [hep-lat/ 9709157]

[21] Symanzik, K., in Schrader (ed) *Mathematical Problems in theoretical Physics*, Springer, Berlin (1982), Symanzik, K., *Proceedings of the Trieste Workshop on Non-perturbative field theorie and QCD*, World Scientific, Singapore (1982)

[22] Weisz, P.,*Nuclear Physics B 212* (1983) 1; Weisz, P, Wohlert, R. *Nuclear Physics B 236* (1984) 397 und *Nuclear Physics B 247* (1984) 544; Lüscher, M., Weisz, P.,*Physics Letters B 158* (1985) 250

[23] Wilson, K. G., in Zichidi (ed), *New Phenomena in Subnuclear Physics*, Plenum, New York (1975)

Danksagung

Diese Arbeit wurde unter Anleitung von Dr. Edwin Laermann durchgeführt. Ich danke ihm für die hervorragende Betreuung, insbesondere seine unerschöpfliche Geduld bei der Beantwortung meiner Fragen.

Weiterer Dank gilt den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe, insbesondere Martin Lütgemeier, dessen Fermion-Programm eine solide Grundlage für meine Meßroutinen gebildet hat.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern, deren Unterstützung mir das Physik-Studium ermöglicht hat.