Freie Energien schwerer Quarks in SU(3)-reiner-Eichtheorie

Diplomarbeit
an der
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von

Kay A. Hübner

Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Teilchenphysik befasst sich mit der Suche nach den grundlegenden Bestandteilen der Materie und den zwischen ihnen herrschenden Wechselwirkungen. Das *Standardmodell* der Elementarteilchenphysik fasst das bisher bekannte Wissen darüber zusammen und hat bis heute allen experimentellen Überprüfungen standgehalten. Es ist jedoch klar, dass diese Theorie nicht vollständig ist, sondern nur eine effektive Beschreibung einer umfassenderen Theorie darstellt, die noch gefunden werden muss. Es ist somit nicht ausgeschlossen, dass sich unsere Auffassung darüber, was elementare Teilchen und ihre Wechselwirkungen sind, in Zukunft noch ändern wird. Für das Jahr 2007 ist die Inbetriebnahme des neuen Teilchenbeschleunigers *LHC* am CERN in Genf geplant, von dem man sich experimentelle Hinweise auf nötige Erweiterungen des Standardmodells erhofft.

Nach heutigem Kenntnisstand ist die Materie aus zwei verschiedenen Teilchentypen, den *Quarks* und den *Leptonen*, aufgebaut, aus denen sich der gesamte bekannte Teilchenzoo zusammensetzen lässt. Zwischen ihnen wirken vier verschiedene Arten von Wechselwirkungen oder auch Kräften. Dies sind die Gravitation, der Elektromagnetismus, die schwache Wechselwirkung und die starke Wechselwirkung. Die Gravitation ist so schwach, dass sie bei den bisher beobachteten Vorgängen zwischen Elementarteilchen keine Rolle spielt, im Alltag ist sie uns aber als Schwerkraft bekannt. Der Elektromagnetismus ist direkt verantwortlich für oder zumindest beteiligt an praktisch allen im Alltag auftretenden physikalischen Effekten einschließlich der gesamten Chemie. Die schwache Kraft zeichnet unter anderem für den radioaktiven β-Zerfall des Neutrons verantwortlich, spielt aber im physikalischen Alltagsgeschehen keine Rolle. Die starke Kraft wirkt nur auf die Quarks, die sie zu Kernteilchen und diese zu Atomkernen zusammen bindet. Sie ist somit grundlegend an der Entstehung und der Struktur der Materie unseres Universums beteiligt.

Physikalisch werden die Phänomene zwischen Elementarteilchen durch *Quantenfeldtheorien* beschrieben, die aus allgemeinen Forderungen an eine physikalische Theorie wie z.B. Kausalität und Renormierbarkeit sowie aus Symmetrien, die der jeweiligen Wechselwirkung eigen sind, abgeleitet werden. Die Quantenfeldtheorie der starken Kraft ist die *Quantenchromodynamik*. In ihr trägt jedes Quark eine *Farbladung* aus drei möglichen Farben, rot, grün und blau. Diese Farben sind die Quellen der starken Wechselwirkung, die durch den Austausch von *Gluonen* vermittelt wird. Die Gluonen, von denen acht verschiedene existieren, tragen ebenfalls eine Farbladung. Dadurch nehmen sie selbst auch an der starken Wechselwirkung teil, was z.B. für die Photonen – die kräftevermittelnden Teilchen in der Quantenelektrodynamik – nicht möglich ist. Für die starke Kopplungskonstante, also die relative Stärke der starken Kraft im Vergleich zu den übrigen Elementarkräften, bewirkt dies, dass sie bei grossen Abständen über alle Grenzen wächst. Dies hat zur Folge, dass Quarks nicht als freie Teilchen vorkommen können, sondern in ihrer Bindung zu anderen Quarks eingesperrt sind. Man spricht auch vom *Confinement* der Quarks. Man beobachtet dies z.B. in Computersimulationen, in denen sich das chromodynamische Feld zwischen einem Quark und einem Anti-Quark nicht wie in der Elektrodynamik im ganzen Raum ausbreitet, sondern sich zu einer engen *Flussröhre* zusammen zieht. Die zur Trennung dieses Paares nötige Energie wächst dadurch linear mit dem Abstand und wird damit beliebig groß. Auf der anderen Seite ist die starke Kopplungskonstante bei kleinen Abständen gering, so dass Quarks, die sich nahe beieinander befinden, fast keine Kräfte verspüren. Man spricht dann von *asymptotischer Freiheit* der Quarks.

Die in der Natur vorkommenden, aus Quarks zusammengesetzten Teilchen sind farblos, d.h. die Summe der Farben der beteiligten Quarks verschwindet. Dies ist prinzipiell auf zwei verschiedene Arten möglich. Zum einen kann die Farbe eines Quarks durch die entsprechende Antifarbe eine Anti-Quarks neutralisiert werden, genauso, wie in der Elektrodynamik eine positive und eine negative Ladung ein elektrisch neutrales System darstellen. Der entsprechende Bindungszustand eines Quarks und eines Anti-Quarks wird *Meson* genannt. Zum Anderen bilden drei Quarks der Farben rot, grün und blau einen farblosen Zustand (daher die Namensgebung). Der zugehörige Bindungszustand ist der des *Baryons*, dessen bekannteste Vertreter das Proton und das Neutron sind, aus denen sich wiederum die Atomkerne zusammensetzen.

Ein weitere interessante Eigenschaft der Quantenchromodynamik ist, dass sie bei hohen Temperaturen einen Phasenübergang aufweist. Ein Phasenübergang ist eine schlagartige Änderung der physikalischen Eigenschaften eines Systems bei Erreichen einer gewissen Temperatur, der *kritischen Temperatur*. Im Alltag ist dies etwa beim Kochen bekannt als der Übergang von flüssigem Wasser zu Wasserdampf. Unterhalb der *kritischen Temperatur* T_c sind die Quarks in ihren Bindungszuständen eingesperrt, weswegen man auch von der Confinement-Phase der Theorie spricht. Oberhalb T_c bilden sie zusammen mit den Gluonen ein *Quark-Gluon-Plasma*, in dem sie auch ausserhalb von Bindungszuständen vorkommen können. Man sagt dann, die Teilchen befinden sich in der *Deconfinement-Phase*. Diese Eigenschaft der Quantenchromodynamik ist relevant für das frühe Universum, das sich im Laufe seiner Entwicklung abgekühlt und dabei den Phasenübergang von der Deconfinement- zur Confinement-Phase durchlaufen hat. Ausserdem könnten Quark-Gluon-Plasmen in den Kernen von Neutronensternen auftreten, wodurch die Sternentwicklung beeinflusst würde.

Um theoretische Vorhersagen aus den Gleichungen der Quantenchromodynamik zu gewinnen, müssen Näherungsmethoden benutzt werden, da die volle Bewegungsgleichung zu kompliziert ist, um analytische Lösungen angeben zu können. Bei schwacher Kopplung, was kleinen Abständen entspricht, kann die Methode der *Störungstheorie* angewendet werden. Ihre Vorhersagen wurden durch tief-inelastische Streuexperimente in Elektron-Proton-Stößen glänzend bestätigt. Für den physikalisch besonders interessanten mittleren Abstandsbereich von der Größe des Protonenradius versagt diese Näherungsmethode jedoch. Die erstmalig von *Wilson* formulierte *Gittereichfeldtheorie* führt nun ein vierdimensionales euklidisches Gitter mit endlichem Gitterabstand anstatt der kontinuierlichen Raumzeit ein. Die Quantenchromodynamik auf diesem Gitter liegt dann in einer Form vor, die numerischen Methoden wie z.B. der Monte-Carlo-Integration sehr gut zugänglich ist und das Studium auch des mittleren Abstandsbereichs erlaubt. Durch geeignete Renormierung lassen sich dann physikalisch relevante Aussagen über die Kontinuumstheorie machen. Man beobachtet in solchen Simulationen die erwarteten Phänomene wie Confinement sowie den Phasenübergang zum Quark-Gluon-Plasma.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Art und Weise der Bindung zwischen drei Quarks genauer zu untersuchen. Allgemein erwartet man wieder die Bildung einer Flussröhre, die jedoch verschiedene Geometrien aufweisen kann. Diese Geometrie ist eng verknüpft mit der Frage, ob die Kräfte zwischen den drei Quarks zurückgeführt werden können auf die zwischen zwei Quarks, oder ob eine echte Dreikörperkraft zwischen ihnen wirkt. Diese Untersuchungen werden nicht im Rahmen der vollen Quantenchromodynamik auf dem Gitter durchgeführt, sondern benutzen das vereinfachte Modell der *reinen Eichtheorie*, in der die Dynamik der Quarks vernachlässigt und nur die Gluonen betrachtet werden. Trotzdem bildet dieses Modell bereits alle wichtigen Eigenschaften der vollen Theorie wie Confinement und den Phasenübergang zum Quark-Gluon-Plasma ab. Zusätzlich wird auf Seite der Simulationsalgorithmen die Performance zweier Methoden zur Fehlerreduzierung untersucht.

In Kapitel 1 wird zunächst ein knappe Einführung in die Quantenchromodynamik sowie die dazu notwendigen mathematischen Hilfsmittel gegeben. Zudem wird das Modell der reinen Eichtheorie vorgestellt, das den theoretischen Rahmen für diese Arbeit bildet.

Kapitel 2 führt das Gitter in die Quantenchromodynamik ein und bespricht konzeptionelle Verbesserungen der Gittertheorie, die die Kontinuumstheorie geeigneter abbilden. Schließlich wird durch Ausführung des Kontinuumslimes gezeigt, wie sich aus den auf dem Gitter gewonnenen Daten Aussagen über die Kontinuumswerte machen lassen.

Kapitel 3 stellt zunächst die für diese Arbeit wichtigen Observablen freie Energie und Polyakov-Loop sowie deren Zusammenhang vor. Diese werden dann in einer Störungsreihe entwickelt, um sie später in Kapitel 5 mit den Simulationsergebnissen zu vergleichen. Weiterhin werden Ansätze der freien Energie für die Zwei- und Drei-Quarksysteme in den beiden Phasen der Quantenchromodynamik vorgestellt, um sie mit Hilfe von χ^2-Fits an den Messdaten testen zu können.

In Kapitel 4 werden das Verfahren der Monte-Carlo-Integration sowie die für die Umsetzung der Quantenchromodynamik auf dem Gitter verwendeten Algorithmen erläutert. Die Performance der beiden getesteten Fehlerreduzierungsmethoden Link-Integration und Lüscher-Methode wird ausgewertet.

Das letzte Kapitel zeigt die Auswertung der Simulationsdaten. Unterhalb der kritischen Temperatur wird die Stringspannung des Drei-Quarksystems und die Geometrie der Flussröhre untersucht. In der Deconfinement-Phase wird die Screeningmasse des Systems gemessen und ihr Verhalten für kurze Abstände ermittelt.

1. Quantenchromodynamik

Als grundlegende Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik ein Hauptpfeiler des teilchenphysikalischen Standardmodells. Wie alle Theorien zur Beschreibung der grundlegenden Naturkräfte außer der Gravitation ist sie als Quantenfeldtheorie formuliert. Die aus ihr durch Renormierung gewonnenen physikalischen Aussagen haben bisher allen experimentellen Überprüfungen Stand gehalten. Wegen der Komplexität ihrer Bewegungsgleichungen beschreibt sie eine Vielzahl von Phänomenen, die aber mit analytischen Methoden nur teilweise erforscht werden können. Dieses Kapitel bietet eine knappe Einführung in die Quantenchromodynamik als Quantenfeldtheorie sowie in das vereinfachtes Modell der reinen Eichtheorie, das den engeren theoretischen Rahmen für diese Arbeit bildet. In der gesamten Arbeit wird dabei aus Gründen der Bequemlichkeit $c = \hbar = k_B = 1$ gesetzt.

1.1. Die Lagrangedichte

Die richtige Bewegungsgleichung für Quarks ist, da sie Fermionen sind, die *Dirac-Gleichung*

$$(i\partial\!\!\!/ - m_f)\, \Psi_f^a(x) = 0, \tag{1.1}$$

wobei $\partial\!\!\!/ := \gamma_\mu \partial^\mu$ sowie $f = 1, \dots, N_f$ die Flavour- und $a = 1, \dots, 3$ die Farbfreiheitsgrade bezeichnen. Jedoch gilt (1.1) separat für jedes f und a, so dass keine Wechselwirkungen zwischen den Quarks beschrieben werden.

Die *Lagrangedichte* enthält alle Informationen über die Dynamik des Systems, das sie beschreibt. Die Bewegungsgleichungen können aus ihr durch Funktionalableitung nach den in ihr auftretenden Feldern gewonnen werden. Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ der Dirac-Gleichung ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \sum_{f,a} \bar{\Psi}_f^a(x)\, (i\partial\!\!\!/ - m_f)\, \Psi_f^a(x), \tag{1.2}$$

wobei $\Psi(x)$ die Fermionenfelder und $\bar{\Psi}(x) := \Psi^\dagger(x)\gamma_0$ die Antiferminonenfelder darstellen. Die Lagrangedichte der Quarks ist im *chiralen Limes* $m_f \to 0$, indem alle Teilchenmassen verschwinden, invariant unter globalen $\mathrm{SU}(N_f)$-Eichtransformationen, d.h. $\mathcal{L}$ bleibt bei Transformationen der Art

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\to G\Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &\to \bar{\Psi}(x)G^\dagger, \end{aligned} \tag{1.3}$$

mit $G \in \mathrm{SU}(N_f)$ unverändert. Die nach dem Noether-Theorem zugehörigen Erhaltungsgrößen sind die N_f *Flavour*. In der vollen Theorie ist $N_f = 6$, in dem hier interessanten Energiebereich genügt aber die Betrachtung der Fälle $N_f = 2$ oder $N_f = 3$.

Das zentrale Konstruktionsprinzip moderner Quantenfeldtheorien fordert nun, dass die Lagrangedichte eines Systems sogar unter *lokalen* Eichtransformationen invariant ist, d.h. die Transformationsmatrix ist ortsabhängig

$$G = G(x)$$

und für die Quantenchromodynamik Element der SU(3). Die zugehörigen erhaltenen Ladungen sind die drei *Farben*. Die in (1.2) gezeigte Lagrangedichte besitzt diese Invarianz jedoch nicht. Um dies zu beheben, führt man zunächst acht reelle *Eichfelder* $A_\mu^a(x)$ ein, die mit Hilfe der Generatoren der SU(3) λ^a zum Vierer-Gluon-Potential $A_\mu(x)$ aufsummiert werden,

$$A_\mu(x) := \frac{1}{2} A_\mu^a(x) \lambda^a. \tag{1.4}$$

Nun ersetzt man in der Lagrangedichte die partielle Ableitung durch die *kovariante Ableitung*

$$\mathrm{D}_\mu := \partial_\mu + i g A_\mu(x), \tag{1.5}$$

wobei g die Kopplungskonstante darstellt. Die Eichfelder transformieren sich nach der adjungierten Darstellung der SU(3) wie

$$A_\mu(x) \to G(x) A_\mu(x) G^{-1}(x) + \frac{i}{g} \left(\partial_\mu G(x)\right) G^{-1}(x). \tag{1.6}$$

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_F$ für die Quarks lautet nun

$$\mathcal{L}_F = \sum_{f,a} \bar{\Psi}_f^a(x) \left(i \not{\mathrm{D}} - m_f\right) \Psi_f^a(x), \tag{1.7}$$

wobei wieder $\not{\mathrm{D}} := \gamma_\mu \mathrm{D}^\mu$ gilt. Die Ersetzung der partiellen durch die kovariante Ableitung wird *minimale Substitution* genannt und ist bereits aus der klassischen Elektrodynamik bekannt. [1] Die Eichfelder $A_\mu^a(x)$ repräsentieren acht Gluonfelder, die nun mit den Quarks wechselwirken können. Dabei bestimmt die Kopplungskonstante g die Stärke der Wechselwirkung zwischen ihnen, wie die elektrische Ladung e in der QED.

Die Gluonen selbst können sich natürlich auch fortbewegen, so dass man einen weiteren eichinvarianten Term in die Lagrangedichte einfügen muss, der die freie Dynamik der Gluonen, also ohne die Anwesenheit von Quarks, beschreibt,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

[1] Um die Bewegungsgleichung einer elektrischen Ladung in Anwesenheit elektromagnetischer Felder zu erhalten, wird dort im Impulsraum ($p_\mu \leftrightarrow i\partial_\mu$) die Ersetzung $p_\mu \to p_\mu + qA_\mu$ vorgenommen.

wobei der *chromomagnetische Feldstärketensor* definiert ist durch

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &:= \mathrm{D}_\mu A_\nu - \mathrm{D}_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig\,[A_\mu, A_\nu]\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Der letzte Summand beschreibt eine Wechselwirkung der Gluonen-Eichfelder miteinander, die in der QED zwischen den Photonen nicht bekannt ist. Er taucht auf, weil die Eichgruppe SU(3) nicht abelsch ist, und hat zur Folge, dass Quarks nicht als freie Teilchen vorkommen, da sie in ihrer Bindung zu anderen Quarks „eingeschlossen“ sind. Man spricht auch vom *Confinement* der Quarks. Die volle Lagrangedichte der Quantenchromodynamik ist nun einfach die Summe der Lagrangedichten für die Quarks und die Eichfelder,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G \\ &= \sum_{f,a} \bar{\Psi}_f^a(x)\,(i\not{D} - m_f)\,\Psi_f^a(x) - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F_a^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

In der Störungstheorie der Quantenchromodynamik findet man durch Renormierung, dass die Kopplung g nicht mehr konstant, sondern eine Funktion des Impulsübertrags Q^2 ist, für die in niedrigster Ordnung gilt

$$g(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}, \tag{1.11}$$

wobei Λ einen freien Skalenparameter bezeichnet, der experimentell bestimmt werden muss. Man spricht auch von einer *rennenden Kopplung* (engl. running coupling). Wie man aus (1.11) sieht, läuft die Kopplung g gegen Null für große Impulsüberträge Q^2, was nach der Unschärferelation kleinen räumlichen Abständen entspricht. Hier können sich die Quarks fast frei bewegen, weswegen man auch von *asymptotischer Freiheit* der Quarks spricht. In diesem Bereich bietet die Störungstheorie eine sehr gute theoretische Beschreibung der physikalischen Prozesse. Für kleine Impulsüberträge (große Abstände) jedoch wächst die Kopplung über alle Grenzen, was Confinement der Quarks zur Folge hat. In diesem Bereich ist die Störungstheorie nicht mehr anwendbar. Dies geschieht gerade im physikalisch besonders interessanten Bereich um 1 fm ($\approx$ Protonenradius), so dass andere, nicht störungstheoretische Methoden wie z.B. die Gittereichfeldtheorie zur Untersuchung der Quantenchromodynamik herangezogen werden müssen.

1.2. Das Pfadintegral

Kennt man die Lagrangedichte einer klassischen Feldtheorie, so lässt sie sich mit Hilfe des *Pfadintegrals* quantisieren. Man bildet zunächst die Wirkung aus der Lagrangedichte

$$S_{QCD} = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{QCD}. \tag{1.12}$$

Um das System zu quantisieren, definiert man die Zustandssumme des Systems als

$$Z := \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\, e^{iS_{QCD}[A,\Psi,\bar{\Psi}]}, \tag{1.13}$$

wobei $\int \mathcal{D}X$ das Integral über alle Konfigurationen des Feldes X bezeichnet. Der Erwartungswert eines Operators $O[A,\Psi,\bar{\Psi}]$ in der Quantenfeldtheorie ist dann

$$\langle O[A,\Psi,\bar{\Psi}]\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\, O[A,\Psi,\bar{\Psi}]e^{iS_{QCD}[A,\Psi,\bar{\Psi}]}. \tag{1.14}$$

Die Integrale (1.13) und (1.14) werden *Pfadintegrale* genannt, denn sie stellen die mit einer wirkungsabhängigen Phase gewichteten Summe über alle Bahnen im Phasenraum dar. Die Quanteneffekte der Theorie stammen dabei aus dem Maß des Pfadintegrals. Das Verdienst dieser Pfadintegralquantisierung im Gegensatz zum kanonischen Ansatz ist der Verzicht auf Operatoren, die insbesondere für Eichfelder Schwierigkeiten bereiten. Mathematisch ist das Maß dieser Integrale jedoch nicht wohldefiniert und der komplexe Integrand oszilliert sehr stark. Das erste Problem kann in der Gittereichfeldtheorie (s. Kapitel 2) behoben werden, das zweite durch die *Wick-Rotation*. Diese führt eine imaginäre Zeit ein

$$t = x^0 \to -ix_4 \quad \text{und} \quad \partial_0 \to +i\partial_4, \tag{1.15}$$

wodurch die Minkowski-Metrik durch eine euklidische ersetzt wird. Die Lagrangedichte (1.10) wird dann zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^E_{QCD} &= \sum_{f,a} \bar{\Psi}^a_f(x)\left(i\gamma^E_\mu \mathrm{D}_\mu - m_f\right)\Psi^a_f(x) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \\ &= \mathcal{L}^E_F + \mathcal{L}^E_G,\end{aligned} \tag{1.16}$$

mit den euklidischen γ-Matrizen $\gamma^E_4 := \gamma_0, \gamma^E_j := -i\gamma_j$ und der Vertauschungsrelation $\{\gamma^E_\mu,\gamma^E_\nu\} = 2\delta_{\mu,\nu}$ sowie der Ersetzung $A_0 \to iA_4$. Die Wirkungen werden reell,

$$S^E_F = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}^E_F \tag{1.17}$$

$$S^E_G = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}^E_G \tag{1.18}$$

$$S^E_{QCD} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}^E_{QCD} = S^E_F + S^E_G. \tag{1.19}$$

Die großkanonische Zustandssumme ist nun

$$Z^E := \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\, e^{-S^E_{QCD}[A,\Psi,\bar{\Psi}]}. \tag{1.20}$$

Diese euklidischen Pfadintegrale können nun unter bestimmten Voraussetzungen in der komplexen Zeitebene zu reellen Zeiten analytisch fortgesetzt werden. Im Folgenden wird nur noch die euklidische Formulierung benutzt und daher der Index E weggelassen.

Die euklidische Pfadintegralformulierung bietet über den bereits erwähnten Vorteil hinaus eine einfache Möglichkeit, die zugrundeliegende Quantenfeldtheorie bei *endlicher Temperatur* formulieren zu können. Vergleicht man die Zustandssumme (1.20) mit der eines quantenstatistischen Systems mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ und der Temperatur $T = \beta^{-1}$

$$Z(T) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \hat{H}}\right), \tag{1.21}$$

so erkennt man eine formale Übereinstimmung, wenn man in der Wirkung (1.19) der Quantenfeldtheorie die Integration in Zeitrichtung nicht ins Unendliche erstreckt, sondern nur bis β

$$S[A, \Psi, \bar{\Psi}] = \int_0^\beta \mathrm{d}x_4 \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}. \tag{1.22}$$

Eine endliche Größe der imaginären Zeit übersetzt sich in Quantenfeldtheorien also in eine endliche Temperatur, wodurch aber das betrachtete System statisch wird. Zusätzlich müssen noch Randbedingungen für die Felder $A, \Psi, \bar{\Psi}$ in Zeitrichtung eingeführt werden, nämlich für die bosonischen periodische

$$A^a_\mu(\mathbf{x}, 0) = A^a_\mu(\mathbf{x}, \beta), \tag{1.23}$$

und für die Fermionfelder antiperiodische

$$\Psi^a_f(\mathbf{x}, 0) = -\Psi^a_f(\mathbf{x}, \beta) \quad \text{und} \quad \bar{\Psi}^a_f(\mathbf{x}, 0) = -\bar{\Psi}^a_f(\mathbf{x}, \beta). \tag{1.24}$$

1.3. Reine Eichtheorie

Das Integral über die Ψ^a_f und $\bar{\Psi}^a_f$ in der Wirkung $S[A, \Psi, \bar{\Psi}]$ lässt sich – als verallgemeinertes Gauß-Integral – ausführen, und man erhält für den Erwartungswert eines Operators

$$\langle O[A] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \, \det K[A] O[A] \, e^{-S_G[A]}}{\int \mathcal{D}A \, \det K[A] \, e^{-S_G[A]}}, \tag{1.25}$$

wobei die Matrix $K[A]$ gegeben ist durch

$$K[A] := \{\gamma^\mu \left(\partial_\mu + igA^\mu(x) + m_f\right)\} \, \delta^{(4)}(x - y). \tag{1.26}$$

Mit der effektiven Wirkung

$$S_{\mathrm{eff}}[A] = S_G[A] - \ln\left(\det K[A]\right) \tag{1.27}$$

und der Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}A \, e^{-S_{\mathrm{eff}}[A]} \tag{1.28}$$

vereinfacht sich (1.25) zu

$$\langle O[A]\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A\, O[A]\, e^{-S_{\mathrm{eff}}[A]}. \tag{1.29}$$

Der Term $\ln(\det K[A])$ in (1.27) entspricht der Summe über Feynman-Diagramme mit geschlossenen Fermionen-Loops und beliebig vielen Gluonwechselwirkungen. In der *quenched approximation* wird $\det K[A] = 1$ gesetzt, wodurch $S_{\mathrm{eff}}[A] = S_G[A]$ wird und damit die Effekte von dynamischen Fermionen vernachläßigt. Die einzigen in diesem System noch auftretenden Quarks sind statisch und somit unendlich schwer. Diese Näherung, die nur noch gluonische Freiheitsgrade enthält, wird *reine Eichtheorie* genannt und bildet den theoretischen Rahmen für diese Arbeit. Wesentliche Eigenschaften der vollen Quantenchromodynamik wie asymptotische Freiheit und Confinement lassen sich bereits in dieser vereinfachten Theorie untersuchen.

2. Gittereichtheorie

Erst durch die Gittereichtheorie von Wilson 1974 [1] konnte die Quantenchromodynamik auch mit anderen als störungstheoretischen Methoden untersucht werden. Somit wurden erstmals der Bereich des mittleren und starken Kopplungsregimes und damit Phänomene wie z.B. Confinement zugänglich. Die Einführung eines Gitterabstandes schafft einen UV-cut-off für die Impulse, so dass die in einigen Feynman-Diagrammen auftretenden Divergenzen verschwinden. Durch eine endliche Ausdehnung des Gitters wird außerdem das in Kapitel 1.2 angesprochene Problem des Pfadintegralmaßes gelöst, indem die überabzählbar vielen Freiheitsgrade des Kontinuums auf endlich viele reduziert werden. Zusammen mit der Wick-Rotation werden die Pfadintegrale hier also wohldefiniert und berechenbar. Durch geeignete Renormierung der nackten Parameter geht schließlich die Gitter- in die Kontinuumstheorie über, so dass sich physikalisch relevante Vorhersagen machen lassen.

2.1. Gitterregularisierung

In der *Gitterregularisierung* der Quantenchromodynamik führt man anstatt der kontinuierlichen Raumzeit ein vierdimensionales, kartesisches Gitter

$$\mathbb{G} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i = a n_i,\ n_i \in \mathbb{N}\} \tag{2.1}$$

mit dem Gitterabstand a ein. Den Einheitsvektor in der μ-ten Richtung bezeichnet man mit $\hat{\mu}$. Beschränkt man weiterhin die Anzahl der Gitterpunkte in jede Raumrichtung auf N_σ und in Zeitrichtung auf N_τ, so erhält man ein endliches Gitter der Größe $N_\sigma^3 \times N_\tau$. Das Volumen des zugehörigen quantenstatistischen Systems (vgl. Kapitel 1.2) ist dann $V = (aN_\sigma)^3$ und die Temperatur wegen der Integralgrenze in (1.22)

$$T = \frac{1}{N_\tau a}. \tag{2.2}$$

Anschaulich befinden sich die Quarks auf den Gitterpunkten, die Gluonen besetzen die Verbindungslinien zwischen diesen. Deswegen benutzt man für die Gluonfelder außerdem noch zu (1.23) analoge Randbedingungen. Der Einfachheit halber wird im Folgenden $a = 1$ gesetzt, so dass für die Angabe des Orts $n = (n_1, \ldots, n_4)$ genügt.

Da die lokale Eichinvarianz das zentrale Konstruktionsprinzip der Quantenchromodynamik im Kontinuum ist, muss sie auch auf dem Gitter gelten. Einen Ansatzpunkt zur Umsetzung bietet der Paralleltransport von Materiefeldern entlang einer Kurve, der im Kontinuum schließlich auf die kovariante Ableitung führt. Die einfachste Möglichkeit

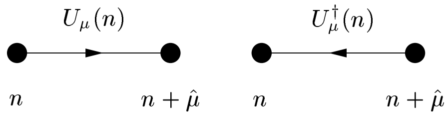


Abbildung 2.1.: Die Linkvariable

eines Paralleltransports in $\mathbb{G}$ ist die von einem Gitterpunkt zum Nächsten. Es ist also naheliegend, die Verbindungen zwischen den Gitterpunkten – die *Links* – mit den Paralleltransportern zu identifizieren. Mit Hilfe des *Schwingerschen Linienintegrals* definiert man nun die *Linkvariable* an der Stelle n in der μ-ten Richtung als

$$U_\mu(n) := \exp\left\{ig\int_n^{n+\hat{\mu}} \mathrm{d}^4z\, A_\mu(z)\right\}, \tag{2.3}$$

das ein Element der SU(N)-Eichgruppe ist. Wegen der Unitarität der Linkvariablen gilt

$$U_{-\mu}(n+\hat{\mu}) = U_\mu^\dagger(n), \tag{2.4}$$

d.h. der Transport in Gegenrichtung kann durch „daggern“ der Linkvariablen in Hinrichtung ausgedrückt werden. Eine grafische Darstellung zeigt Abbildung 2.1.

Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}(x)$ entsteht im Kontinuum durch Paralleltransport entlang einer geschlossenen Kurve in der (μ,ν)-Ebene. Es liegt daher nahe, auf dem Gitter auch so vorzugehen. Abbildung 2.2 zeigt das elementare Rechteck mit den zugehörigen Linkvariablen. Das Produkt der Linkvariablen entlang des Rechtecks wird *Plaquette* genannt,

$$U_{\mu,\nu}(n) \equiv \square_{\mu\nu}(n) := U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n). \tag{2.5}$$

Durch Entwicklung der Exponentialfunktionen in den Linkvariablen gewinnt man den richtigen Feldstärketensor der Quantenchromodynamik im Kontinuum in führender und nächster Ordnung [2]. Somit lässt sich mit Hilfe von (2.5) die gluonische Wirkung auf dem Gitter schreiben als

$$S_G[U] = \beta\sum_n\sum_{\mu<\nu}\left\{1-\frac{1}{3}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu,\nu}(n)\right\} \tag{2.6}$$

$$= \beta\sum_n\sum_{\mu<\nu}\left\{1-\frac{1}{6}\mathrm{Tr}\,\left(U_{\mu,\nu}(n)+U_{\mu,\nu}^\dagger(n)\right)\right\}, \tag{2.7}$$

mit der Kopplung $\beta := \frac{6}{g^2}$. Sie wird *Plaquette*- oder *Wilson*-Wirkung genannt.

2.2. Verbesserte Wirkungen

Im Kontinuumslimes $a \to 0$ liefert die Wilson-Wirkung (2.6) die korrekte gluonische Kontinuumswirkung (1.18). Es gibt aber eine unendliche Anzahl von anderen Gitterwirkungen, die ebenfalls diese Eigenschaft besitzen, (2.6) ist davon nur die einfachste.

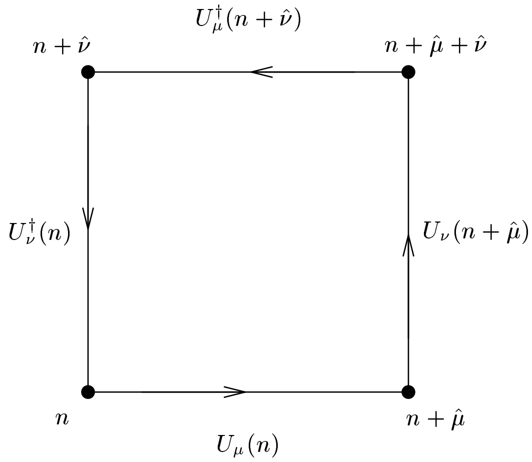


Abbildung 2.2.: Elementare Plaquette auf dem Gitter

Durch die Beimischung von größeren Loops als der elementaren Plaquette (2.5) können nun solche anderen Gitterwirkungen konstruiert werden, mit dem Vorzug, dass Korrekturterme

$$S_{\text{Gitter}} = S_{\text{Kontinuum}} + \text{Korrekturen} \tag{2.8}$$

erst in höheren Ordnungen von a und g auftreten als bei der Wilson-Wirkung, die Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(a^2, g^2)$ besitzt. Zudem werden cut-off-Effekte des Gitters verringert und eine bessere Annäherung an die Rotationssymmetrie des Kontinuums erreicht [3]. Allgemein werden bei *tree-level*-verbesserten Wirkungen nur Verbesserungen in niedrigster Ordnung g betrachtet, während bei *1-loop*-verbesserten Wirkungen auch g^2-Korrekturen Berücksichtigung finden. In dieser Arbeit wird die (2×1)-tree-level-verbesserte Wirkung benutzt, bei der für $a \to 0$ die $\mathcal{O}(a^2)$-Korrekturen in niedrigster Ordnung g wegfallen. Sie wird nach ihrem Erfinder *Symanzik*-Wirkung genannt und lautet für die SU(3) [4]

$$\begin{aligned} S^{(2,1)} &= \beta \sum_n \sum_{\mu<\nu} \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{Re\,Tr}\, \square_{\mu\nu}(n)\right) \\ &\quad - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\mathrm{Re\,Tr}\left(\boxed{}_{\mu\nu}(n) + \boxed{\rule{0pt}{2em}}_{\mu\nu}(n)\right)\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3. Der Kontinuumslimes

Durch die Einführung eines endlichen Gitterabstandes a treten nun alle Größen in Einheiten dieses Abstandes auf. Man ist aber an der Kontinuumsphysik interessiert, für die

a verschwindet. Um aus den Gittergrößen die entsprechenden Werte für das Kontinuum zu gewinnen, muss man eine Beziehung zwischen dem Gitterabstand und der einzigen freien Größe des Gitters – der Kopplung auf dem Gitter g – aufstellen. Die Korrelationslänge $\hat{\xi}$ in Einheiten des Gitterabstands hängt von g ab. Im Kontinuumslimes muss sie divergieren, so dass die Kopplung auf dem Gitter gegen eine kritische Kopplung $g^\star$ geht,

$$\lim_{g \to g^\star} \hat{\xi}(g) = \infty. \tag{2.10}$$

Betrachtet man nun eine Observable O bei der Kopplung g mit der Massendimension $d(O)$ zusammen mit ihrem dimensionslosen Pendant $\hat{O}$, gilt also

$$O(g, a(g)) = a^{-d(O)} \hat{O}, \tag{2.11}$$

so sollte sie im Kontinuumslimes unabhängig vom Gitterabstand a sein. Dies führt auf die *Renormierungsgruppengleichung*

$$\begin{aligned} a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} O(g(a), a) &= 0 \\ \Rightarrow \left(a \frac{\partial}{\partial a} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) O(g(a), a) &= 0 \qquad (2.12) \\ \text{mit} \qquad \beta(g) &:= -a \frac{\partial g}{\partial a}, \qquad (2.13) \end{aligned}$$

wobei $\beta(g)$ *Callan-Symanzik*-Beta-Funktion genannt wird (nicht mit der Kopplung $\beta = g^2/6$ aus (2.6) oder gar der inversen Temperatur zu verwechseln), und i. a. numerisch berechnet werden muss. Dazu bestimmt man die Werte einer Observablen in Gittereinheiten bei verschiedenen Kopplungen $\hat{O}(g_i)$ und interpoliert zwischen den Messpunkten. Durch Ableiten der Interpolationsfunktion gewinnt man das Inverse der β-Funktion. Im Allgemeinen ist diese jedoch nicht unabhängig von der zugrundeliegenden Observablen.

Eine störungstheoretische Bestimmung ist unter der Annahme möglich, dass die Theorie asymptotisch frei ($g^\star = 0$) ist. Man erhält für kleine g durch Entwicklung einer Observable, etwa dem Potential

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \dots, \tag{2.14}$$

wobei

$$b_0 = \frac{11}{16\pi^2} \qquad \text{und} \qquad b_1 = \frac{102}{(16\pi^2)^2}. \tag{2.15}$$

Durch Integration von (2.13) erhält man

$$a(g) = \frac{1}{\Lambda_L} \left(b_0 g^2 \right)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}} e^{-\frac{1}{2b_0 g^2}} \tag{2.16}$$

wobei Λ_L ein freier Parameter ist, der durch Vergleich mit dem Experiment bestimmt werden muss.

Die Abweichung von $\beta(g)$ vom asymptotischen Skalenverhalten für etwas größere g lässt sich auch berücksichtigen, indem man in (2.16) die nackte durch eine effektive Kopplung ersetzt. Man definiert dazu ein effektives renormiertes g_{eff} mit Hilfe einer auf dem Gitter simulierten Größe $\langle O \rangle$

$$g_{\text{eff}} := f\left(\langle O \rangle\right), \tag{2.17}$$

wobei f so gewählt ist, dass man bei der Entwicklung von $f\left(\langle O \rangle\right)$ in Ordnungen g^2 im Limes $N_\tau \to \infty$ den richtigen asymptotischen Ausdruck bis $\mathcal{O}(g^2)$ erhält, d.h. für kleine Kopplungen geht $g_{\text{eff}} \to g$.

Zur Analyse der simulierten Ergebnisse bei endlicher Temperatur wird in dieser Arbeit eine renormierte, temperaturabhängige Kopplung $g^2(T)$ benutzt

$$g^{-2}(T) = 2b_0 \ln\left(\frac{2\pi T}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}}\right) + \frac{b_1}{b_0} \ln\left(2\ln\left(\frac{2\pi T}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}}\right)\right), \tag{2.18}$$

wobei $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ der Λ-Parameter im *modified minimal substraction* Schema ist. In [5] findet man

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}} = 1.75(20) \qquad \text{und} \qquad \frac{T_c}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}} = 1.03(19), \tag{2.19}$$

was zur Berechnung der effektiven Kopplung benutzt wurde.

3. Freie Energien

Der Hauptgegenstand dieser Arbeit ist die Messung der freien Energie zwischen drei Quarks in Abhängigkeit von ihrem Abstand und der Temperatur in der Näherung der SU(3)-reinen-Eichtheorie. Die wichtigste Observable dafür ist der Polyakov-Loop, dessen räumliche Korrelationsfunktionen die Berechnung der gesuchten Größe erlauben. Zusätzlich muß der richtige Abstandsbegriff für ein Drei-Quark-System definiert werden, um Ansätze für die Form der freien Energien testen zu können. Für kleine Kopplungen ist eine störungstheoretische Behandlung der freien Energie möglich, die in diesem Kapitel durchgeführt wird, um ihre Ergebnisse mit denen der Simulation in Kapitel 5 zu vergleichen.

3.1. Die Bedeutung der freien Energie

Das in dieser Arbeit untersuchte Modell der reinen Eichtheorie kennt als einzige dynamischen Freiheitsgrade die Gluonen, so dass die statistische Physik des betrachteten Systems die eines Gluongases ist. Wie auch beim Photonengas in der QED ist die Teilchenzahl der masselosen Gluonen nicht erhalten, wodurch für das chemische Potential der Gluonen $\mu_g = 0$ gilt. Thermodynamisch kann das System als großkanonisches Ensemble mit verschwindendem chemischen Potential behandelt werden. In diesem definiert man die *Helmholtzsche freie Energie* oder einfach *freie Energie* F eines thermodynamischen Systems der Temperatur T als

$$F := -T \ln Z, \tag{3.1}$$

wobei Z die großkanonische Zustandssumme des Systems darstellt. Zwischen der freien Energie und der Entropie S eines Systems der Temperatur T und des Volumens V besteht der Zusammenhang

$$F(T,V) = U(T,V) - TS(T,V), \tag{3.2}$$

wobei $U(T,V)$ die innere Energie des Systems darstellt. Die freie Energie ist im Gleichgewichtszustand minimal und aus ihr können alle relevanten Zustandsgrößen des Systems abgeleitet werden. Gleichung (3.2) macht also klar, dass das thermodynamische System offenbar denjenigen Zustand aufsucht, der den besten Kompromiss zwischen dem mechanischen Prinzip minimaler innerer Energie und dem thermodynamischen Prinzip maximaler Entropie darstellt, also insgesamt die übrigbleibende „freie“ Energie minimiert.

3.2. Der Polyakov-Loop

Der *Polyakov-Loop* ist definiert als das Produkt eines um die Zeitachse geschlossenen Loops zeitartiger Links [1]

$$L(\mathbf{x}) := \prod_{x_4=1}^{N_\tau} U_4(\mathbf{x}, x_4). \tag{3.3}$$

Abbildung 3.1 zeigt eine grafische Darstellung. Er repräsentiert ein unendlich schweres, statisches Quark am Raumpunkt $\mathbf{x}$, und entsprechend steht der Polyakov-Loop mit umgekehrtem Umlaufsinn, also $L^\dagger(\mathbf{x})$, für ein unendlich schweres, statisches Anti-Quark bei $\mathbf{x}$.

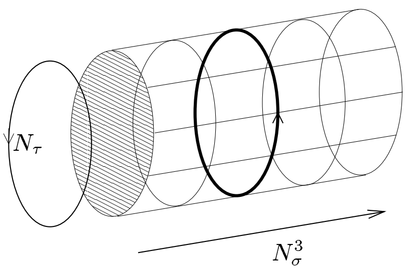


Abbildung 3.1.: Der Polyakov-Loop

Der Polyakov-Loop ist nicht nur wegen des Zusammenhanges mit der freien Energie von Bedeutung, wie anschließend in Kapitel 3.3 gezeigt wird, sondern auch weil sich aus ihm ein Ordnungsparameter für den Confinement-Deconfinement Phasenübergang der SU(3)-reinen-Eichtheorie konstruieren lässt. Es gilt nämlich im Limes $V \to \infty$ [2]

$$\langle \mathrm{Tr}\, L \rangle \begin{cases} = 0 & \text{Confinement} \\ \neq 0 & \text{Deconfinement} \end{cases} . \tag{3.4}$$

Dabei ist die Spur normiert auf die Dimension N der zugrundeliegenden SU(N)-Eichgruppe

$$\mathrm{Tr} := \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\,', \tag{3.5}$$

und der Erwartungswert auf dem Gitter gegeben durch

$$\langle \mathrm{Tr}\, L \rangle := \frac{1}{N_\sigma^3} \sum_{\mathbf{x}} \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}). \tag{3.6}$$

[1] Manchmal ist es üblich, in der Definition des Polyakov-Loops die Spur im Farbraum mit einzubeziehen: $L(\mathbf{x}) := \mathrm{Tr} \prod_{x_4=1}^{N_\tau} U_4(\mathbf{x}, x_4)$. Darauf wird hier verzichtet, da in dieser Arbeit auch nicht-farbgemittelte freie Energien betrachtet werden.

[2] Der in (3.3) definierte Polyakov-Loop geht auch in der Deconfinement-Phase gegen Null. Durch *Renormierung* kann aber ein Polyakov-Loop mit dem gewünschten Verhalten gewonnen werden. Eine ausführliche Darstellung eines möglichen Renormierungsschemas bietet [6]. Von nun an wird von renormierten Polyakov-Loops ausgegangen.

In der statistischen Mechanik ist ein Phasenübergang mit der Brechung einer globalen Symmetrie verbunden, so auch hier in diesem Fall. Die Wilson-Wirkung und alle lokalen Variablen auf dem Gitter weisen eine *Zentrums-Symmetrie* auf, d.h. sie sind invariant unter Z_3-Transformationen zeitartiger Links der Art

$$U_4(\mathbf{x}, x_4) \to zU_4(\mathbf{x}, x_4), \tag{3.7}$$

mit $z = \exp(2i\pi l/3)$ und $l = 0, 1, 2$ für alle $\mathbf{x}$ sowie festem x_4. Die Z_3-Gruppe stellt dabei das *Zentrum* der SU(3) dar. Unter solchen Transformationen wird aber $\mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})$ gedreht

$$\mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}) \to \mathrm{Tr}\, zL(\mathbf{x}) = z\mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}). \tag{3.8}$$

Befindet sich nun ein System in der Confinement-Phase, so sind durch die Zentrums-Symmetrie verbundene Konfigurationen gleich wahrscheinlich und der Erwartungswert des Polyakov-Loops verschwindet. Ist die Zentrums-Symmetrie gebrochen, verteilen sich die Werte von $\mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})$ ungleichmäßig auf die drei Z_3-Wurzeln in der komplexen Ebene, wodurch der Erwartungswert des Polyakov-Loops verschieden von Null wird. Somit ist das kritische Verhalten der SU(3)-reinen-Eichtheorie stark mit der Z_3-Symmetrie verknüpft und man erwartet in $d = 4$ Dimensionen für die SU(3) einen Phasenübergang 1.Ordnung, weil das zugehörige Z_3-Spinmodell in $d = 3$ Dimensionen einen solchen besitzt. Man sagt, diese beiden Systeme sind Mitglieder der gleichen *Universalitätsklasse*, wodurch ihr Verhalten in der Nähe des Phasenübergangs unabhängig von den physikalischen Details der einzelnen Modelle bestimmt wird.

3.3. Polyakov-Loop-Korrelationen und freie Energien

Die in dieser Arbeit gemessenen und als freie Energie bezeichnet Größe stellt genau genommen die Differenz der freien Energien eines Systems mit statischen Quarks und ohne sie dar. Die in (3.2) gezeigte innere Energie $U(T, V)$ ist in dieser Arbeit das Potential aufgrund der Farbwechselwirkung und wie die Entropie vom Abstand der Quarks abhängig. Die Temperatur des Systems wird auf dem Gitter nach (2.2) und (2.13) durch geeignete Wahl der zeitlichen Gitterausdehnung und Gitterkopplung eingestellt. Für die untersuchten Größen zeigt sich praktisch keine Abhängigkeit vom Volumen des Gitters, so dass dies im Weiteren vernachlässigt wird.

Zwischen der *farbgemittelten* freien Energie F_{nm} eines Systems mit n Quarks an den Orten $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ und m Anti-Quarks an den Orten $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ relativ zu einem System ohne sie und den zu den Quarks gehörigen Polyakov-Loops besteht nun der Zusammenhang

$$\exp\Big(-\beta F_{nm}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m)\Big) = \frac{1}{C} \left\langle \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_i) \prod_{j=1}^{m} \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{y}_j) \right\rangle, \tag{3.9}$$

wobei β die inverse Temperatur darstellt und die Normierung für ein System aus mehr als einem Quark oder Anti-Quark

$$C = \begin{cases} 1 & \text{Confinement-Phase} \\ |\langle \mathrm{Tr}\, L\rangle|^{n+m} & \text{Deconfinement-Phase} \end{cases} \tag{3.10}$$

gewählt werden kann. Divergente Beiträge der Selbstenergie in der Deconfinement-Phase werden dadurch eliminiert, die freien Energien laufen dann für große R gegen Null. Für den Fall eines einzelnen Quarks macht diese Art der Normierung keinen Sinn, stattdessen benutzt man das in [6] beschriebene Verfahren. Aus Bequemlichkeit schreibt man auch bei kleinen Anzahlen von Quarks für jedes Quark ein q und für jedes Anti-Quark ein $\bar{q}$ als Index von F. So ist zum Beispiel die freie Energie eines Systems mit einem Quark durch

$$\exp(-\beta F_q) = \langle \mathrm{Tr}\, L \rangle \tag{3.11}$$

gegeben, wobei in diesem Falle die Normierung des Polyakov-Loops durch das Verfahren in [6] gegeben ist. Für ein System aus einem Quark und einem Anti-Quark gilt

$$\exp(-\beta F_{q\bar{q}}(R,T)) = \frac{1}{C} \langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L^{\dagger}(\mathbf{y}) \rangle, \tag{3.12}$$

wobei $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ den räumlichen Abstand von Quark und Anti-Quark darstellt. Für große räumliche Abstände $R \to \infty$ gilt nun

$$\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L^{\dagger}(\mathbf{y}) \rangle \longrightarrow |\langle \mathrm{Tr}\, L \rangle|^2, \tag{3.13}$$

was die Wahl der Normierung in (3.10) für die Deconfinement-Phase rechtfertigt und zu einer leichteren Analyse der Daten führt. Ist $\langle \mathrm{Tr}\, L \rangle = 0$, so wächst die freie Energie $F_{q\bar{q}}(R,T)$ mit steigendem Abstand R immer weiter an, wie man sich an (3.12) leicht klar macht, und man erhält Confinement. Ist dagegen $\langle \mathrm{Tr}\, L \rangle \neq 0$, strebt die freie Energie gegen eine Konstante und man beobachtet Deconfinement, was die Bezeichnungen in (3.4) klar macht.

3.4. Freie Energien in der Störungstheorie

Für eine schwache Kopplung g lässt sich der Polyakov-Loop in eine Störungsreihe entwickeln, wodurch die freie Energie eines Systems nach (3.9) für kleine Abstände berechnet werden kann.

3.4.1. Vorbetrachtungen

Der Zustand eines Systems aus einem Quark und einem Anti-Quark im Farbraum kann als das Tensorprodukt der Einzelzustände dargestellt werden, also als

$$3 \otimes \bar{3}, \tag{3.14}$$

wobei 3 für die irreduzible Darstellung des Quarks im Farbraum und $\bar{3}$ die dazu konjugierte Darstellung steht und das Anti-Quark repräsentiert. Es lässt sich in diesem Raum aber auch eine andere Basis wählen, quantenmechanisch von Interesse ist eine Zerlegung nach Symmetriezuständen, also dem Verhalten des Gesamtsystems unter Vertauschung der Farben der Quarks. Für diese erhält man

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8, \tag{3.15}$$

also einen symmetrischen und acht antisymmetrische Zustände, die man als *Singlett* und *Oktett* bezeichnet. Die zu den Symmetriezuständen gehörigen freien Energien werden entsprechend $F^1_{q\bar{q}}(R)$ und $F^8_{q\bar{q}}(R)$ genannt. Das in dieser Arbeit gemessene farbgemittelte $F_{q\bar{q}}(R)$ setzt sich aus denen des Singlett- und Oktett-Zustands zusammen durch [7]

$$\exp\big(-\beta F_{q\bar{q}}(R)\big) = \frac{1}{9}\exp\big(-\beta F^1_{q\bar{q}}(R)\big) + \frac{8}{9}\exp\big(-\beta F^8_{q\bar{q}}(R)\big), \tag{3.16}$$

wobei sich die Vorfaktoren der Exponentialfunktionen durch die relative Anzahl der Zustände in den einzelnen Symmetriezuständen ergeben. Man erhält aus gruppentheoretischen Überlegungen den Zusammenhang zwischen der freien Energie des Singlett-Zustands und den Polyakov-Loop-Korrelationen [7]

$$\exp\big(-\beta F^1_{q\bar{q}}(R)\big) = \Big\langle \mathrm{Tr}\,\Big(L(\mathbf{x})L^\dagger(\mathbf{y})\Big)\Big\rangle\,. \tag{3.17}$$

Der entsprechende Ausdruck für die freie Energie des Oktett-Zustands lässt sich mit (3.12) und (3.16) nun einfach ableiten.

Der einzige in der Natur auftretende Zustand des $q\bar{q}$-Systems ist der des Singletts, da dieser als einziger invariant unter SU(3)-Transformationen im Farbraum ist. In dem in (3.9) gezeigten Ausdruck der farbgemittelten freien Energie wird für jeden Polyakov--Loop die Spur im Farbraum separat gebildet, was einer Mittelung über die möglichen Farben jedes einzelnen Quarks entspricht und den Austausch eines einzigen Gluons ausschließt. Diese freie Energie stellt also nicht die des physikalischen Singletts dar. Der Singlett-Zustand ist jedoch auf dem Gitter *nicht* eichinvariant, da die beiden Quarks räumlich getrennt sind und jedes für sich eine Farbe trägt. Daher ist zu seiner Simulation eine Eichfixierung notwendig, die in der Diplomarbeit von O.Vogt durchgeführt wird [8].

Analog lässt sich das qq-System behandeln [7]. Für seine Symmetriezustände findet man ein symmetrisches Sextett und ein antisymmetrisches Triplett. Es gilt also

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}. \tag{3.18}$$

Die Verbindung zur farbgemittelten freien Energie ist gegeben durch

$$\exp\big(-\beta F_{qq}(R)\big) = \frac{1}{3}\exp\big(-\beta F^3_{qq}(R)\big) + \frac{2}{3}\exp\big(-\beta F^6_{qq}(R)\big). \tag{3.19}$$

Die freie Energie des Triplett- und Sextett-Zustands erhält man aus den Korrelationsfunktionen der Polyakov-Loops durch

$$\begin{aligned} \exp\big(-\beta F^3_{qq}(R)\big) &= \frac{3}{2}\Big\langle \mathrm{Tr}\,L(\mathbf{x})\,\mathrm{Tr}\,L(\mathbf{y})\Big\rangle - \frac{1}{2}\Big\langle \mathrm{Tr}\,\Big(L(\mathbf{x})L(\mathbf{y})\Big)\Big\rangle \\ \exp\big(-\beta F^6_{qq}(R)\big) &= \frac{3}{4}\Big\langle \mathrm{Tr}\,L(\mathbf{x})\,\mathrm{Tr}\,L(\mathbf{y})\Big\rangle + \frac{1}{4}\Big\langle \mathrm{Tr}\,\Big(L(\mathbf{x})L(\mathbf{y})\Big)\Big\rangle. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Für das qqq-System findet man durch Zerlegung in die Symmetriezustände

$$\begin{aligned} 3 \otimes 3 \otimes 3 &= (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 \\ &= (6 \otimes \bar{3}) \oplus (\bar{3} \otimes 3) \\ &= 10 \oplus 8' \oplus 8 \oplus 1, \end{aligned} \tag{3.21}$$

also ein Singlett, zwei Oktette sowie ein Dekuplett. Die einzelnen Kombinationen zeigt Anhang A.5. Der physikalische Singlett-Zustand ist total antisymmetrisch, das erste Oktett antisymmetrisch im ersten und zweiten, das zweite Oktett im zweiten und dritten Eintrag sowie das Dekuplett total symmetrisch.

Die Zusammensetzung der freien Energien aus den Erwartungswerten von Polyakov-Loops und ihren Korrelationen wird nun gezeigt. Das Verfahren ist angelehnt an dem für zwei Quarks aus [7], jedoch für drei Quarks aufwendiger. Für die Drei-Quark-Korrelationsfunktion mit den L_1, L_2, L_3 als die Polyakov-Loops an den drei Orten der Quarks gilt

$$\left\langle L_1 L_2 L_3 \right\rangle = \sum_x \exp\left(-\beta F^x_{qqq}\right) P_x, \tag{3.22}$$

wobei $x = 1, 8, 8', 10$ die Symmetriezustände und P_x die Projektoren auf diese bezeichnen. Setzt man für die Einträge der einzelnen Polyakov-Loops $L_1^{il}, L_2^{jm}, L_3^{kn}$, so erhält man für den Projektor des total symmetrischen Dekupletts mit Hilfe der Fierz-Identität (A.8)

$$\begin{aligned} P_{10} &= \frac{1}{6} \sum_{\mathrm{Perm}(l,m,n)} \delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} \\ &= \frac{1}{6}\left(\delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} + \delta^{il}\delta^{jn}\delta^{km} + \delta^{in}\delta^{jm}\delta^{kl}\right. \\ &\qquad \left. + \delta^{im}\delta^{jl}\delta^{kn} + \delta^{im}\delta^{jn}\delta^{kl} + \delta^{in}\delta^{jl}\delta^{km}\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Der Projektor des total antisymmetrischen Singletts beinhaltet die gleichen Terme wie P_{10}, jedoch erhält jede ungerade Permutation ein negatives Vorzeichen,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{6} \sum_{\mathrm{Perm}(l,m,n)} \epsilon^{lmn}\delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} \\ &= \frac{1}{6}\left(\delta^{il}\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{il}\delta^{jn}\delta^{km} - \delta^{in}\delta^{jm}\delta^{kl}\right. \\ &\qquad \left. - \delta^{im}\delta^{jl}\delta^{kn} + \delta^{im}\delta^{jn}\delta^{kl} + \delta^{in}\delta^{jl}\delta^{km}\right). \end{aligned}$$

Die Projektoren der gemischt-symmetrischen Oktette liefern

$$P_8 = \frac{1}{3}\Big(\delta^{kn}\left(\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}\right) + \delta^{km}\left(\delta^{il}\delta^{jn} - \delta^{in}\delta^{jl}\right)\Big), \tag{3.24}$$

sowie

$$P_{8'} = \frac{1}{3}\Big(\delta^{il}\left(\delta^{kn}\delta^{jm} - \delta^{km}\delta^{jn}\right) + \delta^{im}\left(\delta^{kn}\delta^{jl} - \delta^{kl}\delta^{jn}\right)\Big). \tag{3.25}$$

Die P_x erfüllen die üblichen Beziehungen für Projektoren

$$P_x^2 = P_x, \quad \sum_x P_x = 1 \quad \text{und} \quad P_x P_y = 0 \tag{3.26}$$

für $x \neq y$ und $x, y \in \{1, 8, 8', 10\}$. Wendet man nun die Projektoren nach

$$\exp\left(-\beta F^{x}_{qqq}\right) = \frac{\mathrm{Tr}\,\Big(P_x\big\langle L_1 L_2 L_3\big\rangle\Big)}{\mathrm{Tr}\,P_x} \tag{3.27}$$

an, ergibt sich für die freien Energien der einzelnen Symmetriezustände

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\beta F^{10}_{qqq}\right) &= \frac{1}{60}\big\langle 27\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,L_2\mathrm{Tr}\,L_3 + 9\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,(L_2L_3) \\
&\quad + 9\,\mathrm{Tr}\,L_2\mathrm{Tr}\,(L_1L_3) + 9\,\mathrm{Tr}\,L_3\mathrm{Tr}\,(L_1L_2) \\
&\quad + 3\,\mathrm{Tr}\,(L_1L_2L_3) + 3\,\mathrm{Tr}\,(L_1L_3L_2)\big\rangle \qquad (3.28) \\
\exp\left(-\beta F^{1}_{qqq}\right) &= \frac{1}{6}\big\langle 27\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,L_2\mathrm{Tr}\,L_3 - 9\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,(L_2L_3) \\
&\quad - 9\,\mathrm{Tr}\,L_2\mathrm{Tr}\,(L_1L_3) - 9\,\mathrm{Tr}\,L_3\mathrm{Tr}\,(L_1L_2) \\
&\quad + 3\,\mathrm{Tr}\,(L_1L_2L_3) + 3\,\mathrm{Tr}\,(L_1L_3L_2)\big\rangle \qquad (3.29) \\
\exp\left(-\beta F^{8}_{qqq}\right) &= \frac{1}{24}\big\langle 27\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,L_2\mathrm{Tr}\,L_3 + 9\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,(L_2L_3) \\
&\quad - 9\,\mathrm{Tr}\,L_3\mathrm{Tr}\,(L_1L_2) - 3\,\mathrm{Tr}\,(L_1L_3L_2)\big\rangle \qquad (3.30) \\
\exp\left(-\beta F^{8'}_{qqq}\right) &= \frac{1}{24}\big\langle 27\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,L_2\mathrm{Tr}\,L_3 + 9\,\mathrm{Tr}\,L_3\mathrm{Tr}\,(L_1L_2) \\
&\quad - 9\,\mathrm{Tr}\,L_1\mathrm{Tr}\,(L_2L_3) - 3\,\mathrm{Tr}\,(L_1L_2L_3)\big\rangle. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Für die farbgemittelte freie Energie gilt somit

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\beta F_{qqq}\right) &= \frac{1}{27}\exp\left(-\beta F^{1}_{qqq}\right) + \frac{8}{27}\exp\left(-\beta F^{8}_{qqq}\right) \\
&\quad + \frac{8}{27}\exp\left(-\beta F^{8'}_{qqq}\right) + \frac{10}{27}\exp\left(-\beta F^{10}_{qqq}\right). \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden nun der Polyakov-Loop sowie seine für diese Arbeit interessanten Korrelationsfunktionen in einer Störungsreihe entwickelt.

3.4.2. Der Polyakov-Loop

Bei kleiner Kopplung g findet man für den Polyakov-Loop

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{x}) &= \prod_{x_4} U_4(\mathbf{x}, x_4) \\
&= \prod_{x_4} \exp\left\{ igA_4^a(\mathbf{x}, x_4)\frac{\lambda^a}{2} \right\} \\
&= \prod_{x_4} \left(1 + igA_4^a(\mathbf{x}, x_4)\frac{\lambda^a}{2} - \frac{g^2}{2}\left(A_4^a(\mathbf{x}, x_4)\frac{\lambda^a}{2}\right)^2 + \cdots \right) \\
&= 1 + ig\sum_{x_4} A_4^a(\mathbf{x}, x_4)\frac{\lambda^a}{2} - \frac{1}{2}g^2\sum_{x_4}\left(A_4^a(\mathbf{x}, x_4)\frac{\lambda^a}{2}\right)^2 \\
&\quad -g^2\sum_{x_4<x_4'} A_4^a(\mathbf{x}, x_4)A_4^b(\mathbf{x}, x_4')\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2} + \ldots .
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Die Entwicklung wird hier nur bis zur Ordnung g^2 durchgeführt. Der g^3-Term verschwindet unter dem Erwartungswert, wie nun gezeigt wird. Der Term ist von der Struktur

$$
\mathrm{Tr}\,\left(A_4^a(x_4)A_4^b(x_4')A_4^c(x_4'')\lambda^a\lambda^b\lambda^c \right)\cdot S_1,
\tag{3.34}
$$

wobei S_1 der Beitrag des Drei-Gluon-Vertex aus der Wirkung darstellt. Führt man die Spur mit Hilfe von (A.7) aus und setzt denn relevanten Ausdruck für S_1 ein, ergibt sich

$$
A_4^a(x_4)A_4^b(x_4')A_4^c(x_4'')(d^{abc} + if^{abc})f^{def}A_4^dA_i^eA_i^f,
\tag{3.35}
$$

wobei $i \neq 4$ ist. Das Feld A_4^d muss dabei zeitartig sein, weil der Erwartungswert von einer ungeraden Anzahl von Feldern verschwindet. Die beiden übrigen Felder A_i^e und A_i^f tauchen auch in dem Gewichtungsfaktor des Erwartungswerts auf, der gaussisch ist. Damit gilt $e = f$. Mit der antisymmetrischen Eigenschaft der Strukturkonstanten f^{def} verschwindet damit der Erwartungswert des Ausdrucks (3.35).

Da die Entwicklungen der freien Energien in dieser Arbeit nur bis zur Ordnung g^4 durchgeführt werden, tritt der g^4-Term aus der Entwicklung des Polyakov-Loops nur als Selbstwechselwirkungsterm auf, die für die Berechnung der Abstandsabhängigkeit der freien Energien irrelevant sind. Daher wird dieser Term nicht explizit angegeben.

Setzt man nun den Ausdruck (3.33) in den Erwartungswert der Spur des Polyakov-Loops ein, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\rangle &= \Big\langle \mathrm{Tr}\,\Big\{ 1 + ig\sum_{x_4} A_4^a(\mathbf{x}, x_4)\frac{\lambda^a}{2} - \frac{1}{2}g^2\sum_{x_4}\left(A_4^a(\mathbf{x}, x_4)\frac{\lambda^a}{2}\right)^2 \\
&\quad -g^2\sum_{x_4<x_4'} A_4^a(\mathbf{x}, x_4)A_4^b(\mathbf{x}, x_4')\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2} + \ldots \Big\}\Big\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Mit $\mathrm{Tr}\,\lambda^a = 0$ verschwinden die Summen der Ordnung g und mit $\mathrm{Tr}'\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ für die Generatoren wird (3.36) zu

$$\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\rangle = 1 - \frac{g^2}{4N}\left\langle \sum_a \sum_{x_4,x_4'} A_4^a(\mathbf{x},x_4)A_4^a(\mathbf{x},x_4')\right\rangle + \dots . \tag{3.37}$$

Man benutzt nun für die Eichfelder ihre Impulsraumdarstellung

$$A_4^a(\mathbf{x},x_4) = \sum_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} e^{ip_4x_4}\tilde{A}_4^a(\mathbf{p},p_4), \tag{3.38}$$

wobei die Summe über den 4er-Vektor $p = (\mathbf{p}, p_4)$ läuft. Damit wird (3.37) zu

$$\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\rangle = 1 - \frac{g^2}{4N}\sum_a \sum_{x_4,x_4'} \sum_{p,p'} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\mathbf{x}} e^{ip_4x_4} e^{ip_4'x_4'}\left\langle \tilde{A}_4^a(\mathbf{p},p_4)\tilde{A}_4^a(\mathbf{p}',p_4')\right\rangle + \dots \tag{3.39}$$

Der Gluon-Propagator ist in niedrigster Ordnung im Impulsraum in der Feynman-Eichung gegeben durch

$$G_{\mu\nu}^{ab}(p,p') = \delta^{ab}\delta_{\mu\nu}\delta(p+p')\frac{1}{D(p)}, \tag{3.40}$$

wobei

$$D(p) = 4\sum_\rho \sin^2\left(\frac{p_\rho}{2}\right) \tag{3.41}$$

auf dem Gitter gilt. Der Erwartungswert in (3.39) ist in niedrigster Ordnung nun gerade gleich $G_{44}^{aa}(p,p')$, so dass gilt

$$\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\rangle = 1 - \frac{g^2}{4N}\sum_a \sum_{x_4,x_4'} \sum_{p,p'} e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\mathbf{x}} e^{ip_4x_4} e^{ip_4'x_4'}\delta^{aa}\delta_{44}\underbrace{\delta(p+p')}_{p'=-p}\frac{1}{D(p)} + \dots \tag{3.42}$$

Führt man die Summe über p' aus, so verschwindet die Phase mit Abhängigkeit von $\mathbf{x}$, die Summe über den Farbindex a gibt nur einen Faktor N^2-1. Man erhält also

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\rangle &= 1 - \frac{N^2-1}{4N}g^2\sum_{x_4,x_4'}\sum_p e^{ip_4x_4}e^{-ip_4x_4'}\frac{1}{D(p)} + \dots \\ &= 1 - \frac{N^2-1}{4N}g^2\sum_{x_4,x_4'}\sum_p e^{ip_4(x_4-x_4')}\frac{1}{D(p)} + \dots .\end{aligned} \tag{3.43}$$

Die Summe über x_4 und x_4' kann nun ebenfalls ausgeführt werden, wenn man sie durch $y_4 = x_4 - x_4'$ ersetzt

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\rangle &= 1 - \frac{N^2-1}{4N}g^2\sum_{y_4}\sum_p e^{ip_4y_4}\frac{1}{D(p)} + \dots \\ &= 1 - \frac{N^2-1}{4N}g^2\sum_p \delta_{p_4,0}\frac{1}{D(p)} + \dots .\end{aligned} \tag{3.44}$$

Der zweite Term repräsentiert die Selbstwechselwirkung des Quarks in niedrigster Ordnung. Dabei emittiert es ein Gluon zur Zeit x_4 und absorbiert es zur späteren Zeit x_4'. Die Entwicklung des Polyakov-Loops zu höheren Ordnungen zeigt [9].

Für ein Anti-Quark findet man

$$\begin{aligned} L^\dagger(\mathbf{x}) &= \left(\prod_{x_4} U_4(\mathbf{x}, x_4)\right)^\dagger \\ &= \left(\prod_{x_4} U_4^\dagger(\mathbf{x}, N_\tau - x_4)\right) \\ &= \prod_{x_4} \exp\left\{-igA_4^a(\mathbf{x}, N_\tau - x_4)\frac{\lambda^a}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{3.45}$$

wobei die Hermitizität der Generatoren $\lambda^a/2$ benutzt wurde. Der Ausdruck (3.45) kann nun ganz analog zu (3.33) in eine Reihe entwickelt werden, wobei sich

$$\begin{aligned} L^\dagger(\mathbf{x}) &= 1 - ig\sum_{x_4} A_4^a(\mathbf{x}, N_\tau - x_4)\frac{\lambda^a}{2} - \frac{1}{2}g^2\sum_{x_4}\left(A_4^a(\mathbf{x}, N_\tau - x_4)\frac{\lambda^a}{2}\right)^2 \\ &\quad -g^2\sum_{x_4<x_4'} A_4^a(\mathbf{x}, N_\tau - x_4)A_4^b(\mathbf{x}, N_\tau - x_4')\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2} + \ldots \end{aligned} \tag{3.46}$$

ergibt. Für die Terme der Ordnung g^3 und g^4 gilt das Gleiche wie für den Polyakov-Loop $L(\mathbf{x})$. Der Hauptunterschied zu (3.33) besteht im negativen Vorzeichen des zweiten Terms, der zwar für $\mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{x})$ verschwindet, für die Berechnung von Korrelationen von Polyakov-Loops aber von Bedeutung ist, wie nun gezeigt wird.

3.4.3. Das $q\bar{q}$-System

Um die freie Energie des $q\bar{q}$-Systems zu erhalten, muss nach (3.9) die Korrelationsfunktion zweier Polyakov-Loops berechnet werden. Für das farbgemittelte System erhält man so

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{y}) \right\rangle \\
= &\left\langle \mathrm{Tr} \prod_{x_4} U_4(\mathbf{x}, x_4)\ \mathrm{Tr} \prod_{y_4} U_4^\dagger(\mathbf{y}, N_\tau - y_4) \right\rangle \\
= &\left\langle \mathrm{Tr} \left\{ 1 + ig \sum_{x_4} A_4^a(\mathbf{x}, x_4) \frac{\lambda^a}{2} - \frac{g^2}{2} \left(\sum_{x_4} A_4^a \frac{\lambda^a}{2} \right)^2 + \cdots \right\} \right. \\
&\left. \mathrm{Tr} \left\{ 1 - ig \sum_{y_4} A_4^b(\mathbf{y}, N_\tau - y_4) \frac{\lambda^b}{2} - \frac{g^2}{2} \left(\sum_{y_4} A_4^b \frac{\lambda^b}{2} \right)^2 + \cdots \right\} \right\rangle \\
= &\left\langle \left\{ 1 - \frac{g^2}{4N} \sum_a \sum_{x_4, x_4'} A_4^a(x_4) A_4^a(x_4') + \cdots \right\} \right. \\
&\left. \left\{ 1 - \frac{g^2}{4N} \sum_b \sum_{y_4, y_4'} A_4^b(N_\tau - y_4) A_4^b(N_\tau - y_4') + \cdots \right\} \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\left\langle 1 - \frac{g^2}{4N} \sum_a \sum_{x_4, x_4'} A_4^a(x_4) A_4^a(x_4') \right. \\
&- \frac{g^2}{4N} \sum_b \sum_{y_4, y_4'} A_4^b(N_\tau - y_4) A_4^b(N_\tau - y_4') \\
&\left. + \frac{g^4}{16N^2} \sum_{a,b} \sum_{x_4, x_4'} \sum_{y_4, y_4'} A_4^a(x_4) A_4^a(x_4') A_4^b(N_\tau - y_4) A_4^b(N_\tau - y_4') + \cdots \right\rangle, \quad (3.47)
\end{aligned}
$$

wobei die gleichen Schritte benutzt wurden wie in der Entwicklung des Polyakov-Loops in Kapitel 3.4.2. Die Terme der Ordnung g^3 und g^4 aus der Entwicklung des Polyakov--Loops wurden wieder weggelassen. Dieser Ausdruck ist somit konsistent für die Wechselwirkungsterme zwischen den beiden Quarks bis zur Ordnung g^4, die Selbstwechselwirkungsterme der Ordnung g^4 sind nicht gezeigt.

Der Erwartungswert auf der rechten Seite der letzten Gleichung von (3.47) kann nun für die einzelnen Summanden wie schon beim Polyakov-Loop durch Fourier-Transformation der Eichfelder ausgeführt werden. Der zweite und dritte Summand sind unter dem Erwartungswert gleich und aus (3.44) bekannt, der letzte kann nach dem gleichen

Verfahren berechnet werden. Man erhält

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{y})\right\rangle &= 1 - g^2 \frac{N^2-1}{4N} \sum_p \delta_{p_4,0} \frac{1}{D(p)} \\ &\quad + g^4 \frac{N^2-1}{4N^2} \left(\sum_p \delta_{p_4,0} \frac{1}{D(p)} \right)^2 \\ &\quad + g^4 \frac{N^2-1}{2N^2} \left[\sum_p \delta_{p_4,0} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{D(p)} \right]^2 + \ldots . \end{aligned} \tag{3.48}$$

Der zweite und dritte Summand stellen Selbstwechselwirkungen der Quarks dar, der vierte Term ist in der Entwicklung der erste, der eine Wechselwirkung der Quarks untereinander beschreibt. Für den Quadratterm lässt sich die Fourier-Transformation darin durchführen. In der Kontinuumstheorie ist das Ergebnis einfach ein Coulomb-artiger Ausdruck, auf dem Gitter treten wegen des abweichenden Gitterpropagators (3.41) zusätzlich noch Korrekturen dazu auf. Formt man (3.9) um zu

$$\beta F_{nm} = -\ln \left(\frac{1}{C} \left\langle \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_i) \prod_{j=1}^{m} \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{y}_j) \right\rangle \right), \tag{3.49}$$

findet man wegen $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots$ für $-1 < x \leq 1$, dass in führender Ordnung der Kontinuumstheorie für $N = 3$

$$\frac{F_{q\bar{q}}}{T} = -\frac{4}{9} \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{R^2} + \ldots \tag{3.50}$$

gilt. Wegen des negativen Vorzeichens sind Bindungszustände möglich. Zur Wechselwirkung ist hier, wie man am Quadrat des letzten Terms in (3.48) erkennt, der Austausch zweier Gluonen nötig.

Die Entwicklung des Singlett-Zustands bietet einen zusätzlichen Term.

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{Tr}\, \left(L(\mathbf{x}) L^\dagger(\mathbf{y}) \right) \right\rangle \\ = &\left\langle \mathrm{Tr}\, \left(\exp\left\{ ig \sum_{x_4} A_4^a(\mathbf{x}, x_4) \frac{\lambda^a}{2} \right\} \exp\left\{ -ig \sum_{y_4} A_4^b(\mathbf{y}, N_\tau - y_4) \frac{\lambda^b}{2} \right\} \right) \right\rangle \\ = &\left\langle \mathrm{Tr}\, \left(\left\{ 1 + ig \sum_{x_4} A_4^a(\mathbf{x}, x_4) \frac{\lambda^a}{2} - \frac{g^2}{2} \left(\sum_{x_4} A_4^a \frac{\lambda^a}{2} \right)^2 + \cdots \right\} \right.\right. \\ &\left.\left. \left\{ 1 - ig \sum_{y_4} A_4^b(\mathbf{y}, N_\tau - y_4) \frac{\lambda^b}{2} - \frac{g^2}{2} \left(\sum_{y_4} A_4^b \frac{\lambda^b}{2} \right)^2 + \cdots \right\} \right) \right\rangle . \end{aligned} \tag{3.51}$$

Im Gegensatz zu (3.47) fallen die Terme linear in g jetzt noch nicht unter der Spur weg, sondern können noch mit denen des anderen Quarks wechselwirken.

$$
\begin{aligned}
= \quad & \Bigg\langle \mathrm{Tr}\,\Bigg(\Bigg\{1 + ig\sum_{x_4} A_4^a(\mathbf{x},x_4)\frac{\lambda^a}{2} - ig\sum_{y_4} A_4^b(\mathbf{y},N_\tau - y_4)\frac{\lambda^b}{2} \\
& + g^2 \sum_{x_4,y_4} A_4^a(\mathbf{x},x_4)A_4^b(\mathbf{y},N_\tau - y_4)\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2} \\
& - \frac{g^2}{2}\left(\sum_{x_4} A_4^a\frac{\lambda^a}{2}\right)^2 - \frac{g^2}{2}\left(\sum_{y_4} A_4^b\frac{\lambda^b}{2}\right)^2 + \cdots\Bigg\}\Bigg)\Bigg\rangle .
\end{aligned}
$$

Man erhält nun einen Wechselwirkungsterm zwischen den Quarks in der Ordnung g^2. Höhere Terme werden hier nicht mehr gezeigt, da man hier nur an der niedrigsten Ordnung der Wechselwirkung interessiert ist. Der zweite und dritte Term fallen wieder unter der Spur weg. Man findet so

$$
\begin{aligned}
= \quad & 1 - \frac{g^2}{2N}\sum_a \sum_{x_4,x_4'} \left\langle A_4^a(x_4)A_4^a(x_4')\right\rangle \\
& + \frac{g^2}{2N}\sum_{a,b}\sum_{x_4,y_4}\Big\langle A_4^a(\mathbf{x},x_4)A_4^b(\mathbf{y},N_\tau - y_4)\Big\rangle \\
& + \cdots .
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Der nun zusätzlich auftretende Term in der Ordnung g^2 ergibt nach Durchführung der Fourier-Transformation im Kontinuum wie schon in (3.48) einen Coulomb-artigen Ausdruck, die Übrigen sind analog zur farbgemittelten Entwicklung und man erhält

$$
\begin{aligned}
\Big\langle \mathrm{Tr}\,\Big(L(\mathbf{x})L^\dagger(\mathbf{y})\Big)\Big\rangle \quad = \quad & 1 - g^2\frac{N^2-1}{4N}\sum_p \delta_{p_4,0}\frac{1}{D(p)} \\
& + g^2\frac{N^2-1}{2N}\sum_p \delta_{p_4,0}\frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{D(p)} .
\end{aligned}
$$

Somit gilt für die freie Energie des Singlett-Zustands analog zu (3.50) in der SU(3)

$$
\frac{F^1_{q\bar{q}}}{T} = -\frac{4}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R} + \ldots . \tag{3.53}
$$

Diese Wechselwirkung ist wegen des negativen Vorzeichens anziehend, wie man es für den physikalischen Zustand auch erwartet. Im Gegensatz zum farbgemittelten System (3.50) ist im Singlett-Zustand bereits Ein-Gluonen-Austausch möglich.

3.4.4. Das qq-System

Für das System aus zwei Quarks sind nun analoge Berechnungen möglich, wobei nur $L^\dagger$ durch L ersetzt werden muss. Für das farbgemittelte System hat dies aber keinen Effekt, da die so auftretenden Vorzeichen in der Reihenentwicklung gegenüber (3.48) wegfallen. Es ergibt sich also genauso

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{y})\rangle &= 1 - g^2 \frac{N^2-1}{4N} \sum_p \delta_{p_4,0} \frac{1}{D(p)} \\ &\quad + g^4 \frac{N^2-1}{4N^2} \left(\sum_p \delta_{p_4,0} \frac{1}{D(p)} \right)^2 \\ &\quad + g^4 \frac{N^2-1}{2N^2} \left[\sum_p \delta_{p_4,0} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{D(p)} \right]^2 + \cdots , \end{aligned} \tag{3.54}$$

wodurch man störungstheoretisch für die farbgemittelte Energie im Kontinuum in niedrigster Ordnung g für die SU(3) die Beziehung

$$\frac{F_{qq}}{T} = \frac{F_{q\bar{q}}}{T} = -\frac{4}{9} \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{R^2} + \cdots . \tag{3.55}$$

erhält. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{Tr} \left(L(\mathbf{x}) L(\mathbf{y}) \right) \right\rangle &= 1 - g^2 \frac{N^2-1}{4N} \sum_p \delta_{p_4,0} \frac{1}{D(p)} \\ &\quad - g^2 \frac{N^2-1}{2N} \sum_p \delta_{p_4,0} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{D(p)} , \end{aligned} \tag{3.56}$$

womit man mit (3.20) für die freie Energie des Tripletts im Kontinuum in niedrigster Ordnung g der SU(3)

$$\frac{F^3_{qq}}{T} = -\frac{2}{3} \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{R} + \cdots \tag{3.57}$$

findet, was wegen des Vorzeichens des R^{-1}-Terms anziehend ist. Dies mag zunächst erstaunen, da aus der Natur kein *Diquark* bekannt ist. Dieser Zustand ist aber auch nicht farblos und kommt daher im Vakuum nicht als isolierter Zustand eines Hadrons vor. Man vermutet aber das Auftreten von solchen gebundenen qq-Systemen bei sehr hohen Dichten, die dann als Cooper-Paare eine Farb-Supraleitung ermöglichen. Durch Vergleich mit (3.53) erkennt man die Beziehung

$$F^3_{qq} = \frac{1}{2} F^1_{q\bar{q}} . \tag{3.58}$$

Das Sextett liefert nach (3.20) im Kontinuum in niedrigster Ordnung g für die SU(3)

$$\frac{F^6_{qq}}{T} = +\frac{1}{3} \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{R} + \cdots , \tag{3.59}$$

was eine Abstoßung beschreibt.

3.4.5. Das qqq-System

In der Störungstheorie zerfällt das qqq-System in drei qq-Systeme, da in der SU(3) der Beitrag einer Drei-Gluon-Wechselwirkung aus Symmetriegründen verschwindet, wie nun gezeigt wird. Der Farbfaktor des zugehörigen Feynman-Grafen lautet

$$\frac{1}{3!}\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\lambda^a_{ij}\lambda^b_{kl}\lambda^c_{mn}f^{abc}, \tag{3.60}$$

wobei f^{abc} die Strukturkonstanten der SU(3) darstellt. Unter Austausch zweier Farbindizes, z.B. a und b, ist der gesamte Ausdruck symmetrisch bis auf die Strukturkonstante, die total antisymmetrisch ist. Somit muss der Farbfaktor verschwinden [10]. Es gibt daher in der schwachen Kopplungsentwicklung für die Wechselwirkung dreier Quarks keine irreduzible Dreikörperkraft.

Definiert man einen effektiven Abstand für das farbgemittelte System

$$\frac{1}{\tilde{R^2}} := \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{R_i^2}, \tag{3.61}$$

so dass für ein gleichseitiges Dreieck gerade $\tilde{R^2} = R^2$ gilt, so ergibt sich zusammen mit (3.55) für die farbgemittelte freie Energie im Kontinuum

$$\begin{aligned}\frac{F_{qqq}(\tilde{R^2})}{T} &= \sum_i \frac{F_{qq}(R_i)}{T} = \sum_i \frac{F_{q\bar{q}}(R_i)}{T}\\ &= -\frac{4}{9}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2\sum_i\frac{1}{R_i^2}\\ &= -\frac{4}{3}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{\tilde{R^2}}\end{aligned} \tag{3.62}$$

Man sieht hieran, dass zum Vergleich der freien Energien von Drei- und Zwei-Quark-Systemen nicht etwa Simulationen von qq-Systemen nötig sind, sondern auf die von $q\bar{q}$-Paaren zurückgegriffen werden kann, die bereits eingehend untersucht wurden [11].

Der total antisymmetrische Singlett-Zustand des qqq-Systems zerfällt störungstheoretisch in drei antisymmetrische qq-Paare, die sich nach (3.57) im Triplett-Zustand befinden. Definiert man analog zu (3.61) wieder einen effektiven Abstand

$$\frac{1}{\tilde{R}} := \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{R_i}, \tag{3.63}$$

so dass für ein gleichseitiges Dreieck gerade $\tilde{R} = R$ gilt, so erhält man im Kontinuum für die freie Energie des Singletts

$$\frac{F^1_{qqq}(\tilde{R})}{T} = \sum_i \frac{F^3_{qq}(R_i)}{T} = -2\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{\tilde{R}}, \tag{3.64}$$

was wegen des Vorfaktors -2 eine vergleichbar starke Anziehung darstellt. Dies erwartet man auch, da das Singlett den in der Natur vorkommenden Bindungszustand eines Baryons beschreibt.

Genauso wie für das Singlett muss das total symmetrische Dekuplett des qqq-Systems aus den symmetrischen Zuständen des qq-Systems – dem Sextett – zusammengesetzt sein, so dass man für die freie Energie im Kontinuum

$$\frac{F_{qqq}^{10}(\tilde{R})}{T} = \sum_i \frac{F_{qq}^{6}(R_i)}{T} = +\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{\tilde{R}} \tag{3.65}$$

findet. Die beiden Oktette des qqq-Systems stellen eine Mischung aus symmetrischen und antisymmetrischen Zuständen dar, so dass ihre Zusammensetzung aus den freien Energien des Tripletts und Sextetts des qq-Systems nicht sofort klar ist. Die freien Energien der beiden Oktette für ein gleichseitiges System müssen aber gleich sein. Nach (3.32) gilt für das qqq-System

$$\begin{aligned} \exp\big(-\beta F_{qqq}(R)\big) \quad = \quad & \frac{1}{27}\exp\big(-\beta F_{qqq}^{1}(R)\big) + \frac{8}{27}\exp\big(-\beta F_{qqq}^{8}(R)\big) \\ & +\frac{8}{27}\exp\big(-\beta F_{qqq}^{8'}(R)\big) + \frac{10}{27}\exp\big(-\beta F_{qqq}^{10}(R)\big), \end{aligned} \tag{3.66}$$

was für $RT \gg 1$ zu

$$F_{qqq}(R) = \frac{1}{27}F_{qqq}^{1}(R) + \frac{8}{27}F_{qqq}^{8}(R) + \frac{8}{27}F_{qqq}^{8'}(R) + \frac{10}{27}F_{qqq}^{10}(R) \tag{3.67}$$

wird. Da die farbgemittelte freie Energie des qqq-Systems keinen R^{-1}-Term aufweist, müssen sich die gewichteten Beiträge aus den einzelnen Symmetriezuständen in niedrigster Ordnung wegheben. Gesucht ist also der Faktor c der freien Energie des Oktetts eines gleichseitigen Dreiecks,

$$\frac{F_{qqq}^{8}}{T} = c\,\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R} + \dots, \tag{3.68}$$

so dass mit (3.67) gilt

$$1 \cdot (-2) + 2 \cdot 8 \cdot c + 10 \cdot 1 = 0, \tag{3.69}$$

was genau für $c = -\frac{1}{2}$ erfüllt ist. Somit findet man für die freie Energie eines Oktett-Zustands mit gleichseitiger Geometrie im Kontinuum

$$\frac{F_{qqq}^{8}}{T} = -\frac{1}{2}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R} + \dots, \tag{3.70}$$

was eine anziehende Wechselwirkung beschreibt.

Die Ergebnisse dieser intuitiven Überlegungen lassen sich auch streng an den freien Energien der Symmetriezustände (3.28) – (3.31) zeigen. Gesucht ist nur der Wechselwirkungsterm zweier Quarks niedrigster Ordnung. Dieser wird erzeugt durch

$$\mathrm{Tr}\,(L_i L_j), \tag{3.71}$$

der im Erwartungswert zu

$$1 + \frac{cg^2}{R_{ij}} \quad \text{mit} \quad c = \frac{4}{3}\frac{1}{4\pi} \tag{3.72}$$

wird. Terme der Form $\mathrm{Tr}\,(L_i L_j L_k)$ zerfallen in der hier betrachteten Ordnung in drei Ausdrücke der Art (3.71), der Term $\mathrm{Tr}\,L_1 \mathrm{Tr}\,L_2 \mathrm{Tr}\,L_3$ sowie Einzelspuren $\mathrm{Tr}\,L_i$ liefern nur eine 1. Betrachtet man den Ausdruck für die Dekuplett-Energie (3.28), so erhält man nach Ausführen des Erwartungswerts

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\beta F^{10}_{qqq}\right) &= \frac{1}{60}\left(27\cdot 1 + 9\sum_{i<j}\left(1+\frac{cg^2}{R_{ij}}\right) + 2\cdot 3\left(1+\sum_{i<j}\frac{cg^2}{R_{ij}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{60}\left(27 + 9\cdot 3 + 2\cdot 3 + 45\frac{cg^2}{\tilde{R}}\right)\\
&= 1 + \frac{3}{4}\frac{cg^2}{\tilde{R}}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Nach Entwicklung des Logarithmus und Einsetzen von c erhält man also

$$\frac{F^{10}_{qqq}(\tilde{R})}{T} = +\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{\tilde{R}}, \tag{3.74}$$

in Übereinstimmung mit (3.65). Der Singlett-Term des qqq-Systems liefert nach (3.29)

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\beta F^{1}_{qqq}\right) &= \frac{1}{6}\left(27\cdot 1 - 9\sum_{i<j}\left(1+\frac{cg^2}{R_{ij}}\right) + 2\cdot 3\left(1+\sum_{i<j}\frac{cg^2}{R_{ij}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(27 - 9\cdot 3 + 2\cdot 3 - 9\frac{cg^2}{\tilde{R}}\right)\\
&= 1 - \frac{3}{2}\frac{cg^2}{\tilde{R}},
\end{aligned} \tag{3.75}$$

was wie in (3.64) zu

$$\frac{F^{1}_{qqq}(\tilde{R})}{T} = -2\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{\tilde{R}} \tag{3.76}$$

wird. Für das erste Oktett findet man nach (3.30)

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\beta F^{8}_{qqq}\right) &= \frac{1}{24}\left(27\cdot 1 + 9\cdot\left(1+\frac{cg^2}{R_{23}}\right) - 9\cdot\left(1+\frac{cg^2}{R_{12}}\right) - 3\left(1+\sum_{i<j}\frac{cg^2}{R_{ij}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{24}\left(27+9-9-3+6\frac{cg^2}{R_{23}} - 12\frac{cg^2}{R_{12}} - 3\frac{cg^2}{R_{13}}\right)\\
&= 1+\frac{1}{4}\frac{cg^2}{R_{23}} - \frac{1}{2}\frac{cg^2}{R_{12}} - \frac{1}{8}\frac{cg^2}{R_{13}}\\
&= 1+\frac{1}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{23}} - \frac{2}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{6}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{13}},
\end{aligned}\tag{3.77}$$

und analog nach (3.31) für das zweite Oktett

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\beta F^{8'}_{qqq}\right) &= \frac{1}{24}\left(27\cdot 1 + 9\cdot\left(1+\frac{cg^2}{R_{12}}\right) - 9\cdot\left(1+\frac{cg^2}{R_{23}}\right) - 3\left(1+\sum_{i<j}\frac{cg^2}{R_{ij}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{24}\left(27+9-9-3+6\frac{cg^2}{R_{12}} - 12\frac{cg^2}{R_{23}} - 3\frac{cg^2}{R_{13}}\right)\\
&= 1+\frac{1}{4}\frac{cg^2}{R_{12}} - \frac{1}{2}\frac{cg^2}{R_{23}} - \frac{1}{8}\frac{cg^2}{R_{13}}\\
&= 1+\frac{1}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{12}} - \frac{2}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{6}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{13}}.
\end{aligned}\tag{3.78}$$

Für gleichseitige Dreiecke ergibt sich dann

$$\exp\left(-\beta F^{8}_{qqq}\right) = \exp\left(-\beta F^{8'}_{qqq}\right) = 1-\frac{1}{2}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R},\tag{3.79}$$

was nach der Entwicklung des Logarithmus wieder (3.70) gibt. Eine Zusammenstellung der Ergebnisse für die freien Energien in der Störungstheorie bietet Anhang A.4.

3.4.6. Der Grenzfall kleiner Abstände

Mit den gefundenen Beziehungen kann nun das Verhalten der farbgemittelten freien Energien für kleine Abstände untersucht werden. Mit (3.16) und (3.53) ergibt sich für das $q\bar{q}$-System in niedrigster Ordnung Störungstheorie im Kontinuum

$$\begin{aligned}
\exp\big(-\beta F_{q\bar{q}}(R)\big) &= \frac{1}{9}\exp\big(-\beta F^{1}_{q\bar{q}}(R)\big) + \frac{8}{9}\exp\big(-\beta F^{8}_{q\bar{q}}(R)\big)\\
&= \frac{1}{9}\exp\left(-\beta\left(-\frac{4}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R}\right)\right) + \frac{8}{9}\exp\left(-\beta\frac{1}{6}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R}\right),
\end{aligned}\tag{3.80}$$

was für $R \to 0$, also dem Grenzfall kleiner Abstände, wegen der Vorzeichen in den Exponenten vom Singlett-Term dominiert wird. Somit erhält man für $RT \gg 1$

$$\lim_{R\to 0} F_{q\bar{q}} = F^1_{q\bar{q}} + T\ln 9. \tag{3.81}$$

Genauso kann für das qq-System vorgegangen werden. Mit (3.19), (3.57) und (3.59) bekommt man

$$\begin{aligned} \exp\big(-\beta F_{qq}(R)\big) &= \frac{1}{3}\exp\big(-\beta F^3_{qq}(R)\big) + \frac{2}{3}\exp\big(-\beta F^6_{qq}(R)\big) \\ &= \frac{1}{3}\exp\left(-\beta\left(-\frac{2}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R}\right)\right) + \frac{2}{3}\exp\left(-\beta\frac{1}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R}\right), \end{aligned} \tag{3.82}$$

was aus den gleichen Gründen für kleine Abstände zu

$$\lim_{R\to 0} F_{qq} = F^3_{qq} + T\ln 3 \tag{3.83}$$

wird. Wegen (3.58) findet man für die farbgemittelten Ausdrücke bis auf eine temperaturabhängige Konstante den Zusammenhang

$$F_{qq} = \frac{1}{2}F_{q\bar{q}} \tag{3.84}$$

für kleine Abstände bei hohen Temperaturen in niedrigster Ordnung Störungstheorie im Kontinuum.

Die farbgemittelte freie Energie des qqq-System wird dementsprechend dominiert von seinem Singlettterm. Es gilt also

$$\lim_{R\to 0} F_{qqq} = F^1_{qqq} + T\ln 27 \tag{3.85}$$

und damit über (3.64) und (3.58)

$$\begin{aligned} \lim_{R\to 0} F_{qqq}(\tilde{R}) &= \sum_i F^3_{qq}(R_i) + T\ln 27 \\ &= \frac{1}{2}\sum_i F^1_{q\bar{q}}(R_i) + T\ln 27. \end{aligned} \tag{3.86}$$

3.5. Ansätze für die freie Energie des $q\bar{q}$-Systems

Die störungstheoretischen Ableitungen der freien Energien gelten wegen der Konvergenz der Störungsreihe nur für schwache Kopplung und damit bei kleinen Abständen. Für sehr große Abstände kann eine Entwicklung in $\frac{1}{g}$ durchgeführt werden, die *starke Kopplungsentwicklung*. Für den mittleren Abstandsbereich jedoch ist kein analytisches Verfahren bekannt, das die Ableitung der freien Energie erlaubt. Man ist daher gezwungen, auf phänomenologische Modelle zurückzugreifen und diese an Ergebnissen von Simulationen zu überprüfen. Diese werden nun für das $q\bar{q}$-System vorgestellt.

In der Deconfinement-Phase erwartet man wegen der asymptotischen Freiheit der Quarks ein Quark-Gluon-Plasma vorzufinden, das sich bei hohen Temperaturen wie ein Gas schwach wechselwirkender Quarks und Gluonen verhält. In Analogie zu heißen Plasmen in der QED würde dann für die freie Energie ein *Debye-Screening* der Form

$$F_{q\bar{q}}(R,T) = -\frac{\alpha(T)}{R^d} e^{-\mu(T)R} \tag{3.87}$$

auftreten, wobei $\mu(T)$ *Screening-Masse* genannt wird. Der Grund ist wie in der QED die Polarisation des umgebenden Mediums, wodurch das Farbfeld abgeschirmt wird. Zwar tauchen in der SU(3)-reinen-Eichtheorie keine dynamischen Fermionen auf, die Polarisationseffekte bewirken können, dafür aber Gluonen, die ja an der Farbwechselwirkung teilnehmen und hier diese Aufgabe übernehmen. Nahe oberhalb der kritischen Temperatur T_c erwartet man als dominanten Effekt Ein-Gluon-Austausch und damit $d = 1$, für größere Temperaturen Zwei-Gluon-Austausch mit $d = 2$.

In der Confinement-Phase beobachtet man, dass die freie Energie bei großen Abständen linear mit dem Abstand wächst. Allgemein erhält man

$$F_{q\bar{q}}(R,T) = V_0 - \frac{\alpha(T)}{R} + \sigma(T)R, \tag{3.88}$$

wobei V_0 für den divergenten Beitrag der Selbstwechselwirkung der Quarks steht und $\sigma(T)$ ein temperaturabhängiger Steigungsterm ist. In der *Stringtheorie* wird dies so gedeutet, dass sich die chromoelektromagnetischen Feldlinien zwischen einem Quark-Anti-Quark-Paar wegen der Wechselwirkung der Gluonen untereinander zu einer eindimensionalen *Flussröhre* (engl. flux tube) zusammenziehen, dem *String*. Die *Stringspannung* ist dann $\sigma(T)$. Die Dynamik des Quark-Anti-Quark-Systems wird durch die Bewegung dieses Objekts dominiert. Mathematisch erhält man dies aus einer starken Kopplungsentwicklung von Polyakov-Loop-Korrelationen für $T \neq 0$ [12].

Gao [13] berechnete die freie Energie eines Quark-Anti-Quark-Paares bei endlicher Temperatur und Abstand aus einem String-Modell zu

$$\begin{aligned} F_{q\bar{q}}(R,T) &= \left[\sigma(0) - \frac{\pi}{3}T^2 + \frac{2}{3}T^3 \arctan\left(\frac{1}{2RT}\right)\right] R \\ &\quad - \left[\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\arctan(2RT)\right]\frac{1}{R} \\ &\quad - \frac{T}{2}\ln\left(1 + (2RT)^2\right) \\ &\quad + V_0, \end{aligned} \tag{3.89}$$

wobei $\sigma(0)$ für die Stringspannung bei $T = 0$ steht. Der Coulomb-artige Term $-\frac{\pi}{12R}$ taucht dabei in jedem String-Modell auf. Für kleine Temperaturen $T \ll \sqrt{\sigma(0)}$ und große Abstände $R \to \infty$ geht dies in den einfacheren Ausdruck

$$F_{q\bar{q}} = V_0 + \left(\sigma(0) - \frac{\pi}{3}T^2 + O\left(T^3\right)\right) R + T\ln(2RT) + O(R^{-1}) \tag{3.90}$$

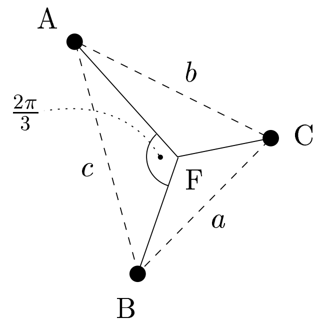


Abbildung 3.2.: Zum Y-Ansatz. F bezeichnet den Fermat-Punkt.

über [14][15]. Für $T = 0$ vereinfacht sich (3.89) sogar zu [16]

$$F_{q\bar{q}} = V_0 + \sigma(0)R - \frac{\pi}{12R} + O(R^{-3}). \tag{3.91}$$

3.6. Ansätze für die freie Energie des qqq-Systems

Um nun Ansätze für Drei-Quark-Systeme zu finden, muss zunächst geklärt werden, welcher Abstandsbegriff für sie der Richtige ist. Aus störungstheoretischen Berechnungen erwartet man für kurze Abstände auch hier paarweise eine Coulomb-artige Wechselwirkung der Quarks, bei großen Abständen sollte sich unterhalb der kritischen Temperatur wieder eine Flussröhre zwischen den Quarks ausbilden, die aber nun zwei verschiedene Geometrien besitzen kann. Zum einen könnte sich eine Flussröhre zwischen jedem Quarkpaar ausbilden, so dass sich die Strings auf den Kanten des Dreiecks befinden, das die Quarks bilden. Man spricht daher auch vom *Δ-Ansatz*. Die freie Energie ist dann einfach die Summe der freien Energien der einzelnen qq-Systeme, aus denen das Gesamtsystem besteht, also

$$F_\Delta(R_{ij}, T < T_c) = -\alpha_\Delta(T) \sum_{i<j} \frac{1}{R_{ij}} + \sigma_\Delta(T) U + K \sum_{i<j} \ln(2R_{ij}T) + C, \tag{3.92}$$

wobei R_{ij} den Abstand zwischen dem i-ten und j-ten Quark, $U = \sum_{i<j} R_{ij}$ den Umfang des Dreiecks und C den Beitrag der Selbstenergien der einzelnen Quarks beschreibt. Aus gruppentheoretischen Überlegungen erwartet man, dass für die Stringspannung gerade

$$\sigma_\Delta(T) = \frac{1}{2}\sigma_{q\bar{q}}(T) \tag{3.93}$$

gilt [10], wobei $\sigma_{q\bar{q}}(T)$ die Stringspannung des $q\bar{q}$-Systems bezeichnet.

Andererseits wäre es aufgrund der in der Quantenchromodynamik auftretenden Gluon-Gluon-Wechselwirkung aber auch denkbar, dass sich die Flussröhren, die von den einzelnen Quarks ausgehen, in einem Punkt treffen und eine Y-förmige Gestalt annehmen. Man spricht hier vom *Y-Ansatz*. Da die freie Energie proportional zur Länge der Flussröhre ist, erwartet man den Kreuzungspunkt am *Steiner-* oder *Fermat-Punkt* des

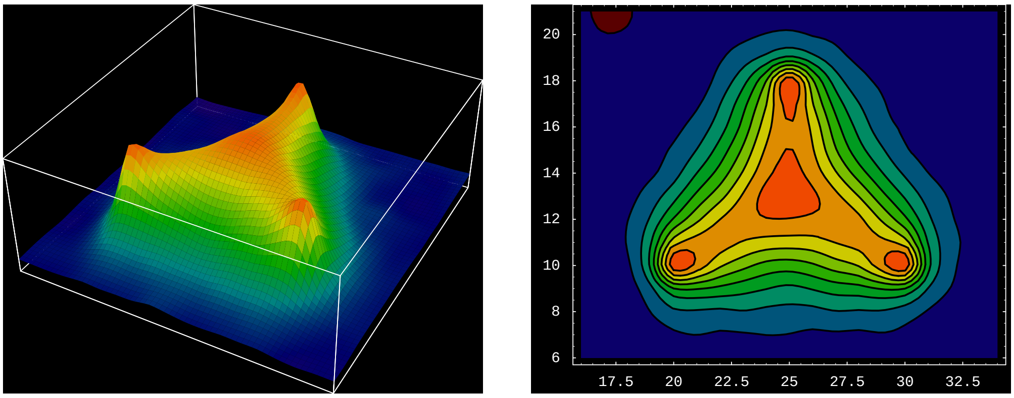


Abbildung 3.3.: Flussröhre mit Y-förmiger Geometrie zwischen drei Quarks in maximal abelscher Eichung in voller QCD [17].

Dreiecks [18][19], der denjenigen Punkt bezeichnet, zu dem die Summe der Abstände zu den Ecken des Dreiecks minimal wird. Abbildung 3.2 zeigt eine grafische Darstellung, wobei wegen der Übersichtlichkeit für die Quarkabstände andere Bezeichnungen als in (3.92) gewählt wurden. Ist keiner der Innenwinkel des Dreiecks größer als $2\pi/3$, dann ist die minimale Summe der Abstände gegeben durch

$$L = \left[\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.94)$$

Dort betragen auch die Winkel zwischen jeweils zwei Flussröhren genau $2\pi/3$. Für stumpfere Dreiecke, bei denen ein Innenwinkel größer als $2\pi/3$ ist, findet man für die minimale Länge des Strings

$$L = a + b + c - \max(a, b, c). \quad (3.95)$$

Der Fermatpunkt fällt dann mit dem Ort eines Quarks zusammen. Die Länge L wird auch *Fermat-Abstand* genannt. Die freie Energie des Y-Ansatzes setzt sich nun aus dem störungstheoretischen Coulomb-Term und dem Y-String-Term zusammen

$$F_Y(R_{ij}, T) = -\alpha_Y(T)\sum_{i<j}\frac{1}{R_{ij}} - \frac{3\pi}{16L} + \sigma_Y(T)L + C, \quad (3.96)$$

wobei der zweite Summand aus dem Stringmodell für drei Quarks abgeleitet wird [20] und analog dem Coulomb-artigen Term $-\frac{\pi}{12R}$ aus (3.89) des Zwei-Quark-Stringmodells gewonnen wird. Die Stringspannung $\sigma_Y(T)$ ist hier identisch mit der des $q\bar{q}$-Systems. Das Auftauchen eines temperaturabhängigen logarithmischen Terms wie in (3.90) wird ebenfalls erwartet, seine Ableitung steht jedoch noch aus.

Zur Illustration des Y-Ansatzes zeigt Abbildung 3.3 eine Messung der Wirkungsdichte eines gleichseitigen qqq-Systems in maximal abelscher Eichung der vollen Quantenchromodynamik. Man erkennt einen klaren Verbindungspunkt der Flussröhren in der Mitte der drei Quarks [17].

Für die Deconfinement-Phase lässt sich der Δ-Ansatz übertragen, indem man in den Debye-Term des $q\bar{q}$-Systems (3.87) die Abstände R_{ij} einfügt und summiert

$$F_\Delta(R_{ij}, T > T_c) = -\alpha(T) \sum_{i<j} \frac{1}{R_{ij}^d} e^{-\mu(T) R_{ij}}. \tag{3.97}$$

Da sich oberhalb von T_c kein String ausbilden kann, existiert kein Pendant des Y-Ansatzes in der Deconfinement-Phase.

4. Numerische Methoden

Um Erwartungswerte von Observablen auf dem Gitter berechnen zu können, müssen Integrale des Typs (1.29) ausgewertet werden. In der Gittereichfeldtheorie wird dieses in der quenched approximation zu

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{n,\mu} \mathrm{d}U_\mu(n)\, O[U]\, e^{-S_G[U]}, \tag{4.1}$$

was im allgemeinen analytisch überhaupt nicht und numerisch mit den üblichen Integrationsmethoden nicht mehr in vertretbarer Zeit berechenbar ist. Einen Ausweg bietet das stochastisches Verfahren der Monte-Carlo-Integration, das einen erwartungstreuen Schätzwert für das fragliche Integral in vergleichbar kurzer Zeit liefert.

4.1. Monte-Carlo-Simulationen

4.1.1. Monte-Carlo-Integration

Man betrachtet zunächst eindimensionale Integrale der Art

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Bei der Monte-Carlo-Integration nutzt man nun aus, dass sich diese durch den Erwartungswert der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ ausdrücken lassen,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\langle f \rangle. \tag{4.3}$$

Dieser Erwartungswert kann geschätzt werden, indem man den Mittelwert der Funktionswerte von f an N zufällig ausgewählten Stellen im Intervall $[a, b]$ berechnet,

$$\langle f \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i), \tag{4.4}$$

wobei die $x_i \in [a, b]$ gleichverteilt sind. Dieses Verfahren wird auch als *simple sampling* bezeichnet. Der Fehler dieser Schätzung hängt sowohl von der Anzahl N der Zufallszahlen als auch von der Varianz der Funktion f in dem betrachteten Intervall ab und ist nach dem zentralen Grenzwertsatz für große N um den wahren Erwartungswert Gauß-verteilt

$$\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(f), \tag{4.5}$$

wobei $\sigma(f)$ die Streuung der Funktionswerte von f im betrachteten Intervall bezeichnet. Durch Erhöhung der Statistik N fällt der Fehler also mit $\sqrt{N}$ ab, auch dann, wenn das Integral mehrdimensional ist. Damit zeigt sich bereits die Überlegenheit der Monte-Carlo-Integration für hochdimensionale Integrale gegenüber anderen numerischen Integrationsmethoden, wie z.B. der Trapez-Regel, deren Fehler mit $N^{2/d}$ abfällt, wobei d die Anzahl der Dimension des Integrals und N der Anzahl der (gleichmäßig verteilten) Stützstellen darstellt. Somit gewinnt die Monte-Carlo-Integration gegen die Trapez-Regel bereits für $d = 5$.

Einen anderen Angriffspunkt zur Fehlerreduzierung als die bloße Erhöhung der Statistik bietet die Streuung der Funktion $\sigma(f)$ im fraglichen Intervall. Findet man eine Funktion $g(x)$ und eine Zufallsverteilung $\rho(x)$, so dass für $x \in [a, b]$ gilt

$$f(x) = \rho(x)g(x) \tag{4.6}$$

gilt, so wird aus (4.3)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \rho(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= (b-a)\langle g\rangle_\rho \\ &\approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i), \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei die $x_i \in [a, b]$ die Verteilung $\rho(x)$ besitzen. Der Fehler der Integration ist dann wie (4.5)

$$\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(g). \tag{4.8}$$

Wählt man die Funktion $\rho(x)$ geschickt, nämlich so, dass $\rho(x)$ etwa so variiert wie $f(x)$, ist die Streuung $\sigma(g)$ viel geringer und damit auch der Fehler der Schätzung (4.8). Anschaulich ist dies auch klar, da dann durch die Gewichtungsfunktion $\rho(x)$ die Stützstellen x_i bevorzugt dorthin fallen, wo auch $f(x)$ groß ist und somit einen großen Beitrag zu (4.4) liefert. Die optimale Verteilung im Hinblick auf die Varianzreduzierung von g ist natürlich $\rho(x) \propto f(x)$ und so $g(x) = \text{konst}$, wodurch $\sigma(g) = 0$ wird. Dann war aber das Problem schon vorher gelöst und eine Computerintegration überflüssig. Die Methode mit $\rho(x) \neq \text{konst}$ wird *importance sampling* genannt, wählt man $\rho(x) = \text{konst}$, die x_i also gleichverteilt, so geht man wieder – bis auf eine Konstante – mit simple sampling vor.

4.1.2. Stochastische Dynamik

Um nun das Integral (4.1) zu berechnen, benutzt man, dass der Normierungsfaktor Z^{-1} in das Integral hinein gezogen werden kann,

$$\langle O\rangle = \int \prod_{n,\mu} \mathrm{d}U_\mu(n)\, O[U]\, \frac{e^{-S_G[U]}}{Z}. \tag{4.9}$$

Der Exponentialterm

$$P(U) = \frac{e^{-S_G[U]}}{Z} \tag{4.10}$$

kann als Boltzmann-Verteilung eines statistischen Systems aufgefasst werden, die es im thermodynamischen Gleichgewicht annimmt. Es bietet sich natürlich an, $P(U)$ als Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Monte-Carlo-Integration von (4.9) mit importance sampling zu benutzen. Allerdings enthält die Zustandssumme Z das Integral über alle Konfigurationen des Systems, das ähnlich aufwendig wie (4.9) zu berechnen und daher nicht bekannt ist.

Einen Ausweg bietet die Ergodentheorie der statistischen Mechanik. Sie besagt, dass das Ensemblemittel einer Observable in einem System im thermodynamischen Gleichgewicht gleich ihrem zeitlichen Mittel ist, falls die Beobachtungszeit groß ist und die Dynamik des Systems es zulässt, jeden wesentlichen Zustand mit nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit anzunehmen.

Nun verwendet man bei Computersimulationen zur Berechnung des Zeitmittels nicht die physikalische Dynamik des Systems – in Form der Lösung der Bewegungsgleichung –, die es zur Verteilung (4.10) führt, sondern eine „erfundene" in der Form eines stochastischen Prozesses, dessen Eigenschaften aber die Einnahme der Verteilung (4.10) ebenfalls sicherstellen, und zwar ohne Z berechnen zu müssen. Als Dynamik versteht man in diesem Zusammenhang eine zeitliche Folge von Konfigurationen $\{U_i\}$ mit $i = 0, 1, \ldots$.

Genauer betrachtet man Prozesse, bei denen Übergänge zwischen den endlich oder abzählbar vielen Zuständen $\{S_i\}$ eines Systems zu diskreten Zeiten passieren. Ist X_t der Zustand des Systems zum Zeitpunkt t, so spricht man von einer *Markov-Kette*, wenn die Verteilung von X_t von allen vorangegangen unabhängig ist außer dem unmittelbaren Vorgänger X_{t-1}, also gilt

$$\begin{aligned} P(S_i \to S_j) &:= P(X_t = S_j | X_{t-1} = S_i) && (4.11)\\ &= P(X_t = S_j | X_{t-1} = S_{i_{t-1}}, \ldots, X_1 = S_{i_1}). && (4.12) \end{aligned}$$

Die Markov-Kette heißt *ergodisch*, wenn jeder Zustand von jedem Zustand mit nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann,

$$P(S_i \to S_j) > 0 \qquad \forall i, j\,. \tag{4.13}$$

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Markov-Kette eine Grenzverteilung $P(\{U_i\})$ – hier die gewünschte Boltzmann-Verteilung (4.10) – annimmt, ist die *detailed balance*

$$P(U_i)P(U_i \to U_j) = P(U_j \to U_i)P(U_j) \qquad \forall i, j\,. \tag{4.14}$$

Dies reduziert sich mit (4.10) auf

$$e^{-S_G[U_i]}P(U_i \to U_j) = P(U_j \to U_i)e^{-S_G[U_j]} \qquad \forall i, j\,, \tag{4.15}$$

worin die Zustandssumme Z nicht mehr auftaucht. Das Problem ist also darauf zurückgeführt, Übergangswahrscheinlichkeiten $P(U_i \to U_j)$ zu finden, die (4.15) erfüllen. Ist dies geschehen und die Konfigurationen besitzen die gewünschte Verteilung, das System also *thermalisiert*, kann nun das Integral (4.1) geschätzt werden, indem man

$$\langle O \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} O[U] \tag{4.16}$$

berechnet. Es gibt viele Algorithmen, die dies leisten, die meisten basieren auf *lokalen Updates*, bei denen nur ein einziger Link verändert wird. Durch einen *Sweep*, d.h. Ausführen des lokalen Updates nacheinander an jedem Link des Gitters, gewinnt man eine neue Konfiguration, so dass Ergodizität und detailed balance gewährleistet sind. Die für diese Arbeit benutzten Algorithmen werden nun vorgestellt.

4.1.3. Heatbath-Algorithmus

Die Idee dieses Algorithmus ist es, einen Link ins thermische Gleichgewicht mit seiner Umgebung zu bringen. Dies ist möglich, da der Unterschied der Wirkung zweier Konfigurationen K und K', die nur in einem Link U, U' verschieden sind, nur in den verallgemeinerten Plaquetten liegt, die diesen Link enthalten. Man kann also den entsprechenden Teil der Wirkung separieren

$$S = -\frac{\beta}{N} \mathrm{Re\,Tr}\,(U \cdot R) + C, \tag{4.17}$$

wobei R das geordnete Produkt derjenigen Links ist, die der gleichen verallgemeinerten Plaquette angehören wie U, und C die Wirkung der übrigen Links bezeichnet. R wird auch *verallgemeinertes Staple* genannt. Die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(K \to K') = \frac{1}{\kappa} \exp\left(-\frac{\beta}{N} \mathrm{Re\,Tr}\,(U' \cdot R)\right) \tag{4.18}$$

bzw. für die Rückrichtung

$$P(K' \to K) = \frac{1}{\kappa} \exp\left(-\frac{\beta}{N} \mathrm{Re\,Tr}\,(U \cdot R)\right) \tag{4.19}$$

erfüllt die Bedingung der detailed balance (4.14).

Für die in dieser Arbeit verwendete SU(3) existiert der *Pseudo-Heatbath-Algorithmus*, der auf Cabibbo und Marinari [21] zurückgeht. Dabei wird das Update eines SU(3)-Links auf Updates seiner SU(2)-Untergruppen abgewälzt, die durch drei verschiedene Einbettungen definiert sind:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{11} & a_{12} \\ 1 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & a_{12} \\ 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & 1 & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Man erzeugt nun nacheinander für zwei verschiedene Einbettungen jeweils eine SU(2)-Matrix a_1 und a_2. Der neue Link ist dann gegeben durch

$$U' = A_2 \cdot A_1 \cdot U, \tag{4.21}$$

wobei die A_i die SU(3)-Matrizen sind, die durch die aus (4.20) gewählte Einbettung der a_i hervorgehen. Die SU(2)-Matrizen besitzen dabei die Verteilung

$$\mathrm{d}P(a_i) = \exp\left(-\frac{\beta}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(a_i \cdot r_i)\right)\mathrm{d}a_i, \tag{4.22}$$

wobei r_1 die entsprechende Untermatrix von $U \cdot R$ und r_2 die von $A_1 \cdot U \cdot R$ bezeichnet. Ein Verfahren zur Erzeugung von SU(2)-Matrizen mit dieser Verteilung wurde zuerst von Creutz [22] angewandt und später von Kennedy und Pendleton [23] verbessert.

4.1.4. Overrelaxation-Algorithmus

Der Heatbath-Algorithmus vermag zwar die durch ihn erzeugten Konfigurationen nach hinreichend vielen Wiederholungen in die gewünschte Boltzmann-Verteilung zu führen, jedoch sind aufeinanderfolgende Konfigurationen wegen des lokalen Updates stark korreliert. Diese *Autokorrelation* hat zur Folge, dass der Phasenraum nur langsam durchschritten wird und daher sehr viele Konfigurationen zur Bildung eines verlässlichen Mittelwerts herangezogen werden müssen.

Die Idee des *Overrelaxation-Algorithmus* (Creutz [24]) ist es nun, die Konfiguration so zu ändern, dass große Schritte im Phasenraum ausgeführt werden ohne dabei ihre Wirkung zu ändern, was die Autokorrelation aufbricht.

Schreibt man die Wirkung der SU(N) wieder in der Form (4.17), so erreicht man dies, indem man den Link U durch

$$U' = U_0 U^{-1} U_0 \tag{4.23}$$

ersetzt. Dabei bezeichnet U_0 die SU(N)-Matrix, die allein die Wirkung minimiert, jedoch so, dass durch U' die Wirkung nicht geändert wird. Für die SU(2) ist die Summe der verallgemeinerten Staple R proportional zu

$$\bar{R} = \frac{1}{\sqrt{\det(R)}} R \quad \in \mathrm{SU}(2), \tag{4.24}$$

woraus sich für U_0 die einfache Wahl

$$U_0 = \sqrt{\det(R)}\, R^{-1} \tag{4.25}$$

anbietet. Wie schon beim Heatbath-Algorithmus wird der Overrelaxation-Algorithmus für die SU(3) auf ihre SU(2)-Untergruppen angewandt. Da dieses Verfahren mikrokanonisch ist, benutzt das Programm zur effektiven Erzeugung der Verteilung eine Kombination von Heatbath- und Overrelaxation-Verfahren, beim Thermalisieren der Konfigurationen den Heatbath-Algorithmus allein.

4.2. Fehleranalyse

Da eine Konfiguration durch den Erzeugungsmechanismus trotz Overrelaxation-Algorithmus immernoch korreliert zu ihrem Vorgänger ist, liefert die sonst übliche naive Schätzung des Erwartungswerts und des Fehlers einen zu kleinen Wert, da dabei immer von unkorrelierten Messungen ausgegangen wird. Die *Jackknife-Methode* berücksichtigt dies und liefert eine bessere Fehlerschätzung. Man unterteilt dazu die Daten in N gleichlange Blöcke, aus denen man N reduzierte Datensätze zusammenstellt, indem man in jedem Datensatz einen der N Blöcke weglässt. Sei T der Mittelwert einer Observablen O auf den Ausgangsdaten und T_i der auf dem i-ten reduzierten Datensatz, so erhält man als verbesserte Schätzung des Erwartungswerts und des Fehlers durch

$$\bar{O} \approx \bar{J} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_i \tag{4.26}$$

$$\Delta O \approx \sqrt{\frac{\sum_i (J_i - \bar{J})^2}{N(N-1)}} \tag{4.27}$$

mit

$$J_i = NT - (N-1)T_i. \tag{4.28}$$

4.3. Methoden zur Fehlerreduzierung

4.3.1. Lüscher-Methode

Eine Methode zur Fehlerreduzierung, die direkt an die Berechnung von Korrelationsfunktionen von Polyakov-Loops angepasst ist, wurde von Lüscher und Weisz zunächst allgemein für Wilson- und Polyakov-Loops bei $T = 0$ vorgeschlagen [25] und in dieser Arbeit für Polyakov-Loop-Korrelationen bei endlichem T getestet.

Die grundlegende Idee ist, bei der Berechnung von Zwei-Punkt-Korrelationen von Polyakov-Loops der Form

$$\langle \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{y})\rangle \tag{4.29}$$

nicht wie sonst üblich die zeitlichen Links auf zu multiplizieren um L zu bilden, anschließend deren Korrelation zu berechnen und über die Konfigurationen des Gitters zu mitteln. Zunächst wird vielmehr für jede Zeitkoordinate separat die Korrelation der zeitartigen Links errechnet und über mehrere Konfigurationen gemittelt, diese Mittelwerte dann auf multipliziert und zuletzt über das gesamte Gitter gemittelt.

Um dies genauer zu fassen, definiert man einen *Zwei-Link-Operator* als Tensorprodukt zweier zeitartiger Links zur gleichen Zeit x_4

$$\mathbb{T}(\mathbf{x},\mathbf{y},x_4)_{ijkl} := U_4^\dagger(\mathbf{x},x_4)_{ij} U_4(\mathbf{y},x_4)_{kl}. \tag{4.30}$$

Abbildung 4.1 veranschaulicht die Definition. Im Folgenden wird die Funktionsabhängigkeit von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wenn möglich unterdrückt und nur noch die von x_4 gezeigt, implizit werden dann verschiedene $\mathbb{T}$ immer an den selben Raumpunkten betrachtet. Gruppiert man die Indizes des Zwei-Link-Operators zu Paaren (i,k) und (j,l), so nehmen sie die

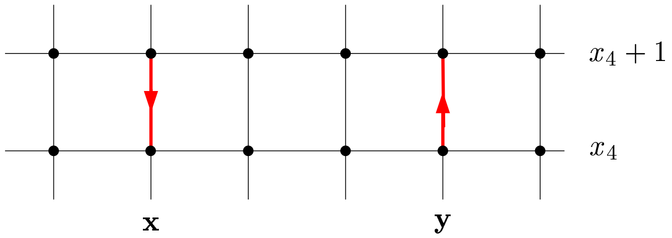


Abbildung 4.1.: Zum Zwei-Link-Operator

Form einer 9×9-Matrix an, die auf Farbtensoren in der $\bar{3} \otimes 3$-Repräsentation der SU(3) wirken.

Die Gitterpunkte mit Zeitkoordinaten aus einem Intervall $[x_4, y_4]$ bilden eine *Zeitschicht* (engl. time slice), ihre Ränder sind die Hyperebenen der Gleichzeitigkeit der gegebenen Intervallgrenzen und die *Dicke* der Zeitschicht ist der zeitliche Abstand dieser Hyperebenen. Für die Definition (4.30) betrachtet man also das Zeitintervall $[x_4, x_4+1]$ mit der Dicke 1. Mit der Multiplikationsregel

$$(\mathbb{T}(x_4)\mathbb{T}(x_4+1))_{ijkl} = \mathbb{T}(x_4)_{imkn}\mathbb{T}(x_4+1)_{mjnl} \tag{4.31}$$

ist es nun möglich Zwei-Link-Operatoren zu erhalten, die sich über Zeitschichten beliebiger Dicke erstrecken. Durch wiederholte Anwendung dieser Regel erhält man nun leicht für das Produkt zweier Polyakov-Loops

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{y}) &= \mathrm{Tr}\left(\mathbb{T}(1)\mathbb{T}(2)\cdots\mathbb{T}(N_\tau)\right) && (4.32)\\ &= \left(\prod_{x_4=1}^{N_\tau}\mathbb{T}(x_4)\right)_{iikk} . && (4.33) \end{aligned}$$

Die Eichtheorie in einer Zeitschicht kann unabhängig vom umgebenden Gitter betrachtet werden, wenn man die räumlichen Links an den Rändern der Zeitschicht konstant hält, was für die Wilson-Wirkung (2.6) immer möglich ist, da sie nur elementare Plaquetten enthält. Somit können die zeitlichen Links einer Zeitschicht separat mit den oben erwähnten Algorithmen upgedatet werden, was die Berechnung von Mittelwerten von Zwei-Link-Operatoren auf den Konfigurationen dieser Zeitschicht erlaubt. Um diese von Mittelwerten des ganzen Gitters zu unterscheiden, bezeichnet man sie mit eckigen Klammern: $[\ldots]$. Für die in dieser Arbeit verwendete verbesserte Wirkung (2.9) muss bei der Berechnung der Zwei-Link-Operatoren ein leicht abweichendes Schema angewandt werden, das analog zu dem Kombinationsverfahren für die Link-Integration in Kapitel 4.3.2 ist und dort erklärt wird.

Zur Berechnung von Polyakov-Loop-Korrelationen in der Lüscher-Methode geht man bei einem Gitter mit m Zeitschichten wie folgt vor:

1. Man erzeuge eine Konfigurationen des ganzen Gitters mit den in Kapitel 4.1 beschriebenen Algorithmen.

2. Man erzeuge für jede der m Zeitschichten eine Folge von Konfigurationen der zeitlichen Links im Innern der jeweiligen Zeitschicht durch n_Z Updates mit Hilfe der gleichen Algorithmen.

3. Man berechne die Mittelwerte $[\mathbb{T}(x_4)]$ auf jeder Zeitschicht und dann nach (4.32) die Polyakov-Loop-Korrelationen .

Wiederholt man diese Prozedur n-mal, kann der Mittelwert der Polyakov-Loop-Korrelationen über das gesamte Gitter berechnet werden. Man erhält also insgesamt

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\mathbf{x})\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{y})\rangle \\
=\;& \left\langle \mathrm{Tr} \prod_{k=1}^{m} [\mathbb{T}(k)] \right\rangle \\
=\;& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}\, \underbrace{\left(\frac{1}{n_Z}\sum_{j=1}^{n_Z} \mathbb{T}(1)_j\right)_i \left(\frac{1}{n_Z}\sum_{j=1}^{n_Z} \mathbb{T}(2)_j\right)_i \cdots}_{n_Z^m \text{ Terme}}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, die Statistik der Schätzung gegenüber der gewöhnlichen Mittelwertbildung ohne Zeitschichten stark zu erhöhen, da die rechte Seite von (4.34) eine Mittelung über n_Z^m Zwei-Link-Operatoren darstellt, gegenüber nur $n_Z m$-fachem Update-Aufwand. Für ein beliebiges Gitter mit $N_\tau = m = 4$ Zeitschichten und $n_Z = 10$ Updates pro Zeitschicht bedeutet dies eine 10^4 mal höhere Statistik bei bloß 40 mal mehr nötigen Updates! Erkauft wird dies jedoch zum einen durch einen drastisch erhöhten Speicherbedarf, da die $n_Z m$ Konfigurationen der Zeitschichten, über die gemittelt wird, gespeichert werden müssen. Zum Anderen müssen aus den zeitartigen Links für jede Konfiguration die Zwei-Link-Operatoren nach (4.30) berechnet werden.

Als weitere Verfeinerung kann das gesamte Verfahren geschachtelt werden, so dass Hierarchien von Zeitschichten entstehen und Erwartungswerte der Art $[[\ldots][\ldots]]$ gebildet werden können. Für $T = 0$ wird dieses Verfahren in [25] angewendet, diese Arbeit beschränkt sich aber nur auf die Benutzung einer Hierarchieebene.

4.3.2. Link-Integration

Zur Minimierung der Fehler bei der Messung der Polyakov-Loop-Korrelationen wurde die Methode der Link-Integration benutzt. Sie wurde von Parisi et al. [26] vorgeschlagen und macht sich zu nutze, dass man i.a. nur an den Erwartungswerten einer Observable O interessiert ist. Findet man eine andere Observable O', die den gleichen Erwartungswert wie O, aber eine geringere Varianz besitzt, also gilt

$$\langle O\rangle = \langle O'\rangle \tag{4.35}$$

$$\langle O'^2\rangle - \langle O'\rangle^2 < \langle O^2\rangle - \langle O\rangle^2, \tag{4.36}$$

kann man für die weitere Auswertung die neue Observable O' benutzen. Um dies zu erreichen, müssen möglichst viele Links einer Konfiguration durch verbesserte ersetzt werden. Ein solcher verbesserter Link $\bar{U}$ ergibt sich – wie beim Heatbath-Algorithmus – durch Integration innerhalb seines Staples bzw. erweiterten Staples bei verbesserten Wirkungen

$$\bar{U} = \frac{\int \mathcal{D}U\, U e^{-\beta H}}{\int \mathcal{D}U\, e^{-\beta H}}. \tag{4.37}$$

Dieses für die SU(3) achtdimesionale Integral lässt sich als eindimensionales Kontourintegral schreiben [27][28], das mithilfe der Gaußschen Integrationsmethode berechnet werden kann. Zunächst nutzt man aus, dass der neue Link $\bar{U}$ nur von den ihn umgebenden (erweiterten) Staple R abhängt

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{\int \mathcal{D}U\, U \exp \mathrm{Tr}\,(RU^\dagger + UR^\dagger)}{\int \mathcal{D}U\, \exp \mathrm{Tr}\,(RU^\dagger + UR^\dagger)} && (4.38)\\ &= \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}Z(R)}{\mathrm{d}R^\dagger}. && (4.39)\end{aligned}$$

Mithilfe von Besselfunktionen kann $Z(R)$ nun auf ein eindimensionales Kontourintegral umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} Z(R) &= \int \mathcal{D}U\, \exp \mathrm{Tr}\,(RU^\dagger + UR^\dagger) && (4.40)\\ &= \oint \frac{\mathrm{d}x}{2\pi i}\, e^{xQ} \left(\frac{x}{P(x)}\right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left(2\left(\frac{P(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right), && (4.41)\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} Q &= \det(R) + \det(R^\dagger) && (4.42)\\ P(x) &= 1 + x\mathrm{Tr}\,(RR^\dagger) + \frac{1}{2}x^2 \left[\left(\mathrm{Tr}\,(RR^\dagger)\right)^2 - \left(\mathrm{Tr}\,(RR^\dagger)^2\right)\right] \\ &\quad + x^3 \det(RR^\dagger) && (4.43)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Z(R)}{\mathrm{d}R^\dagger} &= \oint \frac{\mathrm{d}x}{2\pi i}\, x e^{xQ} \left(\frac{x}{P(x)}\right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left(2\left(\frac{P(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial Q}{\partial R^\dagger} \\ &\quad + \oint \frac{\mathrm{d}x}{2\pi i}\, \frac{e^{xQ}}{P(x)} I_2 \left(2\left(\frac{P(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial P(x)}{\partial R^\dagger} && (4.44)\\ \frac{\partial Q}{\partial R^\dagger} &= \left(\det R^\dagger\right) R^{\star -1} && (4.45)\\ \frac{\partial P(x)}{\partial R^\dagger} &= xR + x^2\left(R\mathrm{Tr}\,(RR^\dagger) - RR^\dagger R\right) + x^3 \det(RR^\dagger) R^{-1} && (4.46)\end{aligned}$$

sowie für die Besselfunktionen die asymptotische Entwicklung bis zur 6.Ordnung [29]

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^z \frac{(\mu-1)(\mu-9)\cdots(\mu-(2j-1)^2)}{j!(8z)^j} \tag{4.47}$$

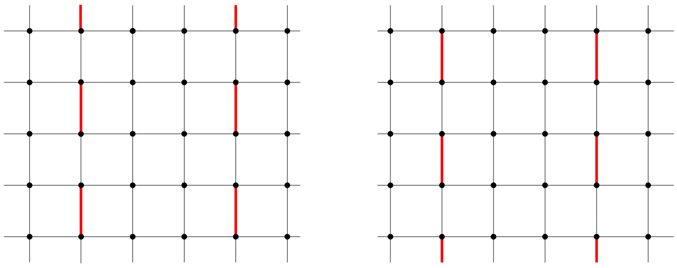


Abbildung 4.2.: Mögliche Kombinationen von link-integrierten und herkömmlichen Links.

mit $\mu = 4\nu^2$, $|\arg(z)| < \pi/2$ und $|z|$ groß benutzt wurde.

Bei der Berechnung eines Polyakov-Loops muss nun beachtet werden, dass nur solche zeitliche Links benutzt werden, die nicht dem gleichen (erweiterten) Staple angehören, da ansonsten (4.35) nicht gültig ist. Daher wird nur für jeden zweiten Link die Link-integrierte Variante und dazwischen die herkömmlichen benutzt. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten dies zu tun, nämlich für die geraden oder die ungeraden x_4 die integrierten Links zu wählen. Abbildung 4.2 verdeutlicht dies.

Die Performance der Lüscher-Methode und der Link-Integration im Hinblick auf die Fehlerreduzierung wird nun untersucht.

4.3.3. Performance der Methoden

Die Lüscher-Methode wurde auf einem $16^3 \times 4$-Gitter mit $m = 4$ Zeitschichten und $n_Z = 10 \dots 100$ Updates der jeweiligen Zeitschichten bei verschiedenen Kopplungen getestet. Ein Zyklus auf dem $16^3 \times 4$-Gitter, der die üblichen Updates, Berechnung der Operatoren usw. und die Updates der $m = 4$ Zeitschichten sowie die Berechnung und Mittelung der Zwei-Link-Operators umfasst, benötigte auf einem PC des Clusters für $n_Z = 10$ Zeitschicht-Updates 670 s. Dabei entfielen auf die Zeitschicht-Updates mit vier Heatbath- und einem Overrelaxationschritt 6 %, auf die Berechnung und Mittelung der Zwei-Link-Operators ca. 92 % der gesamten Rechenzeit. Den Rest von 2 % benötigt die Ausführung des herkömmlichen Programms. Die Abhängigkeit der Rechenzeit der Zeitschicht-Updates sowie für die Berechnung und Mittelung der Zwei-Link-Operators ist linear in n_Z, m und N_τ. Ein Zyklus ohne Lüscher-Methode benötigt für das $16^3 \times 4$-Gitter 28 s, also nur etwa 4 % gegenüber der Lüscher-Methode mit $n_Z = 10$. Das Verhältnis der Fehler der Zwei-Punkt-Korrelationen mit und ohne Lüscher-Methode zeigt Abbildung 4.3. Man erkennt einen schwachen Abfall bei einem Abstand um $RT = 1$. Der Gewinn ist also sehr gering im Vergleich mit der eingesetzten Rechenzeit. Daher wurde für die Messungen in dieser Arbeit nur die Link-Integration zur Fehlerreduzierung benutzt. Durch Optimierung des Algorithmus für die Lüscher-Methode kann vielleicht noch eine Verringerung der benötigten Rechenzeit erzielt werden. Ausserdem ist die Performance bei geschachtelter Anwendung der Methode bei endlicher Temperatur nicht bekannt.

Abbildung 4.4(a) zeigt das Verhältnis der Fehler der Zwei-Punkt-Polyakov-Loop-Kor-

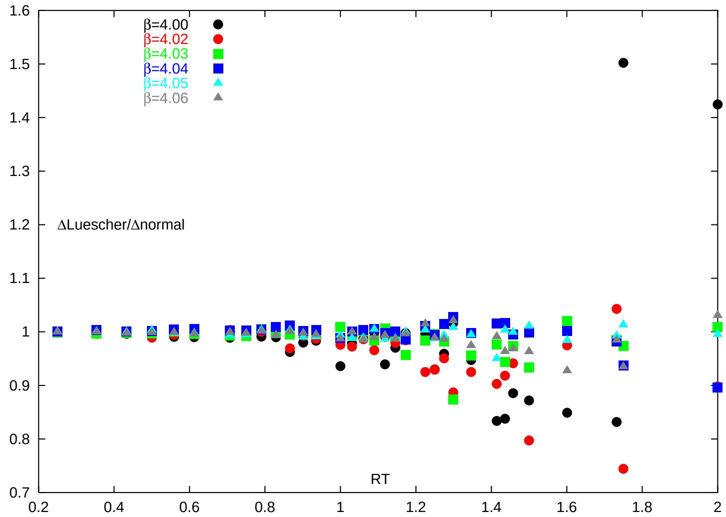
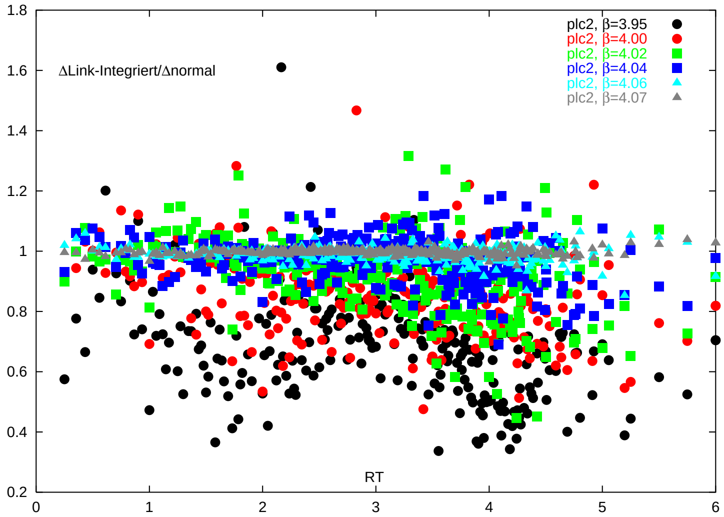


Abbildung 4.3.: Quotient der Fehler mit und ohne Lüscher-Methode auf dem $16^3 \times 4$-Gitter mit $m = 4, n_Z = 10$ Zeitschichten und bei 1100 Messungen für die Zwei-Punkt-Polyakov-Loop-Korrelationen.

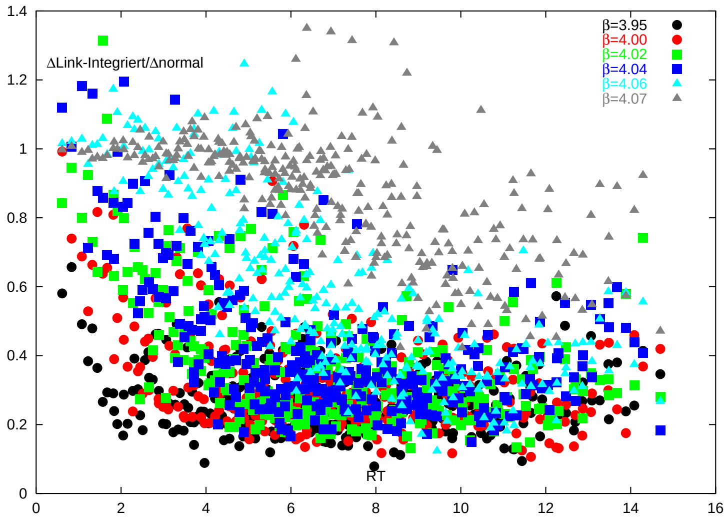
relationen der Link-integrierten zur herkömmlichen Variante auf einem $48^3 \times 4$-Gitter mit einer Statistik von 2500 für unterkritische Kopplungen. Das Verhältnis ist für kleine Kopplungen deutlich kleiner als 1, in der Nähe der kritischen Kopplung strebt es gegen 1. Für Kopplungen oberhalb von β_c schwankt das Verhältnis durchgängig schwach um 1, weswegen auf eine Darstellung verzichtet wurde.

Abbildung 4.4(b) zeigt das gleiche Verhältnis für die Drei-Punkt-Polyakov-Loop-Korrelationen bei ebenfalls unterkritischen Kopplungen auf dem gleichen Gitter und gleicher Statistik. Man beobachtet hier einen kopplungsabhängigen Abfall auf ca. 0.2 bis 0.5 bei einem Fermat-Abstand etwa zwischen 2 und 6, wobei wieder die Kopplungen nahe bei β_c schwächer und erst bei größerem Abstand abfallen. Die oberkritischen Kopplungen zeigen das gleiche Verhalten wie die der Zwei-Punktkorrelationen und wurden daher hier ebenfalls nicht abgebildet.

Unterhalb der kritischen Temperatur kann also mit der Link-Integration eine beträchtliche Reduzierung der Messfehler für die Drei-Punkt-Polyakov-Loop-Korrelationen erreicht werden. Zieht man den zeitlichen Mehraufwand von etwa 50 % noch in Betracht, zahlt sich die Link-Integration für Zwei-Punkt-Polyakov-Loop-Korrelationen allein nur weit unterhalb der kritischen Kopplung aus, für Drei-Punkt-Polyakov-Loop-Korrelationen aber kann eine deutliche Performance-Steigerung festgestellt werden.



(a)



(b)

Abbildung 4.4.: Quotient der Fehler mit und ohne Link-Integration auf dem $48^3 \times 4$-Gitter bei 2500 Messungen für 4.4(a) die Zwei-Punkt-Polyakov-Loop-Korrelationen 4.4(b) Drei-Punkt-Polyakov-Loop-Korrelationen .

5. Auswertung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen der SU(3) reinen Eichtheorie ausgewertet. Die Simulationen wurden auf 8 PCs des PC-Clusters der theoretischen Physik durchgeführt, wobei jeder PC zwei Athlon MP 1800+ CPUs mit 1.533 GHz besitzt und über 512 MB RAM verfügt.

5.1. Messmethode

Es wurden für zwei Gitter der Größen $32^3 \times 4$ und $32^3 \times 8$ für verschiedene Kopplungen Zwei- und Drei-Punkt-Korrelationsfunktionen gemessen und dann nach (3.9) die zugehörigen freien Energien ermittelt. Tabelle 5.1 zeigt die Statistik der jeweiligen Kopplungen auf den beiden Gittern. Zu Beginn der Monte-Carlo-Simulation wurden 200 Sweeps zur Thermalisierung eingesetzt, wobei jeder Sweep aus einem Heatbath- und vier Overrelaxation-Schritt bestand. In der Confinement-Phase wurde dabei eine zufällige, in der Deconfinement-Phase eine Einheitskonfiguration als Anfangszustand des Gitters gewählt. Nach der Thermalisierung wurde nach jedem Sweep die Observablen gemessen, wobei zur Verbesserung des Signals für die Polyakov-Loops und ihrer Korrelationen zuvor eine Link-Integration durchgeführt wurde. Für alle Simulationen wurde die in (2.9) gezeigten Symanzik-Wirkung in SU(3)-reiner-Eichtheorie benutzt.

Zur Berechnung der Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen für die Polyakov-Loops wurde das bereits in [11] verwandte Kombinationsschema benutzt. Bei den Drei-Punkt-Korrelationsfunktionen wurden nur off-axis-Korrelationen berechnet. Die genaue Durchgangsweise zeigt Abbildung 5.1. Der Ausgangspunkt rechts hinten wird festgehalten und die beiden gleichlangen Schenkel bei jedem Schritt um einen Gitterpunkt weiter nach

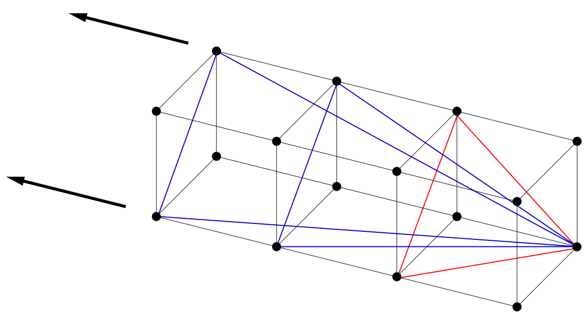


Abbildung 5.1.: Durchgangsweise über das Gitter für Drei-Punkt-Korrelationen

β	$32^3 \times 4$	$32^3 \times 8$	β
4.00	7672		
4.02	7535	3833	4.3312
4.04	7507	3888	4.4472
4.06	10293	2177	4.4862
4.07	9833	2147	4.5000
4.075	11620	5618	4.5951
4.076	11460	4384	4.6619
4.08	10760	5262	4.8393
4.10	6937	3994	5.4261
4.20	5642	5439	6.0434
4.60	9199		

Tabelle 5.1.: Simulationsstatistik der einzelnen Kopplungen.

links verschoben, die Grundseite des so entstehenden Dreiecks behält bei diesem Durchgang immer die gleiche Länge. Man erhält so ein gleichseitiges Dreieck sowie viele spitze, gleichschenklige Dreiecke. Dieses Verfahren wurde für jeden Punkt des Gitters mit verschiedenen Grundseitenlängen entlang jeder der drei Raumachsen durchgeführt. Dabei wurden die Längen der Grundseite und die Schenkellängen zwischen $\sqrt{2} \cdot (1, \ldots, N_\sigma/2)$ variiert. Die freien Energien wurden jeweils für die beiden in Kapitel 3.6 erwähnten Abstände Umfang und Fermat-Abstand mit Hilfe des Programmpakets `USEDAT` aus den Korrelationen der Polyakov-Loops berechnet und einer Jackknife-Fehleranalyse unterzogen. Zur Bestimmung der Stringspannung σ und der Screeningmasse μ wurden χ^2-Fits mit dem Programm `USEFIT` durchgeführt.

5.2. Freie Energien für $T > T_c$

In der Deconfinement-Phase wurden Zwei- und Drei-Punkt-Korrelationsfunktionen auf den Gitter $32^3 \times 4$ für sechs, auf dem $32^3 \times 8$-Gitter für fünf verschiedene Kopplung untersucht. Die freie Energie ergibt sich nach (3.9) durch Normierung des Erwartungswerts der entsprechenden Korrelationsfunktion als

$$F_{qqq}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = -T \ln \frac{\langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_1)\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_2)\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_3) \rangle}{|\langle \mathrm{Tr}\, L \rangle|^3}. \tag{5.1}$$

Somit laufen die freien Energien gleichseitiger Dreiecke für grosse Abstände gegen Null. Der Logarithmus der normierten Korrelationsfunktionen wurde zuvor einer Jackknife-Analyse mit zehn Blöcken unterzogen. Die Temperaturskala stammt von Beinlich et al. [30].

Abbildung 5.2 zeigt die gemessenen freien Energien des qqq-Systems oberhalb von T_c auf dem $32^3 \times 4$-Gitter. Man erkennt bei jedem Grafen mehrere Äste, die sich vom Hauptast trennen und gegen eine Konstante kleiner Null streben.

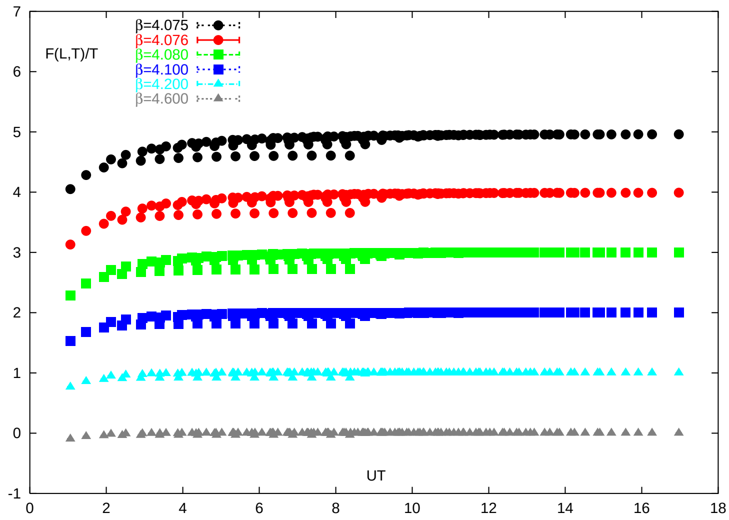


Abbildung 5.2.: Freie Energien über dem Umfang UT des Dreiecks oberhalb T_c für das $32^3 \times 4$-Gitter. Zur besseren Sichtbarkeit wurden die Grafen bis auf den untersten nach oben verschoben.

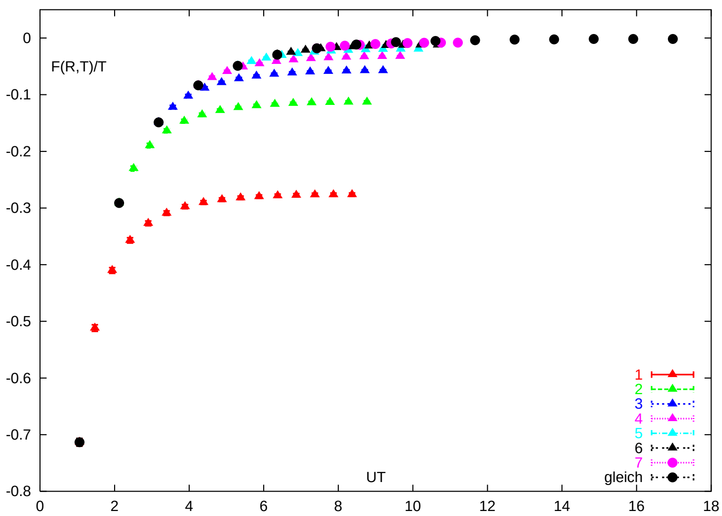


Abbildung 5.3.: Freie Energie der Äste bei $\beta = 4.080$ auf dem $32^3 \times 4$-Gitter. Die Nummer jeder Kurve gibt das Vielfache der Grundseitenlänge $\sqrt{2}$ an.

Jeder Ast besteht aus den Messungen gleichschenkliger Dreiecke mit gleicher Grundseite. Derjenige Ast, der sich beim kleinsten Umfang vom Hauptast trennt, ist der mit der Grundseitenlänge $\sqrt{2}$, der nächste der mit $2\sqrt{2}$ usw.. Diese streben gegen eine Konstante kleiner Null für großen Umfang, da ja die Grundseitenlänge festgehalten und somit der Limes $R \to \infty$ nicht für alle Seiten erreicht wird. Die gleichseitigen Dreiecke liegen auf dem Hauptast. Abbildung 5.3 zeigt die Äste bis zur Grundseitenlänge $7\sqrt{2}$ sowie die freie Energie der gleichseitigen Dreiecke bei $\beta = 4.080$ auf dem $32^3 \times 4$-Gitter. Die Äste mit noch grösserer Grundseitenlänge liegen praktisch vollständig auf dem Hauptast.

Um nun den in (3.97) gezeigten Δ-Ansatz

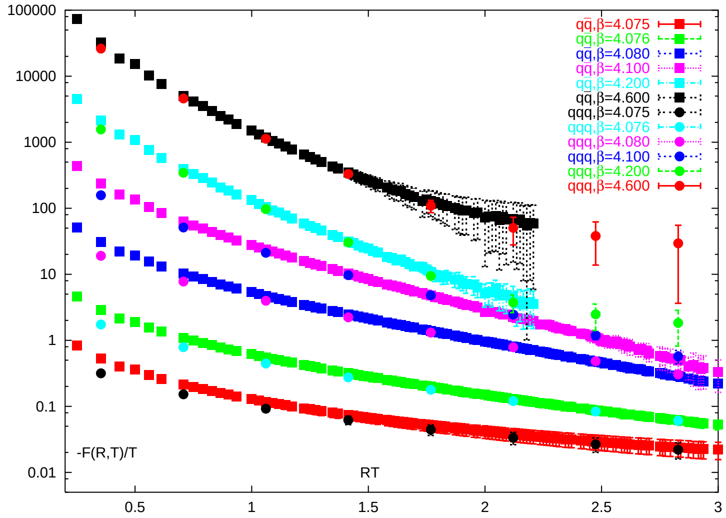
$$F_{\Delta}(R_{ij}, T > T_c) = -\alpha(T) \sum_{i<j} \frac{1}{R_{ij}^d} e^{-\mu(T) R_{ij}}.$$

für die Deconfinement-Phase zu überprüfen, wurden zunächst die freien Energien der gleichseitigen Dreiecke des qqq- sowie die des $q\bar{q}$-Systems logarithmisch über die Seitenlänge des Dreiecks bzw. des Quark-Anti-Quark-Abstands geplottet. Das Ergebnis für das $32^3 \times 4$-Gitter zeigt Abbildung 5.4(a). Bei den Kopplungen $\beta = 4.200$ und $\beta = 4.600$ wurden die Messdaten von $F_{q\bar{q}}$ bei $RT \approx 2.25$ abgeschnitten, da sie ab dort sehr große Fehler aufwiesen. Wegen der logarithmischen Auftragung der freien Energien kann hier direkt die Screeningmasse an der Steigung der jeweiligen Grafen abgelesen werden. Man erkennt eine Übereinstimmung der Screeningmassen des $q\bar{q}$- und des qqq-Systems über einen großen Teil des Abstandsbereichs. Bei kleinen Abständen unterläuft die freie Energie des qqq-Systems jedoch die des $q\bar{q}$-Systems. Die Abstände, bei denen dies geschieht, wachsen mit sinkender Kopplung und können als Eintritt in das Regime $R \to 0$ der freien Energien verstanden werden. In diesem sollte nach (3.86) gerade die freie Energie des qq-Systems maßgeblich sein und somit

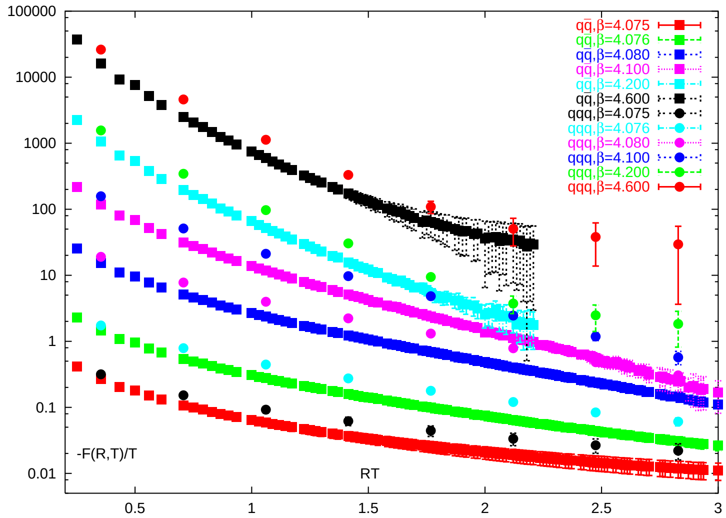
$$F_{qqq} = 3F_{qq} = \frac{3}{2} F_{q\bar{q}} \tag{5.2}$$

gelten. Eine temperaturabhängige Konstante tritt hier nicht auf wegen der Art der gewählten Normierung. Abbildung 5.4(b) zeigt die entsprechende Auftragung beider freien Energien. Man erkennt für kleine Kopplung eine gute Übereinstimmung mit der Vermutung beim kleinsten für das qqq-System gemessenen Abstand von $RT = 0.35$. Dieses Verhalten ist für das $q\bar{q}$-System bekannt, bei dem die freien Energien mit wachsender Temperatur erst bei kleineren Abständen in ihr störungstheoretisches Regime eintreten [6].

Die Abbildungen 5.5(a) und 5.5(b) zeigen das Gleiche für das $32^3 \times 8$-Gitter. Es zeigt das gleiche Verhalten wie das $32^3 \times 4$-Gitter. Dies ist auch zu erwarten, da sich für die freien Energien des $q\bar{q}$-Systems auf beiden Gittern ebenfalls kein Unterschied bei den betrachteten Abständen zeigt.



(a)



(b)

Abbildung 5.4.: Logarithmische Auftragung der freien Energien des qqq- und $q\bar{q}$-Systems auf dem $32^3 \times 4$-Gitter. Aufgetragen ist $-1/3 \cdot F_{qqq}(R,T)/T$ über der Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke, sowie (a) $-F_{q\bar{q}}(R,T)/T$ (b) $-1/2 \cdot F_{q\bar{q}}(R,T)/T$ über den Abstand der beiden Quarks.

β	T/T_c	$\alpha(T)$	$\mu(T)/T$	$d(T)$	$V_0(T)/T$
4.075	1.003	0.60(44)	0.87(71)	0.68(56)	-0.036(10)
4.076	1.005	0.58(13)	0.87(22)	0.70(18)	-0.0066(29)
4.080	1.012	0.49(8)	1.12(13)	0.73(11)	-0.00199(7)
4.100	1.046	0.32(4)	1.48(12)	0.87(8)	0.00017(20)
4.200	1.232	0.25(3)	2.70(13)	0.80(8)	-0.000137(63)
4.600	2.268	0.08(3)	2.79(33)	1.10(18)	-0.000099(36)

Tabelle 5.2.: Fitparameter des Δ-Ansatzes für das $32^3 \times 4$-Gitter.

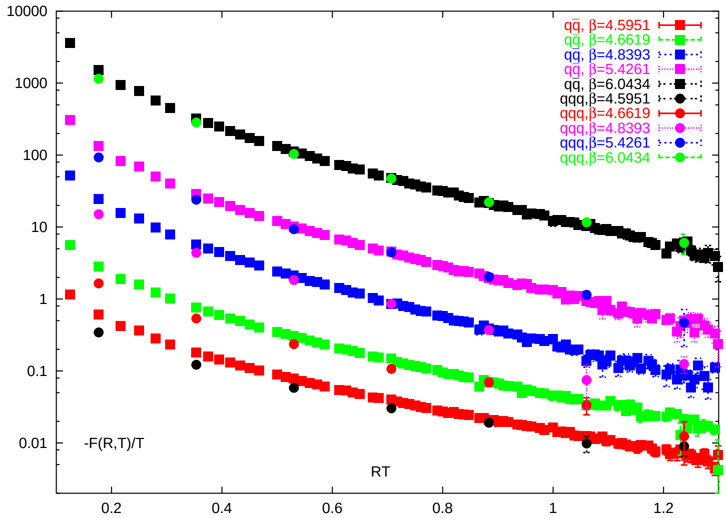
β	T/T_c	$\alpha(T)$	$\mu(T)/T$	$d(T)$	$V_0(T)/T$
4.075	1.003	0.27(18)	0.89(73)	0.84(81)	-0.0136(51)
4.076	1.005	0.254(60)	0.92(25)	0.86(28)	-0.0026(15)
4.080	1.012	0.202(21)	1.13(11)	0.89(13)	-0.00059(22)
4.100	1.046	0.099(11)	1.27(11)	1.31(12)	0.000198(65)
4.200	1.232	0.0788(83)	2.51(11)	1.11(11)	0.000057(6)
4.600	2.268	0.0286(44)	2.81(15)	1.17(15)	0.000024(2)

Tabelle 5.3.: Fitparameter des $q\bar{q}$-Systems für das $32^3 \times 4$-Gitter.

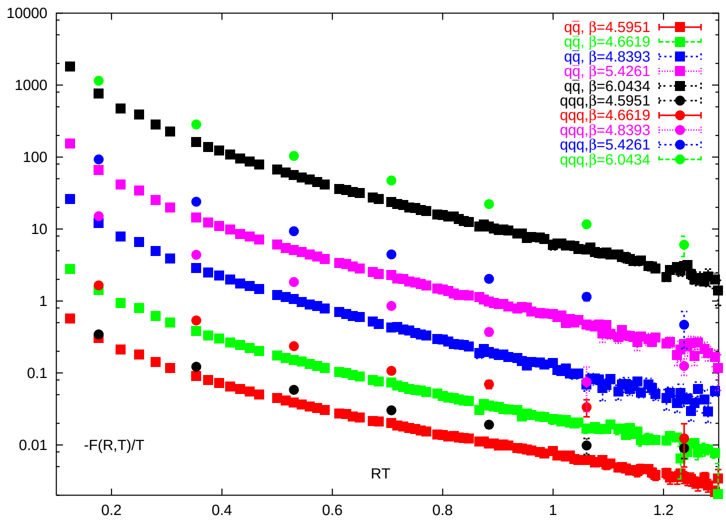
Um den optischen Eindruck zu untermauern, wurden χ^2-Fits der freien Energien der gleichseitigen Dreiecke mit dem Ansatz

$$F_\Delta(R,T) = -\alpha(T)\frac{e^{-\mu(T)R}}{R^d} + V_0 \tag{5.3}$$

mit den freien Parametern $\alpha(T)$, $d(T)$, $\mu(T)$ und $V_0(T)$ durchgeführt, wobei R die Seitenlänge des Dreiecks bezeichnet. Es wurden Fits mit jeweils verschiedenen Untergrenzen bei festgehaltener Obergrenze durchgeführt, um die Stabilität der Fitparameter zu prüfen. Abbildung 5.6(a) zeigt das Ergebnis. Man erkennt für die kleinsten Werte eine geringe Abhängigkeit der Screeningmasse, so dass die endgültigen Werte über die Fits mit $R_{\min}T = 0.35, 0.71, 1.05$ gemittelt wurden. Die Obergrenze der Fits wurde bei festgehaltener Untergrenze ebenfalls variiert. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.6(b). Man erkennt aber keine wesentliche Abhängigkeit der Screeningmasse von der Obergrenze. Daher wurde diese bei allen Fits bei $R_{\max}T = 5.7$ festgehalten. Es stellte sich heraus, dass die Statistik für das $32^3 \times 8$-Gitter zu gering war, um Fits mit befriedigenden Fehlern zu erhalten. Daher wird die qualitative Analyse der Messdaten auf das $32^3 \times 4$-Gitter beschränkt. Weiterhin wurden auch die Zwei-Punkt-Korrelationen nach der in [11] angewandten Methode ausgewertet und mit dem gleichen Ansatz gefittet, wobei R hierbei für den Abstand des $q\bar{q}$-Paares steht. Der Fitbereich erstreckt sich dabei über $R_{\min}T = 0.71, \ldots, 0.94$ bis $R_{\max}T = 2.6$. Die gefundenen Fitparameter für das $32^3 \times 4$-Gitter sind in den Tabellen 5.2 und 5.3 zusammengefasst. Das Ergebnis für die Screeningmasse zeigen die Abbildungen 5.7(a) und 5.7(b), für den Faktor $\alpha(T)$ die Abbildungen 5.8(a) und 5.8(b).

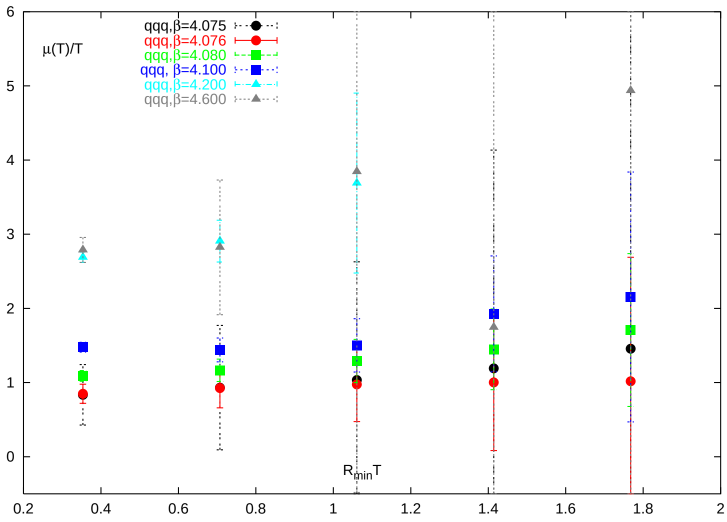


(a)

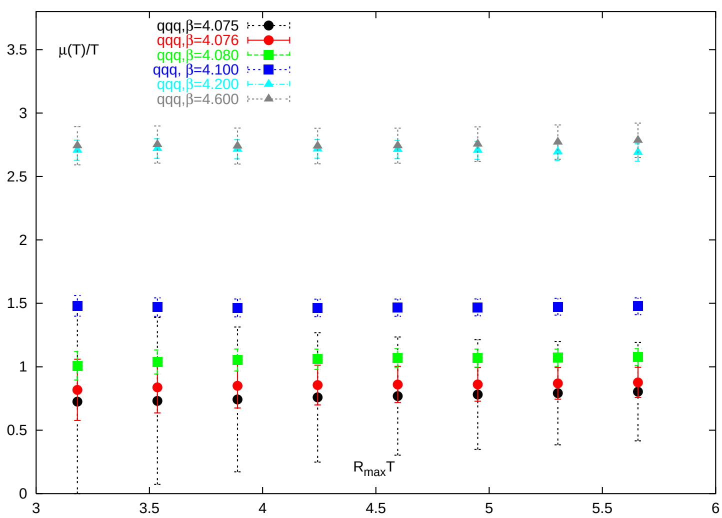


(b)

Abbildung 5.5.: Logarithmische Auftragung der freien Energien des qqq- und $q\bar{q}$-Systems auf dem $32^3 \times 8$-Gitter. Aufgetragen ist $-1/3 \cdot F_{qqq}(R,T)/T$ über der Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke, sowie (a) $-F_{q\bar{q}}(R,T)/T$ (b) $-1/2 \cdot F_{q\bar{q}}(R,T)/T$ über den Abstand der beiden Quarks.

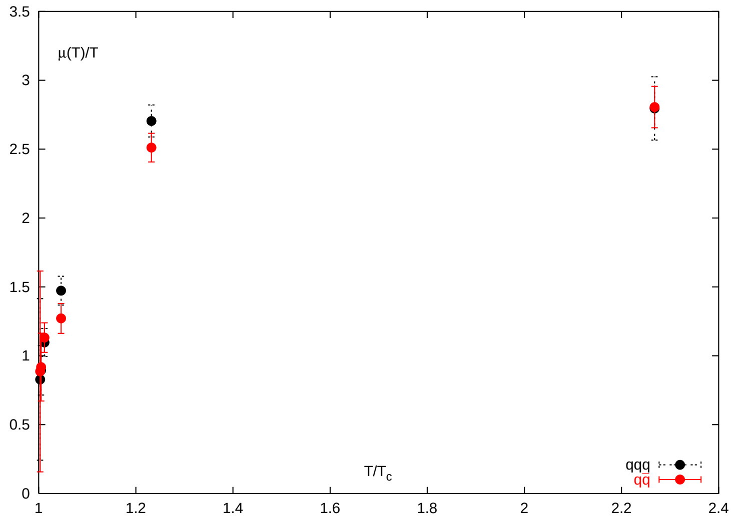


(a)

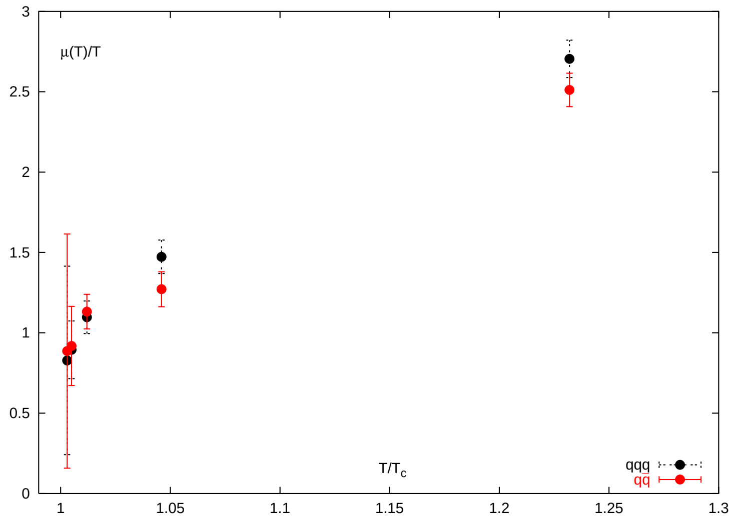


(b)

Abbildung 5.6.: Abhängigkeit der Screeningmasse des $32^3 \times 4$-Gitters von der Wahl (a) der Untergrenze R_{min}, (b) der Obergrenze R_{max}.

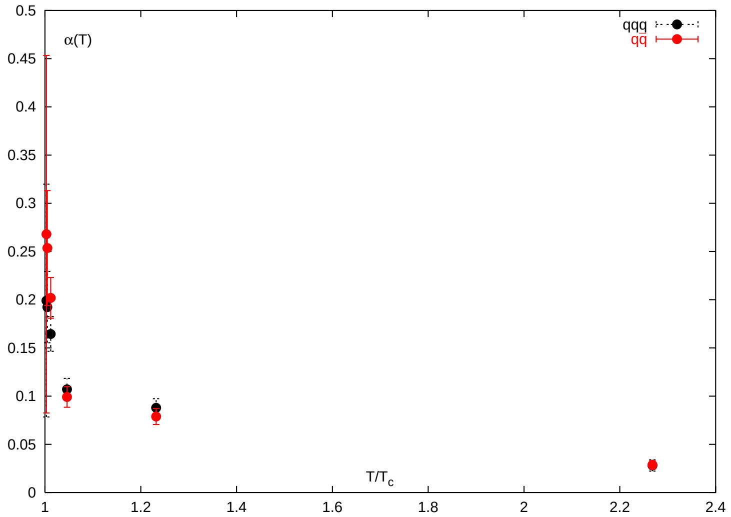


(a)

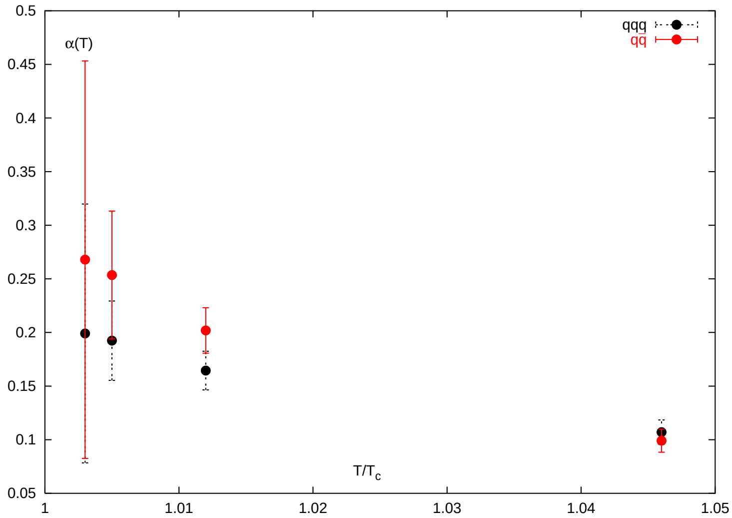


(b)

Abbildung 5.7.: Screeningmassen des qqq- und $q\bar{q}$-Systems über der Temperatur auf den $32^3 \times 4$-Gittern, (a) über den gesamten Temperaturbereich, (b) Ausschnitt.



(a)



(b)

Abbildung 5.8.: Faktor $\alpha(T)/3$ des qqq- und $\alpha(T)$ des $q\bar{q}$-Systems über der Temperatur auf dem $32^3 \times 4$-Gitter, (a) über den gesamten Temperaturbereich, (b) Ausschnitt.

β	T/T_c	$\mu_{q\bar{q}}(T)/T$	$\mu_\Delta(T)/T$
4.075	1.003	0.72(12)	0.47(17)
4.076	1.005	0.813(38)	0.568(50)
4.080	1.012	1.021(18)	0.799(26)
4.100	1.046	1.539(16)	1.308(23)
4.200	1.232	2.611(13)	2.369(17)
4.600	2.268	2.940(15)	2.960(25)

Tabelle 5.4.: Fitparameter des $q\bar{q}$- und des qqq-Systems für $d = 1$ fest auf dem $32^3 \times 4$-Gitter.

Ist der Δ-Ansatz für die Deconfinement-Phase richtig, sollte die freie Energie des qqq-Systems einfach das Dreifache der freien Energie des $q\bar{q}$-Systems sein. Dann sind die Screeningmassen beider Systeme gleich und für den Faktor $\alpha(T)$ des Coulomb-Terms gilt die Beziehung

$$\alpha_{q\bar{q}}(T) = \frac{\alpha_\Delta(T)}{3}. \tag{5.4}$$

Man erkennt innerhalb der Fehlerbalken eine gute Übereinstimmung der Screeningmassen beider Systeme bei hohen Kopplungen, allerdings sind die Fehler der Fits für die Kopplungen nahe des Phasenübergangs recht groß. Die Beziehung (5.4) ist für große Kopplungen ebenfalls gut erfüllt, bei kleineren Kopplungen zeigt sich wie bei der Screeningmasse eine Abweichung. Dies liegt vermutlich daran, dass in der Nähe von T_c die Korrelationen langreichweitig werden und das qqq-System erst bei sehr grossen Abständen als Überlagerung von unabhängigen qq-Systemen betrachtet werden kann.

Um die Fehler der Fitwerte für die Screeningmasse zu verringern, wurde der Parameter $d(T) = 1$ festgesetzt und dann Fits an den freien Energien des $q\bar{q}$- und des qqq-Systems mit gleichseitiger Geometrie durchgeführt. Das Ergebnis für die Screeningmasse zeigt Tabelle 5.4 und Abbildung 5.9. Erst bei der höchsten gemessenen Kopplung $\beta = 4.60$ stimmen die Werte überein, vorher zeigen sie eine fast konstante Differenz von ≈ 0.25. Dies könnte darauf hindeuten, dass bei kleinen Temperaturen in der Deconfinement-Phase noch andere als Screening-Effekte eine Rolle spielen. Eine genauere Analyse könnte durch die Vermessung der eichfixierten freien Energien der einzelnen Symmetriezustände, wie sie in [8] durchgeführt wird, möglich sein.

Zuletzt wurden oberhalb von T_c auch die freien Energien von qqq-Systemen untersucht, die eine gleichschenklige Geometrie aufweisen. Mit Hilfe der Fits des $q\bar{q}$-Systems wurde der erwartete Wert von F_{qqq} im Δ-Ansatz für die einzelnen Geometrien berechnet und logarithmisch mit den Messdaten des Drei-Quark-Systems gegen den Umfang geplottet. Das Ergebnis zeigen die Abbildungen 5.10(a) und 5.10(b). Man erkennt bei beiden Gittern eine sehr gute Übereinstimmung bei den Dreiecken mit langer Grundseite. Bei den Messungen mit kleineren Grundseitenlängen zeigt sich entlang jedes Astes eine konstante Abweichung, die mit zunehmender Grundseitenlänge abnimmt. Dies lässt sich dadurch erklären, dass bei Dreiecken mit einer kurzen Grundseite deren Beitrag zur

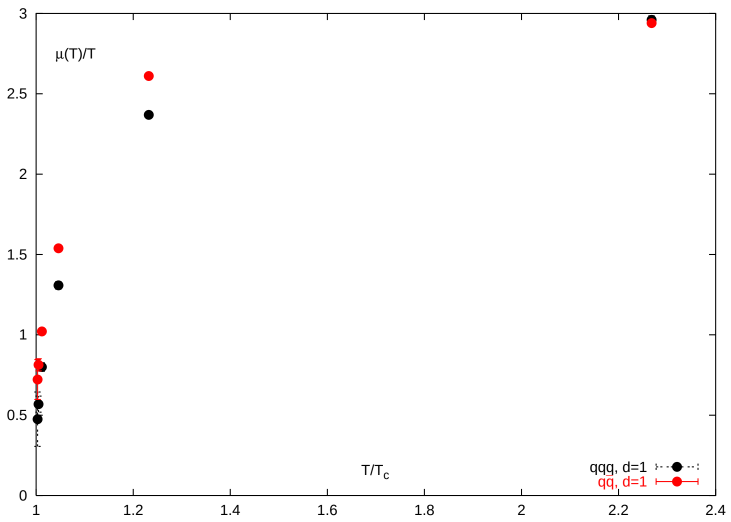
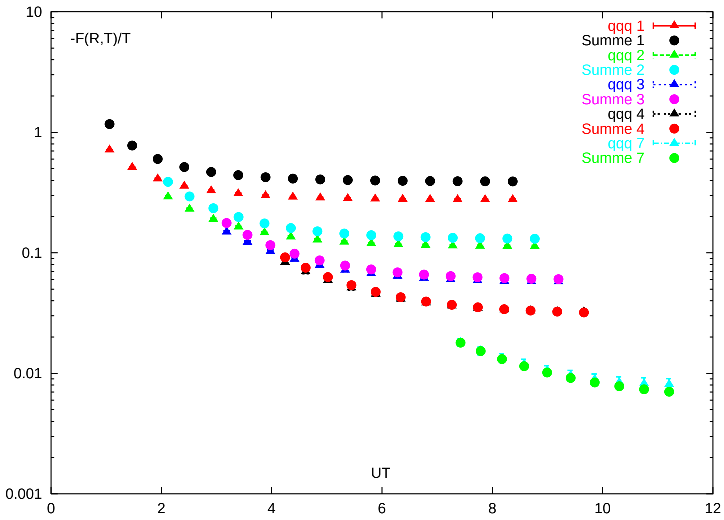


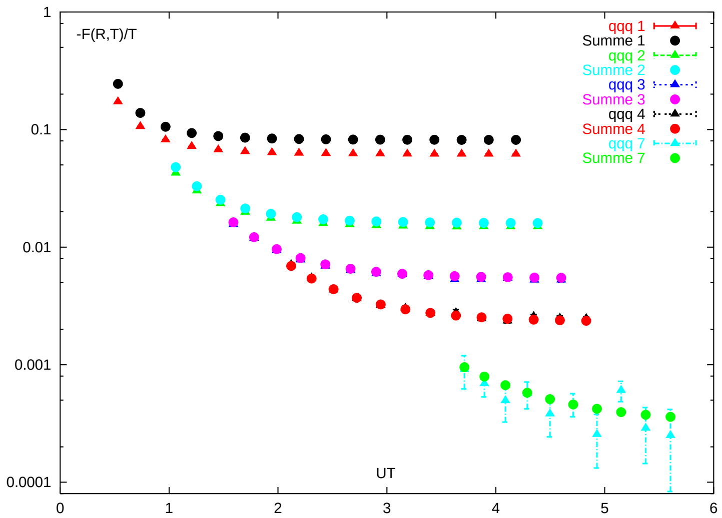
Abbildung 5.9.: Screeningmassen des $q\bar{q}$- und qqq-Systems mit gleichseitiger Geometrie über der Temperatur für $d = 1$ auf dem $32^3 \times 4$-Gitter.

freien Energie dominiert. Dieser Beitrag stammt aber aus dem störungstheoretischen Regime, so dass, wie schon für die gleichseitigen Dreiecke gezeigt wurde, die freie Energie des qq-Systems benutzt werden muss. Berücksichtigt man dies, indem man für kleine Länge der Grundseite die freie Energie des qq-Systems benutzt, ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung für alle Äste, wie die Abbildungen 5.11(a) und 5.11(b) zeigen.

Abschließend lässt sich sagen, dass in der Deconfinement-Phase die freien Energien gleichschenkliger Dreiecke Debye-Screening zeigen und sich bei hohen Temperaturen sehr gut durch die Summe der freien Energien der entsprechenden $q\bar{q}$-Systems beschreiben lassen. Die Screeningmassen stimmen im gleichseitigen Fall bei hinreichend grossen Abständen mit denen des Zwei-Quark-Systems überein. Für kleine Abstände verhält sich die farbgemittelte freie Energie des qqq-Systems wie die Summe der freien Energien des qq-Systems in diesem Abstandsbereich. In der Nähe des Phasenübergangs zeigen sich jedoch für den Vorfaktor $\alpha(T)$ Abweichungen von der Summe der entsprechenden Größen des $q\bar{q}$-Systems, die möglicherweise auf weitere Effekte schließen lassen.

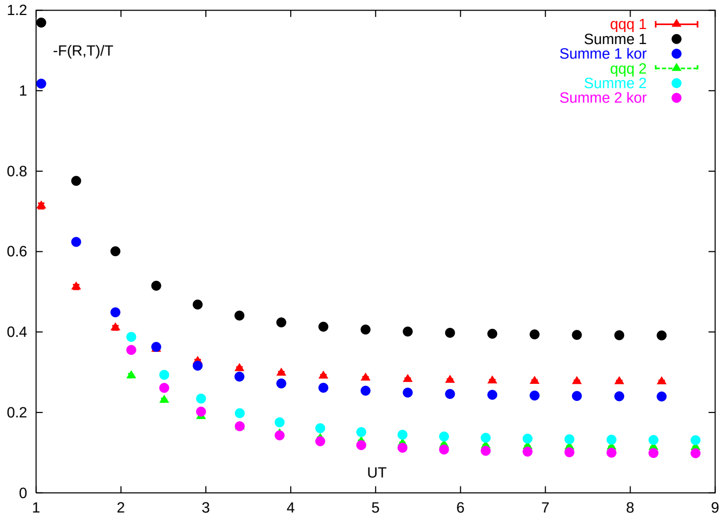


(a)

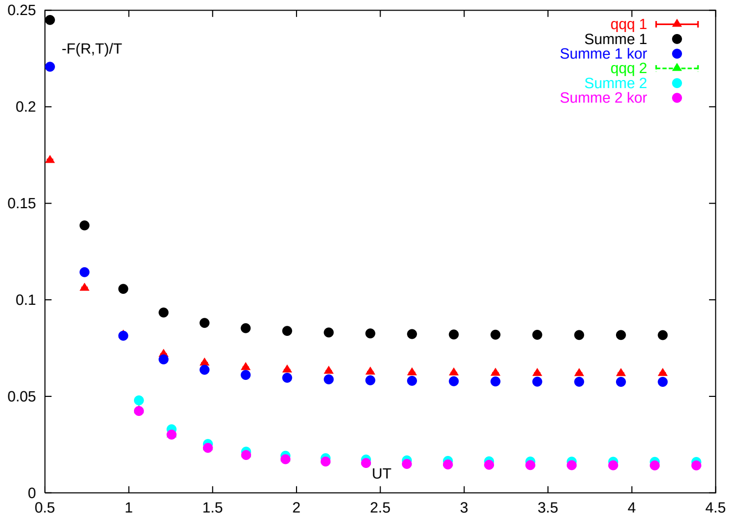


(b)

Abbildung 5.10.: Logarithmische Auftragung der freien Energie des qqq-Systems (a) bei $\beta = 4.080$ für das $32^3 \times 4$-Gitter, (b) bei $\beta = 6.0434$ für das $32^3 \times 8$-Gitter, sowie der aus den $q\bar{q}$-Fits nach dem Δ-Ansatz berechneten Daten.



(a)



(b)

Abbildung 5.11.: Freie Energie der Grundseitenlängen $\sqrt{2}$ und $2\sqrt{2}$ (a) bei $\beta = 4,080$ für das $32^3 \times 4$-Gitter, (b) bei $\beta = 6,0434$ für das $32^3 \times 8$-Gitter sowie der jeweils aus den $q\bar{q}$-Fits und den korrigierten Werten nach dem Δ-Ansatz berechneten Daten.

5.3. Freie Energien für $T < T_c$

In der Confinement-Phase wurden Zwei- und Drei-Punkt-Korrelationsfunktionen auf dem $32^3 \times 4$-Gitter für fünf, auf dem $32^3 \times 8$ für vier verschiedene Kopplungen untersucht.

Die freie Energie ergibt sich nach (3.9) durch den Erwartungswert der entsprechenden Korrelationsfunktionen als

$$F_{qqq}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = -T \ln \langle \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_1)\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_2)\, \mathrm{Tr}\, L(\mathbf{x}_3) \rangle \,. \tag{5.5}$$

Der Logarithmus der Korrelationsfunktionen wurden zuvor einer Jackknife-Analyse mit zehn Blöcken unterzogen. Die Temperaturskala stammt aus [6]. Die freien Energien als Funktion des Abstands zusammen mit ihrem weiter unten ermittelten Ergebnis eines χ^2-Fits zeigt Abbildung 5.12.

Es stellte sich heraus, dass die in Tabelle 5.1 gezeigten Kopplungen für das $32^3 \times 8$-Gitter auch unterhalb der kritischen Temperatur eine zu geringe Statistik aufwiesen, um an ihnen aussagekräftige Fits durchführen zu können. Daher wird im Weiteren nur die Analyse der Messwerte des $32^3 \times 4$-Gitters gezeigt.

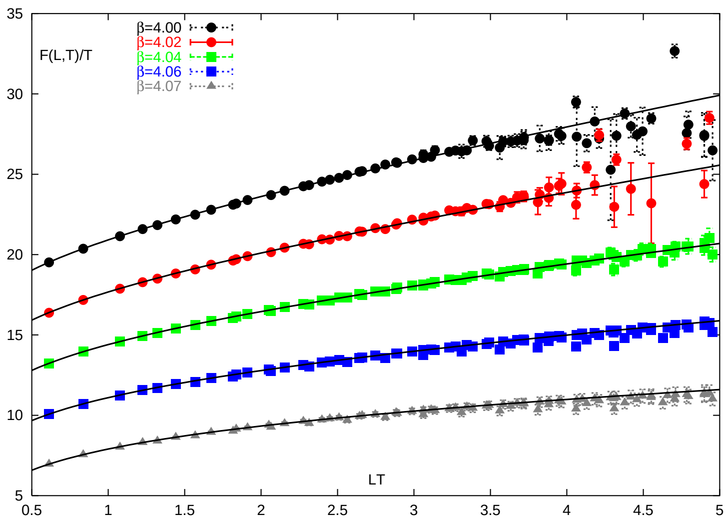


Abbildung 5.12.: Freie Energien unterhalb T_c über dem Fermat-Abstand LT des Dreiecks für das $32^3 \times 4$-Gitter. Die durchgezogenen Linien zeigen das Ergebnis des χ^2-Fits. Zur besseren Sichtbarkeit wurden die Grafen bis auf den untersten jeweils um drei Einheiten weiter nach oben verschoben.

Zur Bestimmung der Stringspannung wurden zunächst χ^2-Fits der gleichseitigen Dreiecke nach den in Kapitel 3.6 erwähnten Ansätzen

$$\frac{F_Y(L)}{T} = \frac{\sigma_Y(T)}{T^2} LT + K_Y(T) \ln(2LT) + C_Y(T) \tag{5.6}$$

β	T/T_c	$\sigma_{q\bar{q}}(T)/T^2$	$\sigma_Y(T)/T^2$	$\sigma_\Delta(T)/T^2$	$K_Y(T)$	$K_\Delta(T)$
4.00	0.874	1.954(30)	1.629(41)	0.931(24)	1.545(43)	0.519(13)
4.02	0.907	1.652(26)	1.350(35)	0.771(20)	1.547(38)	0.519(12)
4.04	0.942	1.139(22)	0.905(27)	0.517(16)	1.661(31)	0.556(11)
4.06	0.977	0.553(46)	0.521(43)	0.300(25)	1.681(54)	0.560(18)
4.07	0.995	0.299(97)	0.225(92)	0.130(53)	1.74(11)	0.58(4)

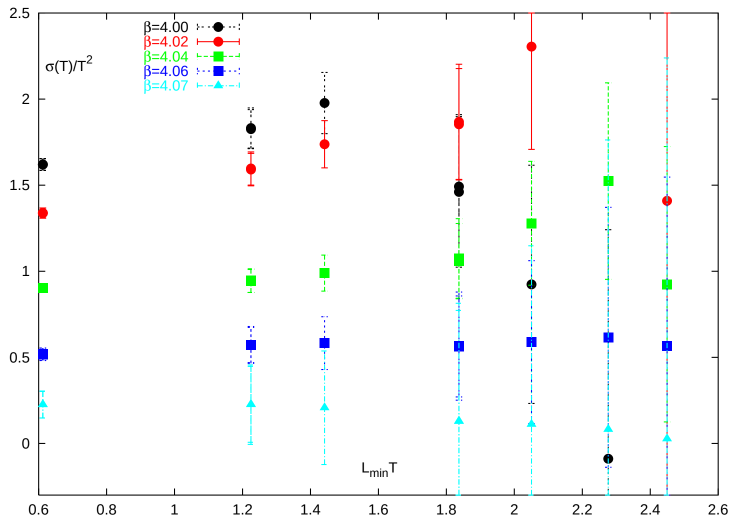
Tabelle 5.5.: Fitparameter des Y- und des Δ-Ansatzes sowie Stringspannung des $q\bar{q}$-Systems für das $32^3 \times 4$-Gitter unterhalb T_c.

und

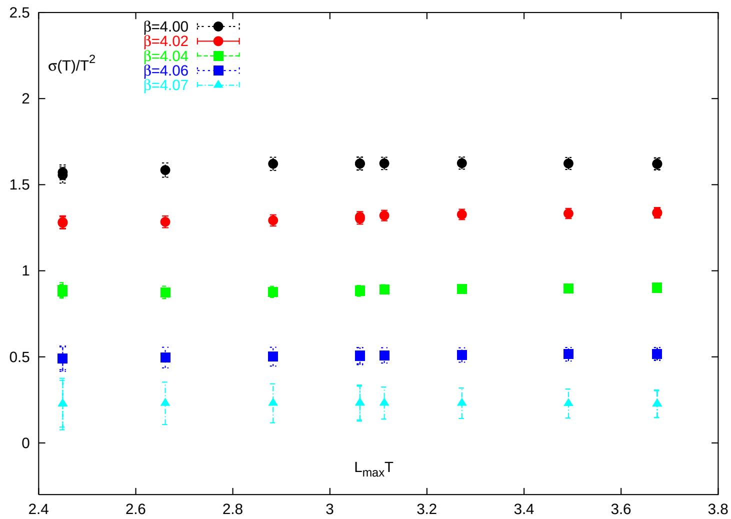
$$\frac{F_\Delta(R)}{T} = \frac{\sigma_\Delta(T)}{T^2} UT + K_\Delta(T) \sum_i \ln(2R_iT) + C_\Delta(T) \tag{5.7}$$

durchgeführt, wobei L für den in (3.94) definierten Fermat-Abstand und U für den Umfang der Dreiecke mit den Seitenlängen R_i steht. Auf die Einbeziehung des Coulomb-Terms wurde verzichtet, da die Fits so einen weitaus kleineren Fehler aufwiesen. Dieser Term dominiert sowieso nur bei kleinen Abständen, bei den hier untersuchten großen Abständen spielt er keine Rolle. Um aber dennoch die offensichtliche Krümmung der freien Energien miteinzubeziehen, wurde im Y-Ansatz ein logarithmischer Term eingefügt. Dieser ist theoretisch nicht abgesichert, wird aber erwartet. Um die Datenbasis zu vergrößern, wurden nicht nur die Messpunkte der gleichseitigen Dreiecke benutzt, sondern auch die einiger gleichschenkliger Dreiecke hinzugemischt. Diese wurden so ausgewählt, dass sie nur geringfügig von der gleichseitigen Geometrie abwichen und optisch auf dem Hauptast des Grafen der freien Energie lagen.

Zunächst wurde wieder die Stabilität der Fitparameter durch Variation der Grenzen geprüft. Das Ergebnis für die Stringspannung bei Änderung der Untergrenze im Y-Ansatz zeigt Abbildung 5.13(a). Der entsprechende Plot für den Δ-Ansatz stimmt damit praktisch überein, so dass auf eine Darstellung verzichtet wurde. Man erkennt für die kleinsten Werte eine geringe Abhängigkeit der Stringspannung, so dass die endgültigen Werte über die Fits mit $L_{\min}T = 0.61, 1.22, 1.84$ bzw. $U_{\min}T = 1.06, 2.12, 3.18$ gemittelt wurden. Die Obergrenze der Fits wurde ebenfalls variiert. Das Ergebnis für den Y-Ansatz zeigt Abbildung 5.13(b), der Δ-Ansatz ist wieder praktisch identisch. Man erkennt keine wesentliche Abhängigkeit der Stringspannung von der Obergrenze. Daher wurde diese bei allen Fits gleichseitiger Dreiecke bei $L_{\max}T = 3.67$ bzw. $U_{\max}T = 6.4$ festgehalten. Die verschiedenen Werte der Unter- und Obergrenze der beiden Abstände bezeichnen dabei jeweils die gleichen Datenpunkte. Zusätzlich wurden auch die freie Energie des $q\bar{q}$-Systems nach dem Verfahren aus [11] gefittet. Dabei variierte die Untergrenze zwischen $R_{\min}T = 0.71, \ldots, 0.94$, die Obergrenze wurde bei $R_{\max}T = 2.6$ festgehalten. Die gefundenen Fitparameter für beide Ansätze des qqq-Systems sowie die Stringspannung des $q\bar{q}$-Systems zeigt Tabelle 5.5.



(a)



(b)

Abbildung 5.13.: Abhängigkeit der Stringspannung von der Wahl (a) der Untergrenze L_{min}, (b) der Obergrenze L_{max}.

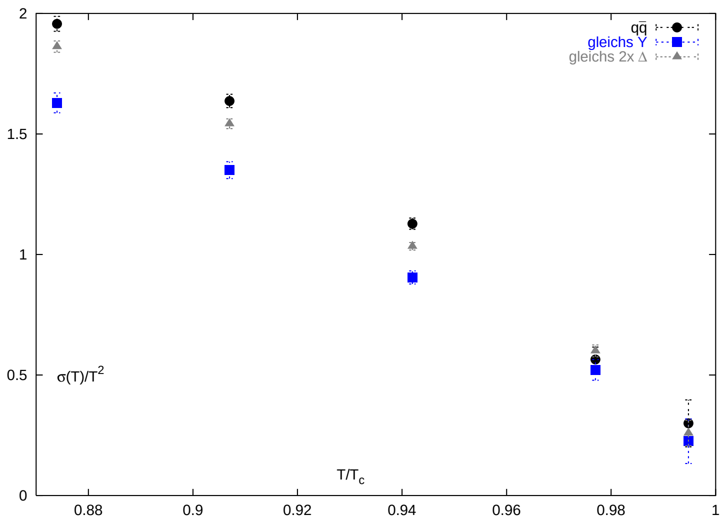


Abbildung 5.14.: Stringspannungen gleichseitiger Dreiecke auf dem $32^3 \times 4$-Gitter im Vergleich. Gezeigt sind die Fitparameter $\sigma_Y(T)/T^2$ für den Fermat-Abstand, $2\sigma_\Delta(T)/T^2$ für den Umfang und $\sigma(T)/T^2$ des $q\bar{q}$-Systems.

Um nun zu entscheiden, welcher Ansatz realisiert ist, vergleicht man die gefundenen Werte für die Stringspannungen mit der des $q\bar{q}$-Systems. Abbildung 5.14 zeigt eine Auftragung über der Temperatur. Man erkennt, dass das Doppelte der Werte des Δ-Ansatzes durchweg näher an denen des $q\bar{q}$-Systems liegt als die des Y-Ansatzes. Um dies näher zu untersuchen, berechnet man die Quotienten der einzelnen Stringspannungen. Nach Kapitel 3.6 sollte entweder $\sigma_Y(T) = \sigma_{q\bar{q}}$ oder $2\,\sigma_\Delta(T) = \sigma_{q\bar{q}}$ sein. Ein Konstantenfit ihrer Verhältnisse ergibt

$$\frac{\sigma_{q\bar{q}}(T)}{\sigma_\Delta(T)} = 2.11(3) \tag{5.8}$$

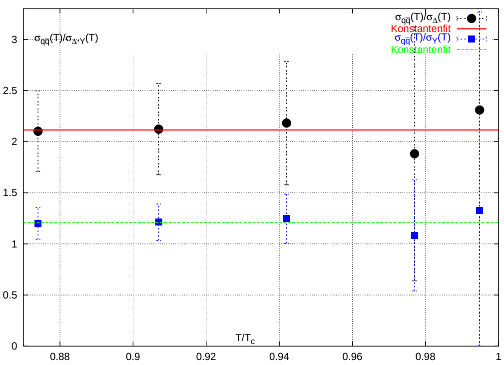
und

$$\frac{\sigma_{q\bar{q}}(T)}{\sigma_Y(T)} = 1.21(2). \tag{5.9}$$

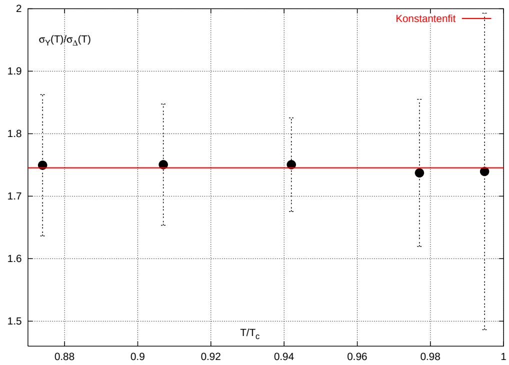
Abbildung 5.15(a) zeigt die Quotienten sowie den Konstantenfit. Obwohl die Abweichungen von den erwarteten Werten recht groß sind, ist auch hier der Δ-Ansatz deutlich der bessere. Im Y-Ansatz existiert allerdings eine geometrische Deutung des Faktors $1/2$ zwischen der Stringspannung des $q\bar{q}$-Systems und der des Δ-Ansatzes. Für den Quotienten der Stringspannungen in der beiden Ansätzen gilt dann nämlich

$$\frac{\sigma_Y(T)}{\sigma_\Delta(T)} = \frac{U}{L} = \sqrt{3}. \tag{5.10}$$

Für $\sigma_Y(T) = \sigma_{q\bar{q}}(T)$ im Y-Ansatz erklärt man den Faktor $1/2$ im Δ-Ansatz dadurch,



(a)



(b)

Abbildung 5.15.: Quotienten der Stringspannungen, (a) $\sigma_{q\bar{q}}(T)/\sigma_\Delta(T)$ sowie $\sigma_{q\bar{q}}(T)/\sigma_Y(T)$ jeweils mit Konstantenfit, (b) $\sigma_Y(T)/\sigma_\Delta(T)$ mit Konstantenfit

dass $\sqrt{3} \approx 2$ gilt. Man findet durch einen Konstantenfit (Abb. 5.15(b))

$$\frac{\sigma_Y(T)}{\sigma_\Delta(T)} - \sqrt{3} = 0.0134(29), \tag{5.11}$$

was ebenfalls sehr gut erfüllt zu sein scheint.

Anders als bei gleichseitigen Dreiecken gibt es nun für gleichschenklige Dreiecke keine für alle Abstände gleiche Beziehung zwischen Umfang und Fermat-Abstand. Diese sind also geeignet, Abweichungen von der Vorhersage der beiden Ansätze festzustellen, da der falsche Ansatz gezwungen ist, seine Fehlskalierung der Stringenergie in verschiedenen Geometrien durch Änderung der gemessenen Stringspannung auszugleichen. Am größten wird die Änderung bei den in dieser Arbeit verwendeten Geometrien bei gleichschenkligen Dreiecken mit der Grundseitenlänge $\sqrt{2}$, wo sie maximal etwa 13 % beträgt. Eine grafische Darstellung der Verhältnisse bietet Abbildung 5.16. Führt man Fits beider Ansätze an die Daten von gleichschenkligen Dreiecken dieser Grundseitenlänge aus, so sollten also beim richtigen Ansatz die gefundenen Werte für die Stringspannungen mit denen der gleichseitigen Dreiecke übereinstimmen. Abbildung 5.17 zeigt die gewonnenen Ergebnisse. Zum Vergleich sind auch noch einmal die Werte des $q\bar{q}$-Systems eingezeichnet. Die untere Grenze des Fitbereichs variierte bei diesen Fits zwischen den Werten $L_{\text{min}}T = 0.61, 0.84, 1.07$ bzw. $U_{\text{min}}T = 1.06, 1.47, 1.94$, die obere Grenze wurde bei $L_{\text{max}}T = 3.1$ bzw. $U_{\text{max}}T = 5.9$ festgehalten. Diese Werte entsprechen wieder dem gleichen Datenpunkt in den Auftragungen über die beiden Abstände. Man erkennt, dass die Stringspannungen beider Geometrien in den jeweiligen Ansätzen gut übereinander liegen, so dass sich auch hier keine Entscheidung darüber treffen lässt, welcher Ansatz realisiert ist. Der Grund liegt vermutlich darin, dass bei den Fits mit gleichschenkliger Geometrie die Quotienten U/L über den gesamten Abstandsbereich gemittelt werden.

β	T/T_c	$K_{q\bar{q}}(T)$	$K_Y(T)$		$K_\Delta(T)$	
			gleichs.	$\sqrt{2}$	gleichs.	$\sqrt{2}$
4.00	0.874	0.830(38)	1.201(7)	1.177(8)	0.488(2)	0.459(3)
4.02	0.907	0.848(36)	1.235(6)	1.171(12)	0.488(2)	0.458(5)
4.04	0.942	1.011(30)	1.402(7)	1.347(11)	0.520(2)	0.515(4)
4.06	0.977	1.213(70)	1.631(13)	1.535(21)	0.574(4)	0.582(8)
4.07	0.995	1.23(13)	1.648(26)	1.543(41)	0.564(9)	0.580(15)

Tabelle 5.6.: Vorfaktoren des logarithmischen Terms des $q\bar{q}$-Systems im Vergleich mit den beiden Ansätzen für gleichseitige Dreiecke und mit der Grundseitenlänge $\sqrt{2}$ des qqq-Systems auf dem $32^3 \times 4$-Gitter unterhalb T_c.

Damit ergibt sich nur eine mittlere Abweichung von etwa 8 % für die Dreiecke der Grundseitenlänge $\sqrt{2}$ vom gleichseitigen Wert, der durch die Fehler der Fits nicht aufzulösen ist. Dennoch liegt die Stringspannung des Δ-Ansatzes näher an den erwarteten Werten als der Y-Ansatz und scheint die Messwerte insgesamt besser zu beschreiben. Im Rahmen der in dieser Arbeit erreichten Messgenauigkeit bietet der Δ-Ansatz die bessere Beschreibung der freien Energien des qqq-Systems in der Confinement-Phase. Eine wesentliche Erhöhung der Statistik und die Untersuchung der freien Energien einzelner Symmetriezustände könnte eine genauere Aussage darüber erlauben, welcher Geometrie die Flussröhre des qqq-Systems gehorcht.

Neuere Untersuchungen bei $T = 0$ in reiner Eichtheorie [19] sowie in voller Quantenchromodynamik bei endlicher Temperatur in maximaler abelscher Eichung [17] bestätigen aber den Y-Ansatz. Aus letzterer Arbeit stammt auch die Abbildung 3.3. Sie zeigt die ortsaufgelöste Wirkungsdichte eines gleichseitigen qqq-Systems in maximal abelscher Eichung der vollen Quantenchromodynamik. Man erkennt eindeutig eine Y-förmige Flussröhre zwischen den Quarks. Zudem konnten die Autoren beim Übergang zur Deconfinement-Phase die Auflösung der Flussröhre beobachten. In der Arbeit wurden allerdings keine Stringspannungen vermessen. In [19] wurde eine Vielzahl von Geometrien für qqq-Systeme bei drei verschiedenen Kopplungen bei $T = 0$ untersucht. Durchweg stellte der Y-Ansatz die besseren Fits an die gewonnenen Messwerte. Der Grund für diese abweichenden Beobachtungen liegt vermutlich darin, dass in den gerade erwähnten Fällen die nötige Statistik leichter zu erreichen ist als für die hier gemessenen farbgemittelten Drei-Quark-Korrelationsfunktionen bei endlicher Temperatur.

Um den Vorfaktor des logarithmischen Terms $K(T)$ besser zu verstehen, wurden die freien Energien des qqq-Systems mit gleichseitiger Geometrie und Dreiecke mit Grundseitenlänge $\sqrt{2}$ bei festgehaltener Stringspannung mit variablen $K(T)$ und $C(T)$ gefittet und mit den Werten des $q\bar{q}$-Systems aus dieser Arbeit verglichen. Dabei wurde wieder $\sigma_Y(T) = \sigma_{q\bar{q}}(T)$ und $2\,\sigma_\Delta(T) = \sigma_{q\bar{q}}(T)$ gewählt.

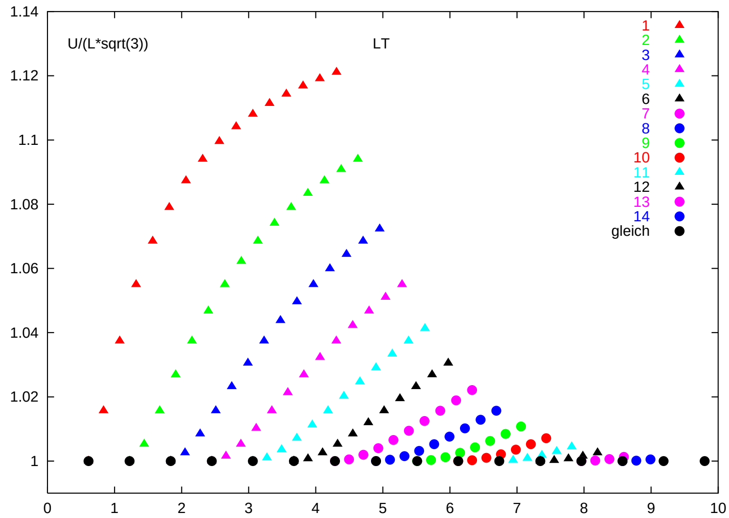


Abbildung 5.16.: Verhältnis der Abstände U und L. Gezeigt ist der Quotient beider Abstände für die Vielfachen n der Grundseitenlänge $\sqrt{2}$ für gleichschenklige sowie für gleichseitige Dreiecke über dem Fermat-Abstand. Das Verhältnis der gleichseitigen Dreiecke ist auf Eins normiert.

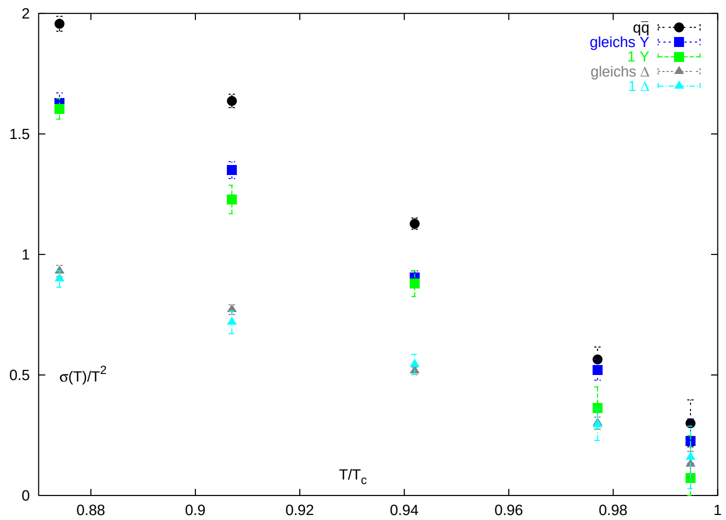


Abbildung 5.17.: Stringspannungen gleichseitiger und gleichschenkliger Dreiecke mit Grundseitenlänge $\sqrt{2}$ auf dem $32^3 \times 4$-Gitter im Vergleich. Gezeigt sind die Fitparameter $\sigma_Y(T)/T^2$ für den Fermat-Abstand, $\sigma_\Delta(T)/T^2$ für den Umfang und $\sigma(T)/T^2$ des $q\bar{q}$-Systems.

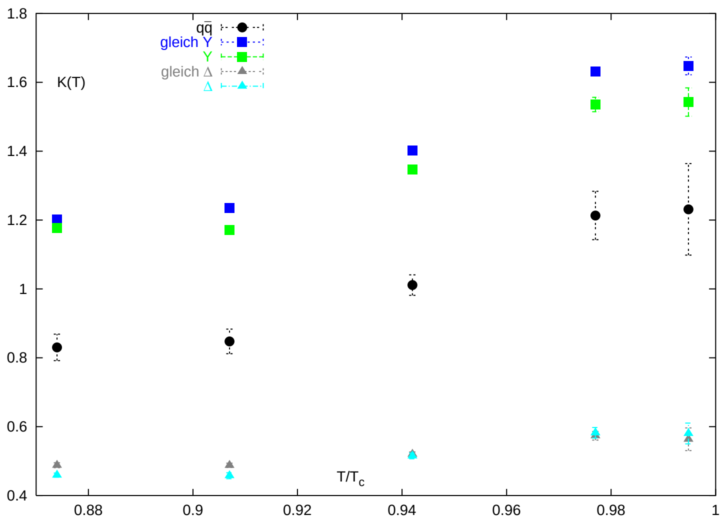


Abbildung 5.18.: Vergleich der Fitwerte des Vorfaktors $K(T)$ des logarithmischen Terms für das $q\bar{q}$-System sowie der beiden Ansätze des qqq-Systems für gleichseitige Dreiecke und gleichschenklige mit Grundseitenlänge $\sqrt{2}$ unterhalb T_c für das $32^3 \times 4$-Gitter.

Die gefundenen Werte für $K(T)$ zeigt Tabelle 5.6, eine grafische Darstellung bietet Abbildung 5.18. Man erkennt ein gleichsinniges Variieren der Werte des beider Ansätze mit denen des $q\bar{q}$-Systems. Auch liegen die Faktoren beider Ansätze in beiden Geometrien nah beieinander, so dass wie schon bei der Stringspannung keine Fehlskalierung zu erkennen ist. Allerdings liegen die Werte des Δ-Ansatzes nicht auf denen des $q\bar{q}$-Systems, wie es zu erwarten gewesen wäre. Es fällt aber auf, dass sie etwa halb so gross wie die des $q\bar{q}$-Systems sind. Der Grund könnte, wie schon bei der Stringspannung des Δ-Ansatzes, ein gruppentheoretischer Faktor $1/2$ sein, der Überabzählung vermeidet. Der wahre Vorfaktor $K_\Delta(T)$ wäre dann doppelt so groß wie der in Tabelle 5.6 angegebene. Da der logarithmische Term für das qqq-System im Y-Ansatz aus der Theorie noch nicht bekannt ist, kann leider kein Vergleich der gefundenen Werte mit theoretischen Vorhersagen durchgeführt werden. Betrachtet man die Werte des von $K_Y(T)$ jedoch genauer, fällt auf, dass sie zumindest im gleichseitigen Fall etwa um 0.4 über dem des $q\bar{q}$-Systems liegt. Möglicherweise ist der Fermat-Abstand L für den logarithmischen Term nicht der richtige, sondern die Länge l_i der drei einzelnen Arme der Y-förmigen Flussröhre, wobei $L = \sum_i l_i$ gilt. Sie bieten mehr Informationen über die Geometrie als der einfache Fermat-Abstand. Dies könnte zu einer Modifikation der Art

$$K'_Y(T) \sum_i \ln(2 l_i T) \tag{5.12}$$

im logarithmischen Beitrag führen. Zur genaueren Untersuchung sollte aber zunächst die Messgenauigkeit so erhöht werden, dass sich zwischen den beiden Ansätze für die Stringspannung unterscheiden lässt.

Zusammenfassung

Es wurde das Verhalten von Drei-Quark-Systemen in der Näherung der SU(3)-reinen-Eichtheorie untersucht. Die Zusammensetzung der freien Energien der einzelnen Symmetriezustände des Drei-Quark-Systems aus Polyakov-Loop-Korrelationen wurde abgeleitet. Eine störungstheoretische Behandlung der renormierten freien Energie zeigt die Zerlegbarkeit der einzelnen Symmetriezustände in die entsprechenden Ausdrücke des Zwei-Quark-Systems bis zur Ordnung g^2. Das farbgemittelte System ist bis zur Ordnung g^4 aus dem farbgemittelten Ausdruck für das Zwei-Quark-System zusammengesetzt. Im Grenzfall kleiner Abstände verhalten sich die farbgemittelten freien Energien der jeweiligen Systeme wie ihr am stärksten anziehender Symmetriezustand.

Zur Fehlerreduzierung wurden die Link-Integration sowie für Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen allein die Lüscher-Methode auf ihre Performance getestet. Die Link-Integration kann unterhalb der kritischen Temperatur für Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen und besonders für Drei-Punkt-Korrelationsfunktionen von Polyakov-Loops eine beträchtliche Fehlerreduzierung in relativ kurzer Zeit erzielen. Der Gewinn durch Anwendung der Lüscher-Methode ist im Hinblick auf die benötigte Rechenzeit gering. Möglicherweise kann diese jedoch durch einen optimierten Algorithmus noch verringert werden. Auch ist über die Performance durch geschachtelte Anwendung der Methode bei endlicher Temperatur nichts bekannt.

Auf den Gittern $32^3 \times 4$ und $32^3 \times 8$ wurden unter- und oberhalb der kritischen Temperatur T_c die farbgemittelten freien Energien des $q\bar{q}$- und des qqq-Systems für gleichschenklige Geometrien gemessen. Unterhalb T_c konnte für das $N_\tau = 4$-Gitter nicht eindeutig entschieden werden, ob der Y- oder der Δ-Ansatz realisiert ist. Im Rahmen der erzielten Messgenauigkeit stellt aber der Δ-Ansatz eine bessere Beschreibung der Daten dar. Die Art des logarithmischen Terms in den freien Energien bei endlichem T ist weiter unklar, im Δ-Ansatz scheint aber wie bei der Stringspannung ein gruppentheoretischer Faktor im Vergleich mit dem $q\bar{q}$-System eine Rolle zu spielen. Für den Y-Ansatz könnte auch die Länge der Y-förmigen Arme der Flussröhre und nicht nur ihre Gesamtlänge von Bedeutung sein. Für zukünftige Untersuchungen sollte für farbgemittelte freie Energien eine weitaus höhere als der hier erzielten Statistik benutzt werden, um aussagekräftige Fitwerte erhalten zu können. Die Simulation der einzelnen Symmetriezustände des Drei-Quark-Systems benötigt weniger große Statistiken und ist für die Untersuchung der Flussröhrengeometrie besonders geeignet. Oberhalb der kritischen Temperatur zeigt sich Debye-Screening für das qqq-System auf beiden Gittern. Die Screeningmasse ist im Rahmen der Messgenauigkeit identisch mit der des $q\bar{q}$-Systems. Die gesamten freien Energien des qqq-Systems lassen sich für gleichschenklige Geometrien bei hinreichend grossen Abständen in die Summe der freien Energien von drei qq-Systemen zerlegen. Bei kleinen Abständen verhält sich die freie Energie des qqq-Systems wie die Summe der freien Energien des qq-Systems in diesem Grenzfall. Für das $32^3 \times 8$-Gitter waren aufgrund der zu geringen Statistik nur qualitative Analysen möglich.

Als weitere interessante Fragen bleiben offen das Verhalten der freien Energie des qqq-Systems in voller QCD sowie das der einzelnen Symmetriezustände des Drei-Quark-Systems. Die Simulation von Gittern mit grösserem N_τ kann Aufschluss über die kurzreichweitige Eigenschaften auch unterhalb T_c geben, die im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht wurden. Auf analytischer Seite sind Modifikationen der Stringspannung aufgrund endlicher Temperatur im Y-Ansatz nur für kleine Abstände bekannt.

A. Anhang

A.1. Die Dirac-Matrizen

Zunächst die Pauli-Matrizen, die die Generatoren der SU(2) stellen.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

Mit ihnen können die Dirac-Matrizen bequem definiert werden.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{A.2}$$

Die Dirac-Matrizen gehorchen der *Clifford-Algebra*

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \tag{A.3}$$

A.2. Die SU(3)-Gruppe

Die *Gell-Mann-Matrizen* lauten

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Alle Gell-Mann-Matrizen sind hermitesch und für ihre Spur gilt Tr $\lambda^a = 0$ sowie Tr $\lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}$. Die $\lambda^a/2$ stellen die Gneratoren der SU(3). Die *Strukturkonstanten* der SU(3) f^{abc} hängen mit den Kommutatoren der Gell-Mann-Matrizen zusammen über

$$\left[\lambda^a, \lambda^b\right] = 2if^{abc}\lambda^c. \tag{A.5}$$

Die Strukturkonstanten sind total antisymmetrisch, $f^{bac} = f^{acb} = -f^{abc}$ und nur neun von ihnen sind überhaupt verschieden von Null. Für die Antikommutatoren findet man

$$\left\{\lambda^a, \lambda^b\right\} = \frac{4}{3}\delta^{ab} + 2d^{abc}\lambda^c, \tag{A.6}$$

dabei sind die d^{abc} total symmetrisch und 16 verschieden von Null. Für die Spur dreier Gell-Mann-Matrizen gilt

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda^a\lambda^b\lambda^c\right) = 2(d^{abc} + if^{abc}). \tag{A.7}$$

Die *Fierz-Identität* für die SU(3) lautet

$$\lambda^a_{ij}\lambda^a_{kl} = 2\delta^{il}\delta^{kj} - \frac{2}{3}\delta^{ij}\delta^{kl}. \tag{A.8}$$

A.3. Gitterstörungstheorie

Für die Störungstheorie auf dem Gitter werden abkürzende Schreibweisen und Definitionen benutzt, die jetzt hier vorgestellt werden.

- Der Vierer-Impuls p_μ in einer Brillouin-Zone des Gitters ist normiert durch

$$p_\mu = \frac{2\pi}{N_i}\hat{\mu} \tag{A.9}$$

  wobei symbolisch $i = \sigma$ für räumliche und $i = \tau$ für das zeitliche $\hat{\mu}$ steht.

- In der Summe über die Impulse einer Brillouin-Zone wird die Mode mit verschwindendem Impuls ausgelassen.

$$\sum_p := \sum_{p,p\neq 0}. \tag{A.10}$$

  Eine Begründung dafür liefert [9].

Weiterhin wurde bei der Störungsentwicklung des Polyakov-Loops die *Baker-Hausdorff*-Formel verwendet, die für quadratische Matrizen gilt,

$$e^A e^B = \exp\left\{A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \ldots\right\}. \tag{A.11}$$

A.4. Freie Energien in der Störungstheorie

Die Tabelle faßt die in Kapitel 3.4 gefundenen Ausdrücke für die freien Energien in niedrigster Ordnung im Kontinuum zusammen. Man erhält den vollständigen Ausdruck

System	gemittelt	Singlett	Triplett	Sextett	Oktett	Dekuplett
$q\bar{q}$	$-4/9$	$-4/3$			$+1/6$	
qq	$-4/9$		$-2/3$	$+1/3$		
qqq	$-4/3$	-2			$-1/2^\star$	$+1$

Tabelle A.1.: *Nur für gleichseitiges Dreieck

für die jeweilige freie Energie, in dem man den in der Tabelle gefundenen Faktor c für die einzelnen Symmetriezustände x in

$$\frac{F^x_{nm}(R)}{T} = c\,\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R} \tag{A.12}$$

und für das farbgemittelte System in

$$\frac{F_{nm}(R)}{T} = c\left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{R^2} \tag{A.13}$$

einsetzt. Für das qqq-System benutzt man dabei den effektiven Abstand (3.63)

$$\frac{1}{\tilde{R}} := \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{R_i}, \tag{A.14}$$

und für das farbgemittelte System entsprechend (3.61)

$$\frac{1}{\tilde{R}^2} := \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{R_i^2} \tag{A.15}$$

mit den Seitenlängen des Dreiecks R_i. Die Vorfaktoren für die beiden Oktette des qqq-Systems in der Tabelle sind gleich und gelten für ein gleichseitiges Dreieck. Der allgemeine Ausdruck lautet nach (3.77) und (3.78)

$$\exp\left(-\beta F^8_{qqq}\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{23}} - \frac{2}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{12}} - \frac{1}{6}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{13}} \tag{A.16}$$

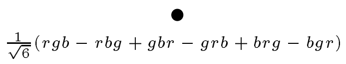
sowie

$$\exp\left(-\beta F^{8'}_{qqq}\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{12}} - \frac{2}{3}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{6}\frac{g^2}{4\pi}\frac{1}{R_{13}}. \tag{A.17}$$

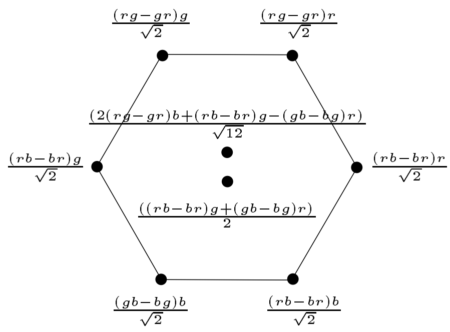
Für kleine Abstände geht die farbgemittelte freie Energie bis auf eine Konstante wie der am weitesten links stehende Symmetriezustand.

A.5. Die Symmetriezustände des qqq-Systems

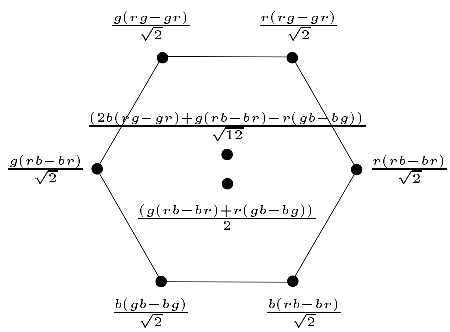
Die folgenden Abbildung zeigt die Symmetriezustände der Farben des qqq-Systems.


$\frac{1}{\sqrt{6}}(rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr)$

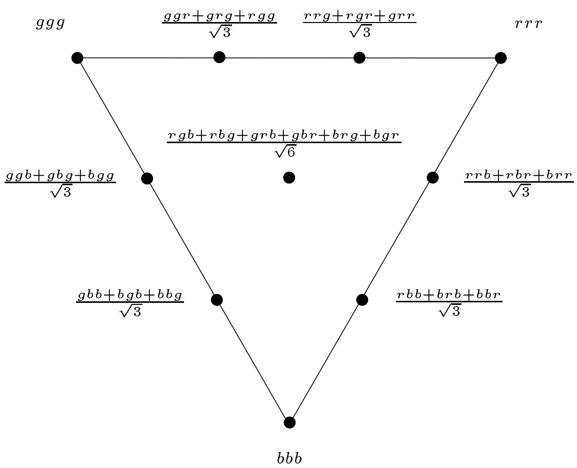
(a)


$\frac{(rg-gr)g}{\sqrt{2}}$
$\frac{(rg-gr)r}{\sqrt{2}}$
$\frac{(2(rg-gr)b+(rb-br)g-(gb-bg)r)}{\sqrt{12}}$
$\frac{(rb-br)g}{\sqrt{2}}$
$\frac{(rb-br)r}{\sqrt{2}}$
$\frac{((rb-br)g+(gb-bg)r)}{2}$
$\frac{(gb-bg)b}{\sqrt{2}}$
$\frac{(rb-br)b}{\sqrt{2}}$

(b)


$\frac{g(rg-gr)}{\sqrt{2}}$
$\frac{r(rg-gr)}{\sqrt{2}}$
$\frac{(2b(rg-gr)+g(rb-br)-r(gb-bg))}{\sqrt{12}}$
$\frac{g(rb-br)}{\sqrt{2}}$
$\frac{r(rb-br)}{\sqrt{2}}$
$\frac{(g(rb-br)+r(gb-bg))}{2}$
$\frac{b(gb-bg)}{\sqrt{2}}$
$\frac{b(rb-br)}{\sqrt{2}}$

(c)


ggg
$\frac{ggr+grg+rgg}{\sqrt{3}}$
$\frac{rrg+rgr+grr}{\sqrt{3}}$
rrr
$\frac{rgb+rbg+grb+gbr+brg+bgr}{\sqrt{6}}$
$\frac{ggb+gbg+bgg}{\sqrt{3}}$
$\frac{rrb+rbr+brr}{\sqrt{3}}$
$\frac{gbb+bgb+bbg}{\sqrt{3}}$
$\frac{rbb+brb+bbr}{\sqrt{3}}$
bbb

(d)

Literaturverzeichnis

[1] K. G. Wilson, **Confinement of Quarks**, Phys. Rev. D10 (1974) 2445

[2] H.J. Rothe, **Lattice Gauge Theories - An Introduction**, World Scientific Notes in Physics - Vol. 59, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1997

[3] B. Beinlich, **Thermodynamik der SU(3) Gittereichtheorie mit verbesserten Wirkungen**, Diplomarbeit, Universität Bielefeld, 1996

[4] K. Symanzik, **Continuum limit and improved action in lattice theories**, Nucl. Phys. B414 (1994) 785

[5] J. Fingberg, U. Heller, F. Karsch, **Scaling and asymptotic scaling in SU(2) gauge theory**, Nucl. Phys. B392 (1993) 493

[6] F. Zantow, Dissertation, Universität Bielefeld, (in Vorbereitung)

[7] S. Nadkarni, **Non-Abelian Debye-Screening. II. The singlet potential**, Phys. Rev. D34 (1986) 3904

[8] O. Vogt, **Singlett- und Oktett-Potentiale in der Quantenchromodynamik**, Diplomarbeit, Universität Bielefeld, (in Vorbereitung)

[9] U. Heller, F. Karsch, **One-Loop Perturbative Calculation of Wilson Loops on Finite Lattices**, Nucl. Phys. B251 (1985) 254

[10] J. M. Cornwall, **The Baryon Wilson Loop Area Law in QCD**, Phys. Rev. D54 (1996) 6527, hep-th 9605116

[11] O. Kaczmarek, **Korrelationsfunktionen und Potentiale mit verbesserten Wirkungen**, Diplomarbeit, Universität Bielefeld, 1997

[12] O. Alvarez, **Static potential in string models**, Phys. Rev. D24 (1981) 440

[13] M. Gao, **Heavy-Quark potential at finite temperature from a string picture**, Phys. Rev. D40 (1989) 2708

[14] R. D. Pisarski, O. Alvarez, **Strings at finite temperature and deconfinement**, Phys. Rev. D26 (1982) 3735

[15] Ph. de Forcrand, G. Schierholz, H. Schneider, M. Tepper, **The string and its tension in SU(3) lattice gauge theory**, Phys. Lett. 160B (1985) 137

[16] M. Lüscher, K. Symanzik, P. Weisz, **Anomalies of the free loop wave equation in the WKB approximation**, Nucl. Phys. B173 (1980) 365

[17] H. Ichie, V. Bornyakov, T. Streuer, G. Schierholz, **Flux Tubes of Two- and Three-Quark System in Full QCD**, Nucl. Phys. A721 (2003) 926-929, hep-lat 0304008

[18] C. Alexandrou, Ph. de Forcrand, A. Tsapalis, **The static three-quark SU(3) and fot-quark SU(4) potentials**, Phys. Rev. D65 (2001),

[19] T. T. Takahashi, H. Suganuma, Y. Nemoto, H. Matsufuru, **Detailed Analysis of the Three Quark Potential in SU(3) Lattice QCD**, Phys. Rev. D65 (2002), hep-lat 0204011

[20] O. Jahn, Ph. de Forcrand, **Baryons and Confining Strings**, hep-lat 0309115

[21] N. Cabibbo, E. Marinari, **A new method for updating SU(N) matrices in computer simulations of gauge theories**, Phys. Lett. B119 (1982) 387

[22] M. Creutz, **Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory**, Phys. Rev. D21 (1980) 2308

[23] A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, **Improved heatbath method for Monte Carlo calculations in lattice gauge theories**, Phys. Lett. B156 (1985) 393

[24] M. Creutz, **Overrelaxation and Monte Carlo simulation**, Phys. Rev. D36 (1987) 515

[25] M. Lüscher, P. Weisz, **Locality and exponential error reduction in numerical lattice gauge theory**, hep-lat/0108014

[26] G. Parisi, R. Petronzio, F. Rapuano, **A Measurement of the String Tension near the Continuum Limit**, Phys. Lett. 128B (1983) 418

[27] R. Brower, **The External Field Problem for QCD**, Nucl. Phys. B190 (1981) 699

[28] Ph. de Forcrand, C. Roiesnel, **Refined Methods for Measuring Large-Distance Correlations**, Phys. Lett. 151B (1985) 77

[29] Abramowitz and Stegun, **Handbook of Mathematical Functions, Ninth Printing**, Dover Publications, New York (1970)

[30] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, **String tension and thermodyanics with tree level and tadpole improved actions**, Eur. Phys. J. C6 (1999) 133

Abbildungsverzeichnis

Danksagung

Diese Arbeit wurde unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. Frithjof Karsch angefertigt. Ich danke Herrn Karsch für die hervorragende Betreuung. Ein besonderer Dank geht an Dr. Olaf Kaczmarek für seine Bereitschaft, sich jederzeit geduldig mit allen meinen Fragen und Problemen auseinanderzusetzen. Zudem hat auch die sehr gute Atmosphäre in der Arbeitsgruppe wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Dank gilt auch meiner Familie, die mich während des gesamten Studiums unterstützt hat.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit mit keinen weiteren als den im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmitteln angefertigt zu haben.

Kay A. Hübner