One-Loop-Approximation des IKKT-Matrixmodells und geometrische Eigenschaften verzweigter Polymere

Diplomarbeit

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Jörg Erdmann

6. Januar 2003

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das wohl grundlegendste Ziel der theoretischen Physik ist die Entwicklung einer vereinheitlichten Theorie aller fundamentalen Wechselwirkungen. Nach dem gegenwärtigen Erkenntnisstand existieren vier Kräfte, auf denen sämtliche physikalische Phänomene beruhen. Mit dem Elektromagnetismus sowie der starken und schwachen Wechselwirkung umfasst das Standardmodell der Elementarteilchenphysik jedoch nur drei davon. Superstringtheorien gelten heute als vielversprechende Kandidaten für eine vereinigte Theorie, die darüber hinaus auch die Gravitation enthält [1].
Ein wesentliches Problem der supersymmetrischen Stringtheorien ist, daß diese lediglich in $D = 10$ Dimensionen quantisiert werden können [2]. Es ist bislang ungeklärt, wie sich diese kritische Dimension mit der physikalischen ($D_{\mathrm{ph}} = 4$) des Standardmodells vereinbaren läßt. Ein verbreiteter Erklärungsansatz ist der der Kompaktifizierung, bei der angenommen wird, daß die übrigen sechs Raumzeitdimensionen im Gegensatz zu den vier kanonischen eine verschwindend „kleine Ausdehnung" haben, d. h. nur auf solchen Abständen eine Rolle spielen, die experimentell noch nicht auflösbar sind. Da man bisher ausschließlich über störungstheoretische Formulierungen der Superstringtheorien verfügt, sind die Kompaktifizierung und damit das Vakuum nicht eindeutig festgelegt. Um den wahren Grundzustand bestimmen sowie Vorhersagen ableiten zu können, bedarf es offenbar einer entsprechend nichtstörungstheoretischen Formulierung.
Vor nunmehr fünf Jahren wurde das IKKT-Matrixmodell als nicht-störungtheoretische Definition der IIB-Superstringtheorie vorgeschlagen [3]. Vermutungen zufolge besitzt letzteres einen dynamischen Mechanismus für die spontane Brechung der Lorentzsymmetrie von zehn auf vier Dimensionen bzw. die Bestimmung eines eindeutigen Vakuums [4]. Während das IKKT-Modell in $D = 10$ Dimensionen definiert ist, lassen sich entsprechende reduzierte supersymmetrische SU(N)-Yang-Mills-Integrale auch für $D = 3$, 4 und 6 betrachten [5]. Unbekannt ist allerdings, ob das dreidimensionale SU(N)-Yang-Mills-Integral eine wohldefinierte, physikalisch relevante Theorie beschreibt, da dessen Konvergenz im Gegensatz zu den Fällen $D = 4$, 6 und

10 nicht nachgewiesen werden konnte und dieses zudem absolut divergent ist (siehe beispielsweise [6]).
Die supersymmetrischen Yang-Mills-Integrale in $D = 4$, 6 und 10 Dimensionen sind analytisch kaum behandelbar, weil ihre Wirkungen nicht quadratisch in den Variablen sind. Hinzu kommt, daß auch numerische Simulationen dieser Matrixmodelle mit Problemen behaftet sind. In sechs und zehn Dimensionen gehen aus der Integration über die fermionischen Freiheitsgrade der Theorie komplexwertige effektive Wirkungen für die bosonischen Variablen hervor, welche sich nicht ohne weiteres mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode integrieren lassen [7]. Im vierdimensionalen Fall ist die aus der fermionischen Integration resultierende effektive Wirkung hingegen reell und eine direkte Monte-Carlo-Integration möglich [8, 9, 10]. Letztere erfordert jedoch so viel Rechenzeit, daß lediglich Systeme mit relativ kleinen N simuliert werden können.
Aus diesen Gründen empfiehlt es sich, die geometrische Struktur der Raumzeit sowie den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung im Rahmen einer Näherung zu untersuchen. Für große Abstände der klassischen Raumzeitkoordinaten führt die One-Loop-Approximation der sechs- bzw. zehndimensionalen Theorie zu einem effektiven Modell von Graphen, die sich aus zusammenhängenden Baumgraphen, sogenannten verzweigten Polymeren, aufbauen lassen. Im vierdimensionalen Fall stimmt die effektive Theorie der klassischen Raumzeitkoordinaten exakt mit einem Modell verzweigter Polymere überein. Es ist denkbar, daß die spontane Brechung der Lorentzsymmetrie mit den fraktalen Eigenschaften dieser in Verbindung steht.
Verzweigte Polymere werden nicht nur im Zusammenhang mit der One-Loop-Näherung des IKKT-Modells, sondern auch in mehreren anderen Gebieten studiert. So sind diese z. B. für das Verständnis des kritischen Verhaltens von Modellen fluktuierender Flächen und euklidischen Theorien der Quantengravitation bedeutsam [11, 12]. Auch im Bereich der statistischen Physik komplexer Netzwerke [13] und der physikalischen Chemie [14, 15] interessiert man sich für Modelle verzweigter Polymere, wobei in beiden Fällen deren Skaleneigenschaften sowie die fraktale Geometrie im Mittelpunkt der Untersuchungen stehen.
Sofern die Vertizes der Baumgraphen in einen D-dimensionalen äußeren Raum eingebettet sind, ist es sinnvoll, zwischen inneren und äußeren geometrischen Eigenschaften zu unterscheiden. Modelle verzweigter Polymere werden daraufhin durch die Wahl innerer und äußerer statistischer Gewichte spezifiziert [11]. Hierbei ist das äußere Gewicht im allgemeinen eine Funktion der Vertexpositionen im Einbettungsraum und das innere von den Verzweigungsordnungen der Vertizes abhängig. Aus dem Skalenverhalten der inneren und äußeren kanonischen Zweipunkt-Funktionen gehen dann die Hausdorff-Dimensionen d_H und D_H hervor, die üblicherweise zur Charakterisierung der fraktalen geometrischen Eigenschaften herangezogen werden.

In dieser Arbeit werden ausschließlich Modelle betrachtet, deren äußere Gewichte bezüglich der Links und deren innere bezüglich der Vertizes faktorisieren, so daß weder Korrelationen zwischen den Links noch zwischen den Vertizes existieren. Das

äußere Gewicht enthält dabei ein Produkt von Linkgewichten, während das innere durch ein Produkt von Verzweigungsgewichten gegeben ist. Insbesondere beinhalten derartige Modelle verzweigter Polymere keine *Self-Avoidance-* bzw. *Excluded-Volume-Effekte.*
Anhand der kanonischen Zweipunkt-Funktionen diskutieren wir das Skalenverhalten sowie die geometrischen Eigenschaften der Polymere, wobei wir neben den inneren und äußeren Hausdorff-Dimensionen d_H und D_H auch lokale fraktale Dimensionen d_L und D_L der inneren und äußeren Geometrie einführen. Während d_H (D_H) das Skalenverhalten der inneren (äußeren) Zweipunkt-Funktion für Abstände charakterisiert, welche von der Größenordnung der mittleren linearen Ausdehnung des Systems sind, bestimmt d_L (D_L) das entsprechende Verhalten bei deutlich geringeren Abständen, die allerdings noch immer viel größer als die mittlere Länge eines Links sind.
Wir weisen nach, daß die innere Geometrie von der äußeren entkoppelt und sich erstere deswegen unabhängig von der Einbettung bzw. der Wahl der Linkgewichte untersuchen läßt. Andererseits stellt sich heraus, daß die Eigenschaften der äußeren Geometrie von der inneren abhängen. Dieses manifestiert sich insbesondere in einer von uns hergeleiteten Formel, welche die äußere Zweipunkt-Funktion mit der normierten inneren in Beziehung setzt.
Es wird gezeigt, wie sich die Modelle gemäß ihrer inneren geometrischen Eigenschaften klassifizieren lassen, wobei Universalitätsklassen (bzw. Phasen) generischer, marginaler und semi-generischer Polymere zu unterscheiden sind [16, 17]. Für diese Klassen ermitteln wir das asymptotische Verhalten der normierten inneren Zweipunkt-Funktion im Limes großer Systeme. Mit Hilfe der bereits erwähnten Relation zwischen den Zweipunkt-Funktionen können daraufhin auch die geometrischen Eigenschaften im äußeren Raum bestimmt werden. Neben Modellen, deren Linkgewichte durch Gauß-Verteilungen gegeben sind, betrachten wir auch solche, deren Linkgewichte potenzartig mit der Linklänge abfallen. Modelle dieser Art treten gerade im Rahmen der One-Loop-Näherung des IKKT-Modells in Erscheinung.
Ferner werden für generische und marginale Polymere die fraktalen Dimensionen d_H und d_L bzw. D_H und D_L miteinander verglichen. Für generische Modelle mit gaußverteilten Linklängen leiten wir eine Formel für die äußere Zweipunkt-Funktion her, die uns einen direkten Vergleich der äußeren fraktalen Dimensionen D_H und D_L gestattet.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit ist die Publikation [18] entstanden.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut. Im zweiten Kapitel werden das IKKT-Matrixmodell sowie einige seiner Eigenschaften vorgestellt. Anschließend wird zur One-Loop-Näherung übergegangen und die effektive Theorie der klassischen bosonischen Koordinaten hergeleitet, welche sich auf obengenannte Weise mit einem Modell verzweigter Polymere in Zusammenhang bringen läßt. Am Ende des Kapitels gehen wir auf einen möglichen Mechanismus für die (vermutete) spontane Brechung der

Lorentzsymmetrie ein.
Das dritte Kapitel befaßt sich mit Modellen verzweigter Polymere im allgemeinen. Nach der Definition der Modelle werden zunächst Betrachtungen hinsichtlich der inneren Geometrie unternommen. Mittels großkanonischer Zustandssummen und deren graphischer Veranschaulichung wird eine Selbstkonsistenzgleichung hergeleitet, welche für die Klassifizierung der inneren Geometrie von Bedeutung ist. Danach führen wir Korrelationsfunktionen für die innere und äußere Geometrie ein, wobei die kanonischen Zweipunkt-Funktionen der Definition der fraktalen Dimensionen d_L, d_H, D_L und D_L dienen. Im Anschluß an die Bestimmung des Skalenverhaltens der normierten inneren Zweipunkt-Funktionen werden schließlich die äußeren geometrischen Eigenschaften untersucht.
Um die Lesbarkeit des Haupttextes nicht zu beeinträchtigen, werden in Anhang A einige Details von Rechnungen sowie der Beschreibung fermionischer Strukturen in euklidischen Räumen zusammengefaßt, welche für die Diskussion des IKKT-Matrixmodells relevant sind.
Anhang B enthält die detaillierte Darstellung einer Integration, die für die Berechnung der normierten inneren Zweipunkt-Funktion generischer Polymere relevant ist.

Kapitel 2

Das IKKT-Matrixmodell

2.1 Definition und Eigenschaften

Das IKKT-Matrixmodell ist ein maximal reduziertes supersymmetrisches SU(N)-Yang-Mills-Integral, dessen Zustandssumme im zehndimensionalen euklidischen Raum gegeben ist durch

$$Z_{IKKT} = \int \mathrm{d}A \, \mathrm{d}\bar{\Psi} \, \mathrm{d}\Psi \; e^{-S\left(A,\bar{\Psi},\Psi\right)} \, . \tag{2.1}$$

Seine Wirkung S läßt sich als Summe einer rein bosonischen Wirkung S_B und einer gemischt bosonisch-fermionischen S_{BF} schreiben [4]

$$S\left(A,\bar{\Psi},\Psi\right) = S_B\left(A\right) + S_{BF}\left(A,\bar{\Psi},\Psi\right) \, , \tag{2.2}$$

$$S_B\left(A\right) = -\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}\left\{\left[A_\mu, A_\nu\right]^2\right\} \, , \tag{2.3}$$

$$S_{BF}\left(A,\bar{\Psi},\Psi\right) = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\Psi}_a \Gamma^\mu_{ab}\left[A_\mu, \Psi_b\right]\right\} \, , \tag{2.4}$$

wobei Ψ ein Majorana-Weyl-Spinor und jede der Komponenten A_μ, $\bar{\Psi}_a$ und Ψ_a matrixwertig ist. Wie Anhang A.3 zeigt, sind $\bar{\Psi}$ und Ψ aufgrund ihrer Majorana-Eigenschaft nicht unabhängig voneinander. In Formel (2.4) steht Γ^μ für die Gammamatrizen (siehe Appendix A.2) in zehn Dimensionen.
Weil das Modell (2.1) auch ohne die Einführung von Cutoffs endlich ist [6], ist es möglich, die reelle Konstante g durch Reskalierungen der Variablen

$$A_\mu \to g^{1/2} A_\mu \quad , \quad \bar{\Psi}_a \to g^{3/4} \bar{\Psi}_a \quad \text{und} \quad \Psi_a \to g^{3/4} \Psi_a$$

aus der Wirkung zu entfernen. Dieses legt nahe, g nicht als Kopplung, sondern als Skalenparameter der Theorie anzusehen.

Im Hinblick auf die Supersymmetrie (SUSY) ist es notwendig zu fordern, daß sich sämtliche bosonische und fermionische Matrizen bezüglich der gleichen Darstellung der SU(N) transformieren. Es wird angenommen, daß sich letztgenannte in der adjungierten Darstellung befinden

$$A_\mu^{ij} = A_\mu^\alpha t_\alpha^{ij} \quad , \quad \bar{\Psi}_a^{ij} = \bar{\Psi}_a^\alpha t_\alpha^{ij} \quad \text{und} \quad \Psi_a^{ij} = \Psi_a^\alpha t_\alpha^{ij} \, . \tag{2.5}$$

Hierbei sind die Koeffizienten A_μ^α bzw. $\bar{\Psi}_a^\alpha$ und Ψ_a^α reelle Variablen bzw. reelle Grassmann-Variablen und die Generatoren t_α der SU(N) hermitesch, spurlos und durch $\mathrm{Tr}\,\{t_\alpha t_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$ normiert gewählt. Infolge ihrer Entwicklung (2.5) sind auch A_μ, $\bar{\Psi}_a$ und Ψ_a hermitesche spurlose $N \times N$-Matrizen.
Das Maß der Integration über die bosonischen Freiheitsgrade lautet

$$\mathrm{d}A = \left(\prod_{i=1}^{N} \prod_{\mu=1}^{D} \mathrm{d}A_\mu^{ii} \, \delta\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A_\mu^{ii} \right) \right) \left(\prod_{i<j} \prod_{\mu=1}^{D} \mathrm{d}^R\! A_\mu^{ij} \, \mathrm{d}^I\! A_\mu^{ij} \right) \tag{2.6}$$

mit $D = 10$ als Dimension der Raumzeit, reellen Diagonalelementen A_μ^{ii} sowie

$$A_\mu^{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left({}^R\! A_\mu^{ij} + i \, {}^I\! A_\mu^{ij} \right) \qquad \text{und} \qquad A_\mu^{ji} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left({}^R\! A_\mu^{ij} - i \, {}^I\! A_\mu^{ij} \right) \tag{2.7}$$

für $i < j$. Anhang A.3 ist zu entnehmen, wie entsprechend das Integrationsmaß $\mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi$ für Majorana-Weyl-Spinoren eingeführt wird.

Ishibashi, Kawai, Kitazawa und Tsuchiya schlugen das nach ihnen benannte Matrixmodell (2.1) als eine nicht-störungstheoretische Definition der IIB-Superstringtheorie[1] vor [3]. Eine Grundlage hierfür ist das im folgenden vorgestellte semi-klassische Korrespondenzprinzip zwischen der Wirkung (2.2) und der des IIB-Strings in Schild-Eichung [19]

$$S_{Schild} = \int \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}\tau \sqrt{|g|} \left[\alpha \left(\frac{1}{4} \{X_\mu, X_\nu\}^2 - \frac{i}{2} \bar{\Psi}_a \Gamma^\mu_{ab} \{X_\mu, \Psi_b\} \right) \right] \, . \tag{2.8}$$

In dieser sind X_μ die bosonischen und Ψ_a die fermionischen Koordinaten der durch σ und τ parametrisierten Weltfläche des Strings im Superraum. Auch hier ist Ψ ein Majorana-Weyl-Spinor. $|g|$ repräsentiert die Determinante der Weltflächenmetrik g_{AB} und $\sqrt{|g|}$ somit eine positiv definite, skalare Dichte. Mit der antisymmetrischen 2×2-Tensordichte

$$\epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind die Poisson-Klammern der Theorie gegeben als

$$\{X, Y\} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{AB} \partial_A X \partial_B Y \, , \tag{2.9}$$

[1] Aus diesem Grund wird das IKKT-Matrixmodell häufig auch als IIB-Matrixmodell bezeichnet.

wobei ∂_A (bzw. ∂_B) für die partiellen Ableitungen bezüglich σ und τ steht. Der IIB-String besitzt die sogenannte $\mathcal{N} = 2$ Raumzeit-SUSY, welche sich in der Schild-Eichung als Invarianz der Wirkung (2.8) unter den Variationen

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\Psi &= -\frac{1}{2}\{X_\mu, X_\nu\}[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]\,\varepsilon\,, & \delta^{(1)}X_\mu &= i\,\bar{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi\,, \\ \delta^{(2)}\Psi &= \xi\,, & \delta^{(2)}X_\mu &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

manifestiert. Dabei sind die infinitesimalen Grassmann-Parameter ε und ξ Majorana-Weyl-Spinoren, die nicht von der Parametrisierung der Weltfläche abhängen. Mit einer entsprechenden Anpassung des Skalenparameters g in (2.3) und (2.4) geht die Wirkung des Matrixmodells über in

$$S = -\alpha \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_a\Gamma^\mu_{ab}[A_\mu, \Psi_b]\right\}\,. \tag{2.11}$$

Dem Vergleich von (2.8) und (2.11) zufolge läßt sich die Wirkung des IKKT-Modells durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} -i[\;,\;] &\Rightarrow \{\;,\;\}\,, & \mathrm{Tr}\{\;\} &\Rightarrow \int \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\sqrt{|g|}\,, \\ A^{ij}_\mu &\Rightarrow X_\mu(\sigma,\tau)\,, & \Psi^{ij}_a &\Rightarrow \Psi_a(\sigma,\tau) \end{aligned} \tag{2.12}$$

in S_{Schild} überführen. In [3] wird behauptet, daß dieses Korrespondenzprinzip im Limes großer N gültig ist. Als Analogon führen die Autoren die Ersetzung der Kommutatoren der Quantenmechanik durch die Poisson-Klammern der klassischen Mechanik im Limes $\hbar \to 0$ an. Die Invarianz der Wirkung (2.2) bezüglich der Transformationen

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\Psi &= \frac{i}{2}[A_\mu, A_\nu][\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]\,\varepsilon\,, & \delta^{(1)}A_\mu &= i\,\bar{\varepsilon}\Gamma_\mu\Psi\,, \\ \delta^{(2)}\Psi &= \xi\,, & \delta^{(2)}A_\mu &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

wird in diesem Zusammenhang auch als $\mathcal{N} = 2$ SUSY des IKKT-Modells bezeichnet. Ein weiteres Argument für die Interpretation des Matrixmodells als nicht-störungstheoretische Definition der IIB-Superstringtheorie ist, daß dessen Wilson-Loops den Bewegungsgleichungen der IIB-Superstring-Feldtheorie in der Lichtkegel-Eichung genügen, sofern man den korrekten (doppelten) Skalenlimes zugrundelegt [4].

Im allgemeineren Kontext der Yang-Mills-Integrale ist das Matrixmodell (2.1) auch in $D = 3$, 4 und 6 Dimensionen definierbar [5]. Begründet liegen die Einschränkungen auf D darin, daß in einer supersymmetrischen Theorie die Anzahl unabhängiger bosonischer und fermionischer Freiheitsgrade identisch sein muß. Das masselose Feld[2]

[2]Der Begriff des Feldes wird in diesem Zusammenhang verwendet, obwohl die Variablen einer maximal reduzierten Theorie keine Raumzeitabhängigkeit haben.

Dimension	Spinordarstellung	$p(D)$
$D = 3$	Majorana	0
$D = 4$	Weyl oder Majorana	1
$D = 6$	Weyl	2
$D = 10$	Majorana-Weyl	3

Tabelle 2.1: Voraussetzungen für die SUSY von SU(N)-Yang-Mills-Integralen und zugehöriger Wert des Exponenten $p(D)$.

A_μ hat $D - 2$ physikalische Polarisationsrichtungen und aufgrund seiner Matrixwertigkeit, Hermitizität und Spurlosigkeit insgesamt $(D - 2)(N^2 - 1)$ unabhängige reelle Freiheitsgrade. Ausgehend von Dirac-Spinoren $\bar{\Psi}$ und Ψ können die Weyl- und/oder Majorana-Bedingungen (vgl. Anhang A.3) sowie die Massenschalenbedingungen zur Herstellung des erforderlichen Gleichgewichtes herangezogen werden. Die Anzahl unabhängiger, reeller, fermionischer Freiheitsgrade ist dann stets eine Zahl $2^{p(D)}(N^2 - 1)$ mit ganzzahligem Exponenten $p(D) \in \{0, 1, \dots\}$ [2].
Die vier kleinsten Werte $D - 2$, welche einer Potenz $2^{p(D)}$ entsprechen, sind durch $D = 3$, 4, 6 und 10 gegeben. Gemäß [2] existieren in diesen Dimensionen, wie Tabelle 2.1 zusammenfasst, geeignete Spinordarstellungen für eine supersymmetrische Theorie. Für $D > 10$ ist dieses nicht mehr der Fall, weil die Anzahl fermionischer Freiheitsgrade, d. h. $p(D)$, zu stark mit der Dimension anwächst. Modelle mit einem solchen Ungleichgewicht heißen fermionisch und weisen wie auch die bosonischen oftmals divergente Zustandssummen (siehe beispielsweise [20]) auf.
Einfachheitshalber werden in dieser Arbeit auch die Yang-Mills-Integrale in $D = 3$, 4 und 6 Dimensionen IKKT-Modelle genannt. Wie schon in der Einleitung angedeutet ist unbekannt, ob dem dreidimensionalen SU(N)-Yang-Mills-Integral mit einer supersymmetrischen Regularisierung eine - über seine formale Definition herausgehende - Bedeutung gegeben werden kann [6]. Deshalb beschränken wir uns im folgenden ausschließlich auf die Fälle $D = 4$, 6 und 10. Appendix A.3 beschreibt die Formulierung dieser Matrixmodelle mit Weyl-, Majorana- oder Majorana-Weyl-Spinoren sowie die Anpassung des Maßes der fermionischen Integration.

Die Wirkung (2.2) enthält Summationen in vier verschiedenen Indexräumen. Für dieses Kapitel sowie die Anhänge A.2, A.3 und A.4 werden folgende Vereinbarungen getroffen: Lorentzindizes werden mit griechischen Buchstaben μ, ν, ... $(= 1 \dots D)$, die der adjungierten Darstellung mit α, β, ... $(= 1 \dots N^2 - 1)$, Farbindizes mit lateinischen i, j, ... $(= 1 \dots N)$ und Spinorindizes mit a, b, ... $(= 1 \dots N_S)$ bezeichnet. N_S ist dabei die von D abhängige Dimension der spinoriellen Darstellung. Anhand des Kontextes sollte klar sein, wann doppelt auftretende Indizes ihre Summation implizieren.

Ein Yang-Mills-Integral heißt *reduziert*, wenn seine Felder lediglich von den Koordinaten einer d-dimensionalen Untermannigfaltigkeit ($d < D$) der Raumzeit abhängen. Die *maximale Reduktion* (*zero-volume limit*) entspricht dem Fall $d = 0$, in dem dieser Unterraum nur aus einem einzigen Punkt besteht. Im folgenden werden die Bezeichnungen reduziert und maximal reduziert synonym verwendet. Verglichen mit der unreduzierten, vereinfacht sich die reduzierte Theorie in dreifacher Hinsicht. Zum ersten verschwinden sämtliche Ableitungen der Felder aus der Wirkung, da letztere konstant sind. Zum zweiten enthält S keine Integration über die Raumzeit mehr. Ausgehend von der euklidischen Wirkung [21]

$$\hat{S}_B\left(A\right) = \frac{1}{4g^2}\int \mathrm{d}^D x\, Tr\left\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\}$$

einer freien nicht-abelschen Eichfeldtheorie mit Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i\left[A_\mu, A_\nu\right] \ ,$$

läßt sich unter Berücksichtigung obiger Vereinfachungen nachvollziehen, wie (2.3) infolge der Reduktion aus $\hat{S}_B$ hervorgeht.
Die dritte und stärkste Modifikation aber ist der Übergang der Zustandssumme von einem Funktionalintegral in ein gewöhnliches mehrdimensionales über bosonische und fermionische Variablen.
Trotz all dieser Simplifizierungen wird vermutet, daß reduzierte supersymmetrische SU(N)-Yang-Mills-Integrale im Limes großer N der Beschreibung der korrespondierenden unreduzierten Theorie dienen können. Diese Vermutung stützt sich auf die Arbeit [22] von Eguchi und Kawai, in der diese selbiges mit Hilfe der Dyson-Schwinger-Technik für die SU(N)- und U(N)-Gittereichtheorie gezeigt haben.

Weil das IKKT-Modell ein reduziertes Yang-Mills-Integral ist, hat es nur Sinn, von globalen Symmetrien von S zu sprechen. Es ist leicht einzusehen, daß sich die Wirkungen (2.3) und (2.4) unter SU(N)-

$$A_\mu \to \mathcal{U}\, A_\mu \mathcal{U}^\dagger \quad , \quad \bar{\Psi}_a \to \mathcal{U}\, \bar{\Psi}_a \mathcal{U}^\dagger \quad , \quad \Psi_b \to \mathcal{U}\, \Psi_b \mathcal{U}^\dagger \tag{2.14}$$

und SO(D)-Transformationen

$$A_\mu \to \Lambda_{\mu\nu}\, A_\nu \quad , \quad \bar{\Psi}_a \to \bar{\Psi}_b\, \mathcal{S}_{ba}(\Lambda) \quad , \quad \Psi_b \to \mathcal{S}^{-1}_{ba}(\Lambda)\, \Psi_a \tag{2.15}$$

invariant verhalten. Hierbei ist $\mathcal{S}\left(\Lambda\right)$ die entsprechende Spin-1/2-Darstellung der SO(D)-Matrix Λ. Das Matrixmodell besitzt folglich sowohl die Lorentz[3]- als auch SU(N)-Symmetrie. Als dritte Invarianz ist die $\mathcal{N} = 2$ SUSY zu erwähnen, die für $D = 10$ bereits angesprochen wurde (vgl. (2.13)).

[3] In der euklidischen Signatur ist keine Zeitrichtung ausgezeichnet. Dennoch ist es in diesem Zusammenhang üblich, von einer SO(D)- als Lorentzinvarianz sowie einer Raumzeit zu sprechen.

2.2 Grundlagen der One-Loop-Approximation

Bereits in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß das IKKT-Matrixmodell aufgrund seiner komplizierten Struktur sowohl analytisch als auch numerisch sehr schwer zugänglich ist. Eine Möglichkeit, dennoch etwas über seine Eigenschaften zu lernen, bietet die sogenannte *One-Loop-Approximation* (siehe z. B. [23]). In einer solchen wird die Wirkung der Theorie um klassische Lösungen herum bis zu einschließlich zweiter Ordnung in Quantenfluktuationen entwickelt, was den Vorteil hat, daß die genäherte Zustandssumme durch Gaußsche Integrale gegeben und somit analytisch besser zu handhaben ist. Aus diesem Grund wird die One-Loop-Approximation auch *Gaußsche Näherung* genannt.
Primäres Ziel der weiteren Betrachtungen dieses Kapitels ist die Herleitung einer *effektiven Theorie klassischer bosonischer Koordinaten* im Rahmen dieser Näherung. Der erste Schritt dieser Herleitung ist die Zerlegung von A_μ, $\bar{\Psi}$ und Ψ gemäß [24]

$$A_\mu = X_\mu + \tilde{A}_\mu \quad , \quad \bar{\Psi} = \bar{\xi} + \tilde{\bar{\Psi}} \quad \text{und} \quad \Psi = \xi + \tilde{\Psi} \tag{2.16}$$

in Diagonalmatrizen

$$X_\mu^{ij} = x_\mu^i \delta_{ij} \quad , \quad \bar{\xi}_a^{ij} = \bar{\xi}_a^i \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \xi_a^{ij} = \xi_a^i \delta_{ij} \tag{2.17}$$

sowie off-diagonale Anteile $\tilde{A}_\mu$, $\tilde{\bar{\Psi}}_a$ und $\tilde{\Psi}_a$. Weil die positiv definite Wirkung (2.2) infolge des Einsetzens diagonaler Matrizen A_μ, $\bar{\Psi}_a$ und Ψ_a verschwindet, sind die erstgenannten klassische Lösungen des IKKT-Modells, während die letztgenannten als Quantenfluktuationen um den klassischen Hintergrund interpretiert werden. Wegen der Spurlosigkeit von A_μ, $\bar{\Psi}_a$ und Ψ_a genügen die Diagonalelemente $x_\mu^i = A_\mu^{ii}$, $\bar{\xi}_a^i = \bar{\Psi}_a^{ii}$ und $\xi_a^i = \Psi_a^{ii}$ zusätzlich den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^N x_\mu^i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^N \bar{\xi}_a^i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N \xi_a^i = 0\,. \tag{2.18}$$

Damit die Aufspaltungen (2.16) mit der SU(N)-Symmetrie des Modells verträglich sind, ist zu fordern, daß die Eigenwerte x_μ^i ($i = 1 \ldots N$) einen quadratischen Abstand voneinander besitzen, der groß im Verhältnis zum Skalenparameter g ist, d. h.

$$\left(x_\mu^i - x_\mu^j\right)^2 \gg g\,. \tag{2.19}$$

In der Gaußschen Näherung sind dann die Eigenwerte von X_μ unter einer infinitesimalen SU(N)-Transformation erhalten, wie die Störungstheorie lehrt [25]

$$\delta X_\mu^{ii} = \delta x_\mu^i = \sum_{j \neq i} \frac{\sqrt{g}\, |\tilde{A}_\mu^{ij}|^2}{x_\mu^i - x_\mu^j} + \mathcal{O}\left(\tilde{A}^3\right)\,. \tag{2.20}$$

Für den Übergang von der Wirkung (2.2) zu einer, welche nur Terme von höchstens zweiter Ordnung in den Quantenfluktuationen enthält, spielen die Kommutatoren

$$\begin{aligned} [X_\mu, X_\nu] &= 0\,, & [X_\mu, \bar{\xi}_a] &= 0\,, \\ [X_\mu, \xi_a] &= 0\,, & [\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_b] &= 2\bar{\xi}_a\bar{\xi}_b\,, \\ [\xi_a, \xi_b] &= 2\xi_a\xi_b\,, & [\xi_a, \bar{\xi}_b] &= 2\xi_a\bar{\xi}_b\,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

eine wichtige Rolle. Werden die Zerlegungen (2.16) in (2.2) eingesetzt, diese Vertauschungsrelationen sowie die Eigenschaften der Spur berücksichtigt, so läßt sich S schreiben als

$$S = S_2 + S_{>2} \tag{2.22}$$

mit

$$\begin{aligned} S_2 = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\Big\{ &- [X_\mu, \tilde{A}_\nu][X^\mu, \tilde{A}^\nu] + [X_\mu, \tilde{A}_\nu][X^\nu, \tilde{A}^\mu] \qquad (2.23)\\ &- [\bar{\xi}_a, \tilde{A}_\mu]\Gamma^\mu_{ab}\tilde{\Psi}_b - \tilde{\bar{\Psi}}_a\Gamma^\mu_{ab}[X_\mu, \tilde{\Psi}_b] - \tilde{\bar{\Psi}}_a\Gamma^\mu_{ab}[\tilde{A}_\mu, \xi_b]\Big\}\,. \end{aligned}$$

S_2 beinhaltet dabei sämtliche Terme, die von zweiter Ordnung in den Quantenfluktuationen sind, während $S_{>2}$ die höherer Ordnungen enthält. Demnach wird $S_{>2}$ in der One-Loop-Näherung vernachlässigt.

2.3 Eichfixierung und Faddeev-Popov-Geister

Um zur effektiven Wirkung S_{eff} der bosonischen Diagonalelemente zu gelangen, sollen zunächst die Quantenfluktuationen

$$\int \mathrm{d}A\,\mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi\,e^{-S} = \int \mathrm{d}X\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tilde{A}\,\mathrm{d}\tilde{\bar{\Psi}}\,\mathrm{d}\tilde{\Psi}\,e^{-S} = \int \mathrm{d}X\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,e^{-\acute{S}_{\text{eff}}(X,\bar{\xi},\xi)} \tag{2.24}$$

und anschließend die fermionischen Diagonalelemente

$$\int \mathrm{d}X\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,e^{-\acute{S}_{\text{eff}}(X,\bar{\xi},\xi)} = \int \mathrm{d}X\,e^{-S_{\text{eff}}(X)} \tag{2.25}$$

ausintegriert werden. Hierbei ist die störungstheoretische Auswertung des ersten Integrals (2.24) mit einem Problem behaftet, welches in der SU(N)-Invarianz von S begründet liegt. Da in diesem nicht nur über die physikalisch zu unterscheidenden Feldkonfigurationen integriert wird, sondern auch über alle, die durch SU(N)-Transformationen mit letzteren verbunden sind, enthält es eine redundante Integration über die Symmetriegruppe. Dieses führt im Rahmen der störungstheoretischen Betrachtung zur Divergenz der Zustandssumme. Eine Möglichkeit, den divergenten Anteil des Integrals zu eliminieren, bietet die Faddeev-Popov-Methode. Bei dieser

wird eine Eichfixierung und eine davon abhängige Variablentransformation durchgeführt, woraus Terme S_f und S_g hervorgehen, die zur ursprünglichen Wirkung zu addieren und ebenfalls auszuintegrieren sind. Eine hervorragende Darstellung der Methode enthält [23].
Mit der Hintergrundfeldmethode [26] kann die Eichung hier derart festgelegt werden, daß der Eichfixierungsterm

$$S_f = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{[X_\mu, A^\mu]^2\right\} \tag{2.26}$$

lautet und sich die Wirkung der Faddeev-Popov-Geistfelder $\bar{\eta}$ und η zu

$$S_g = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left\{[X_\mu, \bar{\eta}]\,[A^\mu, \eta]\right\} \tag{2.27}$$

ergibt. Unter Berücksichtigung der Aufspaltungen (2.16) und Kommutatoren (2.21) sind S_f und S_g in der One-Loop-Approximation zu ersetzen durch [24]

$$S_{f,2} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{[X_\mu, \tilde{A}^\mu]^2\right\} \tag{2.28}$$

und

$$S_{g,2} = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left\{[X_\mu, \bar{\eta}][X^\mu, \eta]\right\}\,. \tag{2.29}$$

Da $\bar{\eta}$ und η ebenfalls Quantenfluktuationen sind, sollten diese, so wie $\tilde{A}_\mu$, $\bar{\tilde{\Psi}}_a$ und $\tilde{\Psi}_a$, bezüglich des Farbraumes ausschließlich off-diagonale Elemente aufweisen und hermitesch sein. In Analogie zu (A.25) werden diese, mit $i < j$, wie folgt in reelle und komplexe Anteile zerlegt:

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\bar{\eta}^{ij} - i\,{}^I\bar{\eta}^{ij}\right)\,, \qquad & \eta^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\eta^{ij} + i\,{}^I\eta^{ij}\right)\,,\\
\bar{\eta}^{ji} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\bar{\eta}^{ij} + i\,{}^I\bar{\eta}^{ij}\right)\,, \qquad & \eta^{ji} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\eta^{ij} - i\,{}^I\eta^{ij}\right)\,.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Folglich ist es notwendig, (2.24) und (2.25) für die Berechnung der effektiven Wirkungen in der Gaußschen Näherung durch

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}X\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tilde{A}\,\mathrm{d}\bar{\tilde{\Psi}}\,\mathrm{d}\tilde{\Psi}\,\mathrm{d}\bar{\eta}\,\mathrm{d}\eta\, e^{-(S_2+S_{f,2}+S_{g,2})} &= \int \mathrm{d}X\mathrm{d}\bar{\xi}\,\mathrm{d}\xi\, e^{-\acute{S}^{1-\mathrm{Loop}}_{\mathrm{eff}}(X,\bar{\xi},\xi)}\\
&= \int \mathrm{d}X\, e^{-S^{1-\mathrm{Loop}}_{\mathrm{eff}}(X)}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

zu ersetzen. Das Integrationsmaß der Geistfelder ist

$$\mathrm{d}\bar{\eta}\,\mathrm{d}\eta = \prod_{i<j} \mathrm{d}^R\bar{\eta}^{ij}\,\mathrm{d}^R\eta^{ij}\,\mathrm{d}^I\bar{\eta}^{ij}\,\mathrm{d}^I\eta^{ij}\,, \tag{2.32}$$

während die übrigen direkt aus den Definitionen von $\mathrm{d}A$ sowie $\mathrm{d}\bar{\Psi}\mathrm{d}\Psi$ und der obigen Zerlegung der Felder in diagonale und off-diagonale Anteile hervorgehen.

2.4 Integration der Quantenfluktuationen

Für das Ausintegrieren der Quantenfluktuationen müssen S_2, $S_{f,2}$ und $S_{g,2}$ explizit in der Komponentenschreibweise mit Farb-, Lorentz- und Spinorindizes vorliegen. Es bietet sich dabei an, S_2 und $S_{f,2}$ nicht einzeln, sondern die Summe $S_2 + S_{f,2}$ zu betrachten, weil der Eichfixierungsterm (2.28), wie mit Hilfe der Eigenschaften der Spur und den Kommutatoren (2.21) gezeigt werden kann, gerade so gewählt ist, daß er den zweiten Term von S_2 kompensiert. Es gilt

$$S_{f,2} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{[X_\mu, \tilde{A}_\nu][X^\nu, \tilde{A}^\mu]\right\}. \tag{2.33}$$

Die Summe der Wirkungen

$$\begin{aligned} S_2 + S_{f,2} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\Big\{&[X_\mu, \tilde{A}_\nu][X^\mu, \tilde{A}^\nu] + [\bar{\xi}_a, \tilde{A}_\mu]\Gamma^\mu_{ab}\tilde{\Psi}_b \\ &+\bar{\tilde{\Psi}}_a\Gamma^\mu_{ab}[X_\mu, \tilde{\Psi}_b] + \bar{\tilde{\Psi}}_a\Gamma^\mu_{ab}[\tilde{A}_\mu, \xi_b]\Big\} \end{aligned} \tag{2.34}$$

lautet in der Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} S_2 + S_{f,2} = \frac{1}{2g^2}\sum_{i,j=1}^{N}\Big[&- \bar{\tilde{\Psi}}^{ji}_a\Gamma^\mu_{ab}\left(x^i_\mu - x^j_\mu\right)\tilde{\Psi}^{ij}_b + \left(x^i - x^j\right)^2\tilde{A}^{ji}_\mu\tilde{A}^{ij}_\mu \\ &+ \bar{\tilde{\Psi}}^{ji}_a\Gamma^\mu_{ab}\left(\xi^i_b - \xi^j_b\right)\tilde{A}^{ij}_\mu + \left(\bar{\xi}^i_a - \bar{\xi}^j_a\right)\Gamma^\mu_{ab}\tilde{\Psi}^{ij}_b\tilde{A}^{ji}_\mu\Big]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ihre ersten beiden Terme sind die kinetischen der fermionischen und bosonischen Quantenfluktuationen, welche die Propagatoren der Theorie festlegen, während die letzten beiden Wechselwirkungen beschreiben.
Zur Vereinfachung der Integration (2.31) empfiehlt es sich, mittels Translationen der fermionischen Fluktuationen, eine quadratische Ergänzung in (2.35) durchzuführen. Der Übergang zu neuen Variablen

$$\bar{\tilde{\Psi}}^{ji}_a \mapsto \bar{\tilde{\Psi}}^{ji}_a - \bar{\tilde{\Upsilon}}^{ji}_a \qquad \text{und} \qquad \tilde{\Psi}^{ij}_b \mapsto \tilde{\Psi}^{ij}_b - \tilde{\Upsilon}^{ij}_b \tag{2.36}$$

mit

$$\bar{\tilde{\Upsilon}}^{ji}_a = \left(\bar{\xi}^i_d - \bar{\xi}^j_d\right)\Gamma^\lambda_{dc}\Gamma^\kappa_{ca}\frac{\left(x^i_\kappa - x^j_\kappa\right)}{\left(x^i - x^j\right)^2}\tilde{A}^{ji}_\lambda \tag{2.37}$$

sowie

$$\tilde{\Upsilon}^{ij}_b = \frac{\left(x^i_\kappa - x^j_\kappa\right)}{\left(x^i - x^j\right)^2}\Gamma^\kappa_{bc}\Gamma^\lambda_{cd}\left(\xi^i_d - \xi^j_d\right)\tilde{A}^{ij}_\lambda \tag{2.38}$$

ermöglicht es, (2.35) in eine Summe

$$S_2 + S_{f,2} = S_{\bar{\tilde{\Psi}},\tilde{\Psi}} + S_{\tilde{A}} \tag{2.39}$$

von zwei Wirkungen zu überführen, die quadratisch in den fermionischen bzw. bosonischen Fluktuationen sind. Diese lauten

$$S_{\tilde{\bar{\Psi}},\tilde{\Psi}} = -\frac{1}{2g^2}\sum_{i<j}\Gamma^{\mu}_{ab}\left(x^i_\mu - x^j_\mu\right)\left(\tilde{\bar{\Psi}}^{ji}_a\tilde{\Psi}^{ij}_b - \tilde{\bar{\Psi}}^{ij}_a\tilde{\Psi}^{ji}_b\right) \tag{2.40}$$

und

$$S_{\tilde{A}} = \frac{1}{g^2}\sum_{i<j}\left(x^i - x^j\right)^2\left(\delta^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}_{ij}\right)\tilde{A}^{ji}_\mu\tilde{A}^{ij}_\nu\,. \tag{2.41}$$

Schon bald wird sich zeigen, daß der in $S_{\tilde{A}}$ enthaltene Tensor

$$S^{\mu\nu}_{ij} = \left(\bar{\xi}^i_c - \bar{\xi}^j_c\right)\left(\Gamma^{\mu\kappa\nu}\right)_{cd}\left(\xi^i_d - \xi^j_d\right)\frac{\left(x^i_\kappa - x^j_\kappa\right)}{\left(x^i - x^j\right)^4} \tag{2.42}$$

für die Diskussion der effektiven Theorie in der One-Loop-Näherung von zentraler Bedeutung ist. Hierbei ist $\Gamma^{\mu\kappa\nu}$ definiert als

$$\Gamma^{\mu\kappa\nu} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu\Gamma^\kappa\Gamma^\nu - \Gamma^\nu\Gamma^\kappa\Gamma^\mu\right) \tag{2.43}$$

und wegen der Antivertauschungsrelationen (A.17) der Gammamatrizen ein vollkommen antisymmetrischer Ausdruck in μ, κ und ν. Insbesondere bestimmt $\Gamma^{\mu\kappa\nu}$ das Verhalten des Tensors $S^{\mu\nu}_{ij}$ bezüglich der Vertauschung von μ und ν. Aus Definition (2.42) geht hervor, daß dieser ebenfalls antisymmetrisch in den Lorentzindizes ist.

Obwohl das Prinzip der quadratischen Ergänzung einfach ist, erfordert die Herleitung der Formeln (2.39)-(2.42) längliche algebraische Rechnungen, die wir hier nicht im Detail präsentieren wollen. Es sei dennoch darauf hingewiesen, daß in dieser Herleitung wiederholt Gebrauch von den Vertauschungsrelationen (A.17) zu machen ist. Gemäß Formel (2.31) läßt sich $\acute{S}^{\text{1-Loop}}_{\text{eff}}$ somit über das Produkt

$$\begin{aligned} e^{-\acute{S}^{\text{1-Loop}}_{\text{eff}}(X,\bar{\xi},\xi)} &= \int \mathrm{d}\tilde{A}\,\mathrm{d}\tilde{\bar{\Psi}}\,\mathrm{d}\tilde{\Psi}\,\mathrm{d}\bar{\eta}\,\mathrm{d}\eta\; e^{-(S_2+S_{f,2}+S_{g,2})} \\ &= \left(\int \mathrm{d}\tilde{A}\,e^{-S_{\tilde{A}}}\right)\left(\int \mathrm{d}\tilde{\bar{\Psi}}\,\mathrm{d}\tilde{\Psi}\,e^{-S_{\tilde{\bar{\Psi}},\tilde{\Psi}}}\right)\left(\int \mathrm{d}\bar{\eta}\,\mathrm{d}\eta\,e^{-S_{g,2}}\right) \end{aligned} \tag{2.44}$$

dreier Gaußscher Integrale berechnen. Die Wirkung (2.29) der Faddeev-Popov-Geister besitzt in der Komponentenschreibweise die Gestalt

$$\begin{aligned} S_{g,2} &= \frac{1}{g^2}\sum_{i<j}\left(x^i - x^j\right)^2\left(\bar{\eta}^{ij}\eta^{ji} + \bar{\eta}^{ji}\eta^{ij}\right) \\ &= \frac{1}{g^2}\sum_{i<j}\left(x^i - x^j\right)^2\left({}^R\bar{\eta}^{ij}\,{}^R\eta^{ij} - {}^I\bar{\eta}^{ij}\,{}^I\eta^{ij}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Mit dem Maß (2.32) und dem Produkt

$$\Delta^2(x) = \prod_{i<j} (x^i - x^j)^2 \tag{2.46}$$

der quadratischen Abstände der Eigenwerte erhält man

$$\int \mathrm{d}\bar{\eta}\, \mathrm{d}\eta\, e^{-S_{g,2}} \propto \left(\Delta^2(x)\right)^2 \tag{2.47}$$

als Ergebnis der Grassmann-Integration (siehe Anhang A.1) über die Geistfelder. Das Proportionalitätszeichen deutet an, daß das Ergebnis zusätzlich einen reellen Vorfaktor aufweist, der für die weitere Diskussion unbedeutend ist, weil er in einer Redefinition des Integrals „absorbiert" werden kann. Im Gegensatz zu (2.47) weist das Resultat

$$\int \mathrm{d}\tilde{A}\, e^{-S_{\tilde{A}}} \propto \left(\Delta^2(x)\right)^{-D} \prod_{i<j} \det_{\mu\nu} \left[\delta^{\mu\nu} + S_{ij}^{\mu\nu}\right]^{-1} \tag{2.48}$$

der Integration über die bosonischen Quantenfluktuationen eine Abhängigkeit von der Dimension der Raumzeit auf, wobei $\mathrm{d}\tilde{A}$ von (2.6) abgeleitet und $S_{\tilde{A}}$ wie oben gegeben ist. Für die Lösung des Gaußschen Integrals der off-diagonalen fermionischen Anteile $\bar{\tilde{\Psi}}$ und $\tilde{\Psi}$ ist ein geeignetes D vorzugeben, damit gemäß Tabelle 2.1 eine entsprechende Spinordarstellung fixiert werden kann. Demzufolge wird auch das Ergebnis dieses Integrals von der Raumzeitdimension abhängen. Appendix A.4 behandelt dessen Berechnung ausführlich. Im Fall $D = 10$ sind $\bar{\tilde{\Psi}}$ und $\tilde{\Psi}$ Majorana-Weyl-Spinoren, und es gilt

$$\int \mathrm{d}\bar{\tilde{\Psi}}\, \mathrm{d}\tilde{\Psi}\, e^{-S_{\bar{\tilde{\Psi}},\tilde{\Psi}}} \propto \left(\Delta^2(x)\right)^{2^{D/2}/4} = \left(\Delta^2(x)\right)^8 \ . \tag{2.49}$$

Schließlich ergibt sich für das IKKT-Matrixmodell in zehn Dimensionen die Beziehung

$$\begin{aligned} e^{-\acute{S}_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}(X,\bar{\xi},\xi)} &\propto \left(\Delta^2(x)\right)^{-10} \left(\Delta^2(x)\right)^8 \left(\Delta^2(x)\right)^2 \prod_{i<j} \det_{\mu\nu} \left[\delta^{\mu\nu} + S_{ij}^{\mu\nu}\right]^{-1} \\ &= \prod_{i<j} \det_{\mu\nu} \left[\delta^{\mu\nu} + S_{ij}^{\mu\nu}\right]^{-1} \ . \end{aligned} \tag{2.50}$$

Hier impliziert das Proportionalitätszeichen, daß $\acute{S}_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}$ bis auf eine additive reelle Konstante K durch

$$-\log \left(\prod_{i<j} \det_{\mu\nu} \left[\delta^{\mu\nu} + S_{ij}^{\mu\nu}\right]^{-1} \right) = \sum_{i<j} \log \left(\det_{\mu\nu} \left[\delta^{\mu\nu} + S_{ij}^{\mu\nu}\right] \right) \tag{2.51}$$

festgelegt ist. Wiederum führt diese lediglich zu einem Faktor, der aus den verbleibenden Integralen (2.31) über X, $\bar{\xi}$ und ξ herausgezogen werden kann. Es ist daher legitim, K für die weitere Diskussion auf null zu setzen bzw. $\acute{S}_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}$ zu redefinieren. Die Relation

$$\det\left[e^M\right] = e^{\mathrm{Tr}\{M\}} \tag{2.52}$$

für diagonalisierbare, quadratische Matrizen M gestattet es, die effektive Wirkung logarithmisch zu entwickeln

$$\begin{aligned}\acute{S}_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}} &= \sum_{i<j} \mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{\log\left(\delta^{\mu\nu} + S_{ij}^{\mu\nu}\right)\right\} \\ &= -\sum_{i<j} \mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{\frac{S_{ij}^2}{2} + \frac{S_{ij}^4}{4} + \frac{S_{ij}^6}{6} + \frac{S_{ij}^8}{8} + \ldots\right\}. \end{aligned}\tag{2.53}$$

In der Entwicklung treten ausschließlich gerade Potenzen des Tensors $S_{ij}^{\mu\nu}$ auf, weil dieser aufgrund seiner Antisymmetrie in μ und ν eine verschwindende Spur $\mathrm{Tr}_{\mu\nu}$ besitzt. Darüber hinaus bricht die Reihenentwicklung nach einer geraden Potenz ab, welche von der Anzahl unabhängiger fermionischer Freiheitsgrade abhängt. Die Begründung dafür geht auf Definition (2.42) zurück. $S_{ij}^{\mu\nu}$ enthält eine Summation über Produkte $\Delta\bar{\xi}_a^{ij}\Delta\xi_b^{ij}$ von Grassmann-Variablen $\Delta\bar{\xi}_a^{ij} = \bar{\xi}_a^i - \bar{\xi}_a^j$ und $\Delta\xi_a^{ij} = \xi_a^i - \xi_a^j$. Für fixierte i und j sind von den letztgenannten in zehn Dimensionen nur 16 Komponenten unabhängig, da die Spinoren den Weyl- und Majorana-Bedingungen genügen. Deswegen können nur die geraden Potenzen von $S_{ij}^{\mu\nu}$ bis zu einschließlich achter Ordnung nicht-verschwindende Beiträge liefern, weil andernfalls mindestens eine der Grassmann-Variablen quadratisch oder in höherer Potenz auftritt. Im Fall $D = 10$ verschwinden ferner die Beiträge der Terme, die von quadratischer und sechster Ordnung in $S_{ij}^{\mu\nu}$ sind, wie in [24] mit Hilfe von Fierz-Transformationen gezeigt wird. Aus diesen Gründen ergibt sich

$$\acute{S}_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}(X,\bar{\xi},\xi) = -\sum_{i<j} \mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{\frac{S_{ij}^4}{4} + \frac{S_{ij}^8}{8}\right\} \tag{2.54}$$

als effektive Wirkung in zehn Dimensionen. Die Wiederholung der Integrationen (2.44) und der logarithmischen Entwicklung führt in $D = 4$ bzw. 6 Dimensionen entsprechend zu

$$\acute{S}_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}(X,\bar{\xi},\xi) = \begin{cases} -\sum_{i<j} \mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{\frac{S_{ij}^2}{2}\right\} & \text{, für } D = 4 \\ -\sum_{i<j} \mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{\frac{S_{ij}^2}{2} + \frac{S_{ij}^4}{4}\right\} & \text{, für } D = 6\,. \end{cases} \tag{2.55}$$

2.5 Effektive Theorie klassischer Koordinaten

Wegen der Korrespondenz des IKKT-Matrixmodells zum IIB-Superstring (vgl. Formel (2.12)) ist es naheliegend, die Eigenwerte der Matrizen A_μ als Koordinaten der

Raumzeit anzusehen. Diese Interpretation impliziert, daß die Struktur der Raumzeit durch die Dynamik der bosonischen Matrizen festgelegt wird [24].
Folglich entsprechen die Eigenwerte der Diagonalmatrizen X_μ (siehe (2.16)) klassischen, bosonischen Koordinaten x_μ^i generischer Vakuumkonfigurationen. Sofern diese einen hinreichend großen Abstand voneinander haben, lassen sich die geometrischen Eigenschaften der Raumzeit anhand des Gewichtes $e^{-S_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}(X)}$ diskutieren [4]. Um letzteres zu erhalten, ist laut Formel (2.31) über die fermionischen Diagonalelemente $\bar{\xi}$ und ξ zu integrieren. Mit (2.54) sowie der Produktdarstellung der Exponentialfunktion (vgl. Anhang A.1) ergibt sich für den zehndimensionalen Fall

$$\int \mathrm{d}X\; e^{-S_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}(X)} = \int \mathrm{d}X\; \mathrm{d}\bar{\xi}\; \mathrm{d}\xi\; e^{-\acute{S}_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}(X,\bar{\xi},\xi)} \tag{2.56}$$
$$= \int \mathrm{d}X\; \mathrm{d}\bar{\xi}\; \mathrm{d}\xi \prod_{i<j}\left[1+\frac{\mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^4\right\}}{4}+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^4\right\}}{4}\right)^2+\frac{\mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^8\right\}}{8}\right)\right].$$

Wird dieser Integrand in eine Reihe entwickelt, so entspricht jeder Summand einem Produkt, das für jedes Indexpaar (ij) genau einen der Faktoren 1, $\mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^4\right\}/4$ oder $(\mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^8\right\}/8 + \mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^4\right\}^2/32)$ enthält. Definition (2.42) zufolge sind die letzten beiden Faktoren Funktionen der Differenz $x_\mu^i - x_\mu^j$ und können als *Links* dargestellt werden, welche die Koordinaten x_μ^i und x_μ^j verbinden. Insbesondere beinhalten diese (i und j sind fixiert) Produkte von 8 bzw. 16 der Komponenten $\Delta\bar{\xi}_a^{ij}$ und $\Delta\xi_a^{ij}$, weswegen auch von 8- bzw. 16fachen Links die Rede ist. Da dem Faktor 1 in diesem Sinn kein Link zuzuordnen ist, läßt sich jeder Term der Reihenentwicklung mit einem *Graphen* zu assoziieren, dessen N Raumzeitpunkte durch 8- und 16fache Links verbunden sind. Zur Grassmann-Integration über die Majorana-Weyl-Spinoren $\bar{\xi}$ und ξ können jedoch nur solche Graphen (nicht-verschwindend) beitragen, deren assoziierte Terme Summanden aufweisen, in denen gerade ein Produkt der $16\,(N-1)$ unabhängigen Komponenten ξ_a^i vorkommt. Hierbei ist 16 wiederum die Anzahl unabhängiger spinorieller Komponenten von Majorana-Weyl-Spinoren in zehn Dimensionen und $N-1$ ein Faktor, der auf die Spurlosigkeit der fermionischen Matrizen (siehe (2.18)) zurückzuführen ist. Dementsprechend tragen nur solche Graphen etwas zu $S_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}$ bei, für welche die Summe aus der Anzahl 8facher und der doppelten Anzahl 16facher Links $2\,(N-1)$ beträgt. Weil das Ensemble solcher Netzwerke von Raumzeitpunkten viele unterschiedliche Klassen von Graphen umfaßt, ist eine Diskussion der geometrischen Eigenschaften der Raumzeit anhand des Gewichtes $e^{-S_{\text{eff}}^{1-\text{Loop}}(X)}$ hier relativ kompliziert.
Für die weitere Diskussion ist es instruktiv, sich zunächst mit der Näherung zu beschäftigen, in der nur 16fache Links existieren. In diesem Fall sind stets $N-1$ der $N(N-1)/2$ Paare von Raumzeitkoordinaten durch solche verbunden. Die zu den 16fachen Links korrespondierenden Faktoren weisen aufgrund der Struktur von $S_{ij}^{\mu\nu}$ die Proportionalität

$$\mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^8\right\} \sim \mathrm{Tr}_{\mu\nu}\left\{S_{ij}^4\right\}^2 \sim \delta^{(16)}\left(\xi^i-\xi^j\right)\frac{1}{\left(x^i-x^j\right)^{24}} \tag{2.57}$$

zur Deltafunktion der Grassmann-Variablen (siehe auch Anhang A.1) auf. Da zudem das zyklische Produkt

$$\delta^{(16)}\left(\xi^{i_1}-\xi^{i_2}\right)\delta^{(16)}\left(\xi^{i_2}-\xi^{i_3}\right)\cdots\delta^{(16)}\left(\xi^{i_k}-\xi^{i_1}\right)=0 \tag{2.58}$$

verschwindet, können nur solche Graphen zu $S_{\mathrm{eff},16}^{1-\mathrm{Loop}}$ beitragen, deren Links keine Schleifen, d. h. keine geschlossenen Pfade bilden. Schleifenlose Graphen, die aus N Punkten (*Vertizes*) und $N-1$ Links bestehen, sind zusammenhängend und werden als *Baumgraphen* [27] oder *verzweigte Polymere* (*branched polymers*) der Größe N bezeichnet. In dieser Näherung der zehndimensionalen Theorie führt die Integration über $\bar{\xi}$ und ξ schließlich zu einem statistischen Modell solcher

$$\int \mathrm{d}X\, e^{-S_{\mathrm{eff},16}^{1-\mathrm{Loop}}(X)}=\sum_{T\in\mathcal{T}_N}\int \mathrm{d}X\prod_{\langle ij\rangle}\frac{1}{\left(x^i-x^j\right)^{24}}\,, \tag{2.59}$$

in welchem über das Ensemble $\mathcal{T}_N$ aller Bäume T mit N Vertizes summiert und jeweils das Produkt über sämtliche Links $\langle ij\rangle$ von T gebildet wird.

Im zehndimensionalen Fall beschreibt das Modell verzweigter Polymere die Näherung, in der die 8fachen Links vernachlässigt werden. Es läßt sich ebenso zeigen, daß in $D=6$ Dimensionen, wo gemäß (2.55) ausschließlich 4- sowie 8fache Links eine Rolle spielen,

$$\int \mathrm{d}X\, e^{-S_{\mathrm{eff},8}^{1-\mathrm{Loop}}(X)}=\sum_{T\in\mathcal{T}_N}\int \mathrm{d}X\prod_{\langle ij\rangle}\frac{1}{\left(x^i-x^j\right)^{12}} \tag{2.60}$$

die vereinfachte effektive Theorie klassischer Raumzeitkoordinaten wiedergibt, in welcher nur die 8fachen Links Berücksichtigung finden.

Während es im sechs- bzw. zehndimensionalen Fall eine Näherung beschreibt, entspricht das Modell verzweigter Polymere in $D=4$ Dimensionen der exakten Lösung im Rahmen der One-Loop-Approximation. Wie aus (2.55) abzulesen ist, existieren dann lediglich 4fache Links, welche die Rolle der 8- ($D=6$) bzw. 16fachen ($D=10$) aus obiger Diskussion einnehmen. Als effektive Theorie der Raumzeitkoordinaten x_μ^i ergibt sich hier

$$\int \mathrm{d}X\, e^{-S_{\mathrm{eff}}^{1-\mathrm{Loop}}(X)}=\sum_{T\in\mathcal{T}_N}\int \mathrm{d}X\prod_{\langle ij\rangle}\frac{1}{\left(x^i-x^j\right)^{6}}\,. \tag{2.61}$$

Wir halten fest, daß für die Gaußsche Näherung der supersymmetrischen SU(N)-Yang-Mills-Integrale Modelle verzweigter Polymere von Bedeutung sind, deren statistische Gewichte bezüglich der Links faktorisieren und potenzartig abfallende Linkgewichte (vgl. Abschnitt 3.1) enthalten. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, die geometrischen Eigenschaften solcher Baumgraphen zu studieren. Darauf kommen wir in Kapitel 3 zurück.

2.6 Spontane Brechung der Lorentzsymmetrie

Die Autoren von [24] sind davon überzeugt, daß das IKKT-Matrixmodell einen dynamischen Mechanismus enthält, der zu einer spontanen Brechung der D-dimensionalen Lorentzsymmetrie führt. Eine solche liegt vor, sofern Feldkonfigurationen das System dominieren, deren Ausdehnung in $D_{\text{eff}} < D$ Richtungen der Raumzeit signifikant größer sind als in den übrigen $D - D_{\text{eff}}$. Es ist dann von der effektiven Raumzeitdimension D_{eff} die Rede. Ihrer Bestimmung wird oftmals die Korrelationsmatrix bzw. der Trägheitstensor

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\,\{A_\mu A_\nu\} \tag{2.62}$$

zugrundegelegt [8]. Die Eigenwerte $C_1, \ldots, C_D$ dieser Matrix geben die quadratischen Ausdehnungen des Systems längs der Hauptträgheitsachsen wieder. Dem System wird daraufhin die effektive Dimension D_{eff} zugesprochen, falls $D - D_{\text{eff}}$ der bezüglich (2.1) gebildeten Erwartungswerte $\langle C_\mu \rangle$ im Limes großer N verschwinden.[4]
Weitere Vermutungen sind, daß die Lösung des IKKT-Modells als nicht-störungstheoretische Definition einer Superstringtheorie neben der Vorhersage der (effektiven) Raumzeitdimensionalität auch solche über die Eichgruppe der vereinheitlichten Theorie aller Wechselwirkungen sowie deren Materieinhalt zuläßt [4, 28]. In den vergangenen Jahren hat jedoch insbesondere die Frage hinsichtlich der Existenz einer spontanen Brechung der Lorentzsymmetrie eine Vielzahl an Veröffentlichungen nach sich gezogen. Hierbei wurden sowohl analytische Untersuchungen als auch numerische Simulationen durchgeführt.
Monte-Carlo-Simulationen des vierdimensionalen Modells haben gezeigt, daß sich eine spontane Brechung von $D = 4$ auf $D_{\text{eff}} = 1$ beobachten läßt, wenn man die Verteilungen der Eigenwerte C_μ studiert [8, 20]. Mißt man hingegen Erwartungswerte von Wilson-Loops bzw. Polyakov-Lines, so ist kein Effekt der Symmetriebrechung nachweisbar [9, 10]. Welche Observablen in diesem Zusammenhang Ordnungsparametern entsprechen, ist noch ungeklärt.
Monte-Carlo-Simulationen des sechs- bzw. zehndimensionalen Matrixmodells sind, worauf schon in der Einleitung hingewiesen wurde, deutlich schwieriger, weil die Rechenzeit aufgrund der Komplexwertigkeit der effektiven bosonischen Wirkung exponentiell mit der Größe des Systems anwächst. Ambjørn *et al.* führten numerische Simulationen in $D = 6$ und 10 Dimensionen durch, in denen sie lediglich den Betrag der effektiven Wirkung berücksichtigten [7]. Ihre Ergebnisse sprechen deutlich gegen eine Brechung der SO(D)-Symmetrie. Zu klären bleibt indes, ob die Phase des fermionischen Integrals möglicherweise zu einer effektiven Dimension $D_{\text{eff}} < D$ führt. Anagnostopoulus und Nishimura haben ein Verfahren entwickelt, welches auch Monte-Carlo-Simulationen von Systemen mit komplexen Wirkungen

[4] Wenn die Eigenwertverteilungen $\varrho(\lambda)$ der bosonischen Matrizen nicht schneller als $\sim \lambda^{-3}$ abfallen, sind im allgemeinen einige der Erwartungswerte $\langle C_\mu \rangle$ divergent. In diesen Fällen sollten alternative Maße für die Ausdehnung des Systems in Betracht gezogen werden.

ermöglicht [29]. Ihre Resultate für den sechsdimensionalen Fall weisen auf die Brechung der Lorentzsymmetrie mit $D_{\text{eff}} = 4$ hin. Mittels einer Sattelpunktanalyse untersuchten Nishimura und Vernizzi die Bedeutung der Phase des fermionischen Integrals bezüglich der spontanen Symmetriebrechung in $D = 10$ Dimensionen [30]. Sie fanden $3 \leq D_{\text{eff}} \leq 8$ und damit ein erstes analytisches Argument dafür, daß letztgenannte Phase für den in diesem Abschnitt diskutierten Effekt eine wichtige Rolle spielt. Vor kurzem wurden analytische Untersuchungen des zehndimensionalen Modells angestellt, bei denen mit Hilfe von Variationsverfahren der Zustand minimaler freier Energie bestimmt wurde [31, 32]. Beiden Publikationen zufolge scheint eine spontane Brechung der SO(10)-Symmetrie mit $D_{\text{eff}} = 4$ vorzuliegen. Rigorose Beweise hierfür konnten bisher nicht erbracht werden.

Auch die im vorherigen Abschnitt diskutierten Ergebnisse für die effektive Theorie der klassischen Koordinaten können als Hinweis darauf aufgefasst werden, daß die effektive Raumzeitdimension des zehndimensionalen Matrixmodells $D_{\text{eff}} = 4$ beträgt, d. h. gerade mit der Anzahl D_{ph} an Dimensionen zusammenfällt, die experimentell nachweisbar sind. Wie wir im folgenden Kapitel zeigen, ist dem Ensemble der verzweigten Polymere bzw. Baumgraphen des Modells (2.61) und somit auch der Raumzeit die äußere (fraktale) Hausdorff-Dimension $D_H = 4$ zuzusprechen. D_H beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Volumen des Systems und dessen mittlerer linearer Ausdehnung (vgl. Abschnitt 3.7) und unterscheidet sich im allgemeinen von D_{eff}.
Weil sich die deutlich komplizierteren Graphen in $D = 6$ bzw. 10 Dimensionen durch das Übereinanderlegen von je zwei aus 4- bzw. 8fachen Links bestehenden verzweigten Polymeren konstruieren lassen, sind letztere als die grundlegenden geometrischen Strukturen der effektiven Theorie anzusehen. Es wird vermutet, daß in eben diesen Dimensionen Wechselwirkungen zwischen den Links der übereinandergelegten Baumgraphen zu einer „Glättung“ der fraktalen Struktur der Raumzeit und somit zu einer nicht-fraktalen effektiven Dimension D_{eff} führen [24, 28]. Alternativ ließe sich dieser Effekt, sofern er existiert, als Folge der zusätzlichen 4- bzw. 8fachen Links in $D = 6$ bzw. 10 Dimensionen auffassen. Ausgehend von der fraktalen Dimension $D_H = 4$ der verzweigten Polymere hofft man, auf diese Weise die spontane Brechung der Lorentzsymmetrie von $D = 10$ auf $D_{\text{eff}} = 4$ Dimensionen nachweisen zu können.

Kapitel 3

Verzweigte Polymere

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, daß Modelle verzweigter Polymere mit potenzartig abfallenden Linkgewichten für die im Rahmen der One-Loop-Approximation des Matrixmodells hergeleitete effektive Theorie klassischer Raumzeitkoordinaten von zentraler Bedeutung sind. Weil die effektive Theorie die geometrische Struktur der Raumzeit für kleine Energien bzw. große Abstände beschreibt, ist es naheliegend, die geometrischen Eigenschaften solcher verzweigten Polymere zu untersuchen.
Wie schon in der Einleitung angesprochen, interessiert man sich auch in anderen Bereichen der Physik [11, 12, 13] sowie in der physikalischen Chemie [14, 15] für verzweigte Polymere. Aus diesem Grund beschränken wir das Studium der geometrischen Eigenschaften verzweigter Polymere im folgenden nicht nur auf Modelle mit potenzartig abfallenden Linkgewichten, sondern lassen auch allgemeinere mit faktorisierenden statistischen Gewichten zu. Die betrachteten Modelle werden dabei gemäß ihrer universellen Skaleneigenschaften klassifiziert.

3.1 Definitionen

Der Definition eines Modells verzweigter Polymere legen wir stets ein kanonisches Ensemble von Baumgraphen zugrunde, welche in einen D-dimensionalen euklidischen Raum (*target space*) eingebettet sind. Mit der Annahme, daß ihre N Vertizes unterscheidbar (*gelabelt*) sind, läßt sich die Einbettung als Abbildung der Elemente i aus der Menge $\{1, \ldots, N\}$ der Vertexindizes auf Koordinaten $\vec{x}_i$ des Einbettungsraumes auffassen. Eine derartige Abbildung ermöglicht es, zwischen *inneren* und *äußeren geometrischen Eigenschaften* von Graphen zu unterscheiden.
Für die Diskussionen der inneren Geometrie wird allen Links eine Einheitslänge zugesprochen und der *innere* oder *geodätische Abstand* zweier Vertizes j und k als ihr

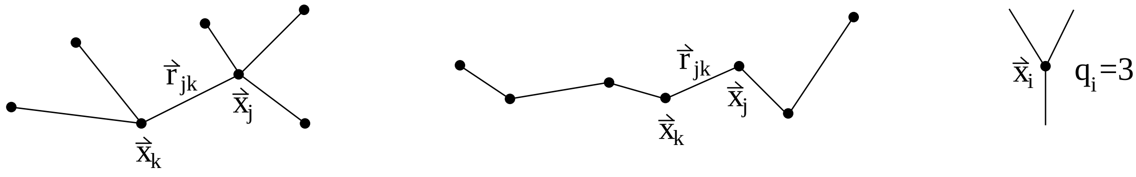

Abbildung 3.1: Ein (a) verzweigtes Polymer, eine (b) Kettenstruktur sowie ein (c) Vertex der Ordnung drei im zweidimensionalen euklidischen Raum.

minimaler Abstand in Einheiten von Links eingeführt [33]. Baumgraphen zeichnen sich dadurch aus, daß sich zwei beliebige ihrer Vertizes stets durch einen eindeutigen, kürzesten und aus Links zusammengesetzten Pfad verbinden lassen. Daher entspricht deren geodätischer Abstand gerade der Länge letztgenannten Pfades. Ein weiterer grundlegender Begriff für die Untersuchung der inneren Geometrie ist die *Vertexordnung* oder *Koordinationszahl* q_i. Diese ist hier stets größer oder gleich eins und gibt an, wieviele der $N-1$ Links sich im i-ten Vertex des verzweigten Polymers treffen bzw. von diesem ausgehen. Der *äußere Abstand* der Vertizes j und k wird durch die (euklidische) Länge des Linkvektors $\vec{r}_{jk} = \vec{x}_j - \vec{x}_k$ festgelegt.
Die kanonische Zustandssumme ist als gewichtete Summe über das Ensemble $\mathcal{T}_N$ aller gelabelten verzweigten Polymere mit N Vertizes definiert [18]:

$$Z_N = \frac{1}{N!} \sum_{T \in \mathcal{T}_N} W_T \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \ . \tag{3.1}$$

Hierbei läßt sich das statistische Gewicht des Baumgraphen T in das Produkt eines inneren Gewichtes W_T, welches lediglich von dessen innerer Geometrie abhängt, und eines äußeren, das eine Funktion der Vertexkoordinaten $\vec{x}_i$ ist, zerlegen. Es wird angenommen, daß das innere Gewicht als Produkt

$$W_T = w_{q_1} w_{q_2} \cdots w_{q_N} \tag{3.2}$$

sogenannter *Vertex-* bzw. *Verzweigungsgewichte* w_q geschrieben werden kann, die nicht-negative[5] reelle Funktionen sind, welche nur von der Ordnung q des korrespondierenden Vertex abhängen. Nur falls das zu der Koordinationszahl q gehörige Vertexgewicht strikt positiv ist, können Baumgraphen mit Vertizes, aus denen q Links hervorgehen, einen nicht-verschwindenden Beitrag zur Zustandssumme haben. Aus diesem Grund ist zu fordern, daß

$$w_1 > 0 \qquad \text{und} \qquad w_s > 0 \tag{3.3}$$

[5]Werden auch negative w_q zugelassen, so sind Modelle mit nicht-universellem sowie multikritischem Verhalten möglich [11, 34].

für mindestens ein $s \geq 3$ gilt. Wenn w_1 null wäre, so würde das innere Gewicht eines jeden Polymers verschwinden, da diese stets *Blätter*, d. h. Vertizes der Ordnung eins, besitzen. Die zweite Forderung sorgt dafür, daß nicht ausschließlich *Kettenstrukturen* (zufällige Pfade) zu Z_N beitragen. Für die Betrachtung von Baumgraphen sind die Forderungen (3.3) somit obligatorisch. Ist die Gesamtheit $\{w_q\} = \{w_1, w_2, \ldots, w_{q_{max}}\}$ aller Verzweigungsgewichte spezifiziert, so sind die inneren geometrischen Eigenschaften des Modells vollständig fixiert [11]. Eine kanonische Wahl ist, sämtliche w_q und damit auch alle inneren Gewichte (3.2) auf eins zu setzen. Obwohl dieser Fall $W_T = 1$ zu den Modellen korrespondiert, welche für die One-Loop-Näherung des IKKT-Modells bedeutsam sind, werden in dieser Arbeit auch die verallgemeinerten Gewichte betrachtet, um zu illustrieren, wie Modifikationen dieser die universellen Skaleneigenschaften beeinflussen [16].

Es ist üblich, Vertizes j und k, die durch einen Link $\langle jk \rangle$ verbunden sind, als *nächste Nachbarn* zu bezeichnen. Weil das äußere Gewicht in unserem Fall ein Produkt von Linkgewichten $f(\vec{r}_{jk})$ enthält, das bezüglich der $\langle jk \rangle$ faktorisiert und keine Wechselwirkungen zwischen den Links einführt, enthalten die im folgenden untersuchten und durch (3.1) definierten Modelle lediglich *Nächste-Nachbarn-Wechselwirkungen*. Deswegen berechnet sich die Gesamtenergie für die Einbettung eines verzweigten Polymers aus der Summe der Energien, die für das Einbetten seiner Links erforderlich sind. Auf diese Weise bestimmt das Linkgewicht $f(\vec{r})$ die Eigenschaften der äußeren Geometrie. Um letzteres als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren zu können, werden fortan ausnahmslos solche Gewichte betrachtet, die isotrop sind, d. h. für die $f(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$ gilt, und deren Integral normierbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit läßt sich dann

$$\int \mathrm{d}^D r \, f(\vec{r}) = 1 \tag{3.4}$$

fordern. Für den Betrag eines Linkvektors $\vec{r}$ verwenden wir in diesem Kapitel stets die Schreibweise $|\vec{r}|$, während wir die Linkvektoren im eindimensionalen äußeren Raum mit r bezeichnen (siehe Abschnitte 3.10 und 3.11).

Offensichtlich verhält sich das obige statistische Gewicht eines verzweigten Polymers unter einer Permutation der Vertexlabel invariant. Um Überzählungen zu vermeiden, wird daher der Normierungsfaktor $1/N!$ in die Definition der Zustandssumme (3.1) aufgenommen, wobei $N!$ das Volumen der Permutationsgruppe S_N repräsentiert, d. h. die Anzahl möglicher Permutationen einer N-elementigen Menge.

Des weiteren ist zu beachten, daß das Modell (3.1) eine Invarianz unter Translationen $\vec{x}_i \to \vec{x}_i + \vec{\delta}$ im Einbettungsraum aufweist. Seine Definition beinhaltet eine redundante Integration (*zero mode*) über die Gruppe der Translationen, was zu einer Divergenz von Z_N führt. Um diese Divergenz loszuwerden, ist das (unendliche) Volumen

$$\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f(\vec{r}_{jk}) = \int \mathrm{d}^D x \int \prod_{\langle jk \rangle} \mathrm{d}^D r_{jk} \, f(\vec{r}_{jk}) = \int \mathrm{d}^D x = V \tag{3.5}$$

des Einbettungsraumes aus der Zustandssumme zu entfernen. Bei der Berechnung des Integrals sind zwei Dinge zu berücksichtigen. Zum einen existiert stets eine Variablentransformation, die $N-1$ der N Koordinaten $\vec{x}_i$ in die Linkvektoren $\vec{r}_{jk}$ überführt und deren Jacobi-Determinante den Betrag eins hat. Zum anderen führen die dazugehörigen $N-1$ Integrationen infolge der Normierungsbedingung (3.4) ebenfalls zu einem Faktor eins. Rein formal kann der divergente Faktor demnach durch das Weglassen der Integration (3.5) aus der Zustandssumme „gekürzt“ werden:

$$z_N = \frac{Z_N}{V} = \frac{1}{N!} \sum_{T \in \mathcal{T}_N} W_T \, . \tag{3.6}$$

Technisch läßt sich dieses etwa durch das Multiplizieren des Integranden mit einer geeigneten Deltafunktion realisieren, welche die Position des Schwerpunktes $\vec{x}_{cm}$ oder einer Koordinate $\vec{x}_i$ der Baumgraphen fixiert. Alternativ ist es möglich, zunächst ein endliches Volumen zu betrachten, und erst nach der Modifikation der Zustandssumme $z_N = Z_N/V$ zum Grenzwert $V \to \infty$ überzugehen.
Formel (3.6) zeigt, daß die modifizierte kanonische Zustandssumme z_N ausschließlich von den inneren geometrischen Eigenschaften abhängt. Die Entkopplung der inneren von der äußeren Geometrie ist eine Eigenschaft, welche auf die Struktur der von uns gewählten äußeren Gewichte zurückzuführen ist. Geht man zu komplizierteren Einbettungen über, die Wechselwirkungen zwischen Links einführen oder sogenannte *Excluded-Volume-Effekte* berücksichtigen, so hängt die innere Geometrie der Bäume von der äußeren ab. Solche Effekte werden in dieser Arbeit jedoch nicht diskutiert.

3.2 Erzeugende Funktionen

Für die Untersuchung der Modelle (3.1) ist es zweckmäßig, verschiedene erzeugende Funktionen einzuführen, welche die analytischen Betrachtungen vereinfachen. Als erste definieren wir die Erzeugende

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=2}^{\infty} z_N g^N \tag{3.7}$$

der kanonischen Zustandssummen z_N, die mit (3.6) und den durch (3.2) gegebenen inneren Gewichten auch als

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{T \in \mathcal{T}_N} (gw_1)^{N_1} (gw_2)^{N_2} \dots (gw_{N-1})^{N_{N-1}} \tag{3.8}$$

geschrieben werden kann. In der letzten Formel bezeichnet N_q die Anzahl der Vertizes mit Koordinationszahl q. Zu berücksichtigen ist, daß die N_q der Nebenbedingung $\sum_{q=1}^{N-1} N_q = N$ genügen. $\mathcal{Z}$ entspricht der großkanonischen Zustandssumme der Polymere, wobei die Fugazität g durch $g = e^{-\mu}$ mit dem chemischen Potential μ der

Vertizes in Beziehung gesetzt wird. Obwohl wir diese ebenfalls mit g bezeichnen, ist die in diesem Kapitel auftretende Fugazität von dem Skalenparameter des IKKT-Matrixmodells (vgl. Kapitel 2) zu unterscheiden. Formel (3.8) ist zu entnehmen, daß hier jeder Vertex der Ordnung q einen Faktor gw_q zum inneren Gewicht beiträgt. Dieses ist für die im nächsten Abschnitt diskutierte graphische Darstellung von Bedeutung.
Wie sich zeigen wird, ist es überdies sinnvoll, zwei Ableitungen der erzeugenden Funktion zu definieren:

$$\mathcal{Z}^{(1)} \equiv g\,\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial g} = \sum_{N=2}^{\infty} N z_N g^N\,, \tag{3.9}$$

$$\Phi \equiv \frac{1}{g}\,\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial w_1} = \sum_{N=1}^{\infty} \varphi_N\, g^N \tag{3.10}$$

mit

$$\varphi_N = \frac{\partial z_{N+1}}{\partial w_1} = \frac{1}{(N+1)!} \sum_{T\in\mathcal{T}_{N+1}} \frac{N_1 W_T}{w_1}\,. \tag{3.11}$$

Hierbei ist $\mathcal{Z}^{(1)}$ die Erzeugende der kanonischen Zustandssummen $z_N^{(1)} = N z_N$ von Baumgraphen der Größe N mit einem markierten Vertex. Der Faktor N in (3.9) repräsentiert dementsprechend die Anzahl an Möglichkeiten, einen der N Vertizes auszuzeichnen. Die Ableitung Φ ist die erzeugende Funktion der kanonischen Zustandssummen φ_N von Polymeren mit N Vertizes und einem (ungezählten) äußeren Blatt. Als solches bezeichnen wir einen zusätzlichen Vertex, der über einen Link mit einem der N übrigen Vertizes des Polymers verbunden ist, aber weder den Faktor w_1 noch g zum inneren Gewicht beiträgt (siehe auch Abschnitt 3.3).
Es ist zu beachten, daß die großkanonischen Zustandssummen (3.7) und (3.9) mit $N = 2$ beginnen, während (3.10) auch einen Summanden für $N = 1$ enthält. Begründet liegt dies darin, daß die bezüglich der inneren Geometrie minimalen Baumstrukturen aus zwei durch einen Link verbundenen Vertizes bestehen und für die Polymere des zu Φ gehörigen Ensembles gerade ein Blatt nicht mitgezählt wird.

3.3 Graphische Darstellung und Selbstkonsistenz

In diesem Abschnitt soll ein Prinzip zur graphischen Veranschaulichung und Konstruktion großkanonischer Zustandssummen von Baumgraphen vorgestellt werden (vgl. auch [11, 34, 35]), welches ein „effektives Werkzeug“ für die Herleitung fundamentaler Beziehungen zwischen den erzeugenden Funktionen ist.
Wir verwenden dabei die folgenden Konventionen: Vertizes, die weder ein zu ihrer Koordinationszahl gehöriges Gewicht w_q noch einen Faktor g einführen, werden

durch kleine ungefüllte Kreise repräsentiert. Solche sind, weil sie keine Fugazität einbringen, nicht mitzuzählen. Kleine, schwarz gefüllte Kreise korrespondieren zu Vertizes, welche mit den obengenannten Faktoren w_q und g zum inneren Gewicht und damit auch zur Vertexanzahl N beitragen. Links werden als Linien dargestellt. Für die Konstruktion von erzeugenden Funktionen ist es zudem sinnvoll, kombinatorische Faktoren, die vorhandene Symmetrien des betrachteten Objekts widerspiegeln, explizit in die Darstellung mit aufzunehmen.

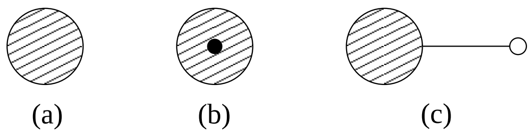

Abbildung 3.2: Graphische Darstellungen der erzeugenden Funktionen (a) $\mathcal{Z}$, (b) $\mathcal{Z}^{(1)}$ und (c) Φ.

Wie Abbildung 3.2 zu entnehmen ist, wird $\mathcal{Z}$ durch eine Blase (schraffierter großer Kreis) symbolisiert, die Ableitung $\mathcal{Z}^{(1)}$ durch eine Blase mit einem gefüllten Kreis (markierter Vertex) und Φ durch eine Blase mit einem Link, an dessen äußerem Ende ein ungefüllter Kreis (äußeres Blatt) befindlich ist. In der Graphentheorie ist es üblich, den ausgezeichneten Vertex eines Baumgraphen als Wurzel (*root*) zu bezeichnen. Die Polymere des $\mathcal{Z}^{(1)}$ zugrundegelegten Ensembles werden dann verwurzelte Bäume (*rooted trees*) genannt, während die des Ensembles, auf dem Φ definiert ist, gepflanzte Bäume (*planted trees*) heißen [16, 27].
Bevor wir Gleichungen zur Berechnung von $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}^{(1)}$ und Φ sowie der großkanonischen Zweipunkt-Funktion $\mathcal{G}^{(2)}$ der inneren Geometrie herleiten, ist es zweckmäßig,

$$P\left(x\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{w_q}{q!}\, x^q \tag{3.12}$$

einzuführen. P ist Funktion einer reellen Variable x und enthält aufgrund ihrer Entwicklungskoeffizienten $w_q/q!$ die gesamte Information zur Festlegung der inneren geometrischen Eigenschaften. Wie sich herausstellt, lassen sich die wichtigsten erzeugenden Funktionen durch Ableitungen von P ausdrücken.
Die großkanonische Zustandssumme $\Phi_q^{[k]}$ für Polymere mit einem markierten Vertex der Ordnung q, an dem $k \leq q$ äußere Blätter hängen, läßt sich folgendermaßen aufbauen (siehe hierzu auch Abbildung 3.3, welche den Fall $k = 2$ und $q = 5$ illustriert). Zunächst sind $q-k$ der zu Φ korrespondierenden Blasen durch das Aufeinanderlegen ihrer äußeren Blätter miteinander zu verbinden. An den resultierenden gemeinsamen Vertex fügt man danach k äußere Blätter an, womit dessen Koordinationszahl auf q anwächst. Damit dieser zum inneren Gewicht beiträgt, d. h. zu einem gefüllten Kreis korrespondiert, ist ihm zusätzlich der Faktor gw_q zuzusprechen. Schließlich bleibt zu berücksichtigen, daß eine Permutation der $q-k$ Blasen zu derselben Erzeugenden führt, was einen Normierungsfaktor $1/(q-k)!$ begründet. Mittels Produktbildung

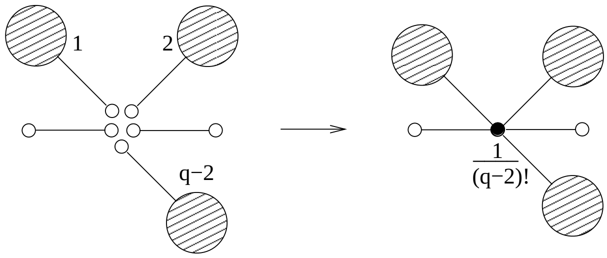

Abbildung 3.3: Graphische Konstruktion der erzeugenden Funktion $\Phi_q^{[2]}$ für $q = 5$.

ergibt sich daher

$$\Phi_q^{[k]} = g \frac{w_q}{(q-k)!} \Phi^{q-k} \, . \tag{3.13}$$

Die Summation von $\Phi_q^{[k]}$ über sämtliche Koordinationszahlen $q \geq k$ entspricht der großkanonischen Zustandssumme aller Bäume mit einem markierten Vertex, der mit $k \geq 0$ äußeren Blättern verbunden ist. Mit $w_0 \equiv 0$ läßt sich letztere als k-te Ableitung von P schreiben

$$gP^{(k)}(\Phi) = g \sum_{q=k}^{\infty} \frac{w_q}{(q-k)!} \Phi^{q-k} \, . \tag{3.14}$$

Für den Rest dieser Arbeit genügt es, die in Abbildung 3.4 veranschaulichten Fälle $k = 0, 1, 2$ genauer zu betrachten.

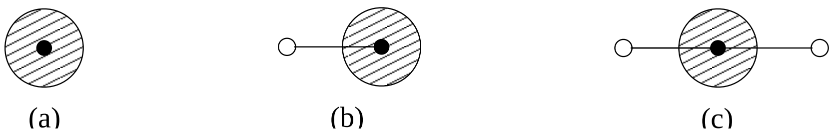

Abbildung 3.4: Graphische Darstellung von (a) $gP(\Phi)$, (b) $gP'(\Phi)$ und (c) $gP''(\Phi)$.

Der Vergleich der Abbildungen 3.2 und 3.4 führt direkt zu den Identitäten

$$\mathcal{Z}^{(1)} = g \sum_{q=1}^{\infty} \frac{w_q}{q!} \Phi^q = gP(\Phi) \tag{3.15}$$

und

$$\Phi = g \sum_{q=1}^{\infty} \frac{w_q}{(q-1)!} \Phi^{q-1} = gP'(\Phi) \, . \tag{3.16}$$

Sofern alle Verzweigungsgewichte spezifiziert sind, ermöglicht die *Selbstkonsistenzgleichung* (3.16) prinzipiell die Berechnung von Φ [11, 16, 35]. Das Einsetzen des Ergebnisses Φ in (3.15) liefert $\mathcal{Z}^{(1)}$, und mit (3.7), (3.9) sowie (3.10) lassen sich auch $\mathcal{Z}$, z_N und φ_N bestimmen. In diesem Sinn ist Φ die fundamentalste der erzeugenden Funktionen aus Abschnitt 3.2. Als deren Bestimmungsgleichung ist (3.16) für die

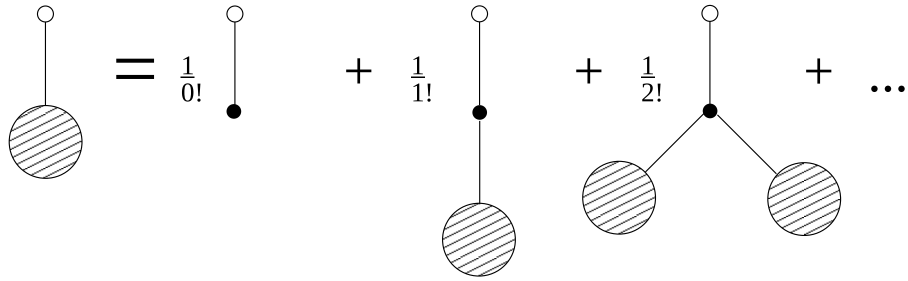

Abbildung 3.5: Die Selbstkonsistenzgleichung (3.16) in der graphischen Darstellung.

Untersuchungen von Modellen verzweigter Polymere somit von zentraler Bedeutung. Abbildung 3.5 zeigt die graphische Veranschaulichung der Selbstkonsistenzgleichung gemäß des zuvor diskutierten Konstruktionsprinzips.
In Abschnitt 3.8 untersuchen wir die Eigenschaften von Zweipunkt-Funktionen der inneren Geometrie, kurz inneren Zweipunkt-Funktionen. Obwohl wir uns insbesondere für die kanonischen interessieren, ist es auch hier einfacher, zunächst die Erzeugende dieser zu studieren. Wir definieren die innere großkanonische Zweipunkt-Funktion $\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n)$ als Summe über alle Baumgraphen, die zwei markierte Vertizes mit geodätischem Abstand $n \geq 1$ besitzen. Weil diese durch einen eindeutigen Pfad verbunden sind, der aus n Links zusammengesetzt ist, läßt sich die Zweipunkt-Funktion, wie in Abbildung 3.6 zu sehen ist, ebenfalls eindeutig in ein Produkt der Erzeugenden aus Abbildung 3.4 (b) und (c) zerlegen. Hierbei korrespondieren die zwei Blasen an den Enden der Kette jeweils zu $gP'(\Phi)$ und die $n-1$ dazwischen liegenden zu $gP''(\Phi)$. Mit $g = e^{-\mu}$ erhalten wir

$$\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) = e^{-(n+1)\mu} \left[P'(\Phi)\right]^2 \left[P''(\Phi)\right]^{n-1} . \tag{3.17}$$

Die Definition von $\mathcal{G}^{(2)}$ ist auch auf den Fall $n = 0$, d. h. wenn ein zweifach markierter Vertex vorliegt, erweiterbar. Dann reduziert sich die Zweipunkt-Funktion auf die Einpunkt-Funktion: $\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n = 0) = \mathcal{Z}^{(1)} = e^{-\mu}P(\Phi)$.
Wenn Φ als Lösung von (3.16) vorliegt, ermöglicht (3.17) es uns, die n- und μ-Abhängigkeit von $\mathcal{G}^{(2)}$ explizit zu machen und mit einer inversen Laplace-Transformation zur kanonischen $\mathcal{G}_N^{(2)}$ überzugehen (vgl. Abschnitt 3.8).

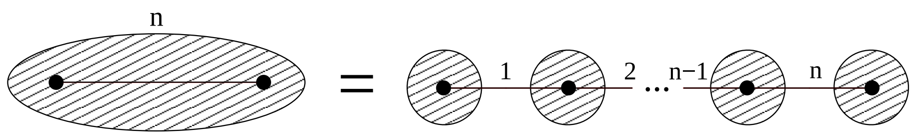

Abbildung 3.6: Zerlegung der inneren Zweipunkt-Funktion $\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n)$ [33].

3.4 Das Cayley-Problem

Es ist möglich, die Selbstkonsistenzgleichung zur Ermittlung der Anzahl $|\mathcal{T}_N|$ aller gelabelten Baumgraphen der Größe N zu verwenden. In der Literatur wird die Zählung dieser Bäume auch als Cayley-Problem bezeichnet [27].
Der Einfachheit halber werden wir für die Berechnung den Fall $W_T = 1$ betrachten, in dem $w_q = 1$ für alle Ordnungen $q \geq 1$ gilt. Dann nämlich resultiert aus (3.6) die einfache Beziehung $|\mathcal{T}_N| = z_N N!$, womit sich die Lösung des Problems auf die Bestimmung einer kanonischen Zustandssumme reduziert. Für diese Wahl der inneren Gewichte vereinfachen sich (3.15) und (3.16) zu

$$\mathcal{Z}^{(1)} = g \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \Phi^q = g e^{\Phi} - g \,, \tag{3.18}$$

$$\Phi = g \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q-1)!} \Phi^{q-1} = g e^{\Phi} \,. \tag{3.19}$$

Als Relation der erzeugenden Funktionen ergibt sich somit

$$\mathcal{Z}^{(1)} = \Phi - g \,, \tag{3.20}$$

und wegen (3.9) sowie (3.10) gelten

$$z_N = \frac{\varphi_N}{N} \quad , \; N \geq 2 \qquad \text{und} \qquad z_1 = \phi_1 - 1 = 0 \,. \tag{3.21}$$

Die Koeffizienten der Erzeugenden Φ berechnen sich gemäß des Residuensatzes qua [36]

$$\varphi_N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}g \, \frac{\Phi(g)}{g^{N+1}} \,, \tag{3.22}$$

wobei $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kontur um den Ursprung ist. Die Variablentransformation $g = \Phi e^{-\Phi}$ führt zu einer geschlossenen Kontur $\mathcal{C}'$ um den Ursprung der komplexen Φ-Ebene, falls $\mathcal{C}$ nur solche g enthält, deren Beträge hinreichend klein sind, so daß $g \approx \Phi$ gilt. Mit der Substitution erhält man

$$\varphi_N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}'} \mathrm{d}\Phi \, \frac{(1-\Phi) e^{N\Phi}}{\Phi^N} = \frac{N^{N-1}}{N!} \tag{3.23}$$

und für $N \geq 2$

$$|\mathcal{T}_N| = z_N N! = \varphi_N \frac{N!}{N} = N^{N-2} \tag{3.24}$$

als Lösung des Cayley-Problems.

Formel (3.6) zufolge legt die Wahl der Vertexgewichte das asymptotische Verhalten von z_N für $N \to \infty$ fest. Eine unmittelbare Folge dessen ist, daß ebenso die

Konvergenzradien der Reihen (3.7), (3.9) und (3.10) lediglich von der Wahl der w_q abhängen. So z. B. ist der Konvergenzradius von (3.7) nicht-verschwindend, sofern z_N nicht schneller als exponentiell mit N anwächst. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, daß das asymptotische Verhalten der z_N auch zur Definition eines kritischen Exponenten γ herangezogen werden kann, gemäß dem drei Universalitätsklassen von Modellen verzweigter Polymere zu unterscheiden sind.
Für die oben spezifizierten Gewichte und große N ergibt sich mit der Stirlingschen Formel die Relation

$$z_N = \frac{N^{N-2}}{N!} \sim N^{-5/2} e^N \,, \tag{3.25}$$

auf deren Bedeutung wir im nächsten Abschnitt eingehen.

3.5 Universalitätsklassen und Singularitätentypen

Gemäß ihres Skalenverhaltens bezüglich der inneren Geometrie wird zwischen *generischen*, *marginalen* und *semi-generischen* Modellen verzweigter Polymere unterschieden [13, 16, 17]. Um einzusehen, wie diese Klassifizierung zustandekommt, empfiehlt es sich, ein weiteres Mal auf die Selbstkonsistenzgleichung zurückzugreifen.
Ist die Gesamtheit $\{w_q\}$ nicht-negativer Vertexgewichte gegeben, welche den Bedingungen (3.3) genügen, so läßt sich das kritische Verhalten des Modells bestimmen, indem man $g\,(\Phi)$ als Lösung von

$$g = \frac{\Phi}{P'\,(\Phi)} = \frac{\Phi}{\sum_{q=1}^{\infty} \frac{w_q}{(q-1)!} \Phi^{q-1}} \tag{3.26}$$

ermittelt und anschließend in einem geeigneten Bereich von Φ invertiert. Weil die Inversion die strenge Monotonie von g voraussetzt und Φ als großkanonische Zustandssumme (3.10) positiv definit sowie für $g = 0$ verschwindend zu sein hat, ist dieser Bereich ein Intervall der Form $[0, \Phi_0)$. Hierbei entspricht Φ_0 entweder dem kleinsten Wert $\Phi > 0$, für den g ein Extremum besitzt, oder dem Konvergenzradius R_c der zu g gehörigen Reihe. Mit der kritischen Fugazität $g_0 = g\,(\Phi_0)$ und dem kritischen chemischen Potential $\mu_0 = -\log\,(g_0)$ definieren wir die positiven Differenzen

$$\Delta\Phi = \Phi_0 - \Phi \quad , \quad \Delta g = g_0 - g \quad \text{und} \quad \Delta\mu = \mu - \mu_0 \,, \tag{3.27}$$

welche der Beschreibung des kritischen Verhaltens von (z. B.) der großkanonischen Suszeptibilität χ_μ sowie Zweipunkt-Funktionen zugrundezulegen sind. Für die Klassifizierung der Modelle führen wir den Suszeptibilitätsexponenten γ anhand der Relation

$$\chi_\mu = \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial \mu^2} \sim \Delta\mu^{-\gamma} \tag{3.28}$$

ein. Hierbei repräsentiert das Monom auf der rechten Seite den im Limes $\Delta\mu \to 0^+$ führend singulären Anteil von χ_μ. Dies bedeutet, daß χ_μ für $\Delta\mu \to 0^+$ und positive γ selbst divergiert, während für $\gamma < 0$ die k-te Ableitung $(|\gamma| < k \leq |\gamma| + 1)$ der Suszeptibilität nach μ die führende Divergenz bestimmt.
Am Ende des vorherigen Abschnitts wurde bereits angedeutet, daß der Exponent γ auch das asymptotische Verhalten der kanonischen Zustandssummen im Limes großer N wiedergibt. In der Tat läßt sich (3.28) durch das Einsetzen von

$$z_N \sim N^{\gamma-3} e^{\mu_0 N} \tag{3.29}$$

in (3.7) und zweifacher Ableitung nach dem chemischen Potential reproduzieren

$$\begin{aligned} \chi_\mu = \frac{\partial^2 \mathcal{Z}}{\partial \mu^2} &= \sum_N N^2 z_N e^{-\mu N} \sim \sum_N N^{\gamma-1} e^{-\Delta\mu N} \\ &\sim \int \mathrm{d}N N^{\gamma-1} e^{-\Delta\mu N} \sim \Delta\mu^{-\gamma} \,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Durch den Vergleich von (3.25) mit (3.29) können dementsprechend die kritischen Werte μ_0 und g_0 sowie der Suszeptibilitätsexponent der Modelle verzweigter Polymere ermittelt werden, deren Verzweigungsgewichte w_q für alle q eins sind. Man findet $\mu_0 = 1$, $g_0 = e^{-\mu_0} = 1/e$ sowie $\gamma = 1/2$.

Um die Klassifizierung anhand der invertierten Lösung $\Phi\,(g)$ von (3.26) diskutieren zu können, ist zu berücksichtigen, daß die Suszeptibilität der ersten Ableitung von Φ nach μ proportional ist [18], d. h. $\chi_\mu \sim \partial\Phi/\partial\mu$, und für hinreichend kleine Δg

$$\Delta\mu = -\log(g) + \log(g_0) = -\log(1 - \Delta g/g_0) \simeq \Delta g/g_0 \tag{3.31}$$

gilt. Damit lautet die zu (3.28) korrespondierende Gleichung

$$\Phi \sim \Delta g^{1-\gamma} \,. \tag{3.32}$$

Die systematische Betrachtung sämtlicher Möglichkeiten kritischen Verhaltens erfordert es, erst einmal die Fälle $R_c = 0$, $0 < R_c < \infty$ und $R_c = \infty$ zu unterscheiden. Offensichtlich sind die zum ersten Fall gehörigen Modelle verzweigter Polymere nur für $g = 0$ definierbar und daher uninteressant. Verschwindende Konvergenzradien treten auf, falls die Vertexgewichte zu schnell mit der Ordnung q wachsen.
Ist R_c endlich, so läßt sich für alle mit den obigen Merkmalen gewählten Sätze $\{w_q\}$ mit Hilfe der Ableitungen

$$g'(\Phi) = \frac{P'(\Phi) - \Phi P''(\Phi)}{(P'(\Phi))^2} = \frac{\sum_{q=1}^{\infty} \frac{w_q}{(q-1)!}(2-q)\Phi^{q-1}}{(P'(\Phi))^2} \,, \tag{3.33}$$

$$g''(\Phi) = -\left\{ \frac{\Phi P'''(\Phi)}{(P'(\Phi))^2} + \frac{2P''(\Phi)}{P'(\Phi)}\, g'(\Phi) \right\} \tag{3.34}$$

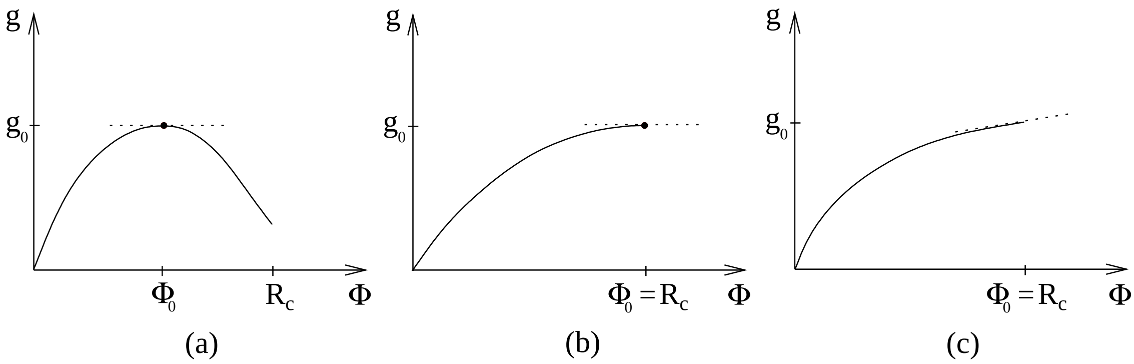

Abbildung 3.7: Qualitatives Verhalten der Fugazität g (durchgezogene Linie) im (a) generischen, (b) marginalen und (c) semi-generischen Fall. Die gestrichelten Linien sind Tangenten, deren Steigung dem jeweiligen Grenzwert $\lim_{\Phi \nearrow \Phi_0} g'(\Phi)$ entsprechen.

und (3.26) zeigen, daß die drei in Abbildung 3.7 dargestellten Situationen zu unterscheiden sind. Bevor wir auf die spezifischen Besonderheiten dieser eingehen, sind wichtige Gemeinsamkeiten der Fälle (a), (b) und (c) hervorzuheben. Aufgrund von (3.3) und $w_q \geq 0$ für alle q haben die Ableitungen P', P'' und P''' die Eigenschaft, für $\Phi > 0$ strikt positiv zu sein. Darüber hinaus gilt $\lim_{\Phi \to 0} P'(\Phi) = w_1 > 0$, woraus $g(0) = 0$ folgt. Aus der Untersuchung von (3.33) und (3.34) geht hervor, daß g im Bereich $[0, \Phi_0)$ stets streng monoton wachsend und konkav ($g'' < 0$) ist.

(a) Generischer Fall:
In diesem Fall nimmt die Fugazität streng monoton zu, bis sie bei $\Phi_0 < R_c$ ein Maximum erreicht. Nach (3.33) ist diese Stelle durch die eindeutige Lösung von

$$\sum_{q=3}^{\infty} \frac{w_q}{(q-1)!}(q-2)\Phi_0^{q-1} = w_1 \tag{3.35}$$

bestimmt. Aus der Entwicklung von g um den kritischen Wert Φ_0

$$g(\Phi) = g(\Phi_0) - \frac{g'(\Phi_0)}{1!}(\Phi_0 - \Phi) + \frac{g''(\Phi_0)}{2!}(\Phi_0 - \Phi)^2 + \mathcal{O}\left(\Delta\Phi^3\right) \ , \tag{3.36}$$

der Berücksichtigung von $g'(\Phi_0) = 0$ sowie (3.27) und unter Vernachlässigung der Terme, deren Ordnung in $\Delta\Phi$ größer als zwei sind, resultiert

$$\Delta\Phi \simeq \sqrt{\frac{2!}{-g''(\Phi_0)}}\Delta g^{1/2} \tag{3.37}$$

und damit das kritische Verhalten

$$\Phi \sim \Delta g^{1/2} \ . \tag{3.38}$$

Insbesondere ist der Vorfaktor in (3.37) reell, da $g''(\Phi_0) < 0$. Mit dem Vergleich von (3.32) und (3.38) ergibt sich $\gamma = 1/2$ als Suszeptibilitätsexponent generischer Bäume.

(c) Semi-generischer Fall:[6]
Der semi-generische Fall zeichnet sich dadurch aus, daß Φ_0 mit R_c zusammenfällt und insbesondere $g'(\Phi_0) = \lim_{\Phi \nearrow \Phi_0} g'(\Phi) > 0$ existiert. Für $\Phi \lesssim \Phi_0 = R_c$ läßt sich die Fugazität dann schreiben als

$$g(\Phi) = g(\Phi_0) - \frac{g'(\Phi_0)}{1!}(\Phi_0 - \Phi) + \cdots + c(\Phi_0 - \Phi)^{\beta - 1} + \ldots \tag{3.39}$$

mit reellen Konstanten c und β. Aufgrund der Eigenschaften von g' sowie g'' ist der Wertebereich des Exponenten β einzuschränken, wobei $n < \beta < n+1$ mit $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gelten muß [17]. Das führend singuläre Verhalten von g bzw. Δg ist durch den Term $c(\Phi_0 - \Phi)^{\beta-1}$ gegeben. Wird

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta g}{g'(\Phi_0)} \tag{3.40}$$

als Lösung der linearen Gleichung

$$g(\Phi) = g(\Phi_0) - g'(\Phi_0)\,\Delta\Phi \tag{3.41}$$

in (3.39) eingesetzt, so folgt

$$\Phi \sim \Delta g^{\beta - 1}\,. \tag{3.42}$$

Charakteristisch ist, daß g sein führend singuläres Verhalten an Φ vererbt und der kritische Exponent $\gamma = 2 - \beta$ für semi-generische Modelle verzweigter Polymere negativ ist.

(b) Marginaler Fall:
Als marginaler Fall wird der bezeichnet, in dem sowohl $g'(\Phi_0) = 0$ als auch $\Phi_0 = R_c$ gilt. Weil er somit Merkmale der bereits diskutierten Fälle vereint, ist er von besonderer Bedeutung. Auch hier besitzt die Fugazität für $\Phi \lesssim \Phi_0$ eine Darstellung der Form (3.39), wobei der zu $\Delta\Phi$ proportionale Term wegen $g'(\Phi_0) = 0$ verschwindet. Bezüglich des Invertierens von $g(\Phi)$ ist zwischen $2 < \beta < 3$ und $\beta > 3$ zu unterscheiden. Dabei findet man für $\beta > 3$ eine zum generischen Fall korrespondierende Situation vor. Die Inversion liefert

$$\Phi \sim \begin{cases} \Delta g^{1/(\beta-1)} & \text{, für } 2 < \beta < 3 \\ \Delta g^{1/2} & \text{, für } \beta > 3 \end{cases} \tag{3.43}$$

und gemäß (3.32) ergibt sich für den Exponenten der Suszeptibilität

$$\gamma = \begin{cases} (\beta - 2)/(\beta - 1) & \text{, für } 2 < \beta < 3 \\ 1/2 & \text{, für } \beta > 3\,. \end{cases} \tag{3.44}$$

[6] Es bietet sich an, den semi-generischen Fall vor dem marginalen zu diskutieren, weil letztgenannter Eigenschaften der Fälle (a) und (c) vereint (siehe auch Abbildung 3.7).

Folglich ist $\gamma \in (0, 1/2]$ für marginale Modelle, deren Polymere auch skalen-freie Bäume (*scale-free trees*) genannt werden [13].

Abschließend ist zu klären, welche Singularitätentypen im Fall $R_c = \infty$ auftreten können. Auch in diesem liegt bei der eindeutigen Lösung $0 < \Phi_0 < \infty$ von (3.35) ein Maximum der Fugazität vor, und im Bereich $[0, \Phi_0)$ gelten $g' > 0$ sowie $g'' < 0$. Modelle mit $R_c = \infty$ sind daher immer generisch, und ihr Suszeptibilitätsexponent lautet $\gamma = 1/2$.
Derartige Konvergenzradien liegen beispielsweise vor, wenn die Verzweigungsgewichte nur für endlich viele Ordnungen q nicht-verschwindend sind. Ferner hat auch das im vorherigen Abschnitt betrachtete Beispiel ($w_q = 1\ , \forall\, q$), dessen Fugazität durch $g = \Phi e^{-\Phi}$ gegeben ist, einen unbeschränkten Radius der Konvergenz. Dies impliziert, daß den Raumzeitstrukturen, welche im Rahmen der One-Loop-Näherung des IKKT-Modells zu untersuchen sind, generische Polymere zugrundeliegen.

Wie wir in Abschnitt 3.8 nachweisen, korrespondieren die obigen drei Universalitätsklassen zu unterschiedlichem Skalenverhalten der Zweipunkt-Funktionen sowie verschiedenen geometrischen Eigenschaften der Bäume.
Bialas und Burda [16] haben überdies für Modelle verzweigter Polymere, welche für die Phasenstruktur der simplizialen Quantengravitation (siehe z. B. [12]) von Bedeutung sind, gezeigt, daß sich mittels der Variation externer Parameter Übergänge zwischen den obengenannten „Phasen“ (a), (b) und (c) studieren lassen.

3.6 Korrelationsfunktionen

Nachdem sich die letzten vier Abschnitte ausschließlich auf Betrachtungen der inneren Geometrie beschränkten, sollen nun Korrelationsfunktionen der äußeren vorgestellt und untersucht werden. Diese sind fundamentale Größen, welche die Information über die statistischen Eigenschaften des Systems enthalten.

Zunächst aber führen wir den Erwartungswert einer auf dem kanonischen Ensemble definierten Observable $\mathcal{Q}$ ein als (siehe auch (3.1) und (3.6)) [18]

$$\langle \mathcal{Q} \rangle_N \equiv \frac{1}{z_N} \frac{1}{N!} \sum_{T \in \mathcal{T}_N} W_T \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right)\, \mathcal{Q}\,. \tag{3.45}$$

Wie schon Z_N (vgl. Abschnitt 3.1), weisen derartige Erwartungswerte für translationsinvariante $\mathcal{Q}$ eine Proportionalität zum Volumen V des Einbettungsraumes auf. Daher ist für solche zu Erwartungswertdichten $\langle \mathcal{Q} \rangle_N / V$ überzugehen, wobei insbesondere $\langle 1 \rangle_N / V = 1$ gilt.

Die äußere m-Punkt-Korrelationsfunktion des zur Zustandssumme (3.1) gehörigen Ensembles ist definiert als

$$G_N^{(m)}(\vec{X}_{A_1}, \ldots, \vec{X}_{A_m}) \equiv \left\langle \prod_{k=1}^{m}{}' \frac{1}{N} \sum_{a_k=1}^{N} \delta(\vec{x}_{a_k} - \vec{X}_{A_k}) \right\rangle_N . \tag{3.46}$$

In dieser Formel repräsentieren $\vec{X}_{A_1}, \ldots, \vec{X}_{A_m}$ die $m \leq N$ fixierten Koordinaten im Einbettungsraum. Zu beachten ist, daß das Ausmultiplizieren des Ausdrucks auf der rechten Seite zu dem Erwartungswert einer Summe führt, deren Summanden Produkte von m Deltafunktionen sind. Das Apostroph ($'$) an dem Produktzeichen in (3.46) bedeutet, daß in letztgenannter Summe alle Terme weggelassen werden, welche zwei oder mehr gleiche Deltafunktionen enthalten. Dieses Ausschlußprinzip stellt sicher, daß $G_N^{(m)}$ auch für zwei oder mehr identische Argumente $\vec{X}_{A_k}$ ein wohldefiniertes Objekt ist.

Ein wichtiges Merkmal der Korrelationsfunktionen (3.46) ist, daß ihre Berechnung in zwei Schritten erfolgen kann. Im ersten wird, unabhängig von den gewählten Linkgewichten $f(\vec{r})$, die normierte kanonische m-Punkt-Funktion $g_N^{(m)}$ der inneren Geometrie ermittelt, bevor man im zweiten Schritt $G_N^{(m)}$ mittels $g_N^{(m)}$ und den Linkgewichten bestimmt. Um dieses Charakteristikum von (3.46) einsehen zu können, empfiehlt es sich, für einen beliebigen, aber festgehaltenen Baumgraphen der Größe N erst einmal die Integrale

$$\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f(\vec{r}_{jk}) \cdot \delta(\vec{x}_a - \vec{X}_A) = 1 , \tag{3.47}$$

$$\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f(\vec{r}_{jk}) \cdot \delta(\vec{x}_a - \vec{X}_A)\, \delta(\vec{x}_b - \vec{X}_B) = f_n(\vec{X}) \tag{3.48}$$

zu untersuchen.

Das erste Integral entspricht dem äußeren Gewicht eines Polymers, dessen Vertex a die fixe Position $\vec{X}_A$ im äußeren Raum hat. Wie in Abschnitt 3.1 bereits erwähnt, korrespondiert das Festhalten eines Vertex formal zum „Ausdividieren" des Faktors V aus (3.5), weswegen eins als Ergebnis der Integration folgt.

Das zweite Integral ist dementsprechend das Gewicht eines Baumes, dessen Vertizes a und $b \neq a$ festgehaltene Koordinaten $\vec{X}_A$ und $\vec{X}_B$ haben. Geht man, ähnlich wie bei (3.5), von den $N-1$ Koordinaten $\vec{x}_i$ mit $i \neq a$ zu den Linkvektoren $\vec{r}_{jk}$ über, so faktorisieren sämtliche Integrationen, deren Integrationsvariablen keine Linkvektoren des eindeutigen Pfades sind, der die Vertizes a und b verbindet. Aufgrund von (3.4) und den Eigenschaften der Deltafunktion tragen diese $N-n$ Integrale insgesamt mit einem Faktor eins zum Ergebnis bei. Werden die n Linkvektoren des Pfades von a nach b mit $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ bezeichnet, so läßt sich das von der relativen Koordinate $\vec{X} \equiv \vec{X}_B - \vec{X}_A$ sowie dem geodätischen Abstand n abhängige Ergebnis auch als

$$f_n(\vec{X}) = \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^D r_i \, f(\vec{r}_i)\, \delta\left(\sum_{a=1}^{n} \vec{r}_a - \vec{X}\right) \tag{3.49}$$

schreiben. Offensichtlich geht dabei aus der zweiten Deltafunktion in (3.48) eine Nebenbedingung für die Summe der Linkvariablen hervor. Mit der Integraldarstellung der Deltafunktion in D Dimensionen

$$\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \mathrm{d}^D p \, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \tag{3.50}$$

und

$$\widehat{f}(\vec{p}) \equiv \int \mathrm{d}^D r \, f(\vec{r})\, e^{i\vec{p}\vec{r}} = \langle e^{i\vec{p}\vec{r}} \rangle_f \tag{3.51}$$

als Definition der charakteristischen Funktion $\widehat{f}$ einer Wahrscheinlichkeitsdichte f, ergibt sich schließlich

$$f_n(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \mathrm{d}^D p \, \left[\widehat{f}(\vec{p})\right]^n e^{-i\vec{p}\vec{X}} \,. \tag{3.52}$$

Die kanonischen Ein- und Zweipunkt-Korrelationsfunktionen lassen sich mit (3.6), (3.47) und (3.48) vereinfachen. Für erstere gilt

$$\begin{aligned} G_N^{(1)}(\vec{X}_A) &= \frac{1}{z_N}\frac{1}{N!} \sum_{T\in\mathcal{T}_N} W_T \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk\rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \left(\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N} \delta(\vec{x}_a - \vec{X}_A)\right) \\ &= \frac{1}{z_N}\frac{1}{N!} \sum_{T\in\mathcal{T}_N} W_T \, \frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N} \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk\rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \cdot \delta(\vec{x}_a - \vec{X}_A) \\ &= \frac{1}{z_N}\frac{1}{N!} \sum_{T\in\mathcal{T}_N} W_T = 1 \end{aligned} \tag{3.53}$$

und für zweitere mit $\vec{X}_{A_1} = \vec{X}_A$ sowie $\vec{X}_{A_2} = \vec{X}_B$

$$\begin{aligned} G_N^{(2)}(\vec{X}_A, \vec{X}_B) &= \frac{1}{z_N}\frac{1}{N!} \sum_{T\in\mathcal{T}_N} W_T \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk\rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \left({\prod_{k=1}^{2}}' \frac{1}{N}\sum_{a_k=1}^{N} \delta(\vec{x}_{a_k} - \vec{X}_{A_k})\right) \\ &= \frac{1}{z_N}\frac{1}{N!} \sum_{T\in\mathcal{T}_N} W_T \, \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N} \delta_{|a-b|,n} \; \times \\ &\quad \times \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk\rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \cdot \; \delta(\vec{x}_a - \vec{X}_A)\; \delta(\vec{x}_b - \vec{X}_B) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} g_N^{(2)}(n)\, f_n(\vec{X}) \,. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Hierbei ist die innere kanonische Zweipunkt-Funktion

$$g_N^{(2)}(n) = \frac{1}{z_N}\frac{1}{N!}\sum_{T\in\mathcal{T}_N} W_T\left(\frac{1}{N^2}\sum_{a,b=1}^{N}\delta_{|a-b|,n}\right) \tag{3.55}$$

durch $\sum_{n=0}^{N-1} g_N^{(2)}(n) = 1$ normiert und $|a-b|$ steht für den geodätischen Abstand der Vertizes a und b. Unter Berücksichtigung der Normierungsbedingung

$$\int \mathrm{d}^D X_B\, G_N^{(2)}(\vec{X}_A, \vec{X}_B) = G_N^{(1)}(\vec{X}_A) = 1\,, \tag{3.56}$$

läßt sich $G_N^{(2)}(\vec{X}) \equiv G_N^{(2)}(\vec{X}_A, \vec{X}_B)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte des Differenzvektors $\vec{X} = \vec{X}_B - \vec{X}_A$ interpretieren, welcher die relative äußere Position zweier zufällig gewählter Vertizes eines Baumes der Größe N beschreibt. Von zentraler Bedeutung für diese Arbeit ist die soeben hergeleitete Beziehung

$$G_N^{(2)}(\vec{X}) = \sum_{n=1}^{N-1} g_N^{(2)}(n)\, f_n(\vec{X})\,, \tag{3.57}$$

welche es ermöglicht $G_N^{(2)}$ mit entsprechenden Interpretationen für $g_N^{(2)}$ und f_n als Summe von Dichten bedingter Wahrscheinlichkeiten aufzufassen. Dabei ist $g_N^{(2)}(n)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden ausgezeichneten Vertizes eines Polymers der Größe N den inneren Abstand n haben. Der aus n Links bestehende Pfad, welcher diese verbindet, korrespondiert aufgrund der Einbettung mit den Linkgewichten f zu einem zufälligen Pfad im D-dimensionalen äußeren Raum. Für einen solchen ist f_n bekanntlich (siehe beispielsweise [11, 37]) die Wahrscheinlichkeitsdichte des Zufallsvektors $\vec{X} = \vec{X}_B - \vec{X}_A$, wobei $\vec{X}_A$ und $\vec{X}_B$ hier die Koordinaten der Endpunkte des Pfades im Einbettungsraum repräsentieren. Laut dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit muß die Summation der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $g_N^{(2)}(n)\, f_n(\vec{X})$ von $n=1$ bis $N-1$ demnach $G_N^{(2)}(\vec{X})$ liefern.
Weil es möglich ist, $g_N^{(2)}$ und f_n unabhängig voneinander zu berechnen, ist gemäß (3.57) die innere Geometrie von der äußeren entkoppelt, und die Bestimmung von $G_N^{(2)}$ läßt sich tatsächlich in den zwei zuvor erwähnten Schritten durchführen. Es ist zu beachten, daß f_n hierbei die Linkgewichte f enthält.
Analog zu (3.57) können auch die höheren Korrelationsfunktionen, d. h. m-Punkt-Funktionen für $m \geq 3$, mit Hilfe der korrespondierenden inneren $g_N^{(m)}$ und Faktoren f_n bestimmt werden. So zum Beispiel gilt für die Dreipunkt-Funktion

$$\begin{aligned} G_N^{(3)}(\vec{X}_A, \vec{X}_B, \vec{X}_C) &= \sum_{n_a,n_b,n_c} g_N^{(3)}(n_a,n_b,n_c)\times \\ &\times \int \mathrm{d}^D V\, f_{n_a}(\vec{X}_A - \vec{V}) f_{n_b}(\vec{X}_B - \vec{V}) f_{n_c}(\vec{X}_C - \vec{V})\,. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Die drei Pfade ab, bc und ac zwischen den Vertizes a, b und c des Baumgraphen besitzen in diesem Fall stets einen gemeinsamen Vertex v, dessen Koordinate im Einbettungsraum wir mit $\vec{V}$ bezeichnen. Folglich hängt $g_N^{(3)}$ lediglich von den inneren Längen n_a ,n_b und n_c der drei Teilpfade av, bv und cv ab:

$$\begin{aligned} g_N^{(3)}(n_a, n_b, n_c) &= \frac{1}{z_N}\frac{1}{N!}\sum_{T\in\mathcal{T}_N} W_T \times \\ &\times \left(\frac{1}{N^3}\sum_{a,b,c=1}^{N} \delta_{|a-b|,n_a+n_b}\,\delta_{|b-c|,n_b+n_c}\,\delta_{|a-c|,n_a+n_c}\right) . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Da für verzweigte Polymere mit m ausgezeichneten Vertizes stets eine eindeutige Zerlegung in Teilpfade existiert, ist dieses Konstruktionsprinzip für $G_N^{(m)}$ auf beliebige m erweiterbar.
Eine Besonderheit der höheren Korrelationsfunktionen ist, daß diese sich mit einer Kompositionsregel für Baumgraphen aus $G_N^{(2)}$ ableiten lassen. Somit ist die Zweipunkt-Funktion das zentrale Objekt für die Untersuchung äußerer geometrischer Eigenschaften sowie des Skalenverhaltens von Modellen verzweigter Polymere.

3.7 Fraktale Geometrie

Die Information über die fraktale Struktur der inneren und äußeren Geometrie ist in den kanonischen Zweipunkt-Funktionen $g_N^{(2)}$ und $G_N^{(2)}$ enthalten. Anhand dieser führen wir nun reellwertige fraktale Dimensionen d_H und d_L bzw. D_H und D_L ein, um die strukturellen Charakteristika unterschiedlicher Modelle auch quantitativ vergleichen zu können.
Als erstes Moment der Wahrscheinlichkeitsdichte (3.55) beschreibt

$$\bar{n}_N \equiv \sum_n n\, g_N^{(2)}(n) \tag{3.60}$$

die mittlere Anzahl an Links zwischen zwei zufällig gewählten Vertizes eines Baumes der Größe N. Es ist naheliegend, diesen Erwartungswert als typische Ausdehnung eines Polymers in Einheiten von Links anzusehen und die innere Hausdorff-Dimension d_H über das Skalenverhalten von $\bar{n}_N$ im Bereich großer N zu definieren [11, 33]:

$$\bar{n}_N \sim N^{1/d_H} . \tag{3.61}$$

Offenbar ist $1/d_H$ die Potenz, mit welcher sich der typische innere Abstand des Systems vergrößert, wenn dessen Größe („Volumen“) N zunimmt. Während der Exponent d_H das Verhalten des Systems auf großen Abständen kontrolliert, läßt sich für hinreichend große N alternativ eine innere fraktale Dimension d_L im Bereich

$1 \ll n \ll N^{1/d_H}$ kleinerer Distanzen einführen [18, 36]. Dieser Bereich ist nach unten hin durch den Mindestabstand paarweise verschiedener Vertizes und nach oben hin durch die Systemgröße beschränkt. Bisweilen wird in diesem Zusammenhang auch von UV- und IR-Cutoffs gesprochen. Der Definition der lokalen fraktalen Dimension d_L legen wir die Betrachtung einer Kugelschale mit innerem Radius $n \ll N^{1/d_H}$ und infinitesimaler Dicke dn zugrunde. Von besonderem Interesse ist dabei die Abhängigkeit ihres Volumens V_{Ks} von n. Weil n eine diskrete Zufallsvariable ist, korrespondiert das Volumen der Kugelschale hier zu der Anzahl Vertizes, die exakt n Links von einem Referenzvertex entfernt liegen. Für genügend großes N und $1 \ll n \ll N^{1/d_H}$ wird d_L schließlich aus dem Skalenverhalten

$$g_N^{(2)}(n) \sim n^{d_L - 1} \tag{3.62}$$

bestimmt, welches die n-Abhängigkeit von V_{Ks} wiedergibt. Festzuhalten ist, daß die fraktale Struktur der inneren Geometrie mit d_L ausschließlich lokal sowie mit d_H nur global beschrieben wird. Dies bedeutet, daß man im ersten Fall den Standpunkt eines Betrachters einnimmt, der die Dimension seiner fraktalen „Umgebung“ ermitteln möchte, während man im zweiten die Perspektive eines Beobachters wählt, der das ganze System von außerhalb observiert.
Auf analoge Weise lassen sich mittels $G_N^{(2)}$ auch für die äußere Geometrie fraktale Dimensionen D_L und D_H einführen. Zu diesem Zweck zeichnen wir zunächst

$$\mathcal{R}^Q = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|^Q \tag{3.63}$$

mit $Q \in (0, \infty)$ als isotrope Maße für die Ausdehnung von Polymeren im Einbettungsraum aus, wobei man $\sqrt{\mathcal{R}^2}$ in diesem Zusammenhang auch als *gyration radius* bezeichnet. Sofern diese existieren, bestimmen die Q-ten Momente[7,8]

$$M_Q = \int \mathrm{d}^D X \, |\vec{X}|^Q \, G_N^{(2)}(\vec{X}) \tag{3.64}$$

[7] Zu beachten ist, daß wir den Begriff des Q-ten Moments einer Wahrscheinlichkeitsdichte von ganzzahligen $Q \in \mathbb{N}_* = \{1, 2, \dots\}$ auf reellwertige $Q \in \mathbb{R}_*^+ = (0, \infty)$ erweitern.

[8] In den Abschnitten 3.10 und 3.11 werden auch Modelle (3.1) mit potenzartig abfallenden Linkgewichten $f(|\vec{r}|) \sim |\vec{r}|^{-D-\alpha}$ diskutiert, deren äußere Zweipunkt-Funktionen, zumindest solange N endlich ist, für $Q \geq \alpha$ divergente und für $Q < \alpha$ endliche Q-te Momente besitzen. Um in diesen Fällen die Hausdorff-Dimension D_H bestimmen zu können, wählen wir einfach $Q < \alpha$. Bezüglich der inneren Geometrie genügt es hingegen (vgl. (3.60)), sich auf das erste Moment von $g_N^{(2)}$ zu beschränken, da die inneren Zweipunkt-Funktionen für $n \to \infty$ stets exponentiell abfallen (siehe Abschnitt 3.8 und [33]).

die Erwartungswertdichten $\langle \mathcal{R}^Q \rangle_N / V$. Wird (3.54) in das Integral eingesetzt und der zusätzliche Faktor $1 = \int \mathrm{d}^D Y / V$ eingefügt, so findet man

$$\begin{aligned} M_Q &= \frac{1}{V} \int \mathrm{d}^D Y \int \mathrm{d}^D X \, |\vec{X}|^Q \sum_{n=1}^{N-1} g_N^{(2)}(n) \, f_n(\vec{X}) \\ &= \frac{1}{V} \int \mathrm{d}^D Y \int \mathrm{d}^D X \, |\vec{X}|^Q \frac{1}{z_N} \frac{1}{N!} \sum_{T \in \mathcal{T}_N} W_T \, \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N} \delta_{|a-b|,n} \; \times \\ &\quad \times \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \cdot \, \delta(\vec{x}_a - \vec{X}_A) \, \delta(\vec{x}_b - \vec{X}_B) \, . \end{aligned} \tag{3.65}$$

Mit dem Übergang von den Integrationsvariablen $\vec{X} = \vec{X}_B - \vec{X}_A$ und $\vec{Y} = (\vec{X}_B + \vec{X}_A)/2$ zu $\vec{X}_A$ und $\vec{X}_B$ sowie dem anschließenden Auswerten der drei Deltafunktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} M_Q &= \frac{1}{V} \frac{1}{z_N} \frac{1}{N!} \sum_{T \in \mathcal{T}_N} W_T \int \mathrm{d}^D X_A \int \mathrm{d}^D X_B \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \; \times \\ &\quad \times \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{a,b=1}^{N} \delta_{|a-b|,n} \, |\vec{X}_B - \vec{X}_A|^Q \cdot \, \delta(\vec{x}_a - \vec{X}_A) \, \delta(\vec{x}_b - \vec{X}_B) \\ &= \frac{1}{V} \frac{1}{z_N} \frac{1}{N!} \sum_{T \in \mathcal{T}_N} W_T \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^D x_i \prod_{\langle jk \rangle} f\left(\vec{r}_{jk}\right) \, \frac{1}{N^2} \sum_{a,b=1}^{N} |\vec{x}_b - \vec{x}_a|^Q \, . \end{aligned} \tag{3.66}$$

Durch den Vergleich mit (3.45) und (3.63) folgt die Behauptung

$$\frac{1}{V} \langle \mathcal{R}^Q \rangle_N = \int \mathrm{d}^D X \, |\vec{X}|^Q \, G_N^{(2)}(\vec{X}) \, . \tag{3.67}$$

Gemäß dem vorherigen Abschnitt ist es insbesondere angebracht, Erwartungswertdichten zu betrachten, weil die $\mathcal{R}^Q$ translationsinvariante Größen sind. Die äußere Hausdorff-Dimension D_H geht dann aus dem führenden Verhalten

$$\langle \mathcal{R}^Q \rangle_N^{1/Q} \sim N^{1/D_H} \tag{3.68}$$

im Limes großer N hervor, wobei die Volumenabhängigkeit des Ensemblemittels in einer N-unabhängigen Proportionalitätskonstante versteckt ist, die wir nicht hinschreiben. In Analogie zu d_H im Fall der inneren Geometrie setzt der Exponent D_H hier die typische Ausdehnung des Systems im Einbettungsraum mit dessen „Volumen“ N in Beziehung.

Wie zuvor läßt sich für hinreichend große N eine lokale fraktale Dimension D_L [36] für die äußere Geometrie definieren, indem die mittlere Anzahl von Vertizes in einer Kugelschale mit Radien $R = |\vec{X}|$ und $R + \mathrm{d}R$ ermittelt wird. Weil wir in dieser

Arbeit ausnahmslos Modelle mit isotropen Linkgewichten studieren, sind auch die Wahrscheinlichkeitsdichten f_n sowie $G_N^{(2)}$ sphärisch symmetrisch, und mit $\rho(R)$ als radialer Vertexdichte gilt für die Anzahl der in der Kugelschale befindlichen Vertizes

$$\rho(R)\,\mathrm{d}R \sim R^{D-1}\,G_N^{(2)}(R)\,\mathrm{d}R\,. \tag{3.69}$$

Hierbei steckt der Beitrag des D-dimensionalen Raumwinkels in der Konstante der Proportionalität. Im Limes großer N erwartet man auch hier die Existenz eines Bereiches $R_{UV} \ll R \ll R_{IR}$, in welchem die Zweipunkt-Funktion ein Skalenverhalten

$$G_N^{(2)}(R) \sim R^{-\delta} \tag{3.70}$$

zeigt [36]. Somit ist zu fordern, daß die Radien der Kugelschale deutlich oberhalb der durch den UV-Cutoff gegebenen Skala sowie deutlich unterhalb der mit dem IR-Cutoff assoziierten liegen. Die Größenordnung von R_{UV} ergibt sich dabei aus der mittleren Linklänge a_0, während die des IR-Cutoffs gemäß $R_{IR} \sim a_0 N^{1/D_H}$ auch von der Systemgröße abhängt. Falls δ negativ ist, verhält sich $G_N^{(2)}$ wie eine nur schwach variierende Funktion von R, die in einem kleinen Bereich und mit geringen Korrekturen als konstant ($G_N^{(2)} \sim 1$) angesehen werden kann. Je nach Wert des Exponenten δ resultiert daher

$$\rho(R)\,\mathrm{d}R \sim R^{D_L-1}\,\mathrm{d}R \sim \begin{cases} R^{D-1}\,\mathrm{d}R & ,\text{ für } \delta \le 0 \\ R^{D-1-\delta}\,\mathrm{d}R & ,\text{ für } \delta > 0\,. \end{cases} \tag{3.71}$$

Augenscheinlich legt im ersten Fall ($\delta \le 0$) lediglich die Dimension D des Einbettungsraumes das Wachstum der radialen Vertexdichte fest, während im zweiten ($\delta > 0$) auch δ Einfluß auf D_L nimmt.

3.8 Zweipunkt-Funktionen der inneren Geometrie

Den letzten beiden Abschnitten zufolge ist die Kenntnis der normierten inneren Zweipunkt-Funktion für die Untersuchung der Skalen- und geometrischen Eigenschaften von zentraler Bedeutung. Aus diesem Grund soll nun dargestellt werden, wie sich $g_N^{(2)}$ für einen gegebenen Satz von Vertexgewichten berechnen läßt und daraus die letztgenannten Eigenschaften für die innere Geometrie abgeleitet werden können.
Auch hier ist es einfacher der Berechnung von $g_N^{(2)}$ die Erzeugende $\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n)$ zugrundezulegen, anstatt direkt Gebrauch von Definition (3.55) zu machen. Die Bestimmung von $g_N^{(2)}$ kann daraufhin in drei Schritten erfolgen. Im ersten Schritt verwenden wir die im Rahmen der graphischen Darstellung hergeleitete Formel (3.17), um die großkanonische Zweipunkt-Funktion $\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n)$ zu ermitteln. Weil wir insbesondere am Skalenverhalten der kanonischen Zweipunkt-Funktion für große N interessiert

sind, genügt es dabei den Limes $\Delta\mu = \mu - \mu_0 \to 0^+$ zu berücksichtigen und jeweils lediglich den analytischen sowie den führend singulären Anteil von Φ (vgl. Abschnitt 3.5) in (3.17) bzw. $P'(\Phi)$ und $P''(\Phi)$ einzusetzen. Der zweite Schritt besteht darin, mittels einer inversen Laplace-Transformation von $\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n)$ zur kanonischen Zweipunkt-Funktion $\mathcal{G}_N^{(2)}(n)$ überzugehen, ehe letztere im dritten Schritt normiert und anschließend mit $g_N^{(2)}(n)$ identifiziert wird.

Exemplarisch führen wir zunächst die Herleitung von $g_N^{(2)}$ für den generischen Fall durch, in welchem die Verzweigungsgewichte für alle Ordnungen auf eins gesetzt sind und folglich $P'(\Phi) = P''(\Phi) = e^{\Phi}$ gilt. Hierbei ist Φ die Lösung der Selbstkonsistenzgleichung (3.19), welche nach g umgeformt

$$g(\Phi) = e^{-\mu(\Phi)} = \Phi\, e^{-\Phi} \tag{3.72}$$

lautet. Aus den Ableitungen

$$g'(\Phi) = (1 - \Phi)\, e^{-\Phi} \qquad \text{und} \qquad g''(\Phi) = (\Phi - 2)\, e^{-\Phi} \tag{3.73}$$

geht hervor, daß die Fugazität bei $\Phi_0 = 1$ ihren maximalen Wert $g_0 = e^{-\mu_0} = 1/e$ annimmt. Gemäß Abschnitt 3.5 wird Gleichung (3.72) für $\Delta g \to 0^+$ dementsprechend durch

$$\Phi(g) = \Phi_0 - \sqrt{\frac{2!}{-g''(\Phi_0)}}\, \Delta g^{1/2} \tag{3.74}$$

mit $\Phi_0 = 1$ und $g''(\Phi_0) = -1/e$ gelöst. Berücksichtigt man zudem die Korrespondenz des Grenzwertes $\Delta g \to 0^+$ zum Limes $\Delta\mu \to 0^+$ mit $\Delta\mu = \Delta g / g_0$ (siehe (3.31)), so folgt

$$\Phi(\mu) = 1 - \sqrt{2}\, \Delta\mu^{1/2}\,. \tag{3.75}$$

Mit dem Einsetzen dieser Beziehung in $P'(\Phi)$ und $P''(\Phi)$ vereinfacht sich die großkanonische Zweipunkt-Funktion nach (3.17) zu

$$\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) = \exp\left(-(n+1)\,(\mu - \Phi(\mu))\right) \sim \exp\left(-(n+1)(\Delta\mu + \sqrt{2}\Delta\mu^{1/2})\right). \tag{3.76}$$

Befindet sich μ nahe genug ($\Delta\mu \ll 2$) am kritischen Wert $\mu_0 = 1$, so kann man den linearen Term in $\Delta\mu$ vernachlässigen:

$$\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) \sim \exp\left(-\sqrt{2}(n+1)\Delta\mu^{1/2}\right)\,. \tag{3.77}$$

Aufgrund der Relation

$$\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) = \sum_N \mathcal{G}_N^{(2)}(n)\, e^{-\mu N} = \sum_N e^{-\mu_0 N} \mathcal{G}_N^{(2)}(n)\, e^{-\Delta\mu N} \tag{3.78}$$

korrespondiert der führende Term in $\Delta\mu$ insbesondere zum Skalenverhalten der kanonischen Zweipunkt-Funktion im Limes $N \to \infty$, während die Terme höherer Ordnungen in $\Delta\mu$ die *Finite-Size-Korrekturen* bestimmen.

Formel (3.78) ist die diskrete Laplace-Transformation von $\mathcal{G}_N^{(2)}$. Diese kann, da wir uns für den Grenzwert großer N interessieren, durch eine kontinuierliche ersetzt werden.[9] Die kontinuierliche inverse Laplace-Transformation lautet

$$\mathcal{G}_N^{(2)}(n) = e^{\mu_0 N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta\mu_r - i\infty}^{\Delta\mu_r + i\infty} \mathrm{d}\Delta\mu \, \mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) \, e^{\Delta\mu N} \,, \tag{3.79}$$

wobei $\Delta\mu_r$ eine reelle Konstante ist, die größer als die Realteile sämtlicher Singularitäten von $\mathcal{G}^{(2)}$ sein muß. Demnach beschreibt

$$\mathcal{G}_N^{(2)}(n) \sim e^{\mu_0 N} L_{1/2}(c(n+1), N) \tag{3.80}$$

mit

$$L_{1/2}(c(n+1), N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_r - i\infty}^{z_r + i\infty} \mathrm{d}z \, e^{Nz - c(n+1)z^{1/2}} \tag{3.81}$$

das Verhalten der kanonischen Zweipunkt-Funktion für große N. Es bietet sich an, die reellen Konstanten μ_0 und c erst später zu spezifizieren, da Formel (3.80) für generische Modelle verzweigter Polymere universell ist. Die Bezeichnung $L_{1/2}$ des Integrals geht dabei auf die Definition maximal asymmetrischer Lévy-Verteilungen [37, 38] zurück, auf die wir später genauer eingehen.
Eine ausführliche Darstellung der Berechnung des Integrals (3.81) befindet sich in Anhang B. Mit dem Einsetzen des dort hergeleiteten Resultats (B.7) in (3.80) folgt schließlich

$$\mathcal{G}_N^{(2)}(n) \sim \frac{c}{2\sqrt{\pi}} e^{\mu_0 N} N^{-3/2} (n+1) \exp\left(-\frac{c^2(n+1)^2}{4N}\right) \,. \tag{3.82}$$

Für hinreichend große N ist es legitim, das Argument $n+1$ auf der rechten Seite durch n zu ersetzen, weil die Differenz der zu $n+1$ bzw. n korrespondierenden Ausdrücke mit zunehmendem N verschwindet. Außerdem besitzt in diesem Limes die Näherung

$$\sum_n n \, \exp\left(-\frac{c^2 n^2}{4N}\right) \simeq \frac{2N}{c^2} \tag{3.83}$$

Gültigkeit,[10] weswegen sich die normierte innere Zweipunkt-Funktion folglich durch

$$g_N^{(2)}(n) = \frac{\mathcal{G}_N^{(2)}(n)}{\sum_{n'} \mathcal{G}_N^{(2)}(n')} \sim \frac{c^2}{2N} \, n \, e^{-c^2 n^2/4N} \tag{3.84}$$

approximieren läßt.

[9] Mit dem Algebra-Paket „Mathematica 4.0“ wurde dieses durch das Einsetzen der Lösung von (3.79) in (3.78) und einem anschließenden Vergleich mit (3.77) getestet.

[10] Solange N endlich ist, existieren laut der Euler-Maclaurinschen-Summenformel Korrekturen, die allerdings exponentiell mit N abfallen.

Im weiteren wollen wir zeigen, wie sich kanonische innere Zweipunkt-Funktionen auch für nicht-generische Modelle verzweigter Polymere berechnen lassen und daß die Lösung (3.84) für generische universell ist. Es stellt sich in diesem Zusammenhang als zweckmäßig heraus, von einer Skalenrelation der statistischen Mechanik Gebrauch zu machen [33]. Als Massenexponent ν wird der Exponent bezeichnet, der gemäß

$$\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) \sim \exp\left(-c(n+1)\Delta\mu^{\nu}\right) \tag{3.85}$$

das kritische Verhalten von $\mathcal{G}^{(2)}$ im Grenzwert kleiner $\Delta\mu$ kontrolliert. Die Konstante c hängt dabei lediglich von der Wahl der Vertexgewichte ab und geht in die mit der Masse bzw. inversen Korrelationslänge $\xi^{-1}(\Delta\mu) = c\,\Delta\mu^{\nu}$ assoziierte Skala ein. Summiert man $\mathcal{G}^{(2)}$ über die Gesamtheit der inneren Abstände n, so ergibt sich die Suszeptibilität χ_μ, d. h.

$$\chi_\mu = \sum_n \mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) \sim \int \mathrm{d}n\ \exp\left(-cn\Delta\mu^{\nu}\right) \sim \Delta\mu^{-\nu}\,. \tag{3.86}$$

Laut Definition (3.28) beschreibt jedoch der Exponent γ den führend singulären Anteil der Suszeptibilität, woraus die Beziehung

$$\gamma = \nu \tag{3.87}$$

hervorgeht. Die anomale Dimension η wird in der statistischen Mechanik üblicherweise anhand des Verhaltens großkanonischer Zweipunkt-Funktionen $\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n)$ für kleine Abstände $1 \ll n \ll \xi(\Delta\mu)$ im Limes $\Delta\mu \to 0^+$ eingeführt. Mit dem Ansatz

$$\mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) \sim (n+1)^{1-\eta} \exp\left(-c(n+1)\Delta\mu^{\nu}\right) \tag{3.88}$$

ergibt sich in Analogie zu (3.86)

$$\chi_\mu = \sum_n \mathcal{G}^{(2)}(\mu, n) \sim \int \mathrm{d}n\, n^{1-\eta}\ \exp\left(-cn\Delta\mu^{\nu}\right) \sim \Delta\mu^{-\nu(2-\eta)} \tag{3.89}$$

und damit das Skalengesetz $\gamma = \nu(2-\eta)$ von Fisher [33]. Weil die großkanonischen Zweipunkt-Funktionen (3.85) lediglich einen exponentiellen Abfall mit $n+1$ aufweisen, beträgt die anomale Dimension der inneren Geometrie verzweigter Polymere $\eta = 1$, womit sich das Fishersche Skalengesetz zu (3.87) vereinfacht (vgl. auch [11, 34]). Beschränkt ist die Gültigkeit dieser Skalenrelation allerdings auf solche γ, die strikt positiv sind. Begründet liegt dies darin, daß χ_μ lediglich für $\gamma > 0$ selbst divergent und das divergente Verhalten des Integrals in (3.86) somit durch γ bestimmt ist. Falls hingegen $\gamma < 0$ gilt, ist die Suszeptibilität endlich, was bedeutet, daß diese sich konstant verhält, wenn $\Delta\mu$ gegen null strebt. Demnach verschwindet der Massenexponent für semi-generische Modelle, d. h. es ist $\nu = 0$ zu setzen. Generische Modelle haben aufgrund von (3.38) und (3.87) die Eigenschaft, daß ihr Massenexponent $\nu = 1/2$ beträgt. Deswegen besitzt (3.84) auch für beliebige solcher Modelle

Gültigkeit. Im marginalen Fall gilt dem Skalengesetz entsprechend $\nu \in (0, 1/2]$. Wie zuvor leiten wir das asymptotische Verhalten der kanonischen Zweipunkt-Funktion im Limes großer N her, indem wir den führend singulären Anteil (3.85) in die Formel der inversen kontinuierlichen Laplace-Transformation einsetzen. Wird wiederum das Argument $n+1$ durch n ersetzt, so läßt sich für $\nu \neq 0$ schreiben

$$\mathcal{G}_N^{(2)}(n) \sim e^{\mu_0 N} L_\nu(cn, N) , \tag{3.90}$$

wobei

$$L_\nu(cn, N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_r - i\infty}^{z_r + i\infty} \mathrm{d}z \, e^{Nz - cnz^\nu} \tag{3.91}$$

die maximal asymmetrische Lévy-Verteilung mit dem Index ν und der Skala $C = cn\cos(\pi\nu/2)$ bezeichnet [37, 38]. Gemäß der obigen Betrachtung sind die Massenexponenten aller Klassen verzweigter Polymere nach oben hin durch den Wert $1/2$ beschränkt. Daher genügt es, sich das Verhalten der Verteilungen $L_\nu(cn, N)$ mit $\nu < 1$ im Grenzwert $N \to \infty$ anzusehen, welches laut [38] durch die Reihe

$$L_\nu(cn, N) = \frac{1}{\pi N} \sum_{k=1}^{\infty} (-)^{k+1} \left(\frac{cn}{N^\nu}\right)^k \frac{\Gamma(1+k\nu)}{\Gamma(1+k)} \sin(\pi\nu k) \tag{3.92}$$

gegeben ist. Sofern N deutlich größer als n ist, dominiert der erste Term der Reihe:

$$L_\nu(cn, N) \overset{N\to\infty}{\sim} \frac{\nu\Gamma(\nu)\sin(\pi\nu)}{\pi} \frac{cn}{N^{\nu+1}} . \tag{3.93}$$

Geht man in (3.91) von der Integrationsvariablen z zu $z' = zN$ über, so folgt unmittelbar die Identität $L_\nu(cn, N) = N^{-1} L_\nu(cn/N^\nu, 1)$. Folglich kann das Argument cn/N^ν als Skalenvariable der kanonischen Zweipunkt-Funktion angesehen werden. Zur Vereinfachung der nächsten Formeln empfiehlt es sich, auch den Index ν in das universelle Argument mit aufzunehmen. Wir definieren deshalb $u = \nu cn/N^\nu$ und führen zusätzlich den Exponenten $a = 1/(1-\nu)$ ein. Alternativ läßt sich das asymptotische Verhalten von $L_\nu(cn, N)$ durch das Ergebnis der Sattelpunktnäherung des Integrals (3.91) beschreiben. Mit

$$F(z) = z - \frac{cn}{N} z^\nu \quad , \quad F'(z) = 1 - \frac{\nu cn}{N} z^{\nu-1} \quad , \quad F''(z) = (1-\nu)\frac{\nu cn}{N} z^{\nu-2} \tag{3.94}$$

sowie $z_0 = (N/\nu cn)^{1/(\nu-1)} = u^a/N$ als Nullstelle von F' gilt für $N \to \infty$

$$\begin{aligned} L_\nu(cn, N) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z_r - i\infty}^{z_r + i\infty} \mathrm{d}z \, e^{NF(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z_r - i\infty}^{z_r + i\infty} \mathrm{d}z \, e^{N\left(F(z_0) + \frac{1}{2!}F''(z_0)(z-z_0)^2\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \, e^{NF(z_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \, e^{\frac{N}{2!}F''(z_0)(z-z_0)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{NF(z_0)} \, \frac{1}{\sqrt{F''(z_0)N}} , \end{aligned} \tag{3.95}$$

Modelltyp	γ	ν	d_H
generisch	$1/2$	$1/2$	2
marginal	$\in (0, 1/2]$	$\in (0, 1/2]$	$\in [2, \infty)$
semi-generisch	< 0	0	∞

Tabelle 3.1: Wertebereiche der kritischen Exponenten γ, ν und d_H.

woraufhin das Einsetzen von $F(z_0) = -u^a/a\nu N$ und $F''(z_0) = u^{-a}N/a$ das Resultat

$$L_\nu(cn, N) = \frac{1}{N}\, l_\nu(u) = \frac{1}{N}\, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\, u^{a/2}\, \exp\left(-\frac{u^a}{a\nu}\right) \tag{3.96}$$

liefert. Dementsprechend läßt sich die kanonische Zweipunkt-Funktion nach (3.90) durch

$$\mathcal{G}_N^{(2)}(n) \sim e^{\mu_0 N} \frac{1}{N} l_\nu(u) \tag{3.97}$$

approximieren und der mittlere innere Abstand zweier Vertizes durch

$$\bar{n}_N = \sum_n n\, g_N^{(2)}(n) = \frac{N^\nu}{\nu c} \frac{\int_0^\infty \mathrm{d}u\, l_\nu(u)\, u}{\int_0^\infty \mathrm{d}u\, l_\nu(u)} \tag{3.98}$$

berechnen. Aus dem Vergleich der N-Abhängigkeit dieses Ensemblemittels mit der des Ausdrucks auf der rechten Seite von Definition (3.61), resultiert eine zweite fundamentale Skalenrelation bezüglich der inneren Geometrie verzweigter Polymere:

$$d_H = \frac{1}{\nu}\,. \tag{3.99}$$

Die innere Hausdorff-Dimension d_H ist also gerade das Inverse von ν, weshalb diese für generische Bäume $d_H = 2$ beträgt und für die skalen-freien eines marginalen Modells einen Wert im Intervall $[2, \infty)$ annimmt [13, 16, 17]. Als „oberer Grenzfall" der marginalen Phase ist der Fall semi-generischer Bäume ($\nu = 0$) gesondert zu betrachten. Für diesen gilt $d_H = \infty$ [17], weswegen das Skalengesetz (3.99) auch für $\gamma < 0$ gültig ist. Semi-generische Modelle haben des weiteren die Besonderheit, daß ihre Skalenvariable zwar proportional zu n, aber unabhängig von N ist. Dieses läßt sich (man vergleiche mit cn/N^ν) ebenfalls durch den Wert des Massenexponenten erklären. Offensichtlich korrespondiert die im Abschnitt 3.5 diskutierte primäre Klassifizierung nicht nur zu unterschiedlichen Werten von γ, sondern auch von d_H bzw. ν. In Tabelle 3.1 sind die jeweiligen Wertebereiche dieser noch einmal zusammengefaßt.

Die Klassifizierung kann somit auch als eine geometrische angesehen werden, in welcher d_H die innere fraktale Struktur der Polymere kennzeichnet. Generische Polymere weisen die geringste fraktale Dimension d_H auf und sind daher ausgedehnte

Objekte (*elongated trees*), während die semi-generischen sogenannte singuläre Vertizes haben, für die q die Größenordnung von N erreicht [12]. Aufgrund der Konzentration ihrer Links um zumeist einen Vertex, werden letztere als kollabierte Bäume (*collapsed trees*) bezeichnet. Diesem Bild entsprechend „verbindet" die marginale die soeben beschriebenen Phasen.
Formel (3.93) zufolge wächst die normierte Zweipunkt-Funktion für große N sowie $n \ll N$ linear mit dem geodätischen Abstand an. Aus dem Vergleich von

$$g_N^{(2)}(n) \sim n \tag{3.100}$$

mit (3.62) geht $d_L = 2$ hervor, womit ersichtlich ist, daß sich Ensembles skalen-freier und generischer Bäume nicht anhand der lokalen fraktalen Dimension voneinander unterscheiden lassen. Erst der Übergang zu größeren Abständen n, d. h. die Messung von d_H, ermöglicht es, unterschiedliche Skaleneigenschaften der Ensembles auszumachen. Im semi-generischen Fall hat es keinen Sinn, von einer lokalen fraktalen Dimension d_L zu sprechen, da wegen $d_H = \infty$ die obere Grenze des Bereichs $1 \ll n \ll N^{1/d_H}$ mit der unteren zusammenfällt.
Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch einige Bemerkungen zum Resultat der Sattelpunktnäherung machen. Für $\nu = 1/2$ führt (3.96) gerade zu dem Ergebnis (3.82) generischer Modelle, sofern die Ersetzung von $n+1$ durch n berücksichtigt wird. Diese Tatsache liegt darin begründet, daß der Integrand des approximierten Ausdrucks (3.91) in diesem Fall eine Gauß-Funktion ist.
Bekanntlich können maximal asymmetrische Lévy-Verteilungen (3.91) für einige spezifische Indizes ν durch spezielle Funktionen ausgedrückt werden. So beispielsweise hat $L_{1/3}$ die Darstellung

$$L_{1/3}(cn, N) = \frac{1}{N}\frac{\sqrt{3}}{\pi} u^{3/2} K_{1/3}\left(2u^{3/2}\right) \tag{3.101}$$

mit $u = \nu cn/N^\nu$ und $K_{1/3}$ als modifizierter Bessel-Funktion [37]. Sofern u groß ist, beschreibt die Lösung der Sattelpunktmethode die rechte Seite der letzten Gleichung, während die zwei Funktionen im Bereich kleiner u etwas voneinander abweichen.

3.9 Gaußsche Bäume

Nachdem wir gezeigt haben, wie die Wahl der Verzweigungsgewichte Einfluß auf die innere Geometrie nimmt, sollen in den verbleibenden Abschnitten auch die Eigenschaften der äußeren Geometrie für unterschiedliche Verzweigungs- und Linkgewichte bestimmt werden.
Als erstes betrachten wir Modelle gaußscher Polymere, deren Linkgewicht f durch eine D-dimensionale Gauß-Verteilung

$$f(\vec{r}) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-D/2} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3.102}$$

gegeben ist. Die Linkvektoren $\vec{r}$ sind folglich unabhängige gaußverteilte Zufallsvariablen, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung f die Varianz σ^2 sowie einen verschwindenden Erwartungswert besitzt. Gemäß Abschnitt 3.6 ist für die Berechnung der äußeren Zweipunkt-Funktion die Wahrscheinlichkeitsdichte f_n des Zufallsvektors $\vec{X}$, welcher die Relativkoordinate der Endpunkte eines Pfades mit n Links repräsentiert, von Bedeutung. Weil sich $\vec{X}$ auch als Summe der n Linkvektoren $\vec{r}_i$ dieses Pfades (siehe (3.49)) schreiben läßt, entspricht f_n hier gerade der Verteilung einer Summe von n unabhängigen, identisch verteilten, gaußschen Zufallsvariablen.[11] Mit dem zentralen Grenzwertsatz folgt

$$f_n(\vec{X}) = (2\pi n\sigma^2)^{-D/2} \exp\left(-\frac{\vec{X}^2}{2n\sigma^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^D f\left(\frac{\vec{X}}{\sqrt{n}}\right) , \tag{3.103}$$

womit sich f_n lediglich durch die um den Faktor n größere Varianz von f unterscheidet, was auch auch als Stabilität der Gauß-Verteilung bezüglich der Faltung (3.49) bezeichnet wird.

Es ist nun möglich, die äußere Zweipunkt-Korrelationsfunktion durch das Einsetzen dieser Funktion f_n in (3.57) zu bestimmen. Für generische gaußsche Bäume beispielsweise resultiert laut (3.84) im Limes großer N

$$G_N^{(2)}(\vec{X}) = \frac{c^2}{2N(2\pi\sigma^2)^{D/2}} \sum_{n=1}^{N-1} n^{1-D/2} \exp\left(-\frac{\vec{X}^2}{2n\sigma^2} - \frac{c^2n^2}{4N}\right) . \tag{3.104}$$

Die äußere Hausdorff-Dimension D_H eines beliebigen Modells gaußscher Polymere kann aus der N-Abhängigkeit der Erwartungswertdichte (vgl. (3.57) und (3.67))

$$\frac{1}{V}\langle\mathcal{R}^2\rangle_N = \int \mathrm{d}^D X\, \vec{X}^2\, G_N^{(2)}(\vec{X}) = \sum_n \langle\vec{X}^2\rangle_n\, g_N^{(2)}(n) \tag{3.105}$$

ermittelt werden, wobei das zweite Moment der Wahrscheinlichkeitsdichte f_n durch

$$\langle\vec{X}^2\rangle_n = \int \mathrm{d}^D X\, \vec{X}^2 f_n(\vec{X}) \tag{3.106}$$

definiert ist und den mittleren quadratischen Abstand der Endpunkte eines aus n Links bestehenden Pfades beschreibt. Setzt man (3.103) in diese Definition ein, so ergibt sich für gaußsche Pfade die Relation

$$\langle\vec{X}^2\rangle_n = (2\pi n\sigma^2)^{-D/2} \int \mathrm{d}^D X\, \vec{X}^2 \exp\left(-\frac{\vec{X}^2}{2n\sigma^2}\right) = D\sigma^2 n \sim n , \tag{3.107}$$

weswegen sich die typische Ausdehnung solcher wie $\sqrt{n}$ verhält [11, 37]. Unter Berücksichtigung der Definition der fraktalen Dimension d_H finden wir schließlich

$$\langle\mathcal{R}^2\rangle_N \sim \sum_n n\, g_N^{(2)}(n) = \bar{n}_N \sim N^{1/d_H} . \tag{3.108}$$

[11] Identisch verteilt nennen wir in dieser Arbeit solche Zufallsvariablen, deren Wahrscheinlichkeitsdichten f gleich sind.

Die inneren und äußeren Hausdorff-Dimensionen gaußscher Modelle sind somit nicht unabhängig voneinander, sondern genügen gemäß Formel (3.68) der Beziehung

$$D_H = 2d_H \,. \tag{3.109}$$

Dementsprechend (siehe Tabelle 3.1) lautet die äußere für generische Bäume $D_H = 4$, während für skalen-freie bzw. kollabierte $D_H \in [4, \infty)$ bzw. $D_H = \infty$ gilt. Aufgrund ihrer unendlichen fraktalen Dimension D_H haben letztere die Eigenschaft, ihre Ausdehnung im Einbettungsraum nicht zu vergrößern, wenn die Anzahl N ihrer Vertizes zunimmt.

Die Bestimmung der lokalen fraktalen Dimension D_L sowie den Vergleich mit D_H führen wir zunächst für den Fall generischer gaußscher Bäume durch. Ausgangspunkt der Berechnung ist Relation (3.69), welche die Anzahl der Vertizes innerhalb einer Kugelschale mit Radien $R = |\vec{X}|$ und $R + \mathrm{d}R$ mit dem Verhalten der Zweipunkt-Funktion im Bereich $R_{UV} \ll R \ll R_{IR}$ in Beziehung setzt, wobei die Größenordnung der Cutoffs $R_{UV} \sim \sigma$ und $R_{IR} \sim \sigma N^{1/4}$ von der mittleren Linklänge $a_0 = \sigma$ sowie der Systemgröße N abhängt [36].

Nach Gleichung (3.104) nimmt die sphärisch symmetrische Zweipunkt-Funktion monoton mit dem Betrag R der Relativkoordinate $\vec{X}$ ab. Verallgemeinert man die obige Betrachtung der zweiten Momente (vgl. (3.105)-(3.108)) auf beliebige $Q \in (0, \infty)$, so läßt sich für die die Q-ten Momente von $G_N^{(2)}$ das Skalenverhalten

$$\int \mathrm{d}^D X \, |\vec{X}|^Q \, G_N^{(2)}(\vec{X}) = \int \mathrm{d}^D X \, R^Q \, G_N^{(2)}(R) \sim N^{Q/4} \tag{3.110}$$

nachweisen. Demnach ist $G_N^{(2)}$ im Limes großer N eine Funktion der Skalenvariable $R/N^{1/4}$ und besitzt daher den Cutoff bei $R_{IR} \sim \sigma N^{1/4}$. Der Anteil der Summe in (3.104), für den $n \gg 1$ gilt, läßt sich durch eine Integration über n approximieren. Sofern R deutlich größer als σ ist, dominiert dieser Anteil die Summe, und die R-Abhängigkeit von (3.104) kann mit $\zeta = R^2/\sigma^2 \gg 1$ sowie geeignet gewählten Konstanten c_u und c_o genähert werden durch

$$G_N^{(2)}(R) \sim \int_{c_u}^{c_o\sqrt{N}} \mathrm{d}n \, n^{1-D/2} \, e^{-\zeta/2n} \sim \zeta^{2-D/2} \,. \tag{3.111}$$

Hierbei geht die obere Grenze des Integrals auf den Term $\exp(-c^2 n^2/4N)$ zurück. Für $D > 4$ ist die exakte Form des Integranden im Bereich großer $n \sim \sqrt{N}$ von geringer Bedeutung, weil das dominierende Verhalten $G_N^{(2)}(R) \sim \zeta^{2-D/2} \sim R^{4-D}$ im wesentlichen durch die untere Grenze der Integration festgelegt wird. Falls R sich den Größenordnungen der Cutoffs, d. h. σ bzw. $\sigma N^{1/4}$, nähert, bricht dieses Verhalten der Zweipunkt-Funktion zusammen. Ist R von der Größenordung σ, so entspricht (3.104) einer gewichteten Summe von Gauß-Funktionen, deren Breiten größer als R sind. Wir erwarten daher, daß $G_N^{(2)}$ im Bereich kleiner R nahezu konstant ist.

Im Fall $D \leq 4$ verschwindet die Divergenz für kleine n, und die Terme großer

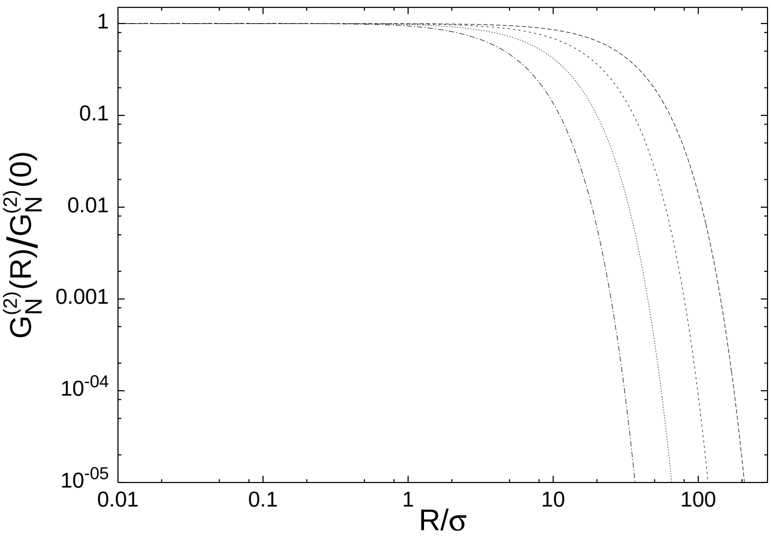

Abbildung 3.8: Die normierte Zweipunkt-Funktion für $D = 2$ und $N = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ (von links nach rechts). Im Bereich kleiner R sind die Funktionen konstant, und der Cutoff, welcher diesen Bereich nach oben hin beschränkt, wächst wie $N^{1/4}$.

$n \sim \sqrt{N}$ dominieren in (3.104). Als Funktion von R betrachtet, ist die Zweipunkt-Funktion auch hier eine gewichtete Summe gaußscher Funktionen, deren Argumente R maximal von der Größenordnung ihrer Breiten $\sigma\sqrt{n}$ sind. $G_N^{(2)}$ sollte deswegen näherungsweise konstant (~ 1) sein, solange $R \ll \sigma N^{1/4}$ gilt. Exemplarisch haben wir die Zweipunkt-Funktion für $D = 2$ sowie $D = 10$ und jeweils vier Werte N von 10^3 bis 10^6 numerisch ausgewertet.[12] Die Resultate sind den Abbildungen 3.8 und 3.9 zu entnehmen, in denen die Skalen logarithmisch sind und $G_N^{(2)}$ jeweils mit $G_N^{(2)}(0)$ normiert ist. In der Tat korrespondieren die Ergebnisse zu dem von uns erwarteten Verhalten und stützen somit obige Argumentation.
Mit (3.70) und (3.71) folgt für die radiale Vertexdichte generischer gaußscher Modelle

$$\rho(R) \sim \begin{cases} R^{D-1} & , \text{für } D \leq 4 \\ R^3 & , \text{für } D > 4\,, \end{cases} \tag{3.112}$$

womit sich die lokale fraktale Dimension der äußeren Geometrie zu

$$D_L = \begin{cases} D & , \text{für } D \leq 4 \\ 4 & , \text{für } D > 4 \end{cases} \tag{3.113}$$

[12]Hierbei wurde die exakte Form von $G_N^{(2)}$ mit $\sigma = 1$ und $c = \sqrt{2}$ verwendet:

$$G_N^{(2)}(R) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{e^{-\frac{R^2}{2n\sigma^2}}}{(2\pi n\sigma)^{D/2}}\,(n+1)\,e^{-\frac{c^2(n+1)^2}{4N}} \Bigg/ \sum_{n=0}^{N-1}(n+1)\,e^{-\frac{c^2(n+1)^2}{4N}}\,.$$

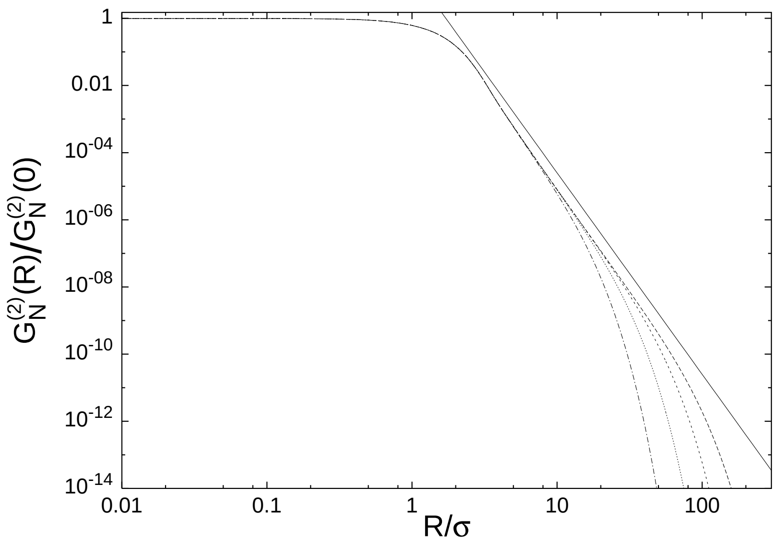

Abbildung 3.9: Die normierte Zweipunkt-Funktion für $D = 10$ und $N = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ (von links nach rechts). Im Bereich kleiner R sind die Funktionen konstant, während sie sich für $\sigma \ll R \ll \sigma N^{1/4}$ proportional zu R^{-6} verhalten (linearer Teil in der Abbildung). Für den Vergleich der Steigungen wurde zusätzlich ein reines Potenzgesetz (durchgezogene Linie) $\sim R^{-6}$ mit in die Abbildung aufgenommen.

ergibt. Offenbar führt sowohl die Bestimmung der lokalen fraktalen Dimension als auch die der globalen zu demselben Ergebnis $D_H = D_L = 4$, sofern die Dimension D des Einbettungsraumes groß genug ist. Ist D hingegen zu klein, so kann sich die fraktale Struktur lokal nicht vollständig entwickeln und man findet $D_L = D < 4 = D_H$. Begründen läßt sich dieses folgendermaßen: Die Vertizes eines Baumgraphen, welcher in einen äußeren Raum der Dimension $D < 4$ eingebettet ist, liegen gemäß der Definition von D_H innerhalb einer Kugel, deren Radius zu $N^{1/4}$ proportional ist. Das zu $N^{D/4}$ proportionale Volumen dieser enthält folglich N Vertizes, was bedeutet, daß die im Kugelinneren befindlichen für große N dicht gepackt und gleichmäßig verteilt sind. Ein Beobachter, der lediglich ein kleines, weit von der Kugeloberfläche entferntes Gebiet zu überblicken imstande ist, wird daher $D_L = D$ messen, weil er gleichmäßig im D-dimensionalen Raum verteilte Vertizes sieht. Für $D > 4$ liegt eine andere Situation vor, da das Kugelvolumen schneller anwächst als die Größe N des Polymers. Im Limes $N \to \infty$ ist dieses schließlich groß genug, so daß sich die fraktale Struktur des Systems ausbilden kann.

Wir erwarten darüber hinaus, daß auch die lokale fraktale Dimension skalen-freier Bäume

$$D_L = \begin{cases} D & \text{, für } D \leq D_H \\ D_H & \text{, für } D > D_H \end{cases} \tag{3.114}$$

lautet. Für semi-generische Modelle läßt sich D_L jedoch nicht wie zuvor (bzw. in Abschnitt 3.7) definieren, da die äußere Hausdorff-Dimension dieser unendlich ist und es deshalb keinen Sinn ergibt, von einem Bereich $\sigma \ll R \ll \sigma N^{1/D_H}$ zu sprechen.

3.10 Lévy-Bäume

Die im vorherigen Abschnitt betrachteten gaußschen Polymere zeichnen sich dadurch aus, daß der Parameter σ des Gewichtes (3.102) ihre mittlere Linklänge bestimmt und Links mit einer Länge größer als 3σ extrem selten auftreten. Hierbei kann die letztgenannte Eigenschaft als Folge des (zu) hohen Energiebedarfs für die Einbettung langer Links angesehen werden.
Ebenso interessant ist es, die äußere Geometrie von Modellen zu untersuchen, deren Gewichte f auch lange Links zulassen. So zum Beispiel besitzen die für die One-Loop-Näherung des IKKT-Modells bedeutsamen generischen Polymere potenzartig abfallende Linkgewichte. Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit verallgemeinerten, potenzartig abfallenden Gewichten befassen, sollen nun Modelle von Baumgraphen studiert werden, die in einen $D = 1$ dimensionalen äußeren Raum eingebettet sind, wobei f einer symmetrischen Lévy-Verteilung $\tilde{L}_\alpha$ [37, 38] entspricht.[13] Mit dem Parameter $\alpha \in (0, 2)$ sowie der positiven reellwertigen Amplitude A^α läßt sich eine solche schreiben als

$$f(r) = \tilde{L}_\alpha(A, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \, \exp\left(-A^\alpha |p|^\alpha - ipr\right) . \tag{3.115}$$

Eine einfachere Darstellung existiert nur für den Fall $\alpha = 1$. In diesem ist das Integral exakt lösbar und die symmetrische Lévy-Verteilung $\tilde{L}_1$ stimmt mit einer Cauchy-Verteilung

$$\tilde{L}_1(A, r) = \frac{1}{\pi} \frac{A}{A^2 + r^2} \tag{3.116}$$

überein [38, 39]. Man beachte ferner, daß die Erweiterung von Definition (3.115) auf $\alpha = 2$ zu einer Gauß-Verteilung mit $\sigma = \sqrt{2}A$ führt, weswegen in diesem Zusammenhang auch vom gaußschen Grenzfall gesprochen wird [39].
Die Linkgewichte (3.115) haben zwei fundamentale Eigenschaften. Zum einen sind sie von der Orientierung der Links unabhängig, d. h. es gilt $f(r) = f(-r)$, und zum anderen genügen diese der Stabilitätsbedingung

$$\tilde{L}_\alpha(A, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}r_1 \, \tilde{L}_\alpha(A_1, r_1) \, \tilde{L}_\alpha(A_2, r - r_1) \tag{3.117}$$

[13] Die Linkvektoren bzw. die Relativkoordinaten im eindimensionalen Raum bezeichnen wir mit r bzw. X. Dementsprechend sind sowohl r als auch X Elemente aus $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Anhand der Tilde unterscheiden wir die hier betrachteten symmetrischen Lévy-Verteilungen $\tilde{L}_\alpha$ von den maximal asymmetrischen L_ν aus Abschnitt 3.8 und Anhang B.

bezüglich der Faltung. Während sich dabei die Amplituden gemäß $A^\alpha = A_1^\alpha + A_2^\alpha$ addieren, ist der Index α der Verteilung invariant [39]. Berechnet man f_n nach (3.49) über die sukzessive Faltung n identischer f, so folgt die Identität

$$f_n(X) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} f\left(\frac{X}{n^{1/\alpha}}\right) , \tag{3.118}$$

gemäß der f_n mittels einer Reskalierung aus f hervorgeht. Aus der Kombination dieses Skalenverhaltens mit dem der inneren Zweipunkt-Funktion, welche, wie wir wissen, eine Funktion $N^{-1} l_\nu(v)$ einer Skalenvariable $v = n/N^\nu$ ist (vgl. Abschnitt 3.8), läßt sich das Skalenverhalten der äußeren Zweipunkt-Funktion (3.57)

$$G_N^{(2)}(X) = \sum_n g_N^{(2)}(n)\, f_n(X) \sim \frac{1}{N} \int \frac{\mathrm{d}n}{n^{1/\alpha}}\, l_\nu\left(\frac{n}{N^\nu}\right)\, f\left(\frac{X}{n^{1/\alpha}}\right) \tag{3.119}$$

herleiten. Aufgrund der sphärischen Symmetrie der Linkgewichte kann das Ergebnis dieser Integration als Funktion eines universellen Arguments $|X|/N^{\nu/\alpha}$ geschrieben werden. Deshalb erwarten wir, daß der Index α die Hausdorff-Dimensionen verbindet, d. h.

$$D_H = \alpha/\nu = \alpha d_H\,. \tag{3.120}$$

Offensichtlich fällt diese Relation für $\alpha = 2$ mit der im letzten Abschnitt hergeleiteten Beziehung (3.109) zusammen. Die Verteilungen (3.115) mit $0 < \alpha < 2$ weisen im Gegensatz zum gaußschen Grenzfall im Bereich großer Linklängen $|r|$ lediglich einen potenzartigen Abfall

$$\mathrm{d}r\, f(r) \sim \frac{\mathrm{d}r}{|r|} \frac{A^\alpha}{|r|^\alpha} \tag{3.121}$$

auf, der wegen (3.118) auch das Verhalten von f_n für große $|X|$ bestimmt. Folglich läßt sich in diesem Fall die äußere Hausdorff-Dimension nicht wie zuvor aus der N-Abhängigkeit der Erwartungswertdichte $\langle \mathcal{R}^2 \rangle_N / V$ ermitteln, da das zweite Moment $\langle X^2 \rangle_n$ der Wahrscheinlichkeitsdichte f_n nicht existiert und somit auch $\langle \mathcal{R}^2 \rangle_N / V$ divergiert. Wir wählen daher ein $Q < \alpha$ und betrachten alternativ $\langle \mathcal{R}^Q \rangle_N / V$, wobei $\mathcal{R}^Q$ wie in Abschnitt 3.7 definiert ist. Die Hausdorff-Dimension resultiert dann aus dem Verhalten

$$\langle \mathcal{R}^Q \rangle_N \sim N^{Q/D_H} \tag{3.122}$$

im Limes großer N. In Analogie zu Formel (3.105) im gaußschen Fall ($\alpha = 2$) besitzt hier die Relation

$$\frac{1}{V} \langle \mathcal{R}^Q \rangle_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}X\, |X|^Q\, G_N^{(2)}(X) = \sum_n \langle |X|^Q \rangle_n\, g_N^{(2)}(n) \tag{3.123}$$

mit

$$\langle |X|^Q \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}X\, |X|^Q f_n(X) \sim n^{\frac{Q}{\alpha}} \tag{3.124}$$

Gültigkeit. Damit ergibt sich die N-Abhängigkeit des Ensemblemittels von $\mathcal{R}^Q$ zu $\langle \mathcal{R}^Q \rangle_N \sim N^{Q/\alpha d_H}$, und die erwartete Beziehung $D_H = \alpha d_H$ ist nachgewiesen.

3.11 Bäume mit $\alpha \in (0, \infty)$ und $D \geq 1$

Abschließend sollen nun Modelle verzweigter Polymere untersucht werden, deren Linkgewichte durch positiv definite, normierte, isotrope Funktionen gegeben sind, welche potenzartig mit der Linklänge $|\vec{r}|$ abfallen. Ehe wir zur Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen D übergehen, diskutieren wir zunächst den Fall $D = 1$. Wir fordern daher, daß f den Bedingungen $f(r) = f(-r) \geq 0$ sowie $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}r f(r) = 1$ genügt und für große $|r|$ einen potenzartigen Abfall $f(r) \sim A^{\alpha}|r|^{-1-\alpha}$ mit $\alpha \in (0, \infty)$ besitzt.

Wiederum ist das Skalenverhalten der äußeren Zweipunkt-Funktion im Limes großer N von besonderem Interesse. In den letzten beiden Abschnitten wurde gezeigt, wie sich dieses mit Hilfe von Formel (3.57) aus der Kombination der Skaleneigenschaften von $g_N^{(2)}(n)$ und $f_n(X)$ bestimmen läßt. Wir nehmen an, daß das Modell bereits mittels d_H bezüglich seiner inneren Geometrie klassifiziert und $g_N^{(2)}$ demzufolge Funktion eines universellen Arguments $n/N^{1/d_H}$ ist. Es verbleibt also, die Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichte f_n zu betrachten. Da die normierte innere Zweipunkt-Funktion für kleine n die Proportionalität $g_N^{(2)}(n) \sim n$ aufweist und $f_n(X)$ hier für jedes endliche n im Bereich großer $|X|$ gemäß

$$\mathrm{d}X\, f_n(X) \sim \frac{\mathrm{d}X}{|X|} \frac{nA^{\alpha}}{|X|^{\alpha}} \tag{3.125}$$

potenzartig abfällt,[14] ist für das Skalenverhalten von $G_N^{(2)}(X)$ nach (3.57) insbesondere die Gestalt der Verteilung $f_n(X)$ im Limes großer n von Bedeutung.

Dem zentralen Grenzwertsatz zufolge nähert sich $f_n(X)$ einer symmetrischen Lévy-Verteilung $\tilde{L}_{\alpha}(n^{1/\alpha}A, X)$, falls $\alpha < 2$ gilt, bzw. einer Gauß-Verteilung mit Varianz $\sigma_n^2 \sim n$, wenn $\alpha > 2$ ist [38, 39]. Auch der Grenzfall $\alpha = 2$ gehört laut [38, 39] zum Anziehungsbereich der Gauß-Verteilung, wobei die Varianz σ_n^2 in diesem proportional zu $n \log(n)$ anwächst, d. h. mit einem zusätzlichen logarithmischen Faktor.

Für $\alpha > 2$ konvergiert die Funktionenfolge keineswegs gleichmäßig gegen ihre Grenzverteilung, denn solange n groß, aber endlich ist, läßt sich $f_n(X)$ lediglich im zentralen Bereich $|X| < R_*$ mit

$$R_* \sim b\sqrt{n \log(n)} \tag{3.126}$$

durch eine Gauß-Verteilung beschreiben [38, 39].[15] Hierbei hängt der Skalenfaktor b wesentlich von dem betrachteten Linkgewicht f ab. Außerhalb dieses Bereiches hingegen unterscheidet sich $f_n(X)$ von der Normalverteilung und zeigt für $|X| \gg R_*$ das potenzartige Verhalten (3.125). Man spricht davon, daß f seinen potenzartigen

[14] Dieses läßt sich zeigen, indem man den für kleine $|p|$ führend singulären Anteil $\exp(-c_{\alpha}A^{\alpha}|p|^{\alpha})$ der charakteristischen Funktion $\widehat{f}(p)$ in Formel (3.52) einsetzt.

[15] Falls alle Momente von f existieren, wächst R_* als Grenze des zentralen Bereichs sogar schneller mit n an. So z. B. gilt $R_* \sim n^{3/4}$, wenn f zudem eine gerade Verteilung ist [39].

Abfall für jedes endliche n an f_n vererbt. Sofern n endlich ist, existieren deswegen sämtliche Momente

$$\langle |X|^Q \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}X\, |X|^Q f_n(X) \tag{3.127}$$

mit $Q \geq \alpha$ nicht, und auch die dazugehörigen Erwartungswertdichten

$$\frac{1}{V}\langle \mathcal{R}^Q \rangle_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}X\, |X|^Q\, G_N^{(2)}(X) = \sum_n \langle |X|^Q \rangle_n\, g_N^{(2)}(n) \tag{3.128}$$

divergieren. Der obigen Argumentation entsprechend, dominieren im Limes $N \to \infty$ die Terme großer $n \sim N^{1/d_H}$ die Summen (3.57) und (3.128), weswegen wir nun zum Grenzwert $n \to \infty$ von f_n übergehen. Dabei strebt die Grenze R_* des zentralen Bereiches schneller gegen unendlich als die Breite $\sigma_n \sim \sqrt{n}$ der Verteilung, und die Beiträge mit $|X| > R_*$ verschwinden wie [39]

$$\int_{|X|>R_*} \mathrm{d}X\, f_n(X) \sim \frac{1}{n^{\alpha/2-1} \log^{\alpha/2}(n)}\,. \tag{3.129}$$

Für $n = \infty$ erstreckt sich der zentrale Bereich schließlich von $-\infty$ bis $+\infty$, und f_∞ repräsentiert eine Gauß-Verteilung. Weil die Grenzverteilung somit schneller als jedes Potenzgesetz abfällt, existieren insbesondere alle Momente $\langle |X|^Q \rangle_\infty$ von $f_\infty(X)$. Laut dem zentralen Grenzwertsatz verhalten sich Modelle mit $\alpha > 2$ infolge dieser Grenzwertbildung also wie Modelle gaußscher Polymere. Eine wichtige Beobachtung ist, daß das ermittelte Skalenverhalten von $G_N^{(2)}(X)$ für $N \to \infty$ und große $|X|$ davon abhängt, in welcher Reihenfolge die beiden Grenzwerte gebildet werden. Solange N (und damit n) groß, aber endlich ist, weist $f_n(X)$ im Gegensatz zum Fall gaußscher Bäume einen potenzartigen Abfall auf, und die höheren Momente $\langle |X|^Q \rangle_n$ mit $Q \geq \alpha$ existieren nicht.

Im folgenden möchten wir die Diskussion auf Dimensionen $D > 1$ verallgemeinern. Angenommen, die sphärisch symmetrischen Gewichte $f(\vec{r})$ fallen wie $f(|\vec{r}|) \sim |\vec{r}|^{-D-\alpha}$ mit der Länge der Links ab, so gilt

$$\mathrm{d}^D r\, f(\vec{r}) = \mathrm{d}\Omega_D\, \mathrm{d}|\vec{r}|\, |\vec{r}|^{D-1}\, f(|\vec{r}|) \sim \mathrm{d}\Omega_D\, \mathrm{d}|\vec{r}|\, |\vec{r}|^{-1-\alpha} \tag{3.130}$$

mit $\mathrm{d}\Omega_D$ als Maß der Integration über den D-dimensionalen Raumwinkel. Aufgrund des zusätzlichen Faktors $|\vec{r}|^{D-1}$ ändert sich die effektive Potenz des Abfalls hier um $D-1$. Dementsprechend konvergiert f_n wie zuvor gegen eine Gauß-Verteilung, wenn $\alpha \geq 2$, bzw. gegen eine symmetrische Lévy-Verteilung, falls $\alpha < 2$ ist. Die charakteristischen Funktionen (3.51) der korrespondierenden Grenzverteilungen f_∞ sind isotrop und können mit $\widehat{\alpha} = \min\{2, \alpha\}$ geschrieben werden als $\exp(-A^{\widehat{\alpha}}|\vec{p}|^{\widehat{\alpha}})$. So zum Beispiel gehören Modelle, deren Linkgewichte das asymptotische Verhalten $f(|\vec{r}|) \sim |\vec{r}|^{-D-1}$ haben, zum Anziehungsbereich der D-dimensionalen Cauchy-Verteilung

$$f_\infty(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \mathrm{d}^D p\, e^{-A|\vec{p}| - i\vec{p}\vec{X}} = \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\pi^{(D+1)/2}} \frac{A}{\left(A^2 + \vec{X}^2\right)^{\frac{D+1}{2}}}\,. \tag{3.131}$$

In Abschnitt 2.5 wurde gezeigt, daß die One-Loop-Approximation des IKKT-Matrixmodells zu einem Modell von Graphen führt, welche sich durch generische verzweigte Polymere mit potenzartig abfallenden Linkgewichten aufbauen lassen. Im vierdimensionalen Fall (siehe Formel (2.61)) sind diese Graphen selbst verzweigte Polymere, deren Gewichte sich für große Linklängen wie $f(|\vec{r}|) \sim |\vec{r}|^{-D-\alpha} = |\vec{r}|^{-6}$ verhalten. Das Modell entspricht somit einer Realisierung des Grenzfalls $\alpha = 2$, welcher zum Anziehungsbereich der Gauß-Verteilung gehört. Wiederum hängen die Skaleneigenschaften der Theorie von der Reihenfolge der Grenzwertbildungen ab. Geht man zuerst zum Grenzwert $N \to \infty$ über, so ergibt sich ein Modell gaußscher Polymere, für das sämtliche Momente der Wahrscheinlichkeitsdichten $f_\infty(\vec{X})$ und $G^{(2)}_\infty(\vec{X})$ existieren. Betrachtet man die höheren Momente ($Q \geq 2$) dieser Verteilungen hingegen für endliche N, d. h. bevor der Limes $N \to \infty$ genommen wird, so sind diese divergent.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Modelle von verzweigten Polymeren untersucht, die in einen D-dimensionalen äußeren Raum eingebettet sind, deren innere Gewichte bezüglich der Vertizes und deren äußere Gewichte bezüglich der Links faktorisieren. Wir haben nachgewiesen, daß die innere Geometrie solcher Modelle unabhängig von der Einbettung, d. h. der äußeren Geometrie, ist. Andererseits impliziert die Abhängigkeit der äußeren Zweipunkt-Funktion (3.57) von der normierten inneren, daß die innere Geometrie die äußere beeinflußt.
Es zeigt sich, daß hinsichtlich der inneren Geometrie drei Universalitätsklassen von Modellen verzweigter Polymere zu unterscheiden sind [16, 17]. Für diese haben wir die normierten inneren Zweipunkt-Funktionen bestimmt, deren Skaleneigenschaften die Wertebereiche der inneren fraktalen Dimensionen d_H und d_L festlegen. Die lokale fraktale Dimension lautet sowohl für generische Bäume als auch für die skalen-freien marginaler Modelle $d_L = 2$, während die Hausdorff-Dimension d_H im generischen Fall zwei beträgt und für skalen-freie Bäume ein Element des Intervalls $[2, \infty)$ ist. Im semi-generischen Fall, d. h. für kollabierte Bäume, gilt $d_H = \infty$, weswegen es (vgl. Abschnitt 3.7) keinen Sinn ergibt, von einer lokalen fraktalen Dimension zu sprechen.
Darüber hinaus wurde das Skalenverhalten der äußeren Zweipunkt-Funktion für Modelle betrachtet, deren Linkgewichte f durch Gauß-Funktionen gegeben sind oder für große Linklängen $|\vec{r}|$ effektiv wie $|\vec{r}|^{-1-\alpha}$ abfallen. Den Untersuchungen zufolge manifestiert sich der Einfluß der inneren Geometrie auf die äußere auch in der Abhängigkeit der äußeren Hausdorff-Dimension D_H von d_H. Für gaußsche Linkgewichte folgt die Identität $D_H = 2d_H$, wogegen Linkgewichte, die durch symmetrische Lévy-Verteilungen gegeben sind, die Relation $D_H = \alpha d_H$ nach sich ziehen. Geht man vor der Bestimmung der Momente $\langle \mathcal{R}^Q \rangle_N$ mit $Q < \alpha$ zum Limes $N \to \infty$ über, so ist laut dem zentralen Grenzwertsatz die Beziehung $D_H = \alpha d_H$ auch für Linkgewichte, welche mit $0 < \alpha < 2$ potenzartig abfallen, und der Zusammenhang $D_H = 2d_H$ ebenfalls für solche, die mit $\alpha \geq 2$ potenzartig abfallen, gültig. Folglich kann die äußere

Hausdorff-Dimension Werte im Intervall $(0, \infty)$ annehmen. Die äußere Hausdorff-Dimension generischer gaußscher Polymere beträgt bekanntlich $D_H = 4$ [11]. Im Gegensatz dazu gilt für generische Lévy-Bäume $D_H < 4$, und für skalen-freie bzw. kollabierte Bäume ist $D_H > 4$ möglich.
Zudem haben die Betrachtungen der äußeren Zweipunkt-Funktion generischer gaußscher Polymere offengelegt, daß die lokale fraktale Dimension D_L im allgemeinen von der Dimensionalität des Einbettungsraumes abhängig ist. Sofern D größer als D_H ist, fallen die fraktalen Dimensionen zusammen, d. h. es ergibt sich $D_L = D_H$. Ist D hingegen kleiner oder gleich D_H, so kann die fraktale Struktur sich lokal nicht vollständig entwickeln, und man findet $D_L = D$. Dasselbe Verhalten erwarten wir für marginale Modelle gaußscher Polymere, während D_L im semi-generischen Fall nicht definiert ist.
Gemäß der Betrachtungen im ersten Teil dieser Arbeit führt die One-Loop-Näherung des IKKT-Matrixmodells zu einem Modell von Graphen, die sich aus Baumgraphen zusammensetzen lassen. Insbesondere für die Gaußsche Näherung des vierdimensionalen supersymmetrischen SU(N)-Yang-Mills-Integrals sind generische Modelle verzweigter Polymere mit potenzartig abfallenden Linkgewichten ($\alpha = 2$) von Bedeutung. Es stellt sich heraus, daß die höheren Momente $\langle |\vec{X}|^Q \rangle_n$ für Modelle, deren Linkgewichte mit $\alpha \geq 2$ potenzartig abfallen, nur existieren, falls man zuerst den Grenzwert $N \to \infty$ berücksichtigt und danach zu großen Abständen $|\vec{X}|$ übergeht. Weil die Eigenwertverteilungen $\varrho(\lambda)$ der bosonischen Matrizen supersymmetrischer SU(N)-Yang-Mills-Integrale ebenfalls für jedes endliche N einen potenzartigen Abfall aufweisen [40], beobachtet man für diese ebenso Divergenzen höherer Momente $\langle 1/N \cdot \mathrm{Tr}\,\{A^2\}^k \rangle = \int \mathrm{d}\lambda\ \varrho(\lambda)\ \lambda^{2k}$. Ungeklärt ist zum einen, ob auch in diesem Fall eine gaußsche Grenzverteilung existiert, wenn für ein festes λ zunächst der Limes $N \to \infty$ genommen wird, und zum anderen, wie anschließend der Grenzwert großer Eigenwerte zu bilden ist. Eine genauere Analyse dieser Grenzwertprozesse wäre für die Beantwortung der Frage, ob das IKKT-Matrixmodell einen Mechanismus zur spontanen Brechung der Lorentzsymmetrie enthält, von erheblicher Bedeutung.
Außerdem wäre es für ein besseres Verständnis der geometrischen Eigenschaften des IKKT-Modells interessant, die fraktalen Besonderheiten der aus Bäumen zusammengesetzten Graphen zu studieren, die im Rahmen der One-Loop-Näherung des zehndimensionalen Yang-Mills-Integrals in Erscheinung treten. Da letztgenannte Wechselwirkungen zwischen Links enthalten [24], ist es erstrebenswert, die Diskussion der äußeren und inneren geometrischen Eigenschaften erst einmal auf Modelle verzweigter Polymere mit komplizierteren Einbettungen zu erweitern. Zu beachten ist, daß die innere Geometrie dann im allgemeinen auch von der äußeren abhängt. So zum Beispiel führen *Self-Avoidance-* bzw. *Excluded-Volume-Effekte* im äußeren Raum tendenziell zu einer Verringerung der inneren Hausdorff-Dimension, weil diese Bäume mit geringen Vertexordnungen, d. h. wenig Verästelungen, bevorzugen. Aus der Abhängigkeit der äußeren Geometrie von der modifizierten inneren ergibt sich insgesamt ein Rückkopplungseffekt, dessen Einfluß auf die fraktalen Dimensionen sich ebenso als Gegenstand weiterer Untersuchungen anbietet.

Anhang A

Fermionische Strukturen

Darstellungen zur Beschreibung fermionischer Felder im vierdimensionalen Minkowskiraum sind in nahezu allen Elementarteilchenphysik- und Quantenfeldtheoriebüchern enthalten. Seltener hingegen sind Diskussionen euklidischer Fermionen und Gammamatrizen zu finden (z. B. in [21] und [41]). Der erste Teil dieses Anhangs soll als Zusammenfassung wichtiger Aspekte der Beschreibung letztgenannter Objekte in D-dimensionalen euklidischen Räumen dienen. Mit Ausnahme von Appendix A.1 beschränken sich daher sämtliche Betrachtungen auf metrische Räume mit Signatur $(+\cdots+)$. Als detailliertere Darstellungen seien dem Leser das Kapitel 1 und Appendix 5 von [41] empfohlen.
Im Anhang A.4 finden sich zudem Herleitungen, welche für die One-Loop-Näherung des IKKT-Matrixmodells von Bedeutung sind.

A.1 Grassmann-Variablen und -Integration

Die Beschreibung fermionischer Freiheitsgrade erfordert die Einführung antikommutierender Größen, die als Grassmann-Variablen oder -Zahlen bezeichnet werden. Ohne tiefergehend auf die zugrundezulegende $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-(Grassmann)-Algebra $\mathcal{A}$ einzugehen, faßt dieser Abschnitt einige fundamentale Regeln für das Rechnen mit Grassmann-Zahlen zusammen.

Grassmann-Variablen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ genügen den Antivertauschungsrelationen

$$\xi_i\, \xi_j + \xi_j\, \xi_i = 0\,. \tag{A.1}$$

Infolgedessen kann die Entwicklung einer Funktion f, die von diesen abhängig ist, bezüglich einer gewählten Variable ξ_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) höchstens von erster Ordnung sein, d. h.

$$f\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = a_0 + a_1\,\xi_i \tag{A.2}$$

mit Elementen a_0 und a_1 aus $\mathcal{A}$, die im allgemeinen Funktionen der ξ_j mit $j \neq i$ sind. Insbesondere verschwindet jede Potenz einer Grassmann-Zahl, die größer oder gleich zwei ist. Monome $\xi_{i_1}\xi_{i_2}\cdots\xi_{i_k}$ entsprechen kommutierenden bzw. antikommutierenden Variablen, sofern k gerade bzw. ungerade ist. Es wird von bosonischen bzw. fermionischen Kombinationen gesprochen.
Die Darstellung (A.2) legt folgende Definition einer Ableitung von f bezüglich ξ_i nahe:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\, f \equiv a_1\,. \tag{A.3}$$

Wegen (A.2) verschwindet jede zweite Ableitung von f bezüglich desselben Arguments. Dieses kann als Nilpotenz des Differentialoperators interpretiert werden. Darüber hinaus gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\,\frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial}{\partial \xi_i} = 0\,, \tag{A.4}$$

was bedeutet, daß die $\partial/\partial\xi_i$ ebenfalls grassmannwertig sind.
Damit in Theorien, die Fermionen enthalten, Zustandssummen und Erzeugendenfunktionale einen Sinn haben, muß der Integration über Grassmann-Variablen eine Bedeutung gegeben werden. Eine Möglichkeit ist, diese gemäß

$$\int \mathrm{d}\xi_i\, f \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_i}\, f \tag{A.5}$$

mit der Differentiation in $\mathcal{A}$ zu identifizieren. Im mehrdimensionalen Fall ist die Integration sukzessive vorzunehmen:

$$\int \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n\, f \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{\partial}{\partial \xi_2} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_n}\, f\,, \tag{A.6}$$

wobei (A.4) und (A.6) implizieren, daß die Integrationsmaße $\mathrm{d}\xi_i$ antikommutieren. Eine Umordnung dieser führt demnach ein Vorzeichen $\mathrm{sign}(\pi)$ ein, das von der Permutation $\pi \in S_n$ der Indizes abhängt. Wird in (A.6) eine invertierbare Variablentransformation

$$\acute{\xi}_i = \acute{\xi}_i\,(\xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{A.7}$$

durchgeführt, so gilt

$$\int \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n\, f = \int \mathrm{d}\acute{\xi}_1 \ldots \mathrm{d}\acute{\xi}_n\, \det\left[\frac{\partial \acute{\xi}_i}{\partial \xi_j}\right]\, f\,. \tag{A.8}$$

Grundlegend für den Beweis dieses Transformationsgesetzes ist die Leibnitz-Formel für die Determinante einer $n \times n$-Matrix A

$$\det[A] = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi)\, A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \cdots A_{n\pi(n)} \,. \tag{A.9}$$

Zu beachten ist, daß die Substitutionsformel hier den Faktor $\det[\partial\acute{\xi}_i/\partial\xi_j]$ im Integranden enthält, während die Jacobi-Determinante im entsprechenden bosonischen Integral $\det[\partial\xi_i/\partial\acute{\xi}_j]$ lautet. Eine Eigenschaft, die auf die Identität von Integration und Differentiation zurückgeführt werden kann.
Für das Kapitel 2 und Appendix A.4 sind zwei Gaußsche Grassmann-Integrale von besonderem Interesse. Abhängig davon, ob über zwei unabhängige Sätze $\bar{\xi}_i$ und ξ_i oder über einen Satz θ_i $(i = 1, \ldots, 2n)$ integriert wird, ergibt sich für quadratische Matrizen A und B

$$\int \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\bar{\xi}_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n\, \mathrm{d}\bar{\xi}_n\, \exp\left(\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi}_i A_{ij} \xi_j\right) = \det[A] \tag{A.10}$$

bzw.

$$\int \mathrm{d}\theta_{2n}\, \mathrm{d}\theta_{2n-1} \ldots \mathrm{d}\theta_1\, \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \theta_i B_{ij} \theta_j\right) = \mathrm{Pf}[B] \,. \tag{A.11}$$

Der Pfaffian (kurz Pf) der $(2n \times 2n)$-Matrix B ist dabei definiert als [5]

$$\mathrm{Pf}[B] = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in S_{2n}} \mathrm{sign}(\pi)\, B_{\pi(1)\pi(2)} B_{\pi(3)\pi(4)} \ldots B_{\pi(2n-1)\pi(2n)} \tag{A.12}$$

und wertet nur den antisymmetrischen Teil einer Matrix aus. Ist B antisymmetrisch, so besitzt die algebraische Identität

$$\mathrm{Pf}[B]^2 = \det[B] \tag{A.13}$$

Gültigkeit. Für die Herleitung von (A.10) und (A.11) (siehe beispielsweise [41]) sind die Entwicklungen (A.2) der Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi}_i A_{ij} \xi_j\right) &= \prod_{i,j=1}^{n} \exp\left(\bar{\xi}_i A_{ij} \xi_j\right) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \bar{\xi}_i A_{ij} \xi_j\right) \,, \\ \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n} \theta_i B_{ij} \theta_j\right) &= \prod_{i,j=1}^{2n} \exp\left(\frac{1}{2}\theta_i B_{ij} \theta_j\right) = \prod_{i=1}^{2n}\prod_{j=1}^{2n}\left(1 + \frac{1}{2}\theta_i B_{ij} \theta_j\right) \end{aligned} \tag{A.14}$$

zu berücksichtigen.
Von der Diracschen Deltafunktion für Grassmann-Variablen ist zu fordern, daß diese ein normiertes Integral

$$\int \mathrm{d}\xi\, \delta(\xi) = 1 \tag{A.15}$$

besitzt. Wird

$$\delta(\xi) \equiv \xi \tag{A.16}$$

gesetzt, so ist diese Bedingung erfüllt und δ selbst grassmannwertig.

A.2 Gammamatrizen

Der Übergang von einem Raum mit Lorentzscher Geometrie (Signatur $(- + \cdots +)$) zu einem mit euklidischer (Signatur $(+ \cdots +)$) wird durch eine Wick-Rotation der Zeitkoordinate $t \to -i\tau$ realisiert. Als Generatoren der Clifford-Algebra $\mathcal{C}$ genügen die Gammamatrizen Γ_μ $(\mu = 1 \ldots D)$ dann den folgenden Antivertauschungsrelationen

$$\Gamma_\mu \, \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \, \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1} \; . \tag{A.17}$$

Gerade Dimensionen:
Eine wichtige Konsequenz von (A.17) ist, daß $\mathcal{C}$ ein 2^D-dimensionaler Vektorraum zugrundeliegt und daher nur $2^{D/2}$- und höherdimensionale Matrixdarstellungen der Generatoren existieren. Neben diesen ist ein weiteres Element von $\mathcal{C}$ ausgezeichnet, nämlich das Produkt

$$\Gamma_S = i^{-D/2} \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_D \; , \tag{A.18}$$

welches der Bedingung $\Gamma_S^2 = \mathbb{1}$ genügt und, weil D gerade ist, mit den Generatoren der Algebra antikommutiert.

Ungerade Dimensionen:
In diesem Fall stellen die Gammamatrizen und Γ_S des $(D-1)$-dimensionalen Raumes eine Realisierung von (A.17) dar, weswegen eine $2^{(D-1)/2}$-dimensionale Darstellung möglich ist. Jedoch kann für ungerade D keine algebraische Unabhängigkeit aller Γ_μ vorliegen.

Die restlichen Betrachtungen dieses Anhangs A werden ausschließlich für gerade D durchgeführt. Eine Rechtfertigung dafür ist, daß wir in dieser Arbeit auf den einzigen Fall einer ungeraden Dimension $(D = 3)$, in der sich das Matrixmodell formal definieren läßt, nicht weiter eingehen (Begründung siehe Abschnitt 2.1). Von besonderem Interesse sind die Dimensionen $D = 4$, 6 und 10.

Für einige der Betrachtungen in den Appendizes A.3 und A.4 ist es notwendig, zu einer Weyl-Darstellung der Γ_μ überzugehen, weswegen nun ein Induktionsprinzip zur Konstruktion einer solchen für beliebige (gerade) $D \geq 2$ vorgestellt wird.
Für $D = 2$ sind die Pauli-Matrizen mögliche Generatoren der Clifford-Algebra

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{D=2} &\equiv \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \Gamma_2^{D=2} \equiv \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \\
\Gamma_S^{D=2} &\equiv \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Die Matrizen Γ_μ^{D+2} und Γ_S^{D+2} leiten sich von denen in D Dimensionen ab:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{D+2} &\equiv \sigma_1 \otimes \Gamma_\mu^D = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_\mu^D \\ \Gamma_\mu^D & 0 \end{pmatrix}, \qquad && 1 \le \mu \le D\,, \\
\Gamma_\mu^{D+2} &\equiv \sigma_1 \otimes \Gamma_S^D = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_S^D \\ \Gamma_S^D & 0 \end{pmatrix}, \qquad && \mu = D+1\,, \\
\Gamma_\mu^{D+2} &\equiv \sigma_2 \otimes \mathbb{1}_D = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{1}_D \\ i\mathbb{1}_D & 0 \end{pmatrix}, \qquad && \mu = D+2
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

und

$$
\Gamma_S^{D+2} \equiv \sigma_3 \otimes \mathbb{1}_D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_D & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_D \end{pmatrix}. \tag{A.21}
$$

$\mathbb{1}_D$ bezeichnet hierbei die Einheitsmatrix in $2^{D/2}$ Dimensionen. Offensichtlich lassen sich die Γ_μ^D rekursiv mittels Tensorprodukten aufbauen, die $D/2$ der fundamentalen 2×2-Matrizen σ_1, σ_2, σ_3 und $\mathbb{1}_2$ enthalten. Der Index D wird im folgenden wieder unterdrückt. In D Dimensionen sind die so konstruierten Matrizen $2^{D/2}$-dimensional, hermitesch, spurlos und zeigen bezüglich der Transposition im Spinorraum das Verhalten

$$
\Gamma_\mu^T = (-1)^{\mu+1}\,\Gamma_\mu\,, \qquad 1 \le \mu \le D\,, \tag{A.22}
$$
$$
\Gamma_S^T = \Gamma_S\,. \tag{A.23}
$$

A.3 Spinortypen

Der Diskussion der verschiedenen Spinortypen liegt die Annahme zugrunde, daß sich die Generatoren der mittels (A.17) definierten Algebra in einer $2^{D/2}$-dimensionalen Darstellung befinden. Falls eine Betrachtung ausschließlich die Spinorindexstruktur betrifft, wird zur Vereinfachung die in Kapitel 2.1 vorgestellte Matrixstruktur durch das Weglassen der Farbindizes „ausgeblendet“.

Dirac-Spinoren:
Sofern sie weder die Weyl- noch Majorana-Bedingungen erfüllen, sind die Dirac-Spinoren $\bar{\Psi}$ und Ψ im euklidischen Raum voneinander unabhängig.[16] Deswegen sind für Transformationen dieser stets separate Vorschriften anzugeben. Die Anzahl

$$
N_D = 2^{D/2} \tag{A.24}
$$

[16]Dieses ist ein wesentlicher Unterschied zu Dirac-Spinoren in Räumen mit Lorentzscher Geometrie, wo die Dirac-Adjunktion selbige miteinander verbindet.

ihrer spinoriellen Komponenten $\bar{\Psi}_a$ und Ψ_a ist durch die Dimensionalität der Γ_μ bestimmt.[17] Im Rahmen des Matrixmodells ist zu berücksichtigen, daß jede dieser Komponenten eine spurlose hermitesche $N \times N$-Matrix ist und $\bar{\Psi}$ sowie Ψ folglich je $N_D(N^2-1)$ unabhängige reelle Freiheitsgrade besitzen. Der Hermitizität zufolge sind die Diagonalelemente $\bar{\Psi}_a^{ii}$ und Ψ_a^{ii} reell, und die off-diagonalen Freiheitsgrade können mit $i<j$ dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_a^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\bar{\Psi}_a^{ij} - i\,{}^I\bar{\Psi}_a^{ij}\right), \qquad & \Psi_a^{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\Psi_a^{ij} + i\,{}^I\Psi_a^{ij}\right), \\ \bar{\Psi}_a^{ji} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\bar{\Psi}_a^{ij} + i\,{}^I\bar{\Psi}_a^{ij}\right), \qquad & \Psi_a^{ji} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left({}^R\Psi_a^{ij} - i\,{}^I\Psi_a^{ij}\right). \end{aligned} \tag{A.25}$$

In dem Integrationsmaß

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi &= \left(\prod_{i=1}^{N}\prod_{a=1}^{N_D}\mathrm{d}\bar{\Psi}_a^{ii}\,\mathrm{d}\Psi_a^{ii}\;\delta\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{\Psi}_a^{ii}\right)\delta\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Psi_a^{ii}\right)\right)\times \\ &\times \quad \left(\prod_{i<j}\prod_{a=1}^{N_D}\mathrm{d}^R\bar{\Psi}_a^{ij}\,\mathrm{d}^R\Psi_a^{ij}\,\mathrm{d}^I\bar{\Psi}_a^{ij}\,\mathrm{d}^I\Psi_a^{ij}\right) \end{aligned} \tag{A.26}$$

der Dirac-Spinoren sind sämtliche der obengenannten Eigenschaften berücksichtigt.

Genügen $\bar{\Psi}$ und Ψ den Weyl- und/oder Majorana-Bedingungen,[18] so reduziert sich die Anzahl ihrer unabhängigen reellen Freiheitsgrade, und das Integrationsmaß ist geeignet anzupassen. Für die weiteren Betrachtungen wird die in Appendix A.2 eingeführte Darstellung der Gammamatrizen verwendet.

Weyl-Spinoren:
Die Chiralitätsprojektoren

$$\mathcal{P}^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} \pm \Gamma_S\right) \tag{A.27}$$

besitzen in der gewählten Weyl-Darstellung die Blockgestalt

$$\mathcal{P}^{+} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \tag{A.28}$$

Mit diesen lassen sich Dirac-Spinoren $\bar{\Psi}$ und Ψ in zwei Familien $\bar{\chi}$, χ sowie $\bar{\phi}$, ϕ je $(N_D/2)$-komponentiger rechts- bzw. linkshändiger Weyl-Spinoren zerlegen:

$$\bar{\Psi} = \left(\bar{\phi}, \bar{\chi}\right), \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}. \tag{A.29}$$

---

[17] Für ungerade D existiert eine $2^{(D-1)/2}$-dimensionale Darstellung (vgl. Anhang A.2).

[18] Wegen der separaten Transformationsvorschriften für $\bar{\Psi}$ und Ψ wird stets von Bedingungen gesprochen, d. h. der Plural benutzt.

Auch die Gammamatrizen (A.20) weisen eine Blockstruktur auf:

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_\mu^- \\ \Gamma_\mu^+ & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.30}$$

Die weylprojizierten Gammamatrizen Γ_μ^+ und Γ_μ^- genügen der Beziehung

$$\Gamma_\mu^{+\dagger} = \Gamma_\mu^- , \tag{A.31}$$

entsprechen aber nicht einer Realisierung der Clifford-Algebra, da insbesondere $\Gamma_D^\pm = \pm i\mathbb{1}$ gilt. Eine wichtige Eigenschaft der Dirac-Wirkung

$$S_{BF} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\Psi}\Gamma^\mu\left[A_\mu, \Psi\right]\right\} \tag{A.32}$$

ist, daß sich diese unter Berücksichtigung von (A.29) und (A.30) in

$$S_{BF} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\chi}\Gamma_+^\mu\left[A_\mu, \chi\right]\right\} - \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\phi}\Gamma_-^\mu\left[A_\mu, \phi\right]\right\} \tag{A.33}$$

aufspalten läßt. Damit faktorisiert die Integration über die Fermionen, weil das Integrationsmaß (A.26) gemäß

$$\mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi = \mathrm{d}\bar{\chi}\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\bar{\phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{A.34}$$

umgeschrieben werden kann. Hierbei legen (A.26) und (A.29) die Definition von $\mathrm{d}\bar{\chi}\,\mathrm{d}\chi$ bzw. $\mathrm{d}\bar{\phi}\,\mathrm{d}\phi$ fest.

Erfüllen $\bar{\Psi}$ und Ψ die Weyl-Bedingungen

$$\bar{\Psi}\mathcal{P}^\mp = \bar{\Psi} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{P}^\pm\Psi = \Psi , \tag{A.35}$$

so sind diese von einer der Weyl-Familien unabhängig, d. h. es gilt $\bar{\phi} = \phi = 0$ oder $\bar{\chi} = \chi = 0$. Mit der Halbierung der Freiheitsgradanzahl geht das Verschwinden von einem der Terme in (A.33) einher und das Integrationsmaß über in

$$\mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi \to \mathrm{d}\bar{\chi}\,\mathrm{d}\chi \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi \to \mathrm{d}\bar{\phi}\,\mathrm{d}\phi . \tag{A.36}$$

Obwohl es üblich ist, in diesem Zusammenhang von Weyl-Bispinoren zu sprechen, wird in dieser Arbeit kein Gebrauch von dieser Terminologie gemacht. Letztere werden ebenfalls als Weyl-Spinoren bezeichnet. Welche Form gemeint ist, sollte aufgrund des Kontextes klar sein. In diesem Sinn wird im folgenden ebenso nicht zwischen Majorana- und Majorana-Weyl-Spinoren bzw. -Bispinoren unterschieden.

Majorana-Spinoren:
Um den Begriff des Majorana-Fermions zu etablieren, ist zunächst eine Ladungskonjugationsmatrix C einzuführen, von welcher die Eigenschaften

$$C^T = -C \ , \quad C^{-1}\Gamma_\mu^T C = -\Gamma_\mu \ , \quad CC^\dagger = \mathbb{1} \tag{A.37}$$

gefordert werden. Im Rahmen dieser Arbeit genügt es, die Majorana-Bedingungen für $D = 4$ und $D = 10$ formulieren zu können (vgl. Kapitel 2.1). Eine mögliche Definition für diese Fälle ist [41]

$$C = (\Gamma_S)^{D/2}\,\Gamma_1\Gamma_3\ldots\Gamma_{D-1}\,. \tag{A.38}$$

Als ladungskonjugierte Dirac-Spinoren werden

$${}^c\bar{\Psi} = \Psi^T C \qquad \text{und} \qquad {}^c\Psi = -C^{-1}\bar{\Psi}^T \tag{A.39}$$

eingeführt. Majorana-Spinoren sind solche, welche sich unter diesen Transformationen invariant verhalten, d. h. den Bedingungen[19]

$$\bar{\Psi} = {}^c\bar{\Psi} = \Psi^T C \qquad \text{sowie} \qquad \Psi = {}^c\Psi = -C^{-1}\bar{\Psi}^T \tag{A.40}$$

genügen. Offensichtlich heben diese die Unabhängigkeit von $\bar{\Psi}$ und Ψ auf und halbieren so die Anzahl unabhängiger Freiheitsgrade. Die Wirkung (A.32) läßt sich für Majorana-Fermionen umformen zu

$$S_{BF} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\Psi^T C\Gamma^\mu\left[A_\mu, \Psi\right]\right\}\,. \tag{A.41}$$

Daher ist für solche nur über (z. B.) Ψ zu integrieren, was realisiert wird, indem in (A.26) die zu $\bar{\Psi}$ gehörigen Faktoren weggelassen werden:

$$\mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi \to \mathrm{d}\Psi\,. \tag{A.42}$$

Für beliebige Dirac-Spinoren $\bar{\Psi}$, Ψ existiert eine Zerlegung in zwei unabhängige Familien von Majorana-Spinoren

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\Psi}^{(1)} - i\,\bar{\Psi}^{(2)}\right), & \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^{(1)} + i\,\Psi^{(2)}\right), \\
{}^c\bar{\Psi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\Psi}^{(1)} + i\,\bar{\Psi}^{(2)}\right), & {}^c\Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^{(1)} - i\,\Psi^{(2)}\right).
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Als explizite Darstellung dieser folgt

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\Psi} + {}^c\bar{\Psi}\right), & \Psi^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi + {}^c\Psi\right), \\
\bar{\Psi}^{(2)} &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\Psi} - {}^c\bar{\Psi}\right), & \Psi^{(2)} &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\Psi - {}^c\Psi\right).
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Daß $\bar{\Psi}^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$ und $\bar{\Psi}^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ die Majorana-Bedingungen erfüllen, läßt sich mit (A.39) leicht nachweisen. In der Dirac-Wirkung (A.32), umgeformt gemäß obiger Zerlegung, entkoppeln die Majorana-Familien

$$S_{BF} = -\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\Psi}^{(1)}\Gamma^\mu\left[A_\mu, \Psi^{(1)}\right]\right\} - \frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\Psi}^{(2)}\Gamma^\mu\left[A_\mu, \Psi^{(2)}\right]\right\}, \tag{A.45}$$

[19] Diese sind im Gegensatz zu den Weyl-Bedingungen nicht unabhängig voneinander.

wobei die gemischten Terme infolge der Identität

$$\mathrm{Tr}\left\{\bar{\Psi}^{(1)}\Gamma^\mu\left[A_\mu,\Psi^{(2)}\right]\right\}=\mathrm{Tr}\left\{\bar{\Psi}^{(2)}\Gamma^\mu\left[A_\mu,\Psi^{(1)}\right]\right\} \tag{A.46}$$

verschwinden. Mit Hilfe des Transformationsgesetzes (A.8) resultiert

$$\mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi=\mathrm{d}\Psi^{(1)}\,\mathrm{d}\Psi^{(2)} \tag{A.47}$$

als Relation der Maße.

Majorana-Weyl-Spinoren:
Besitzt C neben (A.37) auch die Eigenschaft

$$\Gamma_S^T C+C\Gamma_S=0\,, \tag{A.48}$$

so ist es möglich, die Weyl- und Majorana-Bedingungen gleichzeitig zu fordern. In der fixierten Darstellung ist im relevanten Fall $D=10$ die Identität (A.48) erfüllt und C von der Blockgestalt

$$C=\begin{pmatrix}0 & C_+\\ C_- & 0\end{pmatrix}\,,\qquad C_+=C_+^T\,,\qquad C_+=-C_-\,. \tag{A.49}$$

Die Transformation (A.39) führt deshalb nicht zu einer Mischung der Weyl-Komponenten

$$({}^c\bar{\phi},{}^c\bar{\chi})=(\phi^T C_-,\chi^T C_+)\quad,\qquad \begin{pmatrix}{}^c\chi\\ {}^c\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_+^{-1}\bar{\chi}^T\\ C_-^{-1}\bar{\phi}^T\end{pmatrix}\,, \tag{A.50}$$

und die Majorana-Bedingungen (A.40) letztgenannter lauten

$$\begin{aligned}\bar{\chi}&={}^c\bar{\chi}=\chi^T C_+\,, &\qquad \chi&={}^c\chi=C_+^{-1}\bar{\chi}^T\,,\\ \bar{\phi}&={}^c\bar{\phi}=\phi^T C_-\,, &\qquad \phi&={}^c\phi=C_-^{-1}\bar{\phi}^T\,.\end{aligned} \tag{A.51}$$

Dieser Entkopplung zufolge kann die obige Diskussion der Majorana-Spinoren in einem der Weyl-Unterräume durchgeführt werden. Angenommen, es ist der zur Familie $\bar{\chi}$, χ gehörende Unterraum gewählt, so läßt sich der entsprechende Term von (A.33) zerlegen in

$$-\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\chi}^{(1)}\Gamma_+^\mu\left[A_\mu,\chi^{(1)}\right]\right\}-\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\chi}^{(2)}\Gamma_+^\mu\left[A_\mu,\chi^{(2)}\right]\right\}\,. \tag{A.52}$$

Weil das Maß die Eigenschaft

$$\mathrm{d}\bar{\chi}\,\mathrm{d}\chi=\mathrm{d}\chi^{(1)}\,\mathrm{d}\chi^{(2)} \tag{A.53}$$

hat, faktorisiert die Integration auch hier.

Wenn Dirac-Spinoren neben den Weyl- auch den Majorana-Bedingungen genügen, werden diese als Majorana-Weyl-Spinoren bezeichnet, und eine sukzessive Ersetzung des Integrationsmaßes gemäß (z. B.)

$$\mathrm{d}\bar{\Psi}\,\mathrm{d}\Psi\to\mathrm{d}\bar{\chi}\,\mathrm{d}\chi\to\mathrm{d}\chi \tag{A.54}$$

ist möglich.

A.4 Integration der off-diagonalen Elemente

Die für die One-Loop-Approximation des IKKT-Matrixmodells bedeutsamen Integrale über off-diagonale Anteile von Weyl-, Majorana- und Majorana-Weyl-Spinoren, im folgenden mit I_W, I_M und I_{MW} bezeichnet, lassen sich durch die Berechnung von

$$I_D(X) = \int \mathrm{d}\bar{\tilde{\Psi}}\, \mathrm{d}\tilde{\Psi}\ \exp\left(\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\tilde{\Psi}}\Gamma^\mu[X_\mu, \tilde{\Psi}]\right\}\right) \tag{A.55}$$

lösen. Hierbei ist X_μ eine bosonische Diagonalmatrix, d. h. $X_\mu^{ij} = x_\mu^i \delta_{ij}$, während die Tilde über spinoriellen Größen bedeutet, daß diese bezüglich des Farbraums ausschließlich off-diagonale Freiheitsgrade besitzen. Das Maß der Dirac-Spinoren $\bar{\tilde{\Psi}}$ und $\tilde{\Psi}$ leitet sich von (A.26) ab:

$$\mathrm{d}\bar{\tilde{\Psi}}\, \mathrm{d}\tilde{\Psi} = \prod_{i<j}\prod_{a=1}^{N_D} \mathrm{d}^R\bar{\tilde{\Psi}}_a^{ij}\ \mathrm{d}^R\tilde{\Psi}_a^{ij}\ \mathrm{d}^I\bar{\tilde{\Psi}}_a^{ij}\ \mathrm{d}^I\tilde{\Psi}_a^{ij}\ , \tag{A.56}$$

wobei ${}^R\bar{\tilde{\Psi}}$, ${}^R\tilde{\Psi}$, ${}^I\bar{\tilde{\Psi}}$ und ${}^I\tilde{\Psi}$ definiert sind wie in (A.25). Mit $\Delta x_\mu^{ij} \equiv x_\mu^i - x_\mu^j$ kann die Wirkung geschrieben werden als

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\bar{\tilde{\Psi}}_a\Gamma_{ab}^\mu[X_\mu, \tilde{\Psi}_b]\right\} &= -\frac{1}{2g^2}\sum_{i<j}\Gamma_{ab}^\mu\Delta x_\mu^{ij}\left(\bar{\tilde{\Psi}}_a^{ji}\tilde{\Psi}_b^{ij} - \bar{\tilde{\Psi}}_a^{ij}\tilde{\Psi}_b^{ji}\right) \\ &= -\frac{i}{2g^2}\sum_{i<j}\Gamma_{ab}^\mu\Delta x_\mu^{ij}\left({}^R\bar{\tilde{\Psi}}_a^{ij}\ {}^I\tilde{\Psi}_b^{ij} + {}^I\bar{\tilde{\Psi}}_a^{ij}\ {}^R\tilde{\Psi}_b^{ij}\right)\ , \end{aligned} \tag{A.57}$$

und als Lösung des Integrals ergibt sich laut (A.10)

$$\begin{aligned} I_D(X) &= \prod_{i<j}\mathrm{det}_{ab}^2\left[\frac{i}{2g^2}\Gamma_{ab}^\mu\Delta x_\mu^{ij}\right] \\ &= \prod_{i<j}\mathrm{det}_{ab}\left[-\frac{1}{4g^4}\left(\Delta x^{ij}\right)^2\delta_{ab}\right] \\ &= K^4\left(\Delta^2(x)\right)^{N_D} \end{aligned} \tag{A.58}$$

mit

$$\Delta^2(x) = \prod_{i<j}(x^i - x^j)^2 \qquad \text{sowie} \qquad K^4 = \left(2g^2\right)^{-N_D(N^2-N)}\ . \tag{A.59}$$

Abschließend soll gezeigt werden, daß infolge der Betrachtungen des Anhangs A.3 zwischen dem Dirac-Integral (A.55) und den entsprechenden für Weyl-, Majorana- und Majorana-Weyl-Fermionen die Beziehungen

$$I_D(X) \sim I_W^2(X) \sim I_M^2(X) \sim I_{MW}^4(X) \tag{A.60}$$

existieren.

Weyl-Integration:
Unter Berücksichtigung von (A.33) und (A.34) hat I_D eine Darstellung als Produkt

$$I_D(X) = I_W^+(X)\, I_W^-(X) \tag{A.61}$$

zweier Weyl-Integrale

$$I_W^+(X) = \int \mathrm{d}\tilde{\bar{\chi}}\, \mathrm{d}\tilde{\chi}\, \exp\left(\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\tilde{\bar{\chi}}\Gamma_+^\mu[X_\mu, \tilde{\chi}]\right\}\right) \tag{A.62}$$

und

$$I_W^-(X) = \int \mathrm{d}\tilde{\bar{\phi}}\, \mathrm{d}\tilde{\phi}\, \exp\left(\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\tilde{\bar{\phi}}\Gamma_-^\mu[X_\mu, \tilde{\phi}]\right\}\right) . \tag{A.63}$$

Die Bedingung (A.31) impliziert, daß I_W^+ und I_W^- zueinander komplex konjugiert sind, d. h. $I_W^+ = I_W^{-*}$ gilt. Gleichung (A.61) bietet damit die Möglichkeit die Weyl-Integrale zu berechnen qua

$$I_W^\pm(X) = e^{\pm i\omega}\sqrt{I_D(X)} = e^{\pm i\omega}K^2\left(\Delta^2(x)\right)^{N_D/2} . \tag{A.64}$$

Mit Hilfe einer SO(D)-Transformation der bosonischen Koordinaten kann in der gegebenen Darstellung der Gammamatrizen gezeigt werden, daß der Phasenfaktor $e^{\pm i\omega}$ für $D = 4$, 6 und 10 reell, d.h lediglich ein von N abhängiges Vorzeichen, ist. Ein solches ist für die Betrachtungen in der One-Loop-Näherung nicht störend, weil es in einer Redefinition des Integrals bzw. Maßes „absorbiert“ werden kann.

Majorana-Integration:
In diesem Fall läßt sich aufgrund von (A.45) und (A.47) schreiben

$$I_D(X) = \tilde{c}_M I_M^{(1)}(X)\, \tilde{c}_M I_M^{(2)}(X) = \tilde{c}_M^2 I_M^2(X) \tag{A.65}$$

mit $I_M^{(1)} = I_M^{(2)} = I_M$ gegeben durch

$$I_M(X) = \int \mathrm{d}\tilde{\psi}\, \exp\left(\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left\{\tilde{\bar{\psi}}\Gamma^\mu[X_\mu, \tilde{\psi}]\right\}\right) . \tag{A.66}$$

$\tilde{\psi}$ ist ein Majorana-Spinor, und $\tilde{c}_M = 2^{-N_D(N^2-N)/2}$ resultiert aus der Anwendung der Substitutionsformel (A.8), wenn von der zu (A.45) korrespondierenden Wirkung (man beachte den relativen Faktor 1/2) zu der in (A.66) übergegangen wird. $N_D(N^2 - N)$ entspricht der Anzahl reeller Freiheitsgrade, über die zu integrieren ist. Letztere sind die je $N^2 - N$ reellen, off-diagonalen Elemente der N_D spinoriellen Komponenten. Für das Majorana-Integral gilt somit

$$I_M(X) = \pm\sqrt{I_D(X)}/\tilde{c}_M = \pm K^2\left(\Delta^2(x)\right)^{N_D/2}/\tilde{c}_M . \tag{A.67}$$

Majorana-Weyl-Integration:
Ausgehend von einem Weyl-Integral I_W ergibt sich mit (A.52) und (A.53) die Relation

$$I_W(X) = \tilde{c}_{MW}^2 I_{MW}^2(X) \, . \tag{A.68}$$

Ist I_W wie (z. B.) in (A.62) definiert, so wird I_{MW} mit $\tilde{\chi}$ als Majorana-Weyl-Spinor durch

$$I_{MW}(X) = \int \mathrm{d}\tilde{\chi} \; \exp\left(\frac{1}{2g^2} \mathrm{Tr}\left\{\tilde{\bar{\chi}} \Gamma_+^\mu [X_\mu, \tilde{\chi}]\right\}\right) \tag{A.69}$$

eingeführt. Der Faktor $\tilde{c}_{MW}$ beträgt hier $2^{-N_D(N^2-N)/4}$. Als Verhältnis des Majorana-Weyl-Integrals zu I_D folgt

$$\begin{aligned} I_{MW}(X) &= e^{i\vartheta} \sqrt{I_W(X)} / \tilde{c}_{MW} = e^{\pm i\sigma} \left(I_D(X)\right)^{1/4} / \tilde{c}_{MW} \\ &= e^{\pm i\sigma} K \left(\Delta^2(x)\right)^{N_D/4} / \tilde{c}_{MW} \, . \end{aligned} \tag{A.70}$$

Mit demselben Argument wie in der Diskussion zur Weyl-Integration kann für den Fall $D = 10$ gezeigt werden, daß der Phasenfaktor $e^{\pm i\sigma}$ reell ist.

Anhang B

Berechnung von $L_{1/2}$

Ziel dieses Anhangs ist die Berechnung der maximal asymmetrischen Lévy-Verteilung

$$L_{1/2}(c(n+1), N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_r - i\infty}^{z_r + i\infty} \mathrm{d}z \, e^{Nz - c(n+1)z^{1/2}} \, . \tag{B.1}$$

Eine Möglichkeit zur Auswertung des Integrals auf der rechten Seite bietet der Integralsatz von Cauchy. Um der in dem Exponenten befindlichen Quadratwurzel Rechnung zu tragen, ist zunächst ein Schnitt in der komplexen z-Ebene einzuführen, welcher den Ursprung, d. h. die Stelle der Wurzelsingularität, enthält. Wir identifizieren den Schnitt mit der negativen reellen Halbachse, wählen ein z_r mit $c^2(n+1)^2/N > z_r > 0$ und schließen die Kontur der Integration, wie in Abbildung B.1 zu sehen ist. Innerhalb der geschlossenen Kontur $\mathcal{K}$ ist der Integrand analytisch, weswegen mit dem Cauchyschen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{K}} \mathrm{d}z \, e^{Nz - c(n+1)z^{1/2}} = 0 \, . \tag{B.2}$$

folgt. Der Beitrag des Integrals über den inneren Kreis (siehe Abbildung B.1) verschwindet im Limes $|z| = \epsilon \to 0$, weil der Integrand auf diesem Teil der Kontur $\mathcal{K}$ beschränkt ist. Für $c^2(n+1)^2/N > z_r$ ist aufgrund der exponentiellen Dämpfung des Integranden auch der Beitrag der äußeren Kreissegmente ($|z| = \infty$) null, so daß sich (B.1) alternativ durch

$$L_{1/2}(c(n+1), N) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}z \, e^{Nz - ic(n+1)|z|^{1/2}} + \int_{0}^{-\infty} \mathrm{d}z \, e^{Nz + ic(n+1)|z|^{1/2}} \right\}$$

berechnen läßt. Das relative Vorzeichen des zu $|z|^{1/2}$ proportionalen Ausdrucks liegt darin begründet, daß die Quadratwurzel für $z \in (-\infty, 0]$ die Lösungen $\pm i|z|^{1/2}$ hat.

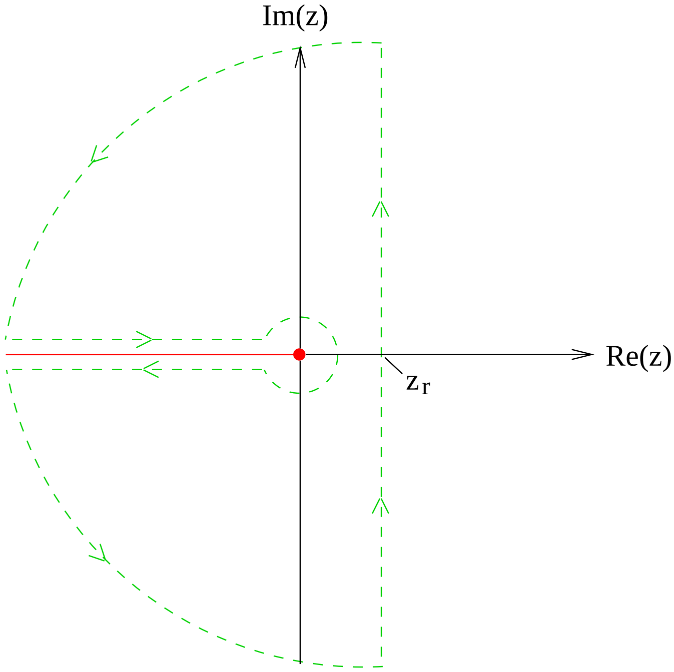

Abbildung B.1: Integrationskontur $\mathcal{K}$ (gestrichelt), die um den Schnitt $(-\infty, 0]$ herum verläuft. Die äußeren Kreissegmente repräsentieren den Konturabschluß im Unendlichen ($|z| = \infty$), während der innere Kreis einen infinitesimalen Radius $|z| = \epsilon$ hat.

Ersetzt man erst einmal z durch $-z$ und anschließend $|z|^{1/2} = z^{1/2}$ durch r, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
L_{1/2}(c(n+1), N) &= -\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^\infty \mathrm{d}z\, e^{-Nz - ic(n+1)|z|^{1/2}} - \int_0^\infty \mathrm{d}z\, e^{-Nz + ic(n+1)|z|^{1/2}}\right\} \\
&= -\frac{1}{\pi i}\left\{\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, e^{-Nr^2 - ic(n+1)r} - \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, e^{-Nr^2 + ic(n+1)r}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, e^{-Nr^2} \sin(c(n+1)r)\,. \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

Die Symmetrie des Integranden bezüglich $r \to -r$ nutzen wir, um den Integrationsbereich zu erweitern:

$$
\begin{aligned}
L_{1/2}(c(n+1), N) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}r\, r\, e^{-Nr^2} \sin(c(n+1)r) \\
&= -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}r\, r\, e^{-Nr^2 - ic(n+1)r}\right)\,. \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

Mit der quadratischen Ergänzung

$$
\begin{aligned}
Nr^2 + ic(n+1)r &= N\left(r + \frac{ic(n+1)}{2N}\right)^2 + \frac{c^2(n+1)^2}{4N} \\
&= Ny^2 + \frac{c^2(n+1)^2}{4N}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

und einer erneuten Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes resultiert

$$
\begin{aligned}
L_{1/2}(c(n+1), N) &= -\frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{c^2(n+1)^2}{4N}}\, \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty+\frac{ic(n+1)}{2N}}^{\infty+\frac{ic(n+1)}{2N}} \mathrm{d}y\, \left(y - \frac{ic(n+1)}{2N}\right)\, e^{-Ny^2}\right) \\
&= +\frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{c^2(n+1)^2}{4N}}\, \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\, \frac{ic(n+1)}{2N}\, e^{-Ny^2}\right),
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

womit sich (B.1) schließlich zu

$$
L_{1/2}(c(n+1), N) = \frac{c}{2\sqrt{\pi}}\, N^{-3/2}\, (n+1)\, \exp\left(-\frac{c^2(n+1)^2}{4N}\right)
\tag{B.7}
$$

ergibt.

Literaturverzeichnis

[1] C. J. Isham, *Structural Issues in Quantum Gravity*, arXiv: gr-qc/9510063.

[2] M. B. Green, J. H. Schwarz und E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, 1987.

[3] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa und A. Tsuchiya, *A Large-N Reduced Model as Superstring*, Nucl. Phys. B**498** (1997) 467.

[4] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, T. Tada und A. Tsuchiya, *IIB Matrix Model*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **134** (1999) 47.

[5] W. Krauth, H. Nicolai und M. Staudacher, *Monte Carlo Approach to M-Theory*, Phys. Lett. B**431** (1998) 31.

[6] P. Austing und J. F. Wheater, *Convergent Yang-Mills Matrix Theories*, JHEP 0104 (2001) 019.

[7] J. Ambjørn, K. N. Anagnostopoulus, W. Bietenholz, T. Hotta und J. Nishimura, *Monte Carlo Studies of the IIB Matrix Model at Large N*, JHEP 0007 (2000) 011.

[8] Z. Burda, B. Petersson und J. Tabaczek, *Geometry of Reduced Supersymmetric 4D Yang-Mills Integrals*, Nucl. Phys. B**602** (2001) 399.

[9] J. Ambjørn, K. N. Anagnostopoulus, W. Bietenholz, T. Hotta und J. Nishimura, *Large N Dynamics of Dimensionally Reduced 4D SU(N) Super Yang-Mills Theory* , JHEP 0007 (2000) 013.

[10] J. Ambjørn, K. N. Anagnostopoulus, W. Bietenholz, F. Hofheinz und J. Nishimura, *On the Spontaneous Breakdown of Lorentz Symmetry in Matrix Models of Superstrings*, Phys. Rev. D**65** (2002) 086001.

[11] J. Ambjørn, B. Durhuus und T. Jónsson, *Quantum Geometry*, Cambridge University Press, 1997.

[12] P. Bialas, Z. Burda, B. Petersson und J. Tabaczek, *Appearance of Mother Universe and Singular Vertices in Random Geometries*, Nucl. Phys. B**495** [FS] (1997) 463.

[13] Z. Burda, J. D. Correia und A. Krzywicki, *Statistical Ensemble of Scale-Free Random Graphs*, Phys. Rev. E**64** (2001) 046118.

[14] P. J. Flory, *Molecular Size Distributions in Three Dimensional Polymers. I. Gelation*, J. Am. Chem. Soc. **63** (1941) 3083.

[15] W. H. Stockmayer und B. H. Zimm, *The Dimensions of Chain Molecules Containing Branches and Rings*, J. Chem. Phys. **17** (1949) 1301.

[16] P. Bialas und Z. Burda, *Phase Transition in Fluctuating Branched Geometry*, Phys. Lett. B**384** (1996) 75.

[17] J. Jurkiewicz und A. Krzywicki, *Branched Polymers with Loops*, Phys. Lett. B**392** (1997) 291.

[18] Z. Burda, J. Erdmann, B. Petersson und M. Wattenberg, *Exotic Trees*, arXiv: cond-mat/0207459, accepted for publication in Phys. Rev. E.

[19] A. Schild, *Classical Null Strings*, Phys. Rev. D**16** (1977) 1722.

[20] P. Bialas, Z. Burda, B. Petersson und J. Tabaczek, *Large N Limit of the IKKT Matrix Model*, Nucl. Phys. B**592** (2001) 391.

[21] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.

[22] T. Eguchi und H. Kawai, *Reduction of Dynamical Degrees of Freedom in the Large-N Gauge Theory*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1063.

[23] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Perseus Books, Cambridge, Massachusetts, 1992.

[24] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa und T. Tada, *Space-Time Structures from IIB Matrix Model*, Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 713.

[25] D. J. Gross und Y. Kitazawa, *A Quenched Momentum Prescription for Large-N Theories*, Nucl. Phys. B**206** (1982) 440.

[26] L. F. Abbott, *Introduction to the Background Field Method*, Acta Phys. Pol. B**13** (1982) 33.

[27] I. P. Goulden und D. M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, Wiley & Sons, New York, 1983.

[28] S. Iso und H. Kawai, *Space-Time and Matter in IIB Matrix Model - Gauge Symmetry and Diffeomorphism*, Int. J. Mod. Phys. A**15** (2000) 651.

[29] K. N. Anagnostopoulus und J. Nishimura, *A new Solution of the Complex Action Problem and the Dynamical Space-Time in the IIB Matrix Model*, arXiv: hep-th/0108041.

[30] J. Nishimura und G. Vernizzi, *Spontaneous Breakdown of Lorentz Invariance in IIB Matrix Model*, JHEP 0004 (2000) 015.

[31] J. Nishimura und F. Sugino, *Dynamical Generation of Four-Dimensional Space-Time in the IIB Matrix Model*, JHEP 0205 (2002) 001.

[32] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki, T. Matsuo und S. Shinohara, *Mean Field Approximation of the IIB Matrix Model and Emergence of Four Dimensional Space-Time*, arXiv: hep-th/0204240 v3.

[33] J. Ambjørn und Y. Watabiki, *Scaling in Quantum Gravity*, Nucl. Phys. B**445** (1995) 129.

[34] J. Ambjørn, B. Duurhus und T. Jónsson, *Summing over all Genera for $d > 1$: A Toy Model*, Phys. Lett. B**244** (1990) 403.

[35] J. Ambjørn, B. Duurhus , J. Fröhlich und P. Orland, *The Appearance of Critical Dimensions in Regulated String Theories*, Nucl. Phys. B**270** [FS16] (1986) 457.

[36] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai und Y. Kitazawa, *Scaling Behaviors of Branched Polymers*, Phys. Rev. E**62** (2000) 6260.

[37] J. P. Bouchaud und A. Georges, *Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications*, Phys. Rep. **195** (1990) 127.

[38] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications: Vol. I*, 3rd Edition, Wiley & Sons, New York, 1968.
W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications: Vol. II*, 2nd Edition, Wiley & Sons, New York, 1971.

[39] J. P. Bouchaud und M. Potters, *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press, 2000.

[40] W. Krauth und M. Staudacher, *Eigenvalue Distributions in Yang-Mills Integrals*, Phys. Lett. B**453** (1999) 253.

[41] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 3rd Edition, Clarendon Press, Oxford, 1996.

Danksagung

Diese Diplomarbeit wurde unter Anleitung von Prof. Dr. Bengt Petersson durchgeführt. An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Petersson für seine hervorragende Betreuung und seine ständige Bereitschaft, sich mit meinen Fragen und Problemen auseinanderzusetzen, bedanken.
Mein Dank gilt außerdem Prof. Dr. Edwin Laermann für seine Bereitschaft diese Arbeit als Zweitgutachter zu lesen.
Weiterhin danke ich Dr. Zdzislaw Burda, der jederzeit für Fragen und Diskussionen offen war, sowie Marc Wattenberg für seine Hilfe und wertvolle Tips.
Den Mitarbeitern der Etage (E6/D6) gebührt Dank für zahlreiche Anregungen und eine angenehme Atmosphäre, die erheblich zum Gelingen meiner Diplomarbeit beigetragen hat. Insbesondere gilt dies für Dr. Santo Fortunato, Kai Multhaup (D0), Volker Pankoke sowie Dr. Saumen Datta, Lars Fromme, Michael Seniuch und Felix Zantow.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Familie, meinen Freunden und meiner Freundin Alexa, die mich in allen Belangen während der Studienzeit unterstützt haben.

Hiermit versichere ich, bei der Anfertigung meiner Diplomarbeit außer den im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

(Jörg Erdmann)