Korrelationsfunktionen und Potentiale mit verbesserten Wirkungen

Diplomarbeit

an der
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Olaf Kaczmarek

19. September 1997

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

Die Quantenfeldtheorie bildet die Grundlage für die Beschreibung von Elementarteilchen und den Kräften, die zwischen diesen kleinsten Bausteinen der Materie wirken. Die grundlegenden Arbeiten hierzu lieferte Dirac in den 20'er Jahren dieses Jahrhunderts. Die relativistische Beschreibung des freien Elektrons durch die Dirac-Gleichung führte zur Erkenntnis, daß das Elektron neben seiner Ladung von $-1e$ einen inneren Freiheitsgrad, den Spin mit zwei möglichen Werten $s = \pm 1/2$ hat, und daß es ein Antiteilchen, das Positron mit den gleichen Eigenschaften, aber mit entgegengesetzter Ladung gibt.
Die Kopplung des Dirac-Elektrons an ein elektro-magnetisches Feld, welches das Photon beschreibt, führte zur ersten Quantenfeldtheorie, der Quanten-Elektrodynamik (QED). Hierbei spielen Symmetrien eine entscheidende Rolle. Die Forderung der Invarianz der Theorie unter lokalen Eichtransformationen war die Grundlage der QED und aller später entwickelten Quantenfeldtheorien. Die Symmetriegruppe der QED ist die U(1).
Die experimentelle Bestätigung der QED durch die Messung des Spins und des magn. Moments des Elektrons, sowie die genaue Vorhersage der relativistischen Korrekturen zum Wasserstoff-Spektrum bahnten den Weg für weitere Quantenfeldtheorien.

Neben der elektro-magnetischen Wechselwirkung, die durch die QED beschrieben wird, gibt es noch drei weitere fundamentale Wechselwirkungen in der Natur. Die Gravitation wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben und hat wegen ihrer geringen Wechselwikungsstärke keinen Einfluß auf die Elementarteilchenphysik. Die schwache Wechselwirkung beschreibt Zerfallsprozesse, wie etwa den β-Zerfall des Neutrons. Weinberg und Salam versuchten die elektro-magnetische und die schwache Wechselwirkung zu verknüpfen. Das Weinberg-Salam Modell ist keine "vereinheitlichte Theorie", sondern führt die beiden Theorien auf das gleiche Prinzip zurück: Kräfte zwischen Elementarteilchen werden auf den Austausch von Eichbosonen zurückgeführt.

In dieser Arbeit wird die *Quantenchromodynamik (QCD)* behandelt. Sie ist die Theorie der starken Wechselwirkung und beschreibt die Kräfte zwischen Quarks und Gluonen. Gell-Mann und Zweig führten 1963 die Quarks ein, um die große Menge an damals bekannten Elementarteilchen zu ordnen und auf wenige Grundbausteine zurückzuführen. Es sind heute sechs Arten (*flavours*) von Quarks bekannt: *up*(u), *down*(d), *strange*(s), *charm*(c), *bottom*(b) und *top*(t). Sie tragen alle einen Spin von 1/2 und eine Ladung von $+2/3$ (u, c, t), bzw. $-1/3$ (d, s, b). Mit diesen lassen sich alle bekannten Mesonen (Quark-Antiquark Paar) und Baryonen (drei Quarks) beschreiben.

Die Quarks haben noch einen weiteren, inneren Freiheitsgrad, die Farbladung (*color*). Dieser wurde von Han und Nambu, sowie Greenberg und Gell-Mann postuliert, um das Spin-Statistik Problem zu beheben. Die QCD basiert auch auf dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz, wobei die Symmetriegruppe hier durch die Farbladungsgruppe SU(3) gegeben ist. Der wesentliche Unterschied zur QED besteht hier darin, daß die SU(3) eine nicht-abelsche Gruppe ist, d.h. die Elemente dieser Gruppe nicht kommutieren im Gegensatz zur U(1). Hierdurch gibt es auch Wechselwirkungen zwischen den Eichbosonen, den sog. Gluonen. Aufgrund der Selbstwechselwirkung der Gluonen, lassen sich wesentliche Eigenschaften der QCD schon in der reinen Eichtheorie untersuchen. Hierbei wird die Dynamik der Quarks vernachläßigt (*quenched approximation*) und nur der gluonische Sektor der Theorie betrachtet. In dieser Arbeit wird nur die reine Eichtheorie behandelt. Dieser nicht-abelsche Charakter der QCD führt zu der wichtigen Eigenschaft der *asymptotischen Freiheit* der Theorie. Für kleine Abstände, bzw. extrem hohe Energien verhalten sich die Quarks wie freie Teilchen. Experimentell wurde dies bei tief-inelastischen e+p-Stößen festgestellt.
In den 70er Jahren wurde von 't Hooft, Politzer, Gross und Wilczek gezeigt, daß nur die nicht-abelschen Eichtheorien diese Eigenschaft zeigen.

Die störungstheoretischen Vorhersagen der QCD für große Impulsüberträge konnten durch Experimente bestätigt werden. Aufgrund der starken Kopplungsstärke α_s, ist die Störungstheorie auf kleine Abstände (große Impulsüberträge) beschränkt. Weiterhin treten bei höheren Ordnungen in α_s Divergenzen auf, die eine Renormierung der Theorie nötig machen.

Da bisher keine freien Quarks in der Natur gefunden wurden, sondern nur farbneutrale Teilchen, wurde die *Confinement*-Hypotese aufgestellt. Die Energie, die nötig ist um zwei Quarks voneinander zu trennen soll linear mit dem Abstand ansteigen. Für die Seperation zweier Quarks wäre somit eine unendliche Energie nötig, bzw. wenn die Energie ausreicht um ein weiteres Quark-Antiquark Paar zu erzeugen, würde die Bindung aufgebrochen und man hätte zwei gebundene Paare (*string breaking*). Da das Confinement eine langreichweitige Eigenschaft der QCD ist, kann sie nicht durch die Störungstheorie beschrieben werden. Nicht-störungstheoretische Ansätze sind hierfür nötig. Auch die Hypothese, daß es für genügend hohe Temperaturen ($T \approx (150-200) MeV$) zu einem Phasenübergang von einer Confinementphase, in der die Quarks nur in gebundenen Zuständen vorkommen, zu einem Quark-Gluon-Plasma kommt, läßt sich nur mit nicht-störungstheoretischen Ansätzen untersuchen.

Keneth Wilson [5] entwickelte in den siebziger Jahren eine nicht-störungstheoretische Methode, die Gittereichtheorie. Hierbei wird die vier-dimensionale Raum-Zeit durch Einführung eines euklidischen Gitters mit endlichem Gitterabstand diskretisiert. Die

Divergenzen der Störungstheorie treten hier, wegen des endlichen Gitterabstandes nicht auf. Diese Theorie ermöglicht es einen großen Temperaturbereich der QCD zu untersuchen. Weiterhin läßt sich die Gittereichtheorie sehr gut mit statistischen Integrationsmethoden (Monte-Carlo-Simulation) auf Computern untersuchen.

Die Einführung eines Gitters und die damit verbundene euklidische Metrik hat aber auch Nachteile. Berechnungen der QCD sind im wesentlichen auf statische Eigenschaften der QCD beschränkt. Durch die Diskretisierung der Theorie wird die Rotations- und Translationsinvarianz der Raum-Zeit gebrochen. Aufgrund des endlichen Gitterabstandes a (Cut-Off) kommt es zu systematischen Fehlern bei den Rechnungen in der Gittereichtheorie. Führt man den naiven Kontinuumslimes ($a \rightarrow 0$) für die von Wilson vorgeschlagene Gitterwirkung (Wilson-Wirkung) durch, so erkennt man, daß es Korrekturen der Ordnung a^2 zum Kontinuumsausdruck der Wirkung gibt. Durch den endlichen Cut-Off werden Moden höherer Impulse unterdrückt (ultraviolett Cut-Off), was zu einem schlechten Hochtemperatur-Verhalten thermodynamischer Observablen führt. Dieses zeigt sich auch in Monte-Carlo Simulationen für hohe Temperaturen. Die Abweichungen vom Verhalten einea idealen Gas, die man hier erwartet sind ebenfalls von der Ordnung a^2.

Um die Cut-Off Effekte des endlichen Gitterabstandes zu reduzieren, führte man sog. verbesserte Wirkungen ein, bei denen die Korrekturen zum Kontinuumsausdruck erst bei höheren Ordnungen einsetzen oder ganz unterdrückt sind. Die Forderung, daß sie im naiven Kontinuumslimes die korrekte Wirkung liefert, ist die einzige Bedingung an die Gitterwirkung. Bei den verbesserten Wirkungen fügt man daher weitere Terme in der Wirkung ein, die in niedrigster Ordnung den Kontinuumsausdruck liefern und die führenden Korrekturen hierzu unterdrücken. Zu diesen verbesserten Wirkungen gehören z.B. die tree-level verbesserten Wirkungen [19], Renormierungsgruppenverbesserte Wirkungen [22] und perfekte Wirkungen [20][21].

In dieser Arbeit wird die tree-level Symanzik verbesserte Wirkung benutzt, bei der die Korrekturen im naiven Kontinuumslimes in niedrigster Ordnung der Kopplung g (*tree-level*) erst bei der Ordnung a^4 einsetzen. In den Untersuchungen von Karsch et al. hat sich gezeigt, daß bei dieser Wirkung die Cut-Off Effekte sowohl im Hochtemperaturbereich [8], als auch in der Nähe des Deconfinement-Phasenübergangs [9] stark reduziert sind.

Es soll in dieser Arbeit untersucht werden, welchen Effekt die Verbesserung der Wirkung auf anisotropen Gittern, d.h. Gittern mit unterschiedlichem Gitterabstand in Raum- und Zeitrichtung hat. Hierzu wird zunächst die Energiedichte im Schwachen-Kopplungslimes (Hochtemperaturlimes) störungstheoretisch auf dem Gitter untersucht. Anisotrope Gitter sind zur Berechnung von Korrelationsfunktionen in Zeitrichtung bei endlicher Temperatur von großem Interesse, da die Zahl der Gitterpunkte in Zeit (=Temperatur) Richtung verändert werden kann, ohne die Temperatur zu ändern. Dies wird bei der Berechnung von Transportkoeffizienten aus Korrelationen des Energie-Impuls Tensors ausgenutzt werden.
Ein weiterer Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit Potentialen bei endlicher Tem-

peratur aus Polyakov-Loop Korrelationen. Die Verbesserung der Wirkung und die damit zusammenhängende Verbesserung der Rotationssymmetrie sollten es ermöglichen, die Korrelaionen in beliebigen Richtungen zur Auswertung der Potentiale zu benutzen. Für die Wilson-Wirkung sieht man auf Grund der schlechten Rotationssymmetrie einen Unterschied zwischen On-Axis und Off-Axis Korrelationen [7]. Die Potentiale für $T < T_c$ werden zur Bestimmung der temperaturabhängigen String-Tension benuzt, während für $T > T_c$ die Abhängigkeit der Screening-Masse von der Temperatur untersucht werden soll. Für beide Untersuchungen ist es wichtig, passende Ansätze für das Potential zu finden, da die Ansätze aus dem String-Modell, bzw. aus der Störungstheorie in dem zu untersuchenden Temperaturbereich nur bedingt anwendbar sind.

In Kapitel 1 soll zunächst die Kontinuumstheorie der QCD beschrieben werden, bevor in Kapitel 2 die Gittereichtheorie eingeführt wird. Es wird das Prinzip der Gitterregularisierung behandelt und die Wilson-Wirkung beschrieben. Daran schließt sich ein Abschnitt zum Kontinuumslimes und der β-Funktion an. Nachdem die tree-level verbesserte Wirkung eingeführt wurde, werden die Gitterausdrücke für die wichtigsten thermodynamischen Größen hergeleitet.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit Potentialen bei endlicher Temperatur. Hier wird auf die Ansätze eingegangen, die sich aus dem String-Modell (für $T < T_c$), bzw. aus der Störungstheorie (für $T > T_c$) ergeben und die Screening-Masse in führender Ordnung Störungstheorie erläutert.

In Kapitel 4 wird zunächst das anisotrope Gitter eingeführt und die Energiedichte in einer schwachen-Kopplungsentwicklung (Hochtemperaturlimes) berechnet. Es wird der Einfluß der Anisotropie auf das Cut-Off Verhalten der Energiedichte für die Wilson-Wirkung und die Symanzik-Wirkung verglichen.
In den folgenden Abschnitten werden die Transportkoeffizienten behandelt. Es werden verbesserte Operatoren für den Energie-Impuls-Tensor konstruiert und eine qualitative Analyse der Monte-Carlo-Daten für die Scheer-Viskosität auf anisotropen Gittern durchgeführt.

In Kapitel 5 werden die wichtigsten numerischen Methoden, die in dieser Arbeit benutzt wurden, vorgestellt. Hierzu gehören die Monte-Carlo-Simulation und die Link-Integration.

Im letzten Kapitel geht es um die Auswertung der Monte-Carlo-Daten. Hier wird zunächst die pseudo-kritische Kopplung bestimmt und die Entropiediche berechnet. Aus den Potentialen für $T < T_c$ wird dann die temperaturabhängige String-Tension bestimmt, bevor die Screening-Massen für $T > T_c$ berechnet werden. Die tabellierten Daten der Monte-Carlo-Simulationen befinden sich im Anhang.

Kapitel 1

QCD bei endlicher Temperatur

Gell-Mann und Zweig entwickelten 1963 ein Modell, welches das Spektrum stark wechselwirkender Teilchen beschreibt. Sie führten eine neue Sorte von Elementarteilchen ein, die Quarks. Die Hadronen können als gebundene Zustände der Quarks beschrieben werden, wobei Mesonen aus einem Quark-Antiquark Paar und Baryonen aus drei Quarks bestehen. Gell-Mann und Zweig sagten drei Arten von Quarks voraus, up (u), down (d) und strange(s). Aufgrund von neu entdeckten Hadronen kamen seit dieser Zeit noch drei weitere Arten hinzu: charm (c), bottom (b) und top (t). Die Quarks sind Fermionen und tragen einen Spin von $1/2$. Um eine ganzzahlige Ladung für die Baryonen zu erhalten, tragen Quarks folgende elektrische Ladung: $+2/3$ für u, c, t und $-1/3$ für d, s, b. Hiermit läßt sich z.B. das Proton als gebundener Zustand von uud oder das Neutron als udd beschreiben. Die sechs Arten von Quarks werden gewöhnlich als *flavours* bezeichnet.

Das Quark Modell hatte großen Erfolg bei der Vorhersage von neuen Hadronen und bei der Beschreibung der Stärke von Übergängen zwischen verschiedenen Hadronen. Eine wichtige Symmetrie-Beziehung zwischen stark wechselwirkenden Teilchen, folgt aus der Annahme, daß die u, d Quarks ähnliche Massen haben. Diese beiden Quarks werden nun zu einem Dublet (u, d) zusammengefaßt. Betrachtet man die globale unitäre Transformation $U \in SU(2)$,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

so ergibt sich hieraus eine Symmetrie der starken Wechselwirkung, deren Erhaltungsgröße der Isospin ist. In gleicher Weise kann man die drei leichtesten Quarks u, d und s in einem Triplet (u, d, s) zusammenfassen, welches die fundamentale Darstellung der $SU(3)_f$ flavour Symmetrie ist und zu einer weiteren Erhaltungsgröße, der Strangeness führt. Die Beziehung zwischen diesen Größen beschreibt die Gell-Mann-Nishijima Formel:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

wobei $Y = S + B$. B ist die Baryonenzahl, S die Strangeness, T_3 die dritte Komponente des Isospins und Q die Ladung.

Das Spin-Statistik Problem führt zu einem weiteren inneren Freiheitsgrad der Quarks. Betrachtet man ein Baryon, z.B. Δ^{++} mit einer Ladung von $+2$ und einem Spin von $3/2$, welches sich aus drei u Quarks zusammensetzt, so sieht man daß die Wellenfunktion dieses Teilchens total symmetrisch ist, was dem Spin-Statistik Theorem widerspricht. Han und Nambu, Greenberg und Gell-Mann führten daraufhin eine weitere Quantenzahl, die Farbladung (color) ein, was zu einer neuen globalen $SU(3)_c$ Symmetrie führte.

Die Theorie der starken Wechselwirkung war damit aber noch nicht vollständig, da sie weder die Kräfte zwischen Quarks und das Verhalten der asymptotischen Freiheit beschreibt, noch einen Grund liefert warum in der Natur nur farblose Teilchen auftreten. Die einzigen asymptotisch freien Feldtheorien in vier Dimensionen sind die nicht-abelschen Eichtheorien, die in den 70'er Jahren von 't Hooft, Politzer, Gross und Wilczek entwickelt wurden. Es ist nun natürlich, die $SU(3)_c$ Farbladungs-Gruppe als diese Eichgruppe zu wählen. Die Eichbosonen dieser Gruppe werden Gluonen genannt und die Kräfte zwischen den Quarks werden durch Austausch dieser Teilchen beschrieben. Diese Theorie wird als Quantenchromodynamik, oder QCD bezeichnet. Wilson entdeckte, daß die QCD für genügend starke Kopplung Confinement zeigt. Sie ist also die ideale Theorie der starken Wechselwirkung.

1.1 Die Lagrangedichte der QCD im Kontinuum

Die QCD basiert auf der Eigenschaft des Systems, unter lokalen $SU(3)_c$ Eichtransformationen invariant zu sein. Alle Eigenschaften des Systems sollen also erhalten bleiben, wenn man die Felder an allen Raum- und Zeitpunkten mit einem beliebigen Element Ω aus $SU(3)_c$ transformiert. Alleine aus dieser Bedingung folgen die wesentlichen Eigenschaften der starken Wechselwirkung.

Die Elemente der $SU(3)$ können durch

$$\Omega_{ij} = \left(e^{-i\theta^a(x)\tau^a}\right)_{ij} \tag{1.3}$$

parametrisiert werden, wobei $\theta^a(x)$ lokale Variablen und τ^a die Generatoren der Lie Algebra sind, für die

$$[\tau^a, \tau^b] = i f^{abc} \tau^c \tag{1.4}$$

gilt.

Die Fermionfelder Ψ_i und $\overline{\Psi}_i$ transformieren unter dieser Darstellung zu

$$\Psi_i(x) \longrightarrow \Omega_{ij}(x)\Psi_j(x) \tag{1.5}$$
$$\overline{\Psi}_i(x) \longrightarrow \overline{\Psi}_j(x)\Omega^\dagger_{ij}(x). \tag{1.6}$$

Um die Ableitungen der Fermionfelder kovariant unter dieser Transformation zu machen, muß ein neuer Ableitungsoperator D_μ eingeführt werden (minimale Substitution):

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \tag{1.7}$$

mit

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)\tau^a. \tag{1.8}$$

Die $A_\mu(x)$ sind die Felder der Gluonen, die entsprechend der adjungierten Darstellung der $SU(3)$ transformieren sollen,

$$A_\mu(x) \longrightarrow \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^\dagger(x) - \frac{i}{g}[\partial_\mu\Omega(x)]\Omega^\dagger(x). \tag{1.9}$$

Die Lagrangedichte sollte nun eine Funktion von Ψ, $\overline{\Psi}$, A_μ und ihren kovarianten Ableitungen sein. Operatoren mit einer größeren Dimension als 4 beschreiben nichtrenormierbare Wechselwirkungen und der Operator $i\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$ ist paritätsverletzend. Es bleiben somit drei Terme, die unter $SU(3)$-Transformationen invariant bleiben und zur Lagrangedichte beitragen können:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \overline{\Psi}^f_a\left(i\not{D}^{ab} - m_f\delta^{ab}\right)\Psi^f_b - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \\ &= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G \end{aligned}\tag{1.10}$$

Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ wird durch den Kommutator von zwei kovarianten Ableitungen definiert und ist damit ebenfalls kovariant:

$$\begin{aligned}F^a_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D^a_\mu, D^a_\nu] \\ &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - ig[A^a_\mu, A^a_\nu] \\ &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu \end{aligned}\tag{1.11}$$

Hierbei ist g die Kopplungskonstante, durch die die Stärke der Wechselwirkung gegeben ist und m_f sind die Massen der Quarks. Im Gegensatz zur QED gibt es in der QCD auch Wechselwirkungen zwischen den Eichfeldern, wie man an (1.11) sieht. Die Dynamik der Gluonen auf Grund ihrer Selbst-Wechselwikung kann in der reinen Eichtheorie beschrieben werden, wo man nur die Lagrangedichte $\mathcal{L}_G$ aus (1.10) betrachtet. Dies entspricht dem Limes unendlicher Quarkmassen, d.h. statischer Quarks. Diese Theorie zeigt bereits wesentliche Eigenschaften der vollen QCD, wie Confinement und asymptotische Freiheit.

1.2 Pfadintegralformulierung der QCD

Mit Hilfe der Lagrangedichte (1.10) läßt sich die Theorie mit der aus der Quantenmechanik bekannten Pfadintegralmethode quantisieren. Die Zustandssumme wird durch Vakuum-Vakuum Übergangsamplituden

$$\langle 0|0\rangle = Z = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}e^{iS_{QCD}[A,\Psi,\bar{\Psi}]} \tag{1.12}$$

definiert, wobei die Integration über alle Felder $A, \Psi, \bar{\Psi}$ durchgeführt werden muß und die Wirkung durch $S = \int d^4x\mathcal{L}$ gegeben ist. Der Erwartungswert eines Operators $\mathcal{O}(A, \Psi, \bar{\Psi})$, bestehend aus zeitgeordneten Produkten der Felder, ergibt sich zu

$$\langle 0|\mathcal{O}(A,\Psi,\bar{\Psi})|0\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{O}(A,\Psi,\bar{\Psi})e^{iS_{QCD}[A,\Psi,\bar{\Psi}]}. \tag{1.13}$$

Es treten nun zwei Probleme in der Pfadintegralformulierung auf. Zum einen ist die Integration über alle Felder mathematisch nicht wohl definiert und zum anderen ist der Integrand komplex und stark oszillierend. Ein Ausweg ist die Einführung einer imaginären Zeit durch die sog. Wick-Rotation

$$t = x^0 \to -ix_4 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \to +i\partial_4 \tag{1.14}$$

Hierdurch wird aus der Minkowski Metrik eine Euklidische Metrik und die Wirkung

$$S^E_{QCD}[A,\Psi,\bar{\Psi}] = \int d^4x\mathcal{L}^E_{QCD} \tag{1.15}$$

wird mit der Ersetzung

$$A^0 \to iA_4 \tag{1.16}$$

reell. Aus der Lagrangedichte (1.10) im Minkowski Raum wird mit Hilfe der euklidischen λ-Matrizen $\lambda^E_4 = \lambda^0$, $\lambda^E_i = -i\lambda^i$ und der Vertauschungsregel $\{\lambda^E_\mu, \lambda^E_\nu\} = 2\delta_{\mu,\nu}$ die euklidische Version

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^E_{QCD} &= \overline{\Psi}^f_a\left(\lambda^E_\mu D_\mu + m_f\right)^{ab}\Psi^f_b + \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \\ &= \mathcal{L}^E_F + \mathcal{L}^E_G.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Damit ergibt sich die großkanonische Zustandssumme zu

$$Z^E = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}e^{-S^E_{QCD}[A,\Psi,\bar{\Psi}]}. \tag{1.18}$$

Da im Folgendem nur noch die Euklidische Formulierung verwendet wird, entfällt der Index E.

Die bisherigen Pfadintegralformulierung führt für ein unendliches Volumen zu Vakuum Erwartungswerten von Observablen, eine endliche Temperatur wurde noch nicht eingeführt. Ein Vergleich mit der Zustandssumme aus der quantenmechanischen statistischen Mechanik macht eine Formulierung mit endlicher Temperatur möglich. Die Zustandssumme eines solchen statistischen Systems

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr} e^{-\beta H} \tag{1.19}$$

mit der Hamiltion-Funktion H und $\beta = 1/kT$ ist formal mathematisch identisch mit der euklidischen Zustandssumme (1.18), wenn man die Intergration über die Zeit in der Wirkung (1.15) endlich macht

$$S[A, \Psi, \bar{\Psi}] = \int_0^{1/T} dx_4 \int d^3x \mathcal{L} \tag{1.20}$$

und periodische Randbedingungen für die bosonischen Felder

$$A_\mu^a(\vec{x}, 0) = A_\mu^a(\vec{x}, 1/T) \tag{1.21}$$

sowie antiperiodische Randbedingungen für die fermionischen Felder

$$\Psi(\vec{x}, 0) = -\Psi(\vec{x}, 1/T) \quad und \quad \overline{\Psi}(\vec{x}, 0) = -\overline{\Psi}(\vec{x}, 1/T) \tag{1.22}$$

einführt. Mit (1.20) hat man somit eine Pfadintegralformulierung der QCD bei endlicher Temperatur T.

1.3 Reine Eichtheorie

Im Folgenden werden nur noch Operatoren betrachtet, die von den fermionischen Feldern unabhängig sind. Da der fermionische Beitrag zur Wirkung bilinear in den Feldern Ψ und $\overline{\Psi}$ ist, läßt sich die Integration über $\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\overline{\Psi}$ ausführen. Dies führt, auf Grund der Grassmann-Algebra der Fermionfelder zu

$$\langle \mathcal{O}(A_\mu^a) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{O}(A_\mu^a) \det K[A_\mu^a] \exp\{-S_G[A_\mu^a]\}}{\int \mathcal{D}A_\mu^a \det K[A_\mu^a] \exp\{-S_G[A_\mu^a]\}}, \tag{1.23}$$

wobei die Matrix $K[A_\mu^a]$ durch

$$K[A_\mu^a] = (\gamma^\mu(\partial_\mu + igT^a A_\mu^a(x)) + m_f)_{\alpha\beta} \delta_{fg} \delta^{(4)}(x-y) \tag{1.24}$$

gegeben ist. Mit der effektiven Wirkung

$$S_{eff}[A_\mu^a] = S_G[A_\mu^a] - \ln \det K[A_\mu^a] \tag{1.25}$$

ergeben sich die Erwartungswerte (1.23) zu

$$\langle \mathcal{O}(A_\mu^a) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{O}(A_\mu^a) \exp\{-S_{eff}[A_\mu^a]\} \tag{1.26}$$

mit der Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu^a \exp\{-S_{eff}[A_\mu^a]\}. \tag{1.27}$$

Der Term $\ln\det K[A_\mu^a]$ entspricht einer Summe über Vakuum-Diagramme, d.h. Feynman-Diagramme geschlossener Fermion-Loops mit beliebig vielen äußeren Gluonfeldern. In der quenched approximation wird $\det K[A_\mu^a] = 1$ gesetzt, wodurch die Effekte dynamischer Femionen vernachläßigt werden. Man spricht nun von reiner Eichtheorie, die nur noch gluonische Freiheitsgrade enthält. Im Folgenden wird nur diese gluonische Theorie behandelt. Zur Vollständigkeit werden nochmals die Gluon-Wirkung und die Zustandssumme angegeben:

$$S_G[A_\mu^a] = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \int_V d^3x F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) \tag{1.28}$$

$$Z = \int_{per} \mathcal{D}A_\mu^a exp\{-S_G[A_\mu^a]\} \tag{1.29}$$

$$\langle \mathcal{O}(A_\mu^a)\rangle_T = \frac{1}{Z}\int_{per} \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{O}(A_\mu^a) exp\{-S_G[A_\mu^a]\} \tag{1.30}$$

Kapitel 2

Gittereichtheorie

Bis zum Jahr 1974 waren alle Berechnungen der QCD auf den störungstheoretischen Bereich beschränkt. Die Einführung der Gittereichtheorie durch Wilson [5] ermöglicht es den gesamten Energiebereich der Theorie nicht-störungstheoretisch zu untersuchen. Ein großes Problem in der Störungstheorie der QCD sind die ultravioletten Divergenzen, die eine Renormierung der Theorie nötig machen. Da es auf dem Gitter einen kleinsten möglichen Abstand, den Gitterabstand a zwischen zwei Gitterpunkten gibt, treten diese Divergenzen nicht auf. Mit Hilfe von Monte-Carlo Simulationen lassen sich wichtige Eigenschaften der Theorie, wie Confinement oder den Phasenübergang zu einem Quark-Gluon Plasma, untersuchen.
Die Einführung eines Gitters hat aber auch Nachteile. Wegen der euklidischen Metrik sind Rechnungen in der Gittereichtheorie auf statische Eigenschaften der QCD beschränkt. Es ist nicht möglich direkt Übergangsamplituden zu berechnen, da diese in der Minkowski Metrik definiert sind. Ein weiterer Nachteil ist die Brechung der Rotations- und Translationsinvarianz bei der Diskretisierung der Raum-Zeit.

2.1 Gitterregularisierung

Eine mögliche Diskretisierung der QCD ist die Gitterregularisierung, bei der man von einem kontinuierlichen 4-dimensionalen Raum $\mathbf{R}^4$ zu einem Gitter mit diskreten Gitterpunkten $n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbf{N}^4$ übergeht. Die Gitterpunkte haben einen endlichen Gitterabstand a, der vorerst in allen Richtungen gleich sein soll, man spricht dann von einem isotropen Gitter. Es gibt endlich viele Gitterpunkte N_σ (Raumrichtungen) und N_τ (Zeitrichtung) und man spricht von einem Gitter der Größe $N_\sigma^3 \times N_\tau$. Das räumliche Volumen dieses statistischen Systems beträgt

$$V = (N_\sigma a)^3 \tag{2.1}$$

und die Temperatur ist wegen (1.20) durch

$$T = \frac{1}{N_\tau a} \tag{2.2}$$

gegeben. Um die Kontinuumstheorie zu diskretisieren, muß man die Integrale durch endliche Summen über das Gitter ersetzen, wodurch die unendlich-dimensionalen Pfadintegrale endlich werden und somit eine mathematisch sinnvolle Bedeutung bekommen.
Bei der Diskretisierung der Eichfelder $A^a_\mu(x)$ muß die lokale Eichinvarianz der Kontinuumstheorie auch auf dem Gitter erhalten bleiben. Hierzu benötigt man ein Objekt aus bosonischen Feldern, welches zwischen zwei Gitterpunkten definiert ist. Dies ist auch anschaulich klar, da die Quarks auf den Gitterpunkten definiert sind und die Gluonen für den Austausch der Kräfte zwischen den Quarks verantwortlich sind.

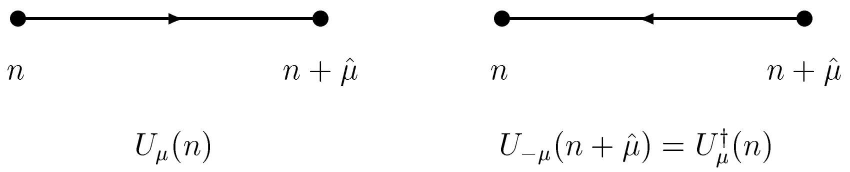


Abbildung 2.1: Die Linkvariablen

Mit Hilfe des Schwingerschen Linienintegrals definiert man die sog. Linkvariable $U_\mu(n)$ durch das Integral zwischen zwei Gitterpunkten über die Eichfelder

$$U_\mu(n) = e^{ig \int_n^{n+a\hat{\mu}} dz^\mu A_\mu(z)}. \tag{2.3}$$

Da die Gluon-Felder $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)\tau^a$ Elemente der Lie-Algebra sind, sind die Linkvariablen Elemente der $SU(N_c)$-Eichgruppe. Für die Gitterwirkung und die Observablen auf dem Gitter benötigt man eichinvariante Objekte. Auf dem Gitter lassen sich diese nun aus Produkten der Linkvariablen um geschlossene Wege konstruieren.

Das kleinst mögliche eichinvariante Objekt ist eine sog. Plaquette

$$\begin{aligned} U_{\mu,\nu} &= U_\mu(n) U_\nu(n + a\hat{\mu}) U^\dagger_\mu(n + a\hat{\nu}) U^\dagger_\nu(n) \qquad (2.4) \\ &= e^{ig \int_n^{n+a\hat{\mu}} A_\mu(y)dy} e^{ig \int_{n+a\hat{\mu}}^{n+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}} A_\nu(y)dy} e^{-ig \int_{n+a\hat{\nu}}^{n+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}} A_\mu(y)dy} e^{-ig \int_n^{n+a\hat{\nu}} A_\nu(y)dy}. \end{aligned}$$

Um den naiven Kontinuumslimes dieses Ausdrucks zu betrachten, muß man die Plaquette in niedrigster Ordnung in der Kopplung g um ihren Mittelpunkt entwickeln. Die Differenzen der Felder werden hierbei durch kontinuierliche Ableitungen

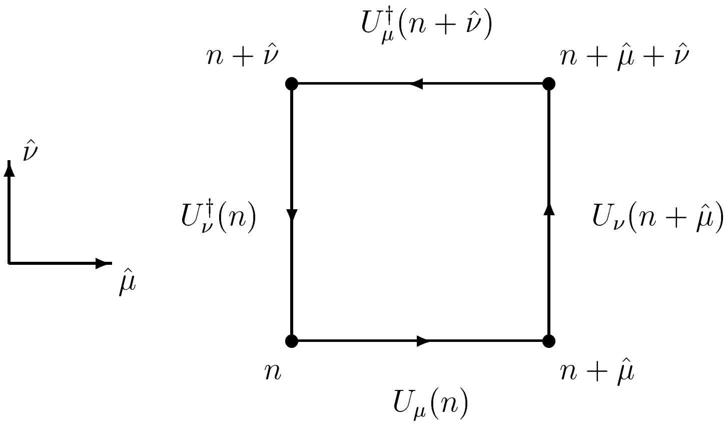


Abbildung 2.2: Die Plaquette

ersetzt und die Exponentialfunktion in niedrigster Ordnung g entwickelt. Man erhält so in führender Ordnung den Feldstärketensor $F^{(0)}_{\mu\nu}(n) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Betrachtet man die nächst höhere Ordnung, so erkennt man, daß auch der Term $g f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$ im naiven Kontiuumslimes korrekt reproduziert wird.

$$
\begin{aligned}
&U_{\mu,\nu}(x) \\
&= \quad exp\left\{ ig\left(\int_x^{x+a\hat\nu} A_\nu(y+a\hat\mu) - A_\nu(y)dy \right) - (\mu \leftrightarrow \nu) + \mathcal{O}(g^2) \right\} \\
&= \quad exp\Bigg\{ ig \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{(2j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} \partial_\mu A_\nu(x + a\hat\mu/2 + a\hat\nu/2)) \right) \\
&\qquad\qquad -(\mu \leftrightarrow \nu) + \mathcal{O}(g^2) \Bigg\} \\
&= \quad exp\left\{ ig \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{(2j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F^{(0)}_{\mu\nu}(x + a\hat\mu/2 + a\hat\nu/2)) \right) + \mathcal{O}(g^2) \right\}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

mit den Koeffizienten der Taylorentwicklung

$$
c_{jk} = \frac{2^{-2j}}{(2k+1)!(2(j-k)+1)!} \tag{2.6}
$$

Die einfachste Wirkung auf dem Gitter ergibt sich dann auf Grund von

$$\frac{2N_c}{g^2}[1 - \frac{1}{N_c}\mathrm{ReTr}U_{\mu\nu}(n)] = a^4\left(F_{\mu\nu}(n)F_{\mu\nu}(n) + \mathcal{O}(a^2)\right) + \mathcal{O}(g^2) \tag{2.7}$$

zu

$$\begin{aligned} S_G^{Gitter}[U] &= \beta \sum_{n,\mu<\nu\leq 3}\left[1 - \frac{1}{N_c}\mathrm{ReTr}\{U_{\mu\nu}(n)\}\right] \\ &= \beta \sum_{n,\mu<\nu\leq 3}\left[1 - \frac{1}{2N_c}\mathrm{Tr}\{U_{\mu\nu}(n) + U^\dagger_{\mu\nu}(n)\}\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hierbei wird die übliche Definition $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$ benutzt. Diese Wirkung wird Plaquette-Wirkung oder Wilson-Wirkung genannt und geht auf K.G. Wilson (1974) zurück [5]. Die Wilson-Wirkung liefert im Kontinuumslimes $a \to 0$ die richtige Gluon-Wirkung (1.28) und hat für einen endlichen Gitterabstand a Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$. Mit Hilfe von größeren Loops lassen sich Wirkungen konstruieren, bei denen diese Korrekturen erst bei höheren Ordnungen einsetzen. Bei den tree-level verbesserten Wirkungen betrachtet man nur Verbesserungen in niedrigster Ordnung g, während bei der 1-loop verbesserten Wirkung die Verbesserung auch in der Ordnung g^2 durchgeführt wird. Bei der tadpole verbesserten Wirkung entwickelt man in Potenzen einer renormierten Kopplung anstelle der nackten Kopplung. Hierdurch werden Beiträge sog. tadpole-Loops, die in der Entwicklung in Ordnung g^2 und höher beitragen, teilweise in der renormierten Kopplung absorbiert.

2.2 Kontinuumslimes

In der Gittereichtheorie treten alle Größen in Einheiten des Gitterabstandes auf. Man interessiert sich aber für die Kontinuums-Physik, also für verschwindenen Gitterabstand a. Da die Kopplung g der einzige freie Parameter der Theorie ist, benötigt man einen Zusammenhang zwischen Gitterabstand a und Kopplung g. Im Kontinuumslimes $a \to 0$ muß die Korrelationslänge auf dem Gitter divergieren. Die Kopplung g muß daher für verschwindenen Gitterabstand gegen eine kritische Kopplung g^* gehen, so daß

$$\hat{\xi}(g) \underset{g\to g^*}{\longrightarrow} \infty \tag{2.9}$$

Hierdurch erhält man eine Beziehung zwischen dem Gitterabstand a und der Kopplung g, so daß

$$g(a) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} g^* \tag{2.10}$$

gilt. Betrachtet man die physikalische Observable $\mathcal{O}$ mit der Dimension $d\mathcal{O}$, so sollte die dimensionslose Größe $\hat{\mathcal{O}}$, die auf dem Gitter bei einer Kopplung g berechnet wird,

$$\mathcal{O}(g, a(g)) = a^{(-d\mathcal{O})}\hat{\mathcal{O}} \tag{2.11}$$

im Kontinuumslimes unabhängig vom Gitterabstand a sein. Dies führt zu der Renormierungsgruppengleichung

$$a\frac{d}{da}\mathcal{O}(g(a), a) = 0 \tag{2.12}$$

$$\left(a\frac{\partial}{\partial a} + \left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right)\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O}(g(a), a) = 0 \tag{2.13}$$

$$\left(a\frac{\partial}{\partial a} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O}(g(a), a) = 0. \tag{2.14}$$

Ist die Callan-Symanzik β-Funktion bekannt, so kann man $g(a)$ durch Integration erhalten. Es ist aber nicht möglich diese Funktion exakt zu berechnen.

Die störungstheoretische Berechnung der β-Funktion basiert auf der Annahme, daß die QCD eine asymptotisch freie Theorie ist. Die kritische Kopplung wäre dann $g^* = 0$. Man kann somit einen störungstheoretischen Ausdruck für eine Observable $\mathcal{O}$, z.B. das Potential zwischen zwei Quarks benutzen und in die RG-Gleichung (2.14) einsetzen. Man erhält hieraus

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \mathcal{O}(g^6) \tag{2.15}$$

mit den universellen Koeffizienten

$$b_0 = \frac{11}{16\pi^2} \qquad \text{und} \qquad b_1 = \frac{102}{(16\pi^2)^2}. \tag{2.16}$$

Durch Integration erhält man aus der β-Funktion den Gitterabstand in Abhängigkeit von der Kopplung

$$a(g) = \frac{1}{\Lambda_L}(b_0 g^2)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}} \exp\{-\frac{1}{2b_0 g^2}\} \tag{2.17}$$

$$= \frac{1}{\Lambda_L} R(g)\lambda(g), \tag{2.18}$$

bzw. durch Invertieren dieser Gleichung die Kopplung in Abhängigkeit vom Gitterabstand. Der Parameter Λ_L stammt aus der Integration der β-Funktion und muß aus Vergleichen mit dem Experiment bestimmt werden, z.B. durch Messung der String-Tension, die sowohl nicht-störungstheoretisch als auch experimentell gut bestimmt werden kann. Bei der Analyse der numerischen Daten bei endlicher Temperatur wird in dieser Arbeit eine temperaturabhängige, renormierte Kopplung $g^2(T)$ benutzen,

$$g^{-2}(T) = 2b_0 \ln\left(\frac{2\pi T}{\Lambda_{\overline{MS}}}\right) + \frac{b_1}{b_0}\ln\left(2\ln\left(\frac{2\pi T}{\Lambda_{\overline{MS}}}\right)\right), \tag{2.19}$$

wobei $\Lambda_{\overline{MS}}$ der Λ-Parameter im *modified minimal substraction* Schema ist. Hierfür findet man z.B. $\sqrt{\sigma}/\Lambda_{\overline{MS}} = 1.75(20)$ und $T_c/\Lambda_{\overline{MS}} = 1.03(19)$ [23], was in dieser Arbeit zur Berechnung der effektiven Kopplung benutzt wurde. Die Λ-Parameter in unterschiedlichen Regularisierungen der QCD kann man störungstheoretisch miteinander in Beziehung setzen. Für die Wilson-Wirkung findet man z.B. $\Lambda_L^{(W)}/\Lambda_{\overline{MS}} = 0.03471$[23].

2.3 Tree-level-verbesserte Wirkung

Bei den tree-level verbesserten Wirkungen werden die führenden Korrekturen zur Kontinuumswirkung in niedrigster Ordnung g im Schwachen-Kopplungslimes eliminiert. Dies führt zu einer drastischen Reduktion der Cut-Off Effekte im idealen Gas Limes im Vergleich zu der Wilson Wirkung [8]. Auf Gittern mit einer zeitlichen Ausdehnung von $N_\tau = 4$ führt dies zu ähnlichen Resultaten, wie bei der Wilson Wirkung bei $N_\tau = 8$. Obwohl die Verbesserung im Hochtemperatur-Limes durchgeführt wird, zeigt sich auch in der Nähe von T_c eine Reduktion der Cut-Off Effekte. Dies zeigt sich auch bei der Untersuchung der latenten Wärme und der Oberflächenspannung [9], zwei Größen, die sowohl vom Hochtemperatur- als auch vom Niedrigtemperaturbereich abhängen. Ein weiterer Vorteil von verbesserten Wirkungen ist die Verbesserung der Rotationssymmetrie, die insbesondere für die Untersuchung von Potentialen von Bedeutung ist.

Zur Konstruktion der verbesserten Wirkungen addiert man weitere Terme bestehend aus größeren $k \times l$-Loops, sog. Wilson-Loops $U_{\mu,\nu}^{k,l}(x)$ zur Plaquettewirkung hinzu

$$\begin{aligned} S^I &= \sum_{x,\mu<\nu} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} a_{k,l} W_{\mu,\nu}^{k,l}(x) \\ &= \sum_{x,\mu<\nu} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} a_{k,l} \left(1 - \frac{1}{2N}\left(\mathrm{ReTr}U_{\mu,\nu}^{k,l}(x) + \mathrm{ReTr}U_{\mu,\nu}^{l,k}(x)\right)\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Die Wilson-Loops können in gleicher Weise wie die Plaquetten im letzten Abschnitt in Ordnungen a entwickelt werden. Man führt eine Taylorentwicklung um ihren Mittelpunkt aus und entwickelt die Exponentialfunktion in g

$$\begin{aligned} & U_{\mu,\nu}^{(k,l)}(x) \\ &= \exp\left\{ig \sum_{j=0}^{l-1} \int_{j\nu}^{(j+1)\nu} A_\nu(y + k\mu + x) - A_\nu(y+x) dy - (k \leftrightarrow l, \mu \leftrightarrow \nu) + \mathcal{O}(g^2)\right\} \\ &= \exp\left\{ig\left(\sum_{p=0}^{\infty} a^{(2p+1)} \sum_{q=0}^{p} c_{p,q}^{k,l} \partial_\nu^{(2(p-q))} \partial_\mu^{(2q)} F_{\mu\nu}^{(0)}(x + \frac{l}{2}a\nu + \frac{k}{2}a\mu)\right) + \mathcal{O}(g^2)\right\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$c_{p,q}^{k,l} = \frac{k^{(2q+1)} l^{(2(p-q)+1)} 2^{-2p}}{(2q+1)!(2(p-q)+1)!}. \tag{2.22}$$

Damut erhält man durch Entwicklung der Exponentialfunktion in g den Term, der zur Wirkung beiträgt

$$\frac{2N_c}{g^2}[1 - \frac{1}{N_c}\mathrm{ReTr}U_{\mu\nu}^{(k,l)}(n)] = \left(\sum_{p=0}^{\infty} a^{(2p+1)} \sum_{q=0}^{p} c_{p,q}^{k,l} \partial_\nu^{(2(p-q))} \partial_\mu^{(2q)} F_{\mu\nu}^{(0)}(x')a\mu)\right)^2. \tag{2.23}$$

Durch geeignete Wahl der Koeffizienten $a_{k,l}$ in (2.20) kann man erreichen, daß die führenden Korrekturen der Wirkung wegfallen. Zur Eliminierung der $\mathcal{O}(a^2)$ genügt es beispielsweise symmetrisierte 2×1 Wilson-Loops oder einen 2×2 Wilson-Loop zu berücksichtigen. Die Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(a^4)$ lassen sich z.B. durch eine Kombination aus Plaquette, 2×2 und 3×3 Loops beseitigen.

In dieser Arbeit wird die (2,1)-tree-level verbesserte Wirkung benutzt, bei der im naiven Kontinuumslimes die $\mathcal{O}(a^2)$-Korrekturen in niedrigster Ordnung g wegfallen. Diese Wirkung setzt sich aus Plaquetten und symmetrisierten 2×1-Loops zusammen:

$$\begin{aligned} S^{(2,1)} &= \beta \sum_{x,\nu>\mu} \frac{5}{3}\Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr}\ \Box_{\mu\nu}(n)\Big) \\ &\quad -\frac{1}{6}\Big(1 - \frac{1}{2N}\mathrm{ReTr}\Big(\ \boxed{}_{\,\mu\nu}(n) + \boxed{\vphantom{\Big|}}_{\,\mu\nu}(n)\Big) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Wirkung (2.24) geht auf Symanzik [19] zurück und wird daher auch Symanzik-Wirkung genannt.

2.4 Thermodynamische Observablen auf dem Gitter

Aus der Zustandssumme und den in den letzten Abschnitten eingeführten Wirkungen lassen sich Ausdrücke für die thermodynamischen Observablen auf dem Gitter bestimmen. Diese Größen, wie z.B. die Energiedichte ϵ oder der Druck p spielen eine wichtige Rolle in der Untersuchung des Phasendiagramms und der Hochtemperaturphase der QCD. Es wird davon ausgegangen, daß sich das System für große Temperaturen wie ein Gas aus schwach wechselwirkenden Quarks und Gluonen verhält.

Die Energiedichte ϵ und der Druck p werden durch Ableitungen der Zustandsumme (1.29) nach der inversen Temperatur T, bzw. dem Volumen V berechnet:

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}(\ln Z)_V \qquad (2.25)\\ p &= T\frac{\partial}{\partial V}(\ln Z)_T\,. \qquad (2.26)\end{aligned}$$

Da in diesen Gleichungen das physikalische Volumen bzw. die physikalische Temperatur festgehalten werden, während die andere Größe variiert wird, müssen nach (2.1) und (2.2) die räumliche und zeitliche Ausdehnung des Gitters unabhängig voneinander variiert werden. Auf dem anisotropen Gitter wird dies durch das Verhältnis $\xi = \frac{a_\sigma}{a_\tau}$ der beiden Ausdehnungen a_σ und a_τ kontrolliert. Die Wirkung (4.2) läßt sich mit dieser Größe und zwei verschiedene Kopplungen $g_\sigma(a,\xi)$ und $g_\tau(a,\xi)$ in folgender Weise schreiben:

$$S_G[U] = \frac{2N}{g_\sigma^2}\frac{1}{\xi}S_\sigma[U] + \frac{2N}{g_\tau^2}\xi S_\tau[U] \qquad (2.27)$$

Hierbei ist S_σ der räumliche und S_τ der zeitliche Anteil der Wirkung. Die Einführung von zwei Kopplungen in der Wirkung ist nötig, damit die Physik unter unabhängigen Variationen der Gitterabstände invariant bleibt.
Durch Einsetzten der Wirkung (2.27) in die Zustandssumme (1.29) können die Gitterausdrücke der Energiedichte und des Drucks bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}\right)_V \\ &= -\frac{1}{a_\sigma^2 N_\sigma^3}\frac{1}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial\left(a_\tau N\tau\right)}\right)_{a_\sigma} \\ &= T^4\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left(\xi\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial \xi}\right\rangle\right)_{a_\sigma} \qquad (2.28)\\ p &= T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T \\ &= -\frac{T^4}{3}\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left[\left(a_\tau\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial a_\tau}\right\rangle\right)_\xi - \left(\xi\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial \xi}\right\rangle\right)_{a_\sigma}\right] \\ &= \frac{\epsilon}{3} - \frac{T^4}{3}\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left(a_\tau\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial a_\tau}\right\rangle\right)_\xi \qquad (2.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= T^4\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\frac{2N}{g^2}\left\{\langle S_\sigma - S_\tau\rangle + g^2\left\langle c_\sigma\bar{S}_\sigma + c_\tau\bar{S}_\tau\right\rangle\right\} \qquad (2.30)\\ p &= \frac{\epsilon}{3} + T^4\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\frac{4N}{3g^3}\left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right)\left\langle\bar{S}_\sigma + \bar{S}_\tau\right\rangle \qquad (2.31)\end{aligned}$$

mit

$$\bar{S}_\kappa = \langle S_\kappa \rangle_{(\beta, N_\tau)} - \langle S_\kappa \rangle_{(\beta,\infty)} \qquad \kappa = \sigma, \tau \tag{2.32}$$

Die Keffizienten c_σ und c_τ sind durch

$$c_\sigma = \left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a_\sigma, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \tag{2.33}$$

$$c_\tau = \left(\frac{\partial g_\tau^{-2}(a_\tau, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \tag{2.34}$$

definiert. Es gibt einen Zusammenhang zwischen der β-Funktion und diesen Koeffizienten

$$-2\left(c_\sigma + c_\tau\right)_{\xi=1} = a\frac{\partial g^{-2}}{\partial a} = -2g^{-3}\left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right) \tag{2.35}$$

Von der Energiedichte und dem Druck müssen noch die entsprechenden Vakuumbeiträge subtrahiert werden. Die Koeffizienten c_σ und c_τ wurden durch Gitter-Störungstheorie berechnet [14]. Nicht-Störungstheoretisch lassen diese sich durch sog. Matching von Wilson-Loops auf anisotropen Gittern berechnen [18].

Eine weitere thermodynamische Größe ist die Entropie S. Diese ergibt sich aus der Ableitung des thermodynamischen Potentials, d.h. der freien Energie $F = -T \ln Z$ nach der Temperatur. Für einen Phasenübergang 1. Ordnung ist die Ableitung des thermodynamischen Potentials unstetig, die Entropie weist also eine Diskontinuität bei T_c auf. Die Differenz der Entropie beider Phasen ist ein Maß für die latente Wärme $\Delta\mathcal{E}$

$$T_c(S_{T>T_c} - S_{T<T_c}) = T_c \Delta S = \Delta\mathcal{E} \tag{2.36}$$

Die Entropiedichte s läßt sich aus der Summe des Drucks p und der Energiedichte ϵ berechnen

$$s = -\frac{\partial}{\partial T} f = \frac{p + \epsilon}{T} \tag{2.37}$$

Setzt man die Ausdrücke für p (2.29) und ϵ (2.28) ein, so ergibt sich mit (2.35)

$$\begin{aligned} s &= \frac{4}{3}\frac{\epsilon}{T} + T^3 \left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3 \frac{4N}{3g^3}\left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right)\left\langle \bar{S}_\sigma + \bar{S}_\tau \right\rangle \\ &= T^3\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3 \frac{4}{3}\frac{2N}{g^2}\left(\langle S_\sigma - S_\tau\rangle + g^2\langle c_\sigma \hat{S}_\sigma + c_\tau \hat{S}_\tau\rangle - g^2\frac{c_\sigma + c_\tau}{2}\langle \hat{S}_\sigma + \hat{S}_\tau\rangle\right) \\ &= T^3\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3 \frac{4}{3}\frac{2N}{g^2}\left(1 - g^2\frac{c_\sigma - c_\tau}{2}\right)\langle S_\sigma - S_\tau\rangle \end{aligned} \tag{2.38}$$

Die Entropiedichte ist also durch die Differenz der Wirkungsanteile in Zeit- und Raumrichtung gegeben. Für die Differenz der Koeffizienten c_σ und c_τ ergibt sich störungstheoretisch im schwachen Kopplungslimes ein Wert von $\frac{c_\sigma - c_\tau}{2} = 0.16678$ [11].

Kapitel 3

Potentiale bei $T \neq 0$

3.1 Polyakov-Loops und Potentiale

Die Gitterwirkung der reinen $SU(3)$-Eichtheorie zeigt, neben der lokalen Eichinvarianz, noch eine weitere Symmetrie. Hierzu betrachtet man die Elemente des Zentrums $\mathcal{C} = \{z \in SU(3) | zgz^{-1} = g \text{ für alle } g \in SU(3)\}$ der Gruppe, die durch $\exp(2\pi i l/3) \in Z(3)$ mit $l = 0, 1, 2$ gegeben sind. Die Wirkung und alle lokalen Observablen sind invariant unter einer Transformation $z \in \mathcal{C}$ mit

$$U_\tau(\vec{n}, n_\tau) \to zU_\tau(\vec{n}, n_\tau), \quad \forall \vec{n}, n_\tau \text{ fest.} \tag{3.1}$$

Eine Observable, die unter dieser Transformation nicht invariant ist, ist der sog. Polyakov-Loop, bestehend aus der Spur des Produkts eines geschlossenen Loops um die Zeitachse

$$L(\vec{n}) = \mathrm{Tr} \prod_{n_\tau=1}^{N_\tau} U_\tau(\vec{n}, n_\tau). \tag{3.2}$$

Unter der Transformation (3.1) wird der Polyakov-Loop durch ein Element des Zentrums gedreht

$$L(\vec{n}) \to zL(\vec{n}) \tag{3.3}$$

Der Polyakov-Loop eignet sich als Ordnungsparameter für den Confinement-Deconfinement Phasenübergang. Befindet sich das System in der Confinementphase, so treten Konfigurationen, die durch die Zentrumssymmetrie verbunden sind, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf. Der Erwartungswert des Polyakov-Loops verschwindet somit in der Confinementphase, in der die Zentrumssymmetrie realisiert ist. Wenn der Erwartungswert von Null verschieden ist, so ist die Zentrumssymmetrie gebrochen und die Werte des Polyakov-Loops verteilen sich um die $Z(3)$-Wurzeln.

Da das kritische Verhalten der $SU(3)$-Eichtheorie stark mit der $Z(3)$-Symmetrie verknüpft ist, erwartet man auch hier (für $d = 4$ Dimensionen) einen Phasenübergang 1. Ordnung, wie im $Z(3)$-Spin-Modell (für $d = 3$). Man nimmt an, daß die SU(N)-Eichtheorie in d-Dimensionen in der gleichen Universalitätsklasse ist, wie das Z(N) Spin-System in $(d-1)$ Dimesionen.

Das Potential zwischen schweren Quarks und Antiquarks ist eine weitere Größe, die bei der Beschreibung der beiden Phasen und dem Phasenübergang von Interesse ist. Ein wichtiger Mechanismus, der für den Übergang von der Confinement-Phase zu einem Quark-Gluon Plasma verantwortlich gemacht wird, ist der Screening Effekt, bei dem die Anwesenheit vieler Farbladungen in einer dichten Materie für ein Abschirmen des langreichweitigen Anteils des Potentials sorgt.
In der reinen Eichtheorie haben die Quarks (fundamentale Darstellung der Eichgruppe) eine unendliche Masse, d.h. sie sind statisch, und befinden sich in einer Umgebung aus Gluonen (adjungierte Darstellung). Es kann daher nicht zu einer direkten Abschirmung der Kraft zwischen zwei Quarks kommen. Bei niedrigen Temperaturen, sorgt die Gluon-Wechselwirkung für das Confinement der Quarks. Mit ansteigender Temperatur wird das Confinement, durch Abschirmungen (color-screening) der Gluon-Gluon Wechselwirkung, auf Grund der steigenden Gluonendichte, abgeschwächt. Oberhalb des Phasenübergangs tritt kein Confinement mehr auf. Der Screening-Effekt sorgt hier für eine Abschwächung des Coulomb-Potentials.
Durch die Korrelationsfunktion von zwei Polyakov-Loops läßt sich das Potential zwischen einem statischen Quark-Antiquark Paar im Abstand R berechnen:

$$\frac{\langle L(0)L^{\dagger}(R)\rangle}{|\langle L\rangle|^2} \sim \exp\{-V_{q\bar{q}}(R,T)/T\} \tag{3.4}$$

Die Normierung mit $|\langle L\rangle|^2$ dient zum Eliminieren der divergenten Selbstenergie-Beiträge in der Deconfinement-Phase. In der Confinement-Phase, wird diese Normierung nicht benutzt, da hier der Erwartungswert des Polyakov-Loops verschwindet. Das Potential zeigt am Phasenübergang eine qualitative Änderung. Für große Abstände gilt

$$\langle L(0)L^{\dagger}(R)\rangle \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} |\langle L\rangle|^2. \tag{3.5}$$

Wenn der Erwartungswert des Polyakov-Loops verschwindet, wächst das Potential mit dem Abstand der Quarks an, d.h. es gibt Confinement. Ist $\langle L\rangle \neq 0$, so geht das Potential für große Abstände gegen eine Konstante und man hat Deconfinement.

Die Form des Potentials in den einzelnen Phasen hat, in niedrigster Ordnung, folgende Gestallt:

Confinement-Phase $T < T_c$:

$$V_{q\bar{q}}(R,T) = V_0 + \alpha(T)/R + \sigma(T)R \tag{3.6}$$

Im Bereich $T < T_c$ wächst das Potential für große Abstände R linear an, was durch den Stringtension-Term $\sigma(T)R$ beschrieben wird. Für kleine Temperaturen ist die temperaturabhängige Stringtension über $\sigma(T) = \sigma(0) - \frac{\pi}{3}T^2 + \mathcal{O}(T^3)$ mit der $T = 0$-Stringtension verknüpft. Für kleine Abstände R findet man störungstheoretisch einen Coulombterm $\alpha(T)/R$. Die Stringtheorie [26] liefert ebenfalls einen Coulombartigen Term, der aus Fluktuationen der Strings resultiert und in jeder Stringtheorie erwartet wird. Für $T = 0$ findet man dafür $\frac{\pi}{12R}$. V_0 bezeichnet den (divergenten) Selbstenergieterm der schweren Quarks. Die Terme des Potentials (3.6) resultieren aus den kurz-, bzw. langreichweitigen QCD Eigenschaften der asymptotischen Freiheit und des Confinements. Gl.3.6 ist somit der einfachste Ansatz für das Potential, weitere R-abhängige Terme wären durchaus denkbar.

Deconfinement-Phase $T > T_c$:

$$V_{q\bar{q}}(R,T) = \alpha(T)/R^d e^{-\mu(T)R} \tag{3.7}$$

Auf Grund der asymptotischen Freiheit der Theorie, erwartet man die Existenz eines Quark-Gluon Plasmas, das durch ein Gas von schwach wechselwirkenden Quarks und Gluonen beschrieben werden kann, wenigstens für große Temperaturen. Eine gute Beschreibung der dynamischen Eigenschaften in der QED liefert das Debye-Screening Modell. Daher erwartet man, daß in der QCD ein ähnliches Modell zur Beschreibung des Quark-Gluon Plasmas existiert. Das Potential (3.7) ist der einfachste Ansatz für ein Potential in der Deconfinement-Phase. Für kleine Temperaturen erwartet man eine Dominanz des Ein-Gluon-Austauschs und damit $d = 1$ und für große Temperaturen setzt sich das Potential aus einem Singulett- und einem Oktett-Term zusammen. Da hier nur der Zwei-Gluon Austausch einen Beitrag liefert, erwartet man ein Potential (3.7) mit $d = 2$.
Debye-Screening entsteht durch Abschirmung von Farbladungen (elektrische Ladungen in der QED) durch Plasma-Anregungen und führt zu einem Yukawa-Potential. Das Verständnis des Screening-Effekts ist von großem physikalischen Interesse, da es für den Deconfinement-Phasenübergang verantwortlich ist [24] und zur Beschreibung von Anregungen im Quark-Gluon Plasma dient [25].

3.2 Das Potential in der Stringtheorie

Das Verhalten des Potentials zwischen schweren Quarks kann für $T < T_c$ und große Abstände R gut durch einen linearen Term σR beschrieben werden. Dieses Verhalten läßt sich in der Gittereichtheorie sehr gut untersuchen. Um aber exakte Ergebnisse für die nicht-störungstheoretische String-Tension aus Monte-Carlo-Simulationen zu extrahieren, ist es nötig die Abweichungen von diesem linearen Potential zu kennen. Hierzu ist es sinvoll ein vereinfachtes, phenomenologisches Modell zu betrachten, welches die gleichen benötigten Eigenschaften hat, wie die volle Theorie.
Die Stringtheorie basiert auf einer starken Kopplungsentwicklung von Wilson-Loops

($T = 0$), bzw. Polyakov-Loop Korrelationen ($T \neq 0$). Die Beiträge zum Erwartungswert des Wilsonloops werden hierbei aus verschiedenen Oberflächen berechnet, die den Loop umspannen (Nambu Modell, Eguchi Modell) [27]. Das Stringmodell der Polyakov-Loop Korrelationen basiert auf der starken Wechselwirkung zwischen den Gluonen, die das Kraftfeld zwischen den Quarks in einen eindimensionalen Schlauch (*flux tube*) zusammenzieht. Die Dynamik des Systems wird durch die Bewegung dieser Objekte dominiert.

Lüscher, Symanzik und Weisz [29] berechneten die Korrekturen in führender Ordnung zum Wilsonloop Erwartungswert für $R \to \infty$ und $T = 0$. Dies führte zu folgendem Potential:

$$V(R,T) = V_0 + \sigma(0)R - \frac{\pi}{12R} + \mathcal{O}(R^{-3}). \tag{3.8}$$

Hierbei ist $\sigma(0)$ die Stringtension bei $T = 0$. Der zusätzliche Coulomb Term ist universell und wird in jedem Stringmodell erwartet.
Die Berechnung der Stringtension bei endlicher Temperatur läßt sich in dem gleichen Modell durchführen [28], indem man periodische Randbedingungen in der Zeit einführt. Für kleine Temperaturen $T \ll \sqrt{\sigma(0)}$ erhält man einen zusätzlichen Coulombartigen Term, analog zu Gl.(3.8):

$$V(R,T) = V_0 + \left(\sigma(0) - \frac{\pi}{3}T^2 + \mathcal{O}(T^3)\right) R + T\ln(2RT) + \mathcal{O}(R^{-1}) \tag{3.9}$$

Der logarithmische Term in (3.9) wurde von Forcrand et al. [30] mit Hilfe von Polyakov-Loop Korrelationen für $T > 0$ berechnet. Hierbei wurde eine Quelle eingeführt und das langreichweitige Verhalten der Korrelationen im Abstand der Quelle untersucht.
Die beiden Ergebnisse (3.8) und (3.9) gelten jeweils nur für Grenzbereiche. Gao [26] berechnete aus dem String Modell, mit Hilfe von Polyakov-Loop Korrelationen, ein Potential für endliche Temperatur $T = (aN_\tau)^{-1}$ und endlichen Abstand $R = aN_\sigma$

$$\begin{aligned} V(R,T) \quad &= \left[\sigma - \frac{\pi}{3}T^2 + \frac{2}{3}T^2 \arctan\left(\frac{1}{2RT}\right)\right] R \\ &- \left[\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\arctan\left(2RT\right)\right]\frac{1}{R} \\ &- \frac{T}{2}\ln\left(1 + (2RT)^2\right) \\ &+ V_0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

welches für die beiden Grenzfälle in die Potentiale (3.8) und (3.9) übergehen soll. Hierin findet man die Coulombartigen Terme aus den beiden anderen Ansätzen wieder. Die Konstante V_0, die in allen Potentialen auftaucht, resultiert aus (divergenten) Selbstenergiebeiträgen.

Alvarez [27] untersuchte die R-Abhängigkeit des Potentials in einer $1/d$-Entwicklung für $d \to \infty$. Das Potential hat für große Abstände dann folgende Gestalt:

$$V(R,T) = \sigma R \sqrt{1 - \frac{R_c^2}{R^2}} \tag{3.11}$$

mit

$$R_c^2 = \frac{\pi d}{12\sigma}. \tag{3.12}$$

Das Potential verschwindet bei einem kritischen Radius R_c und die Lösung ist nur sinnvoll für $R > R_c$. Wenn das String Modell das langreichweitige Verhalten der QCD beschreibt, würde man aufgrund der asymptotischen Freiheit erwarten, daß dieses Modell bei einem bestimmten Radius zusammenbricht und das lineare Potential für kurze Abstände in ein Coulomb-Potential übergeht. Arvis zeigte [36], daß (3.11) für alle d gültig ist, zumindest für die Nambu-Goto Wirkung.
Für die String-Tension bei endlicher Temperatur kann man eine ähnliche Entwicklung in $1/d$ machen [28], was zu folgendem Verhältnis von $\sigma(T)$ zur $T = 0$-Stringtension σ führt:

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma(0)} = \sqrt{1 - \frac{T^2}{T_c^2}} \tag{3.13}$$

mit der Hagedorn Temperatur

$$\frac{T_c^2}{\sigma(0)} = \frac{3}{\pi(d-2)}. \tag{3.14}$$

Die temperaturabhängige effektive Stringtension $\sigma(T)$ verschwindet für $T \to T_c$, was ein deutliches Zeichen für Deconfinement ist. Da String Modelle auf der Existenz von Strings (flux tubes) basieren, sind sie nicht für die Beschreibung des Quark-Gluon-Plasmas geeignet. Die Gleichung (3.13) ist daher für $T > T_c$ bedeutungslos.
Mit der Annahme, daß man für $d \to \infty$ einen Phasenübergang 2. Ordnung erwartet, kann man das kritische Verhalten der String-Tension untersuchen. Mit Hilfe der reduzierten Temperatur

$$t = \frac{T_c - T}{T} \tag{3.15}$$

ergibt sich für $T \to T_c$ aus Gleichung (3.13)

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma(0)} \sim t^{\nu} \tag{3.16}$$

mit einem kritischer Exponenten

$$\nu = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(d^{-1}). \tag{3.17}$$

für $d \to \infty$.

3.3 Das Potential in der Störungstheorie

Ein Quark-Antiquark Paar wird durch das Tensorprodukt $\mathrm{SU(N)} \otimes \overline{\mathrm{SU(N)}}$ beschrieben. Es kann sich daher, wegen $\mathrm{N} \otimes \overline{\mathrm{N}} = 1 \oplus (\mathrm{N}^2 - 1)$ entweder in einem Singulett- oder einem Oktett-Zustand befinden. Aus den Polyakov-Loop Korrelationen bestimmt man ein farbgemitteltes Potential $V(R,T)$, welches sich durch

$$e^{-V(R,T)/T} = \frac{1}{9} e^{-V_1(R,T)/T} + \frac{8}{9} e^{-V_8(R,T)/T}. \tag{3.18}$$

aus dem Singulett-Potential $V_1(R,T)$ und dem Oktett-Potential $V_8(R,T)$ zusammensetzt. Für diese ist aus der Störungstheorie folgende Beziehung bekannt,

$$V_1(R,T) = -8V_8(R,T) + \mathcal{O}(g^4). \tag{3.19}$$

Hieraus ergibt sich ein Potential der Form

$$\frac{V(R,T)}{T} = -\frac{1}{16} \frac{V_1^2(R,T)}{T^2} \tag{3.20}$$

Das Singulett Potential $V_1(R,T)$ ist hierbei ein Debye-abgeschirmtes (-*gescreentes*) Coulomb Potential

$$V_1(R,T) = \frac{\alpha(T)}{R} e^{-m(T)R}. \tag{3.21}$$

Für Temperaturen in der Nähe von T_c erwartet man, daß der Ein-Gluon Austausch dominiert und zu folgendem Potential führt

$$V(R,T) = \frac{\alpha(T)}{R} e^{-m(T)R}. \tag{3.22}$$

Zwischen diesen beiden Grenzbereichen ist nicht klar, welche Form das Potential hat. Zur Untersuchung des Potentials bieten sich nun zwei Ansätze an. Man führt einen Exponenten d ein und ersetzt den Coulomb-Term, bzw. $1/R^2$ Term durch einen allgemeineren Term

$$V(R,T) = \frac{\alpha(T)}{R^d} e^{-m(T)R}. \tag{3.23}$$

Für die Grenzbereiche sollte sich ein Exponent von $d = 1$ ($T \to T_c$), bzw. $d = 2$ ($T \gg T_c$) zeigen.

Eine weitere Möglichkeit, die ohne diesen Exponenten auskommt , ergibt sich durch Entwicklung der Exponentialfunktionen in (3.18). Hierraus erhält man ein Potential, welches sich als Summe der Singulett- und Oktett-Terme ergibt

$$V(R,T) = \frac{\alpha(T)}{R} e^{-m(T)R} + \frac{\beta(T)}{R^2} e^{-2m(T)R}. \tag{3.24}$$

3.4 Screeningmasse in der Störungstheorie

Die chromo-elektrischen und chromo-magnetischen Screening-Massen (m_e und m_m) sind zwei wichtige Größen in der Beschreibung der Hochtemperatur Phase der QCD. Die elektrische Screening-Masse führt zum Debye Screening ($m_d = 2m_e$ für große Temperaturen) des Potentials (3.7) zwischen schweren Quarks. Die Temperaturabhängigkeit der Screening-Massen ist von großem Interesse, da sie die Existenz von gebundenen Zuständen in der QCD-Plasmaphase beeinflußt.
Der Wert der elektrischen Screening-Masse ist in niedrigster Ordnung aus der Störungstheorie bekannt:

$$\left(\frac{m_e}{T}\right)^2 = g^2(T). \tag{3.25}$$

Die nächst höhere Ordnung wurde von Rebhan [33], durch Resummation von One-Loop Diagrammen, störungstheoretisch berechnet. Dies führt zu folgender Korrektur zu (3.25):

$$\left(\frac{m_e}{T}\right)^2 = g^2(T)\left[1 + \frac{3}{2\pi}g(T)\left(\ln\frac{2m_e}{m_m} - \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}(g^2)\right]. \tag{3.26}$$

Die magnetische Screening-Masse (m_m) läßt sich nur nicht-störungstheoretisch berechnen. Man erwartet, daß diese Größe von der Ordnung $\mathcal{O}(g^2 T)$ ist, was dazu führt, daß die Korrektur in (3.26) von der Ordnung $\mathcal{O}(g \ln g)$ ist.
Aufgrund von infraroten Divergenzen, ist es nicht möglich, Korrekturen aus höheren Ordnungen in (3.26) störungstheoretisch zu berechnen [34].

Kapitel 4

Anisotrope Gitter und Transportkoeffizienten

4.1 Anisotrope Gitter

Bei der Gitterregularisierung hat man die Möglichkeit unterschiedliche Gitterabstände in verschiedenen Richtungen einzuführen. Der 4-dimensionale Raum wird durch einen diskreten Satz Gitterpunkte $n_\mu a_\mu = (n_\tau a_\tau, n_x a_x, n_y a_y, n_z a_z)$ aufgespannt, wobei a_μ der Gitterabstand in μ-Richtung ist. Die Zahl der Gitterpukte wird mit N_x, N_y, N_z und N_τ bezeichnet. Für die Raumrichtungen wählt man häufig die gleiche Anzahl an Gitterpunkten N_σ und einen identischen Gitterabstand a_σ. Bei gleichen Gitterabständen in Raum- und Zeitrichtung ($a_\sigma = a_\tau$) spricht man von isotropen Gittern, im Gegensatz zu anisotropen Gittern ($a_\sigma \neq a_\tau$). Das Volumen und die Temperatur eines Systems sind dann durch

$$V = (N_\sigma a)^3 \qquad\qquad T = \frac{1}{N_\tau a_\tau} \tag{4.1}$$

gegeben.

In diesem Abschnitt wird nur dieser anisotrope Fall betrachtet. Mit $a = a_\sigma$ sei der Gitterabstand in den Raumrichtungen und mit $a_\tau = a/\gamma$ in der Zeit- (Tempera tur-)richtung bezeichnet. Hierbei ist γ das naive Verhältnis der beiden Gitterabstände $\gamma = a_\sigma/a_\tau$, das sich aus dem naiven Kontinuumslimes ergibt. Das wahre Verhältnis der Gitterabstände ξ weicht auf Grund von Quantenkorrekturen von dieser Definition ab.
Anisotrope Gitter bieten den Vorteil, die Temperatur unabhängig von N_τ bzw. N_τ unabhängig von der Temperatur T variieren zu können und dabei das Volumen

konstant zu halten (vgl. 4.1). Bei der Berechnung von thermischen Korrelationsfunktionen, z.B. für Transportkoeffizienten ist der letzte Punkt von großem Nutzen.

Im naiven Kontinuumslimes sollen physikalische Größen unabhängig von der Art der Gitterregularisierung sein. Daher benötigt man in der Wirkung eine zweite Kopplung. Für die tree-level-verbesserte Wirkung erhält man dann

$$\begin{aligned} S^{(1,2)} &= \beta \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{x,\mu>\nu>0} S^{(1,2)}_{\mu,\nu} + \gamma \sum_{x,\mu>0} S^{(1,2)}_{\mu,0} \right) && (4.2) \\ &= \frac{2N}{g_\sigma^{-2}} \frac{1}{\xi} \sum_{x,\mu>\nu>0} S^{(1,2)}_{\mu,\nu} + \frac{2N}{g_\tau^{-2}} \xi \sum_{x,\mu>0} S^{(1,2)}_{\mu,0}. && (4.3) \end{aligned}$$

Im naiven Kontinuumslimes kann man γ als Verhältnis der Gitterabstände a_σ und a_τ interpretieren. Für endliche β ist dies nicht mehr der Fall. Der Zusammenhang zwischen der Kopplung $\gamma = \eta^{-1}\xi$ und dem Verhältnis der Gitterabstaände $\xi = a_\sigma/a_\tau$ kann störungstheoretisch mit Hilfe der background-field Methode untersucht werden [14][13]. Nichtstörungstheoretisch untersucht man dieses durch den Vergleich von Erwartungswerten auf isotropen und anisotropen Gittern (sog. *matching*). Diese sollen unabhängig von der Anisotropie sein [15]. Da die Diskretisierung der Theorie verändert wird, hängt auch der Lambda-Parameter $\Lambda(\xi)$ von der Anisotropie ab. Die Energiedichte ergibt sich nach (2.28) zu

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{T^4} &= \left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3 \xi^{-2} \frac{\partial \ln Z}{\partial \xi}|_{a \text{ fixed}} && (4.4) \\ &= 3N_\tau^4 \beta \gamma^{-4} \eta^{-3} [\bar{P}_\sigma - \gamma^2 \bar{P}_\tau] - 3N_\tau^4 (\gamma\eta)^{-3} \left[\frac{d\beta_\sigma}{d\xi}|_{a \text{ fixed}} \bar{P}_\sigma + (\gamma\eta)^2 \frac{d\beta_\sigma}{d\xi}|_{a \text{ fixed}} \bar{P}_\sigma \right]. \end{aligned}$$

$\bar{P}_\sigma$ und $\bar{P}_\tau$ sind hierbei die Differenzen der raumartigen, bzw. zeitartigen Plaquette-Erwartungswerte

$$\bar{P}_\kappa = \langle P_\kappa \rangle_{(\beta,N_\tau)} - \langle P_\kappa \rangle_{(\beta,\infty)} \qquad \kappa = \sigma, \tau. \tag{4.5}$$

4.2 Schwache Kopplungsentwicklung

Die schwache Kopplungsentwicklung ist sehr gut geeignet, um Cut-Off Effekte thermodynamischer Größen zu untersuchen [8]. Die Energiedichte ϵ nähert sich für $T \to \infty$ dem Stefan-Boltzman Wert $\epsilon/T^4 = (N^2-1)\pi^2/15$. Das System verhält sich somit wie ein masseloses, wechselwirkungsfreie Gluon Gas.
Der Hochtemperatur-Limes ($T \to \infty$) entspricht nach (4.1) für festes N_τ einem verschwindenden Gitterabstand a_τ. Über die β-Funktion (2.15) besteht ein Zusammenhang zwischen der Kopplung g und dem Gitterabstand a, so daß $\lim_{g\to 0} a(g) = 0$ gilt.

D.h. die schwache Kopplungsentwicklung entspricht dem Hochtemperatur-Limes.

Zur Berechnung der Energiedichte ϵ benötigt man nach (4.4) die Erwartungswerte der Wirkung in Raum- und Zeitrichtung

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{T^4} = 3\frac{p}{T^4} &= \frac{6N}{g^2} N_\tau^4 \gamma^{-4} \left(\langle S_\sigma^{(I)} \rangle - \gamma^2 \langle S_\tau^{(I)} \rangle \right) + \mathcal{O}(g^2) \\ &= 6(N^2-1) N_\tau^4 \gamma^{-4} \left(S_\sigma^{I,(2)} - \gamma^2 S_\tau^{I,(2)} \right) + \mathcal{O}(g^2). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Hierbei sind $S_\sigma^{I,(2)}$ und $S_\tau^{I,(2)}$ die Entwicklungskoeffizienten der niedrigsten Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$. Man betrachtet nun die die Entwicklung der symmetrisierten $k \times l$ Wilson-Loops in g.
Die Link Variablen $U_{x,\mu} = \exp(igA_\mu(x))$ werden in $\mathcal{O}(g^2)$ entwickelt, wobei die Eichfelder in der Mitte eines Links definiert sind

$$A_\mu(p) = \sum_x e^{-ipx - ip_\mu/2} A_\mu(x + \hat{\mu}/2). \tag{4.7}$$

Die Eichfelder werden durch ihre Generatoren λ_a dargestellt, d.h. $A_\mu = A_\mu^a \lambda_a$, mit $a = 1, \cdots, (N^2-1)$ und $2Tr\lambda^a\lambda^b = \delta_{ab}$. Auf dem Gitter gibt es einen diskreten Satz von Impulsen $p_\mu = (2\pi/N_\mu)n_\mu, n_\mu = 0, 1, \cdots, N_\mu - 1$.
Zur Berechnung der Energiedichte in führender Ordnung benötigt man nur die quadratischen Terme in der Entwicklung der Wirkung. Zusammen mit einem Eichfixierungsterm hat die Wirkung dann folgende Gestallt:

$$S_{eff}^I = -\frac{1}{2} \int_p \sum_{\mu,\nu} A_\mu^a(-p) \Delta_{\mu,\nu}(p) A_\nu^a(p) \tag{4.8}$$

mit dem inversen Propagator

$$\Delta_{\mu,\nu}(p) = G_{\mu,\nu}(p) + \zeta g_\mu(p) g_\nu(p). \tag{4.9}$$

Durch Integration über die Eichfelder lassen sich nun aus der Zustandssumme

$$Z = \int \prod_{p,\mu,a} dA_\mu^a(p) e^{-S_{eff}^I[A]} \tag{4.10}$$

die Erwartungswerte der Wilson-Loops berechnen. Da die Wirkung quadratisch in den Feldern ist, handelt es sich hierbei um ein Gauß-Integral, welches für Zweipunktfunktionen den inversen Propagator liefert

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(-p) A_\nu^a(p) \rangle &= \frac{1}{Z} \int \prod_{p',\sigma,b} dA_\sigma^b(p') A_\mu^a(-p) A_\nu^a(p) e^{-S_{eff}^I[A]} \\ &= N_\sigma^3 N_\tau \Delta_{\mu,\nu}^{I^{-1}}(p) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Für die Wilson-Wirkung kann man durch geeignete Wahl des Eichfixierungstermes den Propagator diagonalisieren. Bei der $(2,1)$-verbesserten Wirkung wurde die Inversion der Matrix $\Delta_{\mu,\nu}^{(2,1)}(p)$ mit einem Mathematica-Programm durchgeführt, wobei auch die Unabhängigkeit der Resultate von der Wahl des Eichfixierungsterm geprüft wurde.

Damit ergibt sich für die Entwicklungskoeffizienten $S^{I,(2)}_{\mu,\nu}$:

$$S^{I,(2)}_{\mu,\nu} = \int\limits_p \frac{R_{\mu,\nu}(p)}{R^d(p)} \tag{4.12}$$

Die Energiedichte läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\frac{\epsilon}{T^4} = \frac{3}{2}(N^2-1)\frac{N_\tau^4}{\xi^4}\int_p \frac{R_\sigma(p)-\xi^2 R_\tau(p)}{R^d(p)} \tag{4.13}$$

mit

$$R_\sigma = \frac{1}{3}(R_{1,2}+R_{1,3}+R_{2,3}) \tag{4.14}$$

$$R_\tau = \frac{1}{3}(R_{1,4}+R_{2,4}+R_{3,4}) \quad . \tag{4.15}$$

Wilson-Wirkung

Benutzte Abkürzungen:

$$s_\mu = \sin(p_\mu/2) \tag{4.16}$$

$$R_{\mu,\nu} = s_\mu^2 + s_\nu^2 \tag{4.17}$$

$$R_{\mu,4} = \xi^{-2}s_\mu^2 + s_4^2 \tag{4.18}$$

$$R^d = \xi^{-1}\sum_{\nu=1}^{3} s_\nu^2 + \xi s_4^2 \tag{4.19}$$

Als Eichfixierungsterme wurden

$$g_\mu = 2s_\mu \tag{4.20}$$

$$g_4 = 2\xi^2 s_4 \tag{4.21}$$

gewählt.

(2,1)-verbesserte Wirkung

Benutzte Abkürzungen:

$$s_\mu = \sin(p_\mu/2) \tag{4.22}$$

$$d(p) = \sum_{\nu=1}^{3} s_\nu^2 + \xi^2 s_4^2 \tag{4.23}$$

$$
\begin{aligned}
D_\mu(p) &= 2\xi^{-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} a_{k,l}[k+2\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\cos(jp_\mu)]d(lp) && (4.24)\\
D_4(p) &= 2\xi\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} a_{k,l}[k+2\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\cos(jp_4)]d(lp) && (4.25)
\end{aligned}
$$

Als Eichfixierungsterme wurden

$$
\begin{aligned}
g_\mu &= 2(s_\mu + \frac{2}{3}s_\mu^3) && (4.26)\\
g_4 &= 2\xi^2(s_4 + \frac{2}{3}s_4^3) && (4.27)
\end{aligned}
$$

gewählt.

$$
\begin{aligned}
R^d(p) &= \sum_{k=1}^{4} g_k^2 D_l D_m D_n && (4.28)\\
R_{\mu,\nu} &= \frac{4}{3}(3+s_\mu^2+s_\nu^2)\\
&\quad (D_i D_j (s_\mu g_\mu + s_\nu g_\nu)^2 + (D_\mu s_\mu^2 + D_\nu s_\nu^2)(D_i g_j^2 + D_j g_i^2)) && (4.29)
\end{aligned}
$$

4.3 Cut-off Effekte auf anisotropen Gittern

In diesem Abschnitt werden die Cut-off-Effekte der Energiedichte im Hochtemperatur-Limes auf anisotropen Gittern diskutiert. Hierbei wird die störungstheoretische Entwicklung (4.13) aus dem letzten Abschnitt benutzt, wobei die Integration der Impulse naiv diskretisiert, d.h. durch die Summe über alle Gitterimpulse ersetzt wird. Wie sich in Tab.4.1 und Abb.4.1 zeigt, führt die Einführung der Anisotropie für festes N_σ zu einem änlichen Verhalten der Abweichung der Energiedichte vom Kontinuumswert. Für die Wilson-Wirkung kommt es zu einer starken Reduzierung der Cut-Off Effekte im gesamten Temperaturbereich ($1/aT = N_\tau/\xi$), wie man z.B. an den Werten für $N_\tau/\xi = 4$ sieht. Für das isotrope Gitter beträgt die Abweichung mehr als 49%, gegenüber 29% ($\xi = 2$) oder 25% ($\xi = 2$) auf anisotropen Gittern.
Da die Cut-Off Effekte bei der verbesserten Wirkung bereits reduziert sind, ist der Effekt hier nicht so stark sichtbar, bzw. für große ξ klein. Bei $N_\tau/\xi = 8$ beträgt die Abweichung der Energiedichte vom Stefan-Boltzmann Wert für $\xi = 2$ 0.855% und für $\xi = 3$ 0.847%. Neben den ultravioletten Cut-Off Effekten (endlicher Gitterabstand a) treten zusätzlich infrarote Cut-Off Effekte durch das endliche räumliche Volumen $(N_\sigma a)^3$ auf. In einem endlichen Volumen gehen die kleinen Impulse $p_\mu = (2\pi/N_\mu)n_\mu$ verloren, die für kleine Temperaturen den wesentlichen Anteil zur

	I=(1,1)			I=(1,2)		
N_τ/ξ	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$
1	0.759886	0.771368	0.775719	0.759885	0.694514	0.682483
2	1.736342	1.538929	1.495014	1.318573	1.171868	1.165042
3	1.758581	1.482477	1.428435	1.080290	1.120129	1.122129
4	1.493702	1.288309	1.251606	0.985083	1.051005	1.052723
5	1.291375	1.164845	1.143166	0.986966	1.019536	1.020313
6	1.176556	1.099475	1.086314	0.992519	1.005634	1.005968
8	1.074826	1.039962	1.033814	0.988435	0.991448	0.991531
10	1.028518	1.008360	1.004725	0.977062	0.978183	0.978214
12	0.994680	0.981324	0.978891	0.960074	0.960594	0.960608

Tabelle 4.1: Abweichungen vom Stephan-Boltzmann-Wert des Hochtemperatur-Limes der Energiedichte auf Gittern mit räumlicher Ausdehnung $N_\sigma = 32$, für die (1,1)-, bzw. (1,2)-Wirkung.

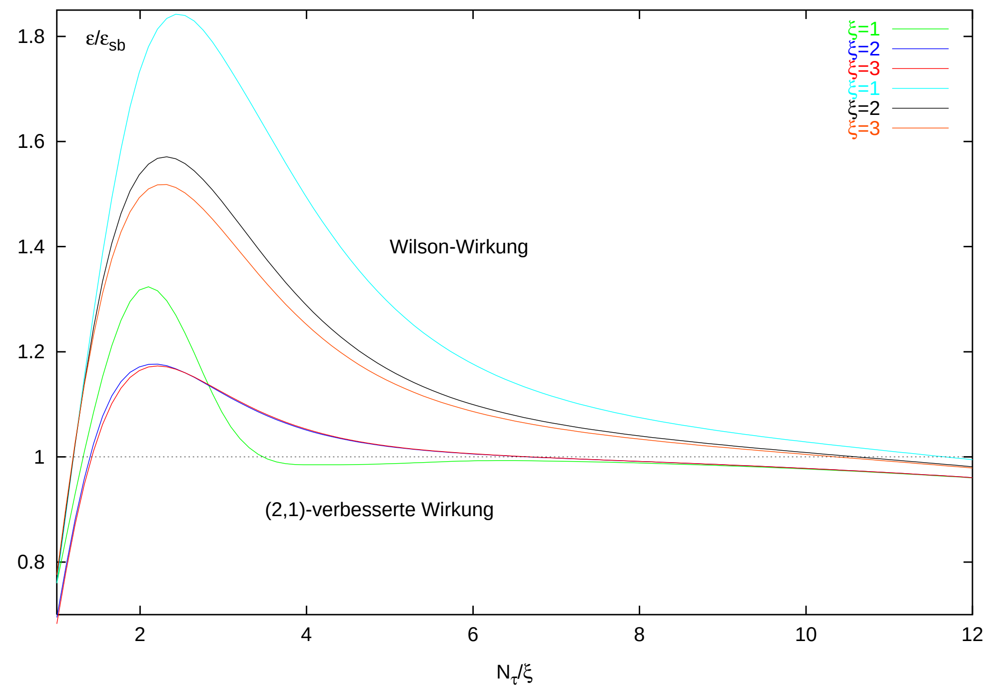


Abbildung 4.1: Abweichungen von Stephan-Boltzmann-Wert des Hochtemperatur-Limes der Energiedichte auf Gittern mit räumlicher Ausdehnung $N_\sigma = 32$, für die (1,1)-, bzw. (1,2)-Wirkung.

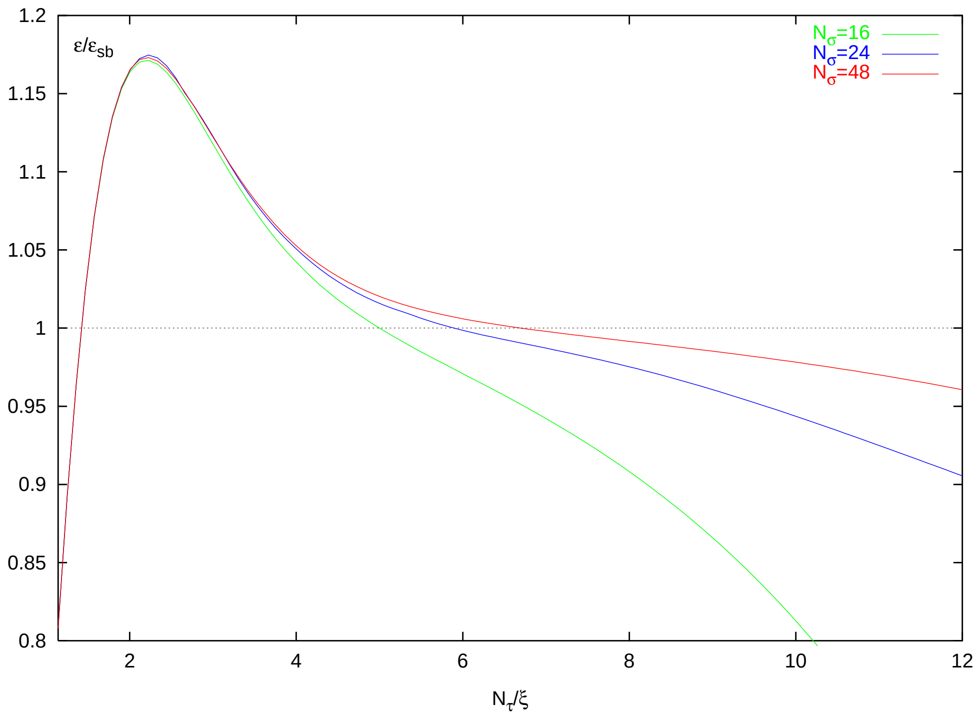


Abbildung 4.2: Finite-Volume Effekte bei festem ξ

Energiedichte liefern. Daher gibt es für ein festes N_σ und ξ einen Bereich für N_τ, in dem die Näherung Sinn macht (Abb.4.2). Wählt man N_τ zu groß, so wird die Rechnung beliebig schlecht.

Um die Effekte des endlichen Volumens zu reduzieren und die reinen ultravioletten Cut-off-Effekte zu untersuchen, führt man, anstelle der Summation, eine Integration für die räumlichen Impulse durch. Man hat somit ein System mit unendlichem räumlichem Volumen (thermodynamischer Limes) und kann nun die Effekte der endlichen Zeitausdehnung betrachten. Da für die (2,1)-verbesserte Wirkung keine analytische Integration bekannt ist, wird das Gauß-Legendre-Verfahren benutzt, um die Integrale zu approximieren. Für die Berechnung der Vakuum-Beiträge ($T = 0$) wird die Integration auch in der Zeitrichtung durchgeführt. Die Vakuum-Beiträge werden für $N_{g\tau} = \xi N_{g\sigma}$ berechnet. Es wurde zunächst die Zahl der Stützstellen $N_{g\sigma}$ bestimmt, die nötig sind, damit die Integration von $N_{g\sigma}$ unabhängig wird. Dies ergab, das ein Verhältnis von $N_{g\sigma} = 5N_\tau/\xi$ sinnvoll ist. Die Ergebnisse des Integrationverfahrens sind in Tabelle 4.2 aufgelistet.

Wie man an Fig.4.3 erkennt, führt die Einführung der Anisotropie bei der Wilson-Wirkung zu einer drastischen Reduktion der ultraviolett Cut-Off-Effekte, insbesondere bei kleiner zeitlicher Ausdehnung N_τ (vgl. [14]). Durch den kleineren Gitterabstand in zeitlicher Richtung werden die Korrekturen zum Kontinuumswert der Energiedichte wirkungsvoll verringert.
Die (2,1)-verbesserte Wirkung zeigt diesen Effekt nicht. Da die Korrekturen zum

Stefan-Boltzmann Wert erst bei der Ordnung a^4 einsetzten, ist der Einfluß des kleineren Gitterabstandes gering. Es zeigt sich sogar eine Verschlechterung der Ergebnisse, wenn man die Werte für $\xi = 1$ und $\xi \neq 1$ vergleicht.

Die Energiedichte lässt sich mit Hilfe eines Entwicklungskoefizienten C^I in folgender Weise schreiben:

$$\frac{\epsilon(N_\tau)}{T^4} = (N^2-1)\frac{\pi^2}{15}\left[1 + C^I\left(\frac{\xi\pi}{N_\tau}\right)^\alpha + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{N_\tau}\right)^{\alpha+2}\right]. \tag{4.30}$$

Für die Wilson-Wirkung sind die Abweichungen der Energiedichte von der Ordnung $\mathcal{O}((aT)^2)$, d.h. $\alpha = 2$, während für die verbesserte Wirkung die Korrekturen erst bei der nächst höheren Ordnung einsetzten, was zu $\alpha = 4$ führt. Als Schätzwert für den Koeffizienten C^I erhält man durch Auflösen von Gl.(4.30)

$$C^I\left(\frac{N_\tau}{\xi}\right) = \left[\frac{\epsilon}{\epsilon_{SB}} - 1\right]\left(\frac{N_\tau}{\xi\pi}\right). \tag{4.31}$$

In Tab.4.3 sind die Koeffizienten C^I für die beiden Wirkungen und drei ξ-Werte

	I=(1,1)			I=(1,2)		
N_τ/ξ	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$	$\xi = 1$	$\xi = 2$	$\xi = 3$
4	1.495186	1.289793	1.253090	0.986554	1.052475	1.054194
8	1.086699	1.051834	1.045686	1.000307	1.003320	1.003404
12	1.034756	1.021394	1.018960	1.000149	1.000670	1.000684
16	1.018991	1.011775	1.010450	1.000055	1.000215	1.000219
20	1.012003	1.007462	1.006625	1.000024	1.000089	1.000091
24	1.008279	1.005153	1.004568	1.000012	1.000043	1.000043

Tabelle 4.2: Abweichungen vom Stephan-Boltzmann-Wert des Hochtemperatur-Limes der Energiedichte auf Gittern mit unendlichem räumlichen Volumen.

aufgeführt. Vergleicht man die Daten der Wilson-Wirkung in Abb.4.4, so erkennt man, daß der kleinere räumliche Gitterabstand für eine große Reduzierung der ultravioletten Cut-off-Effekte sorgt. Für $\xi = 3$ ist C^I z.B. 55% kleiner als auf dem isotropen Gitter mit $\xi = 1$.
Bei der (2,1)-verbesserten Wirkung zeigt sich ein gegenteiliger Effekt. Die Anisotropie sorgt für einen etwa vier mal größeren Koeffizienten als für $\xi = 1$. Der Unterschied zwischen der Werten für $\xi = 2$ und $\xi = 3$ ist hingegen gering.

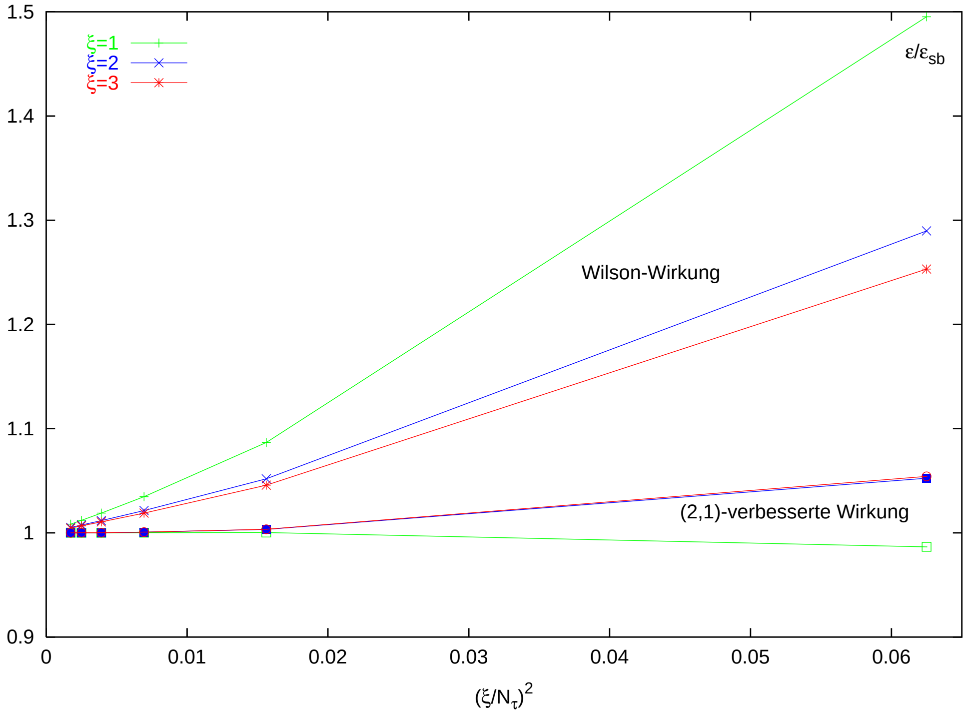


Abbildung 4.3: Energiedichte für unendlich dimensionale Gitter

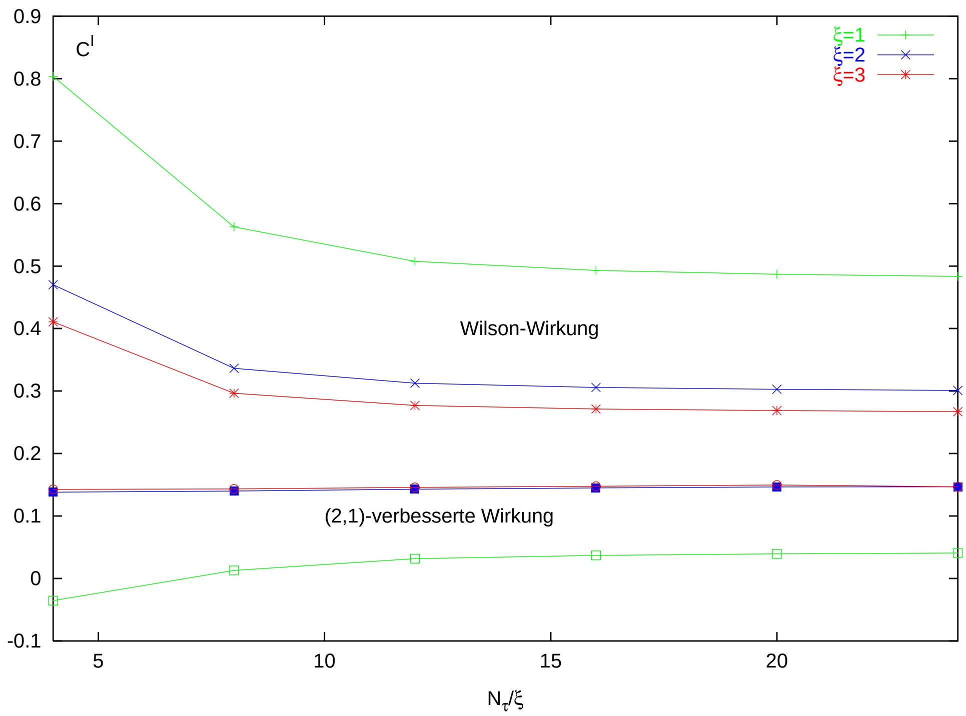


Abbildung 4.4: Schätzwert für den Koeffizienten C^I der führenden Cut-Off Korrektur

	I=(1,1)			I=(1,2)		
N_τ/ξ	$\xi=1$	$\xi=2$	$\xi=3$	$\xi=1$	$\xi=2$	$\xi=3$
4	0.803580	0.470271	0.410710	-0.0354088	0.138189	0.142710
8	0.562775	0.336462	0.296554	0.0129354	0.139888	0.143427
12	0.507613	0.312461	0.276912	0.0317828	0.142916	0.145902
16	0.493093	0.305732	0.271329	0.0370787	0.144944	0.147640
20	0.486957	0.302730	0.268774	0.0395014	0.146484	0.149776
24	0.483661	0.301039	0.266864	0.0409551	0.146756	0.146756

Tabelle 4.3: Koeffizienten der Energiedichte auf Gittern mit unendlichem räumlichen Volumen.

4.4 Transportkoeffizienten

Es wird erwartet, daß in naher Zukunft in hochenergetischen Schwerionenstößen ein Quark Gluon Plasma erzeugt werden kann. Hierzu benötigt man eine Energiedichte von etwa $(1-2)GeV/fm^3$ oder eine Temperatur größer als $(150-200)MeV$. Die zukünftigen Beschleuniger in Brookhaven (Realtivistic-Heavy-ion-Collider RHIC) und beim CERN in Genf (Large Hadron-Collider LHC) sollen es ermöglichen solche Energien zu erzeugen. Es wird davon ausgegangen, daß in der Natur das Quark Gluon Plasma im frühen Universum und eventuell auch im Kern von Neutronensternen mit einer sehr großen Baryonendichte realisiert ist.
Mit Hilfe von Monte-Carlo Simulationen in der Gittereichtheorie konnten viele Eigenschaften des Quark Gluon Plasmas und des Deconfinement-Phasenübergangs im thermodynamischen Gleichgewicht untersucht werden. Bei den oben genannten Systemen handelt es sich aber nicht um Systeme im Gleichgewicht, sondern nichtgleichgewichts-Effekte spielen eine große Rolle.
Transportkoeffizienten sind wichtige Größen bei der Beschreibung dissipativer Effekte, wie Scheer-Viskosität und Vakuum-Viskosität in einem expandierenden Plasma. Transportprozesse resultieren aus Gradienten in den thermodynamischen Parametern. Gradienten in der Temperatur führen zu Wärmeströmen, in der Geschwindigkeit zu Reibungskräften, oder in der Farbladungsverteilung zu einem Farbladungsfluß. Diese Effekte sind irreversibel und typische nichtgleichgewichts Phänomene.

Es gibt verschiedene Ansätze zur Berechnung von Transportkoeffizienten. Die relativistische kinetische Theorie [41][42] ist in den Bereichen $T \ll T_c$ und $T \gg T_c$ anwendbar. Ausgehend von der Boltzmann-Gleichung kann man mit Hilfe des Wechselwirkungsquerschnitts die Scheer-Viskosität berechnen. Im schwachen-Kopplungslimes (Hochtemperaturlimes) ergibt sich

$$\eta = \frac{cT^3}{\alpha_s^2 \ln(\frac{1}{\alpha_s})}, \qquad T \gg T_c, \tag{4.32}$$

wobei sich für die Konstante c aus der Relaxationszeit-Näherung ein Wert von 0.28 [41] oder 0.57 [48] ergibt. Der physikalische Prozeß der für die Viskosität in niedrigster Ordnung der Kopplungskonstanten verantwortlich ist, sind elastische Stöße zwischen Quarks und Gluonen. Zur Berechnung von Transportkoeffizienten werden linear response Ansätze benutzt, bei denen um das thermodynamische Gleichgewicht entwickelt wird. Hierbei gehen, mit der Annahme, daß sich das System nahe dem Gleichgewicht befindet, nur lineare Terme des Gradienten der thermodynamischen Parameter in den Energie-Impuls Tensor ein. Man beschränkt sich auf den hydrodynamischen Bereich, in dem die mittlere freie Zeit der Teilchen viel kleiner ist als die Relaxationszeit des Systems ist. Das lokale Gleichgewicht wird schnell erreicht und das System als ganzes nähert sich dann dem globalen Gleichgewicht. Während dieser Periode entstehen z.B. Reibungskräfte durch den Gradienten des Geschwindigkeitfeldes und Wärmeströme durch Inhomogenitäten der Temperatur.

Zubarev [38] entwickelte, innerhalb der linear-response Näherung sog. Kubo-Formeln für die Scheer-Viskosität η, die Vakuum-Viskosität ξ und die Wärmeleitfähigkeit χ

$$\begin{aligned}
\chi &= -\frac{1}{T}\int d^3x' \int_{-\infty}^{t} dt_1 e^{\epsilon(t_1-t)} \int_{-\infty}^{t_1} dt' \langle T_{01}(x,t)T_{01}(x',t')\rangle_{ret} && (4.33)\\
\eta &= -\int d^3x' \int_{-\infty}^{t} dt_1 e^{\epsilon(t_1-t)} \int_{-\infty}^{t_1} dt' \langle T_{12}(x,t)T_{12}(x',t')\rangle_{ret} && (4.34)\\
\frac{4}{3}\eta+\xi &= -\int d^3x' \int_{-\infty}^{t} dt_1 e^{\epsilon(t_1-t)} \int_{-\infty}^{t_1} dt' \langle T_{11}(x,t)T_{11}(x',t')\rangle_{ret}, && (4.35)
\end{aligned}$$

wobei der Limes $\epsilon \to \infty$ durchgeführt werden muß. Die retardierte Green'sche Funktion in der Minkowski-Zeit ergibt sich aus dem thermischen Erwartungswert $\langle\cdots\rangle_0$ der Korrelationsfunktion im thermischen Gleichgewicht

$$\langle A(x,t)B(x',t')\rangle_{ret} = -i\theta(t'-t)\langle[A(x,t)B(x',t')]\rangle_0 \tag{4.36}$$

Der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ läßt sich durch den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ ausdrücken,

$$T_{\mu\nu} = 2\mathrm{Tr}(F_{\mu\sigma}F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}). \tag{4.37}$$

In der Gittereichtheorie ist es nicht möglich Korrelationen in der Minkowski-Zeit zu berechnen, sondern nur in der Euklidischen Zeit. Um eine Verbindung zwischen der retardierten Green'schen Funktion $G_r(x,t)$ und der thermischen Funktion $G_\beta(x,\tau)$ herzustellen, betrachtet man die Fourier-Transformation

$$\tilde{G}_\beta(p,\omega_n) = \int d\omega \frac{\rho(p,\omega)}{i\omega_n - \omega}. \tag{4.38}$$

Die retardierte Green'sche Funktion hat die gleiche spektrale Darstellung wie $G_\beta(p,\omega_n)$. Ist die Spektralfunktion $\rho(p,\omega)$ bekannt, so kann man auch $G_r(p,\omega)$ berechnen, indem die Ersetzung $i\omega_n \to p_0 + i\epsilon$ durchgeführt wird (analytische Fortsetzung).

Da man auf dem Gitter nur eine endliche Anzahl an Punkten in der Zeitrichtung hat, ist es nicht möglich die Spektralfunktion direkt zu berechnen. Hat man aber einen passenden Ansatz gefunden, so läßt sich dieser mit den Monte-Carlo Daten fitten.

Ein einfacher Ansatz für die Spektralfunktion ist der einer freien Theorie

$$\rho(\omega) = A(1-e^{-\beta m})[\delta(m-\omega) - \delta(m+\omega)]. \tag{4.39}$$

Hieraus ergibt sich die Green'sche Funktion als Summe zweier Exponentialfunktionen

$$G_\beta(\tau) = -iA(e^{-m\tau} + e^{-m(\beta-\tau)}). \tag{4.40}$$

Um die Effekte der Wechselwirkung zu berücksichtigen, wird die δ-Funktion in (4.39) durch eine geschmierte δ-Funktion ersetzt

$$\rho(\omega) = \frac{A(1-e^{-\beta m})}{\pi}\left(\frac{\gamma}{(m-\omega)^2+\gamma^2} - \frac{\gamma}{(m+\omega)^2+\gamma^2}\right). \tag{4.41}$$

Aus diesem Ansatz läßt sich die thermische Green'sche Funktion nur als Integral berechnen

$$G_\beta(\tau) = -i\int d\omega \frac{e^{\beta\omega}}{e^{\beta\omega}-1} e^{-\omega\tau}\rho(\omega) \tag{4.42}$$

und die retardierte Green'sche Funktion ergibt sich zu

$$G_{ret}(t) = -2A(1-e^{-\beta m})\theta(t)e^{-\gamma t}\sin(mt). \tag{4.43}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Kubo-Formeln (4.33-4.35) ein, so ergibt sich für die Transportkoeffizienten

$$\alpha = 2A(1-e^{-\beta m})\frac{2\gamma m}{(\gamma^2+m^2)^2} \tag{4.44}$$

mit $\alpha = \eta, \frac{4}{3}\eta + \xi$ oder χT.

Auf dem Gitter läßt sich der Energie-Impuls-Tensor durch geeignete Kombinationen von Plaquetten ausdrücken. Wie in Kap.2.1 zu sehen war, ergibt sich im naiven Kontinuumslimes

$$\begin{aligned} U_{\mu,\nu} &= U_\mu(n)U_\nu(n+a\hat{\mu})U^\dagger_\mu(n+a\hat{\nu})U^\dagger_\nu(n) && (4.45)\\ &= 1 + ia^2 g F^b_{\mu\nu}T^b - \frac{1}{2}a^4 g^2 F^b_{\mu\nu}F^c_{\mu\nu}T^bT^c && (4.46)\end{aligned}$$

mit den Generatoren T^b der SU(3) und dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$. Für die diagonalen Elemente des Energie-Impuls-Tensors findet man daher

$$T_{\mu\mu}(x) = \frac{2}{g^2}\left(-\sum_{\nu\neq\mu}\mathrm{Tr}U_{x,\mu\nu} + \sum_{\sigma,\nu\neq\mu,\nu<\sigma}\mathrm{Tr}U_{x,\sigma\nu}\right). \tag{4.47}$$

In dieser Näherung ist der Energie-Impuls-Tensor spurlos,

$$\sum_\mu T_{\mu\mu} = \epsilon + \sum_{ii} T_{ii} = \epsilon - 3p = 0, \tag{4.48}$$

da bei der Berechnung der Energiedichte ϵ und dem Druck p aus der Zustandssumme nur Terme der Ordnung g^2 auftreten. Höhere Ordnungen werden hier vernachlässigt. Für die nicht-diagonalen Elemente ist es nötig Plaquetten aus verschiedenen Hyperebenen zu kombinieren

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{g^2}\mathrm{Tr}\tilde{U}_{x,\mu\sigma}\tilde{U}_{x,\nu\sigma}, \tag{4.49}$$

wobei die spurlosen antisymmetrischen Plaquetten definiert sind durch

$$\tilde{U}_{x,\mu\nu} = -\frac{i}{2}(U_{x,\mu\nu} - U_{x,\nu\mu})_{\mathrm{spurloserTeil}}. \tag{4.50}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich die Korrelationen des Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter berechnen. Auf Grund der kubischen Symmetrie der raumartigen Komponenten, lassen sich die Korrelationen der nicht-diagonalen Elemente T_{ij}, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ durch die diagonalen Elemente ausdrücken

$$\langle T_{12}(x)T_{12}(y)\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle T_{11}(x)T_{11}(y)\rangle - \langle T_{11}(x)T_{22}(y)\rangle\Big). \tag{4.51}$$

Die thermischen Impuls-Null Korrelationen werden nun durch Summation über eine Hyperebene berechnet

$$\begin{aligned} C_\chi(\tau) &= \sum_{\vec{x}} \langle T_{01}(0,0)T_{01}(\vec{x},\tau)\rangle && (4.52)\\ C_\eta(\tau) &= \sum_{\vec{x}} \langle T_{12}(0,0)T_{12}(\vec{x},\tau)\rangle && (4.53)\\ C_{4\eta+\xi}(\tau) &= \sum_{\vec{x}} \langle T_{11}(0,0)T_{11}(\vec{x},\tau)\rangle, && (4.54) \end{aligned}$$

mit $\tau = 0..N_\tau/2$, wobei man auf Grund der Isotropie des Raumes über äquivalente Raum-Richtungen mitteln kann.
Bei der Berechnung des Energie-Impuls-Tensors auf anisotropen Gittern müssen die Plaquetten noch mit den passenden Anisotropie-Faktoren gewichtet werden, damit im naiven Kontinuumslimes die Operatoren korrekt reproduziert werden. Für die diagonalen Elemente ergibt sich ein Faktor γ^2 für die zeitartige Plaquetten, wie in der Energiedichte (4.4). Für die nicht-diagonalen Elemente werden die zeitartigen Plaquetten in (4.50) mit einem Faktor γ gewichtet.

4.5 Verbesserter Energie-Impuls-Tensor

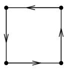
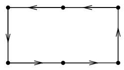
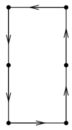
Zur Verbesserung des Energie-Impuls Tensors benutzt man nun einen änlichen Ansatz, wie bei der *tree level* verbesserten Wirkung. Zusätzlich zu den Plaquettetermen in der Definition von $T_{\mu\mu}$ (4.47), bzw. $T_{\mu\nu}$ (4.49) kommen nun noch weitere symmetrisierte $k \times l$ Wilson-Loops hinzu, die es erlauben Abweichungen höherer Ordnung in a zum Kontinuumsausdruck zu unterdrücken.

Für die diagonalen Elemente des Energie-Impuls-Tensors wird die Verbesserung nur für die raumartigen Beiträge durchgeführt. Analog zur Verbesserung der 2×1-Wirkung (2.24) werden hier zusätzliche 2×1-Loops eingeführt. Da die Berechnung der Transportkoeffizienten auf anisotropen Gittern mit $a_\tau < a_\sigma$ durchgeführt werden, sind die Cut-Off-Effekte der zeitartigen Beiträge schon reduziert, was eine Verbesserung dieser Terme unnötig macht. Hier wird aus Symmetriegründen ein 2×1-Loop verwendet.

$$T^I_{\mu\mu}(x) = \frac{2}{g^2}\left(-\sum_{\nu\neq\mu}(1-\frac{1}{N}\mathrm{Tr}S^I_{x,\mu\nu}) + \sum_{\sigma,\nu\neq\mu,\nu<\sigma}(1-\frac{1}{N}\mathrm{Tr}S^I_{x,\sigma\nu})\right) \tag{4.55}$$

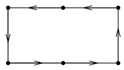
mit

$$S^I_{x,\mu\nu} = a_{11}U^{(1,1)}_{\mu\nu}(x) + \frac{a_{12}}{2}\left(U^{(1,2)}_{\mu\nu}(x) + U^{(2,1)}_{\mu\nu}(x)\right) \tag{4.56}$$

$= a_{11}\Big($  $_{\mu\nu}(x)\Big) + \frac{a_{12}}{2}\Big($  $_{\mu\nu}(x) +$  $_{\mu\nu}(x)\Big)$

für $\mu, \nu \neq 4$ und

$$S^I_{x,\mu\nu} = \frac{1}{2}U^{(1,2)}_{\mu\nu}(x) \tag{4.57}$$

$= \frac{1}{2}$  $_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu})$

für $\mu < \nu = 4$. Um zu sehen, daß die raumartigen Terme $\mathcal{O}(a^2)$-verbessert sind, werden die Loops in niedrigster Ordnung um ihren Mittelpunkt entwickelt.

$$\begin{aligned}
U^{(1,1)}_{\mu\nu}(x) &= \exp\left(ig\int_{-\frac{a\hat{\mu}}{2}}^{+\frac{a\hat{\mu}}{2}} A_\mu(y+x-\frac{a\hat{\mu}}{2}) - A_\mu(y+x+\frac{a\hat{\mu}}{2})\ dy - (\mu\to\nu)\right) \qquad (4.58)\\
&= \exp\left(ig\int_{\frac{-a\hat{\mu}}{2}}^{+\frac{a\hat{\mu}}{2}} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\partial^{(j)}_\mu \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-a/2)^k}{k!} - \frac{(a/2)^k}{k!}\right]\partial^{(k)}_\nu A_\mu(x)dy - (\mu\to\nu)\right)\\
&= \exp\left(ig\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2(a/2)^{(2j+1)}}{(2j+1)!}\partial^{(2j)}_\mu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(a/2)^{(2k+1)}}{(2k+1)!}\partial^{(2k)}_\nu\partial_\nu A_\mu(x) - (\mu\to\nu)\right)\\
&= \exp\left(ig\sum_{j=0}^{\infty}a^{2(j+1)}\sum_{k=0}^{j}c_{jk}\partial^{(2(j-k))}_\mu\partial^{(2k)}_\nu F_{\mu\nu}(x)\right)
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten der Taylorentwicklung

$$c_{jk} = \frac{2^{-2j}}{(2k+1)!(2(j-k)+1)!} \tag{4.59}$$

und

$$U^{(2,1)}_{\mu,\nu}(x) = \exp\left\{ig\int_{-a\hat{\mu}}^{+a\hat{\mu}} A_\mu(y-\frac{a\nu}{2}+x) - A_\mu(y+\frac{a\nu}{2}+x)dy\right.$$

$$
\begin{aligned}
& \quad - ig \int_{-\frac{a\hat{\nu}}{2}}^{-\frac{a\hat{\nu}}{2}} A_\nu(y - a\mu + x) - A\nu(y + a\mu + x) dy \Big\} \\
&= \exp\left(ig \int_{-a\hat{\mu}}^{+a\hat{\mu}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \partial_\mu^{(j)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-a/2)^k}{k!} - \frac{(a/2)^k}{k!} \right] \partial_\nu^{(k)} A_\mu(x) dy \right. \\
& \quad \left. - ig \int_{-\frac{a\hat{\nu}}{2}}^{-\frac{a\hat{\nu}}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \partial_\nu^{(j)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-a)^k}{k!} - \frac{(a)^k}{k!} \right] \partial_\mu^{(k)} A_\nu(x) dy \right) \\
&= \exp\left(ig \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2a^{(2j+1)}}{(2j+1)!} \partial_\nu^{(2j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(a/2)^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}(x) \right) \\
&= \exp\left(ig \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk}^{(2,1)} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}(x) \right)
\end{aligned}
$$

mit den Koeffizienten der Taylorentwicklung

$$
c_{j,k}^{(2,1)} = \frac{2^{-2k+1}}{(2k+1)!(2(j-k)+1)!}. \tag{4.60}
$$

bzw.

$$
U_{\mu,\nu}^{(1,2)}(x) = \exp\left(ig \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk}^{(2,1)} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}(x) \right) \tag{4.61}
$$

mit

$$
c_{j,k}^{(1,2)} = \frac{2^{(2(k-j)+1)}}{(2k+1)!(2(j-k)+1)!}. \tag{4.62}
$$

Nun wird die Exponentialfunktion in g entwickelt. Der für den Energie-Impuls-Tensor entscheidende Term ist

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{1}{N} \mathrm{ReTr} U_{x,\mu\nu}^{(1,1)} &= \frac{g^2}{2N} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a^{(2(j+1))} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}(x)) \right)^2 \\
&= \frac{g^2}{2N} \left(a^4 F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + \frac{a^6}{12} F_{\mu\nu}(x) (\partial_\mu^{(2)} + \partial_\nu^{(2)}) F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^8) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 \quad - \quad & \frac{1}{2N} \mathrm{ReTr}(U_{x,\mu\nu}^{(2,1)} + U_{x,\mu\nu}^{(1,2)}) = \\
& \frac{g^2}{2N} \left(4a^4 F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + a^6 \frac{5}{6} F_{\mu\nu}(x) (\partial_\mu^{(2)} + \partial_\nu^{(2)}) F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^8) \right)
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Ergebnisse in (4.56) ein, so sollen die $\mathcal{O}(a^6)$-Terme wegfallen, was zu folgenden Bedingungen für die Koeffizienten führt:

$$a_{11} + 4a_{12} = 1 \tag{4.63}$$
$$\frac{1}{12}a_{11} + \frac{5}{6}a_{12} = 0 \tag{4.64}$$
$$\Longrightarrow a_{11} = \frac{5}{3}\text{und} \qquad a_{12} = -\frac{1}{6} \tag{4.65}$$

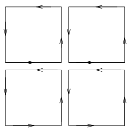
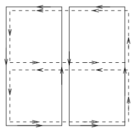
Für die nicht-diagonalen Elemente des Energie-Impuls-Tensors werden zwei Operatoren aus verschiedenen Hyperebenen aneinander multipliziert

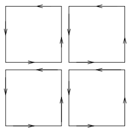
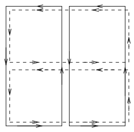
$$T^I_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{g^2}\mathrm{Tr}\tilde{U}^I_{x,\mu\sigma}\tilde{U}^I_{x,\nu\sigma} \tag{4.66}$$

mit

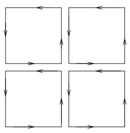
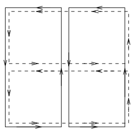
$$\tilde{U}^I_{x,\mu\nu} = -\frac{i}{2}(U^I_{x,\mu\nu} - U^I_{x,\nu\mu})_{\mathrm{spurloserTeil}}. \tag{4.67}$$

Um das Objekt möglichst symmetrisch zu gestalten, werden jeweils vier Plaquetten und 2×1-Loops um einen Punkt gruppiert [39]. Der Operator $U^I_{x,\nu\mu}$ hat dann folgende Gestalt:

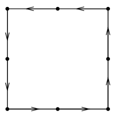
$$U^I_{x,\mu\nu} = a_{11}$$

$$+\, a_{12}$$

(4.68)

$$U^I_{x,\mu\nu} = \exp\left(ig\int a_{11}\right.$$

$$+\,(ig\int a_{12}$$

$$\left.\right)$$
(4.69)

Für den Operator (4.67) benötigt man die Ordnung g-Terme aus der Entwicklung der Exponentialfunktion

$$\tilde{U}^I_{x,\mu\nu} = g\int a_{11}$$

$$+\, ig\int a_{12}$$

(4.70)

Die Links, die zweimal in verschiedener Richtung durchlaufen werden, fallen bei dieser Entwicklung heraus. Man erkennt, daß dieser Operator im Kontinuumslimes das gleiche Ergebnis liefert, wie ein 2×2-Loop.

$$\tilde{U}^I_{x,\mu\nu} = g\int\frac{1}{4}$$

(4.71)

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(ig \int_{-a\hat{\mu}}^{+a\hat{\mu}} A_\mu(y + x - a\hat{\mu}) - A_\mu(y + x + a\hat{\mu})\; dy - (\mu \to \nu) \right) \quad (4.72) \\
&= \exp\left(ig \int_{-a\hat{\mu}}^{+a\hat{\mu}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \partial_\mu^{(j)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-a)^k}{k!} - \frac{(a)^k}{k!} \right] \partial_\nu^{(k)} A_\mu(x) dy - (\mu \to \nu) \right) \\
&= \exp\left(ig \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2a^{(2j+1)}}{(2j+1)!} \partial_\mu^{(2j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2a^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \partial_\nu^{(2k)} \partial_\nu A_\mu(x) - (\mu \to \nu) \right) \\
&= \exp\left(ig \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \partial_\mu^{(2(j-k))} \partial_\nu^{(2k)} F_{\mu\nu}(x) \right)
\end{aligned}
$$

mit den Koeffizienten

$$
c_{j,k}^{(2,2)} = \frac{4}{(2k+1)!(2(j-k)+1)!}. \qquad (4.73)
$$

Um die diagonalen Elemente des Energie-Impuls-Tensors zu verbessern, ist es nötig zwei linear unabhängige, symmetrische Objekte zu kombinieren. Hierfür benötigt man Objekte verschiedener Größe, wodurch der Operator sehr groß wird. Da man an Korrelationen vom Energie-Impuls-Tensor interessiert ist, sollte der Operator aber möglichst klein gewählt werden.

Es wurden Monte-Carlo-Simulationen auf einem anisotropen $16^3 \times 16$-Gitter mit $\gamma = 4$ und $\beta = 4.10$ durchgeführt. Die Messung bestand aus 97000 Sweeps. In Abb.4.5 ist die Korrelationsfunktion für die Scheer-Viskosität η dargestellt. Vergleicht man die Fitergebnisse für die beiden Ansätzte (4.42) (blaue Kurve) und (4.40)(rote Kurve), so erkennt man, daß die Berücksichtigung der Wechselwirkung in der Spektraldichte zu einer etwas flacheren Kurve bei großen Abständen führt. Ein Maß für dieses Abflachen ist der Parameter γ, wie in [37] diskutiert wurde.
Auf Grund der großen Fehler der Daten, besonders für größere Abstände läßt sich hier nur eine qualitative Analyse durchführen. Eine genauere Untersuchung würde eine höhere Statistik und mehr Datenpunkte in der Zeitrichtung erfordern.
Die Ergebnisse des χ^2-Fits sind in Tab.4.4 aufgelistet. Da die Fehler in der Größenordnung des Wertes der Parameter liegen, läßt sich hiermit nur eine Abschätzung für den Transportkoeffiziente η geben. Aus (4.44) ergibt sich damit für die Scheer-Viskosität

$$
\frac{\eta}{T^3} = 1.18 \pm 1.27. \qquad (4.74)
$$

Dieser Wert ist von der gleichen Größenordnung, wie das Ergebnis von Nakamura et al. [46] (0.48 ± 0.55) und innerhalb der Abschätzung $\frac{\eta}{T^3} < 9.5$ von Karsch und Wyld [37].
Eine genauere Untersuchung der Transportkoeffizienten würde eine sehr große Statistik erfordern. Bei den Ansätzen (4.42) und (4.40) handelt es sich um phenomenologische Ansätze. Um die Spektralfunktion genauer zu bestimmen, sind mehr Datenpukte in Zeitrichtung nötig. Dadurch würden auch Ansätze mit mehr als drei Parametern möglich.

	Ansatz (4.42)	Ansatz (4.40)
A	5.9 ± 6.3	6.02 ± 0.62
γ	0.023 ± 0.046	$-----$
m	3.1 ± 3.2	3.09 ± 0.18

Tabelle 4.4: Fitergebnisse für $G_\beta(\tau)$ aus den Monte-Carlo-Daten für C_η.

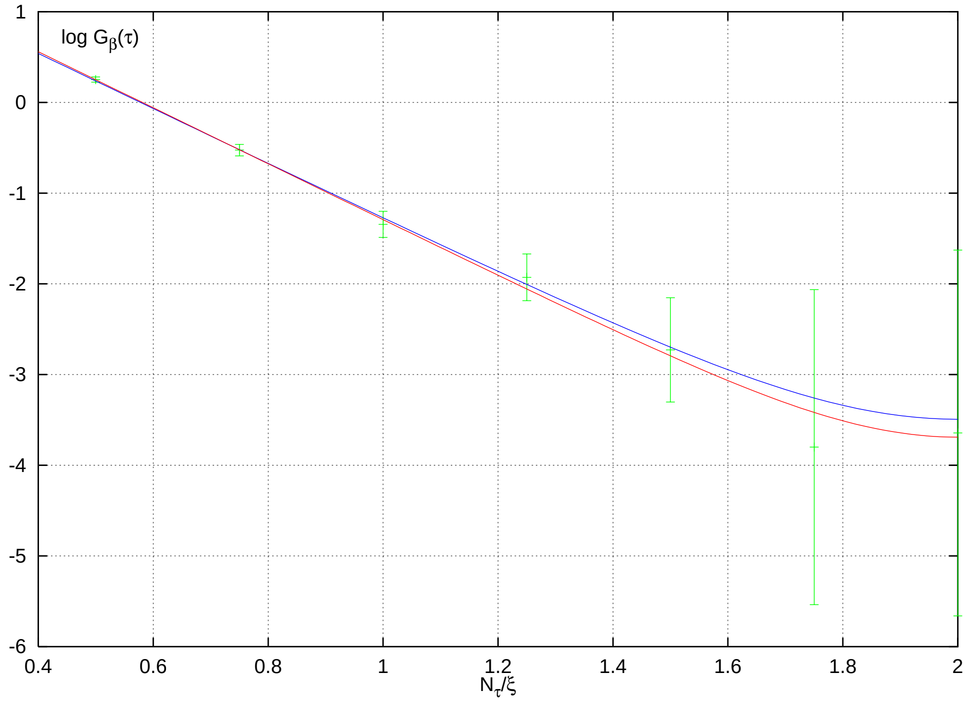


Abbildung 4.5: Thermische Green'sche Funktion $G_\beta(\tau)$ aus dem Ansatz (4.42)(blau), bzw. (4.40)(rot). Die Datenpukte sind aus der Monte-Carlo-Simulation für die Scheer-Viskosität C_η.

Kapitel 5

Numerische Methoden

5.1 Monte-Carlo-Simulation

In der SU(3)-Gittereichtheorie werden Erwartungswerte von Observablen durch sehr hochdimensionale Integrale berechnet. Diese lassen sich nicht, oder nur mit riesigem Rechenaufwand numerisch oder analytisch bestimmen.
Die Monte-Carlo-Integration ermöglicht es, diese Integrale auf dem Computer zu bestimmen, indem sie nicht exakt, sondern statistisch approximiert werden. Hierbei werden N zufällige Konfigurationen erzeugt und ein Schätzwert für die Observable auf dieser Untermenge berechnet

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \; \mathcal{O}[U] \; e^{-S_G[U]} \tag{5.1}$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z} \; \mathcal{O}[U] \; e^{-S_G[U]}. \tag{5.2}$$

Da der Integrand nicht für alle Konfigurationen einen wesentlichen Beitrag zum Integral liefert, ist es sinnvoller die Konfigurationen stärker zu berücksichtigen, bei denen der Integrand groß ist. Dieses Verfahren wird *importance-sampling* genannt. Die Konfigurationen werden mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung erzeugt,

$$p(U_i) = \frac{e^{-S(U_i)}}{Z}. \tag{5.3}$$

Eine Möglichkeit, Konfigurationen mit dieser gewünschten Verteilung zu erzeugen, ist die Metropolis-Methode. Hierbei wird die gewünschte Übergangswahrscheinlichkeit durch einen Annahme-Ablehnungs Schritt gegeben. Es werden nacheinander

Konfigurationen $U = \{U_\mu(x)\}$ in einem Markov-Prozeß erzeugt, die im Limes unendlicher Schrittanzahl gemäß der Verteilung (5.3) vorkommen. Das Erzeugen einer neuen Konfiguration wird als *Update* bezeichnet. Die Markov-Kette soll ergodisch sein, d.h. das alle möglichen Konfigurationen mit einer Wahrscheinlichkeit größer Null erreicht werden können.
Wichtig ist hierbei, daß die Übergangswahrscheinlichkeit von einer erzeugten Konfiguration zur nächsten

$$P(U_i \longrightarrow U_{i+1}) \tag{5.4}$$

die Bedingung der *detailed balance* erfüllen

$$\begin{aligned} p(U_i)P(U_i \longrightarrow U_{i+1}) &= p(U_{i+1})P(U_{i+1} \longrightarrow U_i) && (5.5)\\ e^{-S(U_i)}P(U_i \longrightarrow U_{i+1}) &= e^{-S(U_{i+1})}P(U_{i+1} \longrightarrow U_i). && (5.6)\end{aligned}$$

Da die Zustandssumme in dieser Gleichung nicht mehr auftritt, kann die Bedingung leicht erfüllt werden.
Die Aufgabe besteht nun darin, eine Übergangsvorschrift $U_i \longrightarrow U_{i+1}$ zu definieren, die (5.5) erfüllt. Hierfür gibt es verschiedene Algorithmen, die auf lokalen Updates basieren, wobei jeweils nur ein einzelner Link verändert wird. Dieser neue Link hängt nur von dem Teil der Wirkung ab, in dem er enthalten ist. Hierdurch wird sowohl das *detailed balance* erfüllt, sowie die lokale Ergodizität. Ein globaler Update ergibt sich nun dadurch, daß man für jeden Link des Gitters einen lokalen Update durchführt.

Der einfachste Algorithmus, der die oben beschriebenen Bedingungen erfüllt, ist der Metropolis-Algorithmus von Metropolis et al.(1953)[58]. Ein effektiverer Algorithmus ist der Heatbath-Algorithmus, der zuerst von Creutz [55] für die SU(2) gefunden wurde. Einfache Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich invertieren, so daß der Annahme-Ablehnungs Schritt entfällt. Für die SU(2) ist dies bis auf einen unwichtigen Faktor möglich.

Für die SU(3) gibt es einen Pseudo-Heatbath-Algorithmus (Cabibbo und Marinari [54]), bei dem der Update des Links in den SU(2)-Untergruppen durchgeführt wird. Es gibt drei mögliche Einbettungen der SU(2)-Untergruppe

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 1 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 1 & \alpha_{12} \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{21} & 1 & \alpha_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Man bestimmt zwei SU(2)-Matrizen α_i mit der Verteilung

$$dP(\alpha) \sim e^{\frac{\beta}{2}\mathrm{ReTr}(\alpha_i \cdot r_i)} d\alpha_i, \tag{5.8}$$

wobei r_1 die entsprechende Untermatrix von $U \cdot R$ und r_2 die Untermatrix von $A_1 \cdot U \cdot R$ ist. U ist hierbei der Link, der erneuert werden soll und R ist der erweiterte Staple dieses Links. Der neue Link ergibt sich nun durch

$$U' = A_2 \cdot A_1 \cdot U, \tag{5.9}$$

wobei sich die SU(3)-Matrizen A_1 und A_2 durch die entsprechenden Einbettungen von α_1 und α_2 ergeben.

Beim Heatbath-Algorithmus sind die Konfigurationen korreliert, da die neuen Links von der alten Konfigurationen abhängen. Der Overrelaxation-Algorithmus [53] dient dazu diese Korrelationen zu reduzieren. Dies wird dadurch erreicht, daß man den Link U durch einen neuen Link

$$U' = U_0 U^{-1} U_0 \tag{5.10}$$

ersetzt. Die SU(3)-Matrix U_0 soll die Bedingung erfüllen, die Wirkung zu minimieren. Weiterhin soll die Wirkung durch die Ersetzung (5.10) nicht geändert werden. Für die SU(2) [56] gibt es eine einfache Wahl für U_0,

$$U_0 = \sqrt{\det(R)} \cdot R^{-1}, \tag{5.11}$$

wobei R die Summe der verallgemeinerten Staple ist. Für die SU(3) kann man dieses Verfahren, wie beim Pseudo-Heatbath in den SU(2)-Untergruppen durchführen.
Da dieser Algorithmus die Wirkung unverändert läßt und somit die Ergodizität verletzt, ist er nur in Kombination mit anderen Algorithmen, z.B. dem Heatbath zu benutzen.

5.2 Linkintegration

Um die statistischen Fehler bei der Messung der Polyakov-Loop Korrelationen zu reduzieren wurde eine Linkintegration benutzt. Die Linkintegration basiert auf einer Idee von Parisi et al. [49]. Die Observable $\mathcal{O}$ wird durch eine andere Observable $\mathcal{O}'$ ersetzt. Der Erwartungswert beider Observablen soll identisch sein

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O}' \rangle, \tag{5.12}$$

die zweite jedoch einen kleineren statistischen Fehler haben

$$\langle \mathcal{O}'^2 \rangle - \langle \mathcal{O}' \rangle^2 < \langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2. \tag{5.13}$$

Um dies zu erreichen, werden möglichst viele Links der Eichkonfiguration durch neue, verbesserte Links ersetzt. Ein neuer Link $\bar{U}$ ergibt sich hierbei durch Integration innerhalb seiner Umgebung

$$\bar{U} = \frac{\int DU\ U\ \exp(-\beta H)}{\int DU\ \exp(-\beta H)} \tag{5.14}$$

Mit Hilfe von modifizierten Besselfunktionen, läßt sich dieses achtdimensionale Ein-Link Integral als eindimensionales Kontourintegral schreiben [50][51].

Der neue Link hängt nur von dem Staple R (erweiterter Staple bei verbesserten Wirkungen) ab, der ihn umgibt. Das Integral läßt sich somit schreiben als,

$$\bar{U} = \frac{\int DU\; U\;\; \exp(\mathrm{Tr}(RU^\dagger + UR^\dagger))}{\int DU\;\; \exp(\mathrm{Tr}(RU^\dagger + UR^\dagger))} \tag{5.15}$$

$$\equiv \frac{1}{Z}\frac{dZ(R)}{dR^\dagger}. \tag{5.16}$$

Brower [50] zeigte, daß sich das Ein-Link-Integral $Z(R)$ als Kontourintegral schreiben läßt

$$Z(R) = \int DU\; U\;\; \exp(\mathrm{Tr}(RU^\dagger + UR^\dagger)) \tag{5.17}$$

$$= \oint \frac{dx}{2\pi i} e^{xQ} \left(\frac{x}{P(x)}\right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left(2\left(\frac{P(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{5.18}$$

mit

$$Q = \det(R) + \det(R^\dagger) \tag{5.19}$$

$$P(x) = 1 + x\mathrm{Tr}(RR^\dagger) + \frac{1}{2}x^2\left[\left(\mathrm{Tr}(RR^\dagger)\right)^2 - \mathrm{Tr}\left((RR^\dagger)^2\right)\right] \tag{5.20}$$

$$+x^3\det(RR^\dagger) \tag{5.21}$$

und

$$\frac{d\,Z(R)}{d\,R^\dagger} = \oint \frac{dx}{2\pi i} x e^{xQ} \left(\frac{x}{P(x)}\right)^{\frac{1}{2}} I_1 \left(2\left(\frac{P(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial Q}{\partial R^\dagger} \tag{5.22}$$

$$+ \oint \frac{dx}{2\pi i}\frac{e^{xQ}}{P(x)} I_2 \left(2\left(\frac{P(x)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial P(x)}{\partial R^\dagger} \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial R^\dagger} = \left(\det R^\dagger\right)\; R^{*-1} \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial P(x)}{\partial R^\dagger} = xR + x^2\left(R\mathrm{Tr}\left(RR^\dagger\right) - RR^\dagger R\right) + x^3\det\left(RR^\dagger\right)R^{-1}. \tag{5.25}$$

Für die Besselfunktionen wurde die asymptotische Entwicklung bis zur 6. Ordnung benutzt[52]

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\mu-1)(\mu-9)\cdots(\mu-(2j-1)^2)}{j!(8z)^j}, \tag{5.26}$$

$$\text{mit}\;\; \mu = 4\nu^2, \;\; |z| \text{ groß}, \;\; |\arg(z)| < \pi/2. \tag{5.27}$$

Das verbleibende Integral wurde mit Hilfe der Gauß'schen Integrationsmethode berechnet. Bei der Konstruktion der Polyakov-Loops, muß beachtet werden, daß nur integrierte Links benutzt werden, die nicht in einem gemeinsamen Staple enthalten sind. Würde man dies nicht beachten, so wäre (5.12) nicht erfüllt. Es wird daher nur jeder zweite Link des Polyakov-Loops integriert, wobei immer paarweise die geraden, bzw. ungeraden Links verbessert werden (Abb.5.1). Für die Korrelationen im Abstand $R = 1$ konnte nur ein integrierter Polyakov-Loop benutzt werden, während für $R > 1$ beide Loops integriert werden konnten.

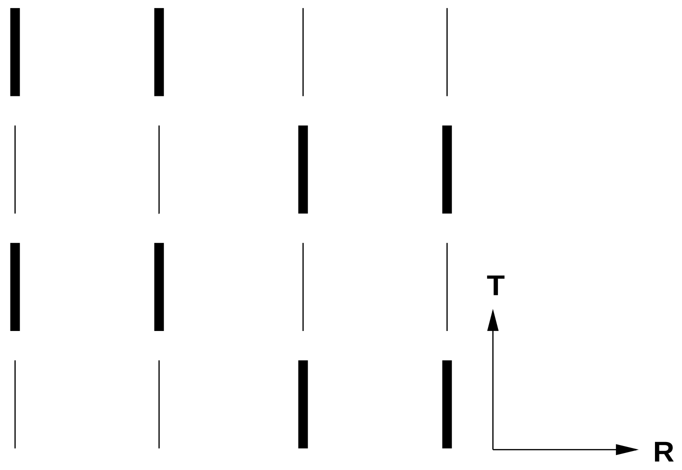


Abbildung 5.1: Verbesserte Polyakov-Loops. Die dicken Linien sind die integrierten Links und die dünnen Linien die gewöhnlichen.

Kapitel 6

Auswertung und Resultate

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen der SU(3)-Eichtheorie mit (2,1)-tree-level verbesserter Wirkung analysiert. Die Simulationen wurden auf QUADRICS-Parallelrechnern mit 128 (QH1) und 256 (QH2) Prozessoren durchgeführt.
Zu Beginn der Monte-Carlo Simulation wurde das System mit Hilfe von 2000 Heatbath-Schritten thermalisiert. In der Confinementphase wurden Zufallskonfigurationen und in der Deconfinementphase Einheitskonfigurationen als Start gewählt. Danach wurde nach jedem Sweep eine Messung der Observablen durchgeführt. Ein Sweep bestand aus vier Overrelaxationsschritten und einem Heatbath.
Die Berechnungen der kritischen Kopplung, sowie der String-Tension und Screening-Massen wurden auf einem Gitter der Größe $32^3 \times 4$ durchgeführt. Zur Verbesserung des Signals wurde für die Polyakov-Loops und deren Korrelationen vor jeder Messung eine Link-Integration gemacht.

6.1 Bestimmung der kritischen Kopplung β_c

In Kapitel 3.1 wurde erläutert, daß der Polyakov-Loop als Ordnungsparameter des Deconfinement-Phasenübergangs in der reinen SU(3)-Eichtheorie dient. Die beiden Phasen lassen sich durch den Wert von $|L|$ unterscheiden. In der Confinementphase verschwindet diese Größe und in der Deconfinementphase ist $|L|$ größer als Null. Bei der kritischen Kopplung β_c weist der Ordnungsparameter bei unendlichem Volumen eine Diskontinuität auf.
Aufgrund von Finite-Size Effekten ist diese Diskontinuität auf Gittern mit endlichem Volumen nicht zu sehen. In der Nähe der kritischen Kopplung kommt es zu

einem raschen Anstieg des Polyakov-Loops, was in Abb.6.1 zu sehen ist. Eine genaue Bestimmung von β_c ist hiermit nicht möglich, da die beiden Phasen nicht klar voneinander getrennt sind.

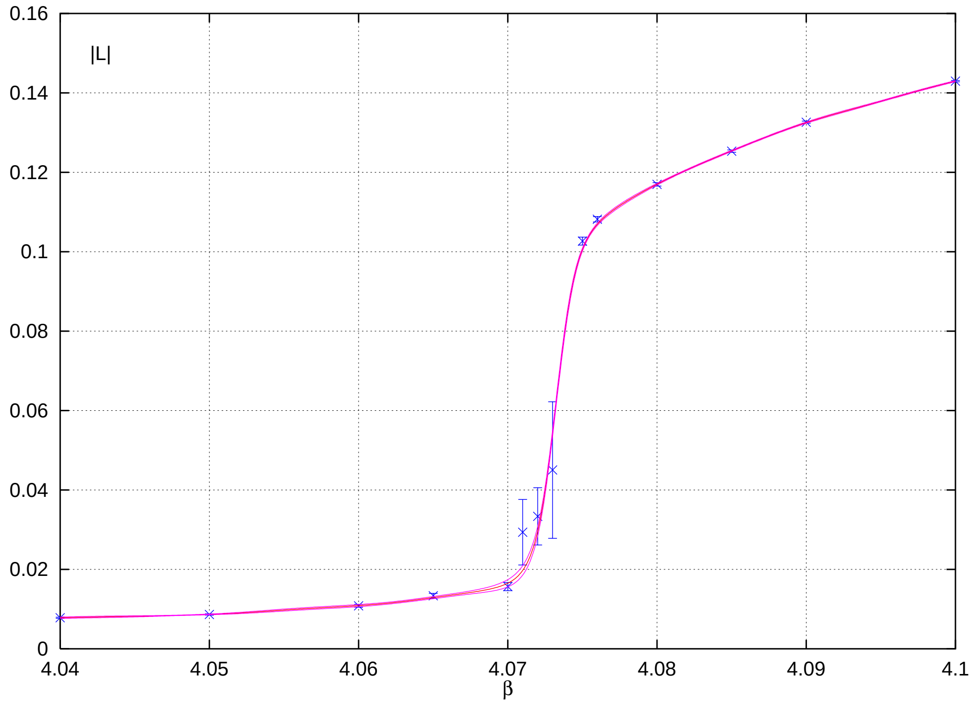


Abbildung 6.1: Betrag des Polyakov-Loops für die tree-level verbesserte Wirkung auf einem $32^3 \times 4$ Gitter

Eine weitere Observable, die es ermöglicht, eine pseudo-kritische Kopplung zu definieren, ist die Suszeptibilität des Polyakov-Loops

$$\chi_L = N_\sigma^3 \left(\langle |L|^2 \rangle - \langle |L| \rangle^2 \right) . \tag{6.1}$$

Diese Größe weist bei β_c ein Maximum auf (Abb.6.2).

Es soll nun die pseudo-kritische Kopplung β_c für die (2,1)-verbesserte Wirkung auf einem Gitter der Größe $32^3 \times 4$ bestimmt werden. Die Daten für den Polyakov-Loop und die Suszeptibilität sind in Anhang A aufgelistet.
Mit Hilfe einer Ferrenberg-Swendsen Analyse kann man eine Interpolationskurve durch die Meßdaten bestimmen, an der die genaue Lage des Maximums von χ_L bestimmt werden kann. In Abb.6.2 sind die Daten mit der Interpolationskurve dargestellt. Die Fehler von χ_L, bzw. der Interpolation stammen aus einer Jackknife-Analyse mit 10 Blöcken. Der Wert für die kritische Kopplung β_c wurde durch die Bestimmung des Maximums der 10 Unterdatensätze berechnet. Dieses liefert einen Jackknife-Mittelwert und einen Jackknife-Fehler von

$$\beta_c = 4.0731(1) \tag{6.2}$$

Dieser Wert stimmt, innerhalb der Fehlergrenzen, mit dem Ergebnis von Beinlich et al. [9] ($\beta_c = 4.0729(3)$) überein. Der Wert von Cella et al. ($\beta_c = 4.07252(13)$) [12] liegt, auf Grund des benuzten kleineren Volumens ($N_\sigma = 24$), etwas unterhalb der hier bestimmten kritischen Kopplung.

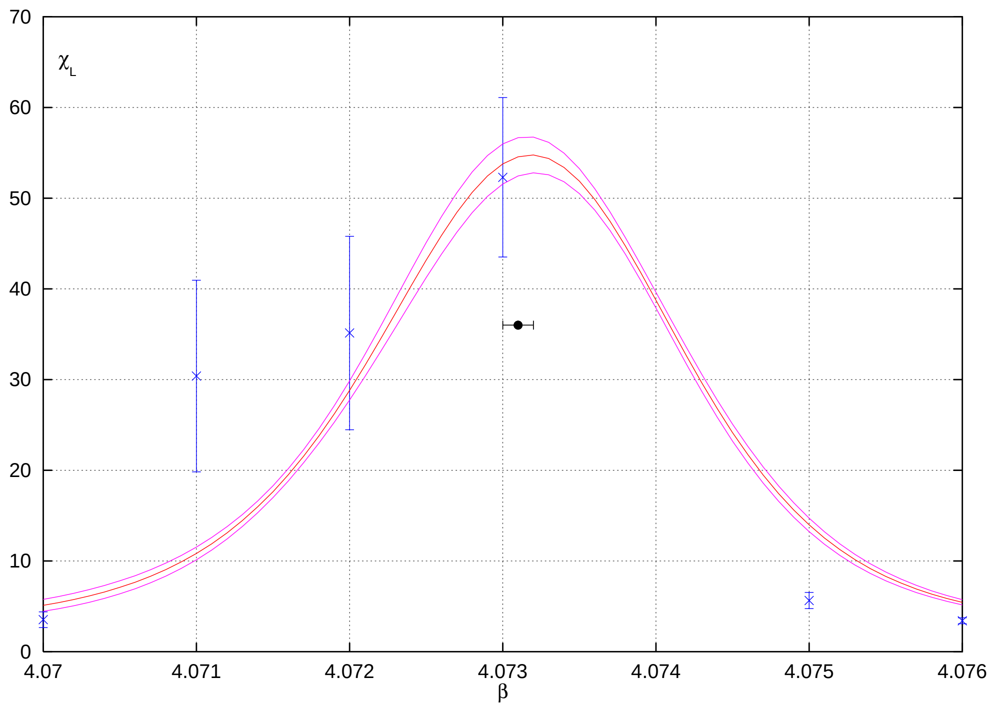


Abbildung 6.2: Suszeptibilität des Polyakov-Loops für die tree-level verbesserte Wirkung auf einem $32^3 \times 4$ Gitter. Der Punkt in der Mitte zeigt die pseudo-kritische Kopplung $\beta_c = 4.0731(1)$.

6.2 Entropiedichte

Die störungstheoretischen Ergebnisse in Kap.4.3 haben gezeigt, daß die $\mathcal{O}(a^2)$-verbesserte (2,1)-Wirkung zu einer großen Reduzierung der Cut-Off Effekte im Hochtemperaturlimes führt. In diesem Abschnitt wird die Entropiedichte s/T^3 im Bereich $\beta = 3.95..4.80$ untersucht. Nach (2.38) ergibt sich diese, in niedrigster Ordnung aus den Differenzen der räumlichen und zeitlichen Anteile der Wirkung

$$\left(\frac{s_0}{T^3}\right) = \frac{4}{3}\beta N_\tau^4 \left(\langle S_\sigma^{(2,1)}\rangle - \langle S_\tau^{(2,1)}\rangle\right). \tag{6.3}$$

Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Rechnungen sind in Abb.6.3 dargestellt. Für kleine Kopplungen $\beta \ll \beta_c$ sollte die Entropiedichte in dieser Definition verschwinden. In der Nähe von β_c sieht man einen starken Anstieg und für $\beta \gg \beta_c$ sollte s_0 gegen den Kontinuumswert für ein freies Gas konvergieren,

$$\frac{s_{Kont.}}{T^3} = \frac{4}{3}\frac{\epsilon_{SB}}{T} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{15}(N^2-1). \tag{6.4}$$

Für die Berechnung anderer thermodynamischer Observablen ist es nötig die $T=0$-

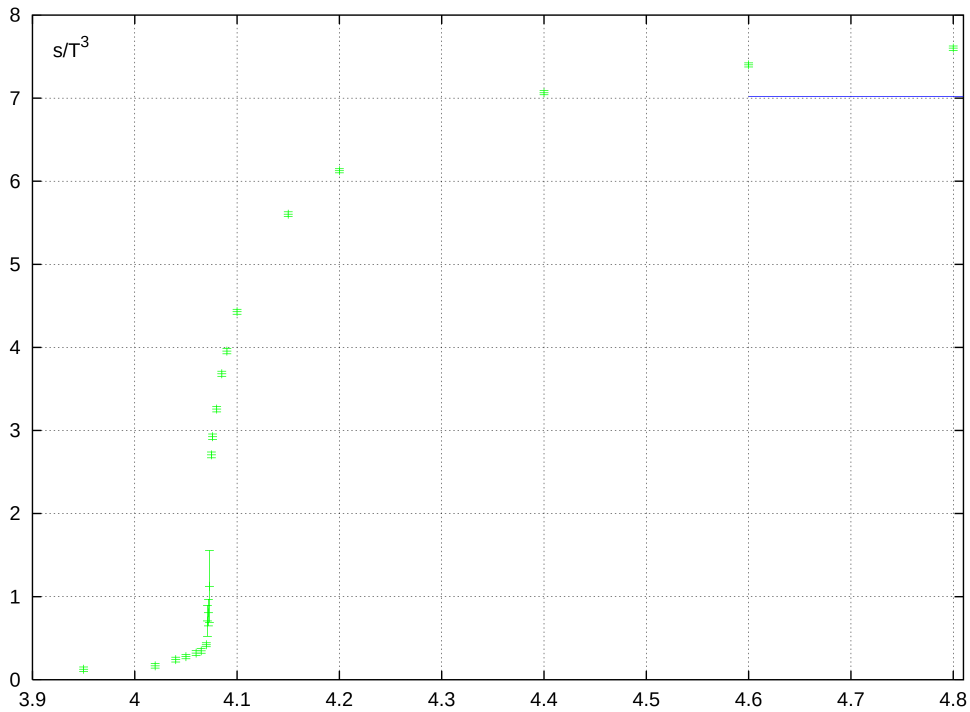


Abbildung 6.3: Entropiedichte s_0/T^4 für die (2,1)-verbesserte Wirkung auf einem $32^3 \times 4$-Gitter.

Beiträge zu berechnen und die β-Funktion, bzw. die Koeffizienten c_σ und c_τ zu kennen. Dies soll in dieser Arbeit nicht behandelt werden. Für eine genauere Untersuchung der Thermodynamik der $SU(3)$-Eichtheorie ist es nötig das Verhalten für größere Kopplungen zu untersuchen (Boyd et al. ([6]) und Beinlich et.al ([8])). Desweiteren ist es hierfür nötig den Druck p zu betrachten, der sich nicht-störungstheoretisch durch Integration der Differenz aus den Erwartungwerten der Wirkung bei endlicher Temperatur und Temperatur Null ergibt.

6.3 Polyakov-Loop Korrelationen und Potentiale

Die Potentiale bei endlicher Temperatur T wurden aus Polyakov-Loop Korrelationen auf Gittern der Größe $N_\sigma = 32$ und $N_\tau = 4$ berechnet. Hierzu wurden Monte-Carlo-Simulationen der reinen $SU(3)$-Eichtheorie mit der $(2,1)$-verbesserten Wirkung durchgeführt. Zum Thermalisieren des Systems wurden jeweils 2000 Heatbath-Schritte durchgeführt. In der Confinementphase wurden Zufallskonfigurationen, und in der Deconfinementphase Einheitskonfigurationen als Start gewählt. Die Messung bestand, je nach β-Wert, aus 20000 bis 30000 Sweeps, wobei ein Sweep aus vier Overrelaxationsschritten und einem Heatbath besteht. Nach jedem Sweep wurde, zur Verbesserung des Signals, eine Link-Integration für geeignete Links (s.h. 5.1) durchgeführt, bevor die Korrelationen und alle anderen Observablen gemessen wurden.
In der Confinement-Phase für $\beta < \beta_c$ wurde das Potential aus den Polyakov-Loop Korrelationenen im Abstand $R = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ berechnet

$$\langle L(0) L^\dagger(dx, dy, dz)\rangle = \exp\{-V_{q\bar{q}}(R,T)/T\}, \tag{6.5}$$

während die Korrelationen in der Deconfinementphase für $\beta > \beta_c$ zum Eliminieren der divergenten Selbstenergiebeiträge mit $|\langle L\rangle|^2$ normiert wurden:

$$\frac{\langle L(0) L^\dagger(dx, dy, dz)\rangle}{|\langle L\rangle|^2} = \exp\{-V_{q\bar{q}}(R,T)/T\}. \tag{6.6}$$

Die On-Axis Korrelationen wurden im Bereich $R = 0..16$ und die Off-Axis im Bereich $dx, dy, dz = 0..8$ bestimmt.
Die Potentiale und deren statistische Fehler wurden, mit Hilfe einer Jackknife-Fehleranalyse (Programmpaket USEDAT), aus den Korrelationen bestimmt. Zur Bestimmung der String-Tension σ und der Screening-Masse m_D wurden χ^2-Fits der Ansätze durchgeführt (Programmpaket USEFIT).

6.3.1 Die String-Tension

In der Confinementphase wurden 7 β-Werte zwischen 4.00 und 4.07 untersucht. Die Potentiale wurden aus den Polyakov-Loop Korrelationen mit Hilfe von

$$\frac{V_{q\bar{q}}(R,T)}{T} = -\ln\langle L(0) L^\dagger(R)\rangle \tag{6.7}$$

berechnet. Die hier benutzte Temperaturskala, sowie die $T = 0$-String-Tension stammen von B.Beinlich et al. [10], wobei die String-Tension auf einem $16^3 \times 16$-Gitter

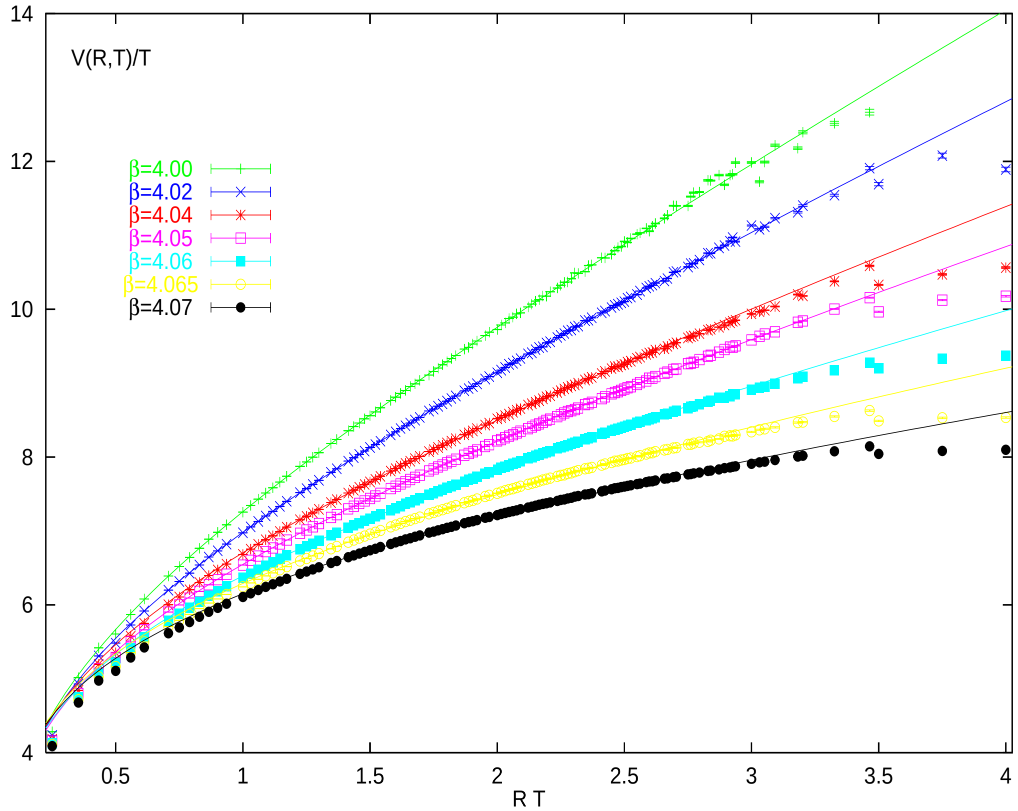


Abbildung 6.4: Potentiale V(R,T) aus Polyakovloop-Korrelationen auf Gittern der Größe $32^3 \times 4$ für $\beta < \beta_c$. Die durchgezogenen Linien sind χ^2-Fits des Ansatzes (6.8).

aus geschmierten Wilson-Loops berechnet wurde. Aus diesen Daten wurde die Temperaturskala bestimmt. Zur Bestimmung der String-Tension $\sigma(T)$ wurden χ^2-Fits des Ansatzes

$$\frac{V(R,T)}{T} = \frac{V_0}{T} + \frac{\sigma(T)}{T^2} RT + C\ln(2RT) \qquad (6.8)$$

mit drei freien Parametern V_0, $\sigma(T)$ und C, durchgeführt. Der Parameter C wurde später auf den theoretisch erwarteten Wert für kleine Temperaturen von $C = 1$ festgehalten. Die Potentiale mit den dazugehörigen χ^2-Fits sind in Abb.6.4 zu sehen.

Für kleine Temperaturen T erwartet man für die String-Tension

$$\frac{\sigma(T)}{T^2} = \frac{\sigma(0)}{T^2} - \frac{\pi}{3} + \mathcal{O}(T). \qquad (6.9)$$

Um ein Ergebnis für die String-Tension zu erhalten, das vom Fitbereich unabhängig ist, wurde zunächst die Abhängigkeit von $\sigma(T)$ von der oberen Fitgrenze R_{max} untersucht (Abb.6.5). Man erkennt, daß die Ergebnisse im wesentlichen unabhängig von R_{max} sind. Aufgrund der periodischen Randbedingungen des Gitters wird das

Potential in der Nähe von $RT = 4$ flacher. Dieser Effekt wirkt am deutlichsten auf die On-Axis Werte, wie in Abb.6.4 und 6.5 zu sehen ist. Aus diesem Grund wird für die folgenden Untersuchungen, die obere Fitgrenze auf $R_{max}T = 3.25$ festgelegt.

In Abb.6.6 sind die Ergebnisse der String-Tension in Abhängigkeit von der unteren Fitgrenze R_{min} zu sehen. Man erkennt, daß $\sigma(T)$ für $R_{min}T > 0.62$ für die meisten β-Werte unabhängig von R_{min} ist. Die Abweichungen von diesem Verhalten für $R_{min}T < 0.5$ resultieren aus dem fehlenden Coulomb-Term im Fit-Ansatz (6.8). Um das kurzreichweitige Verhalten des Potentials zu untersuchen, ist es notwendig, einen solchen Term hinzuzufügen. Da die String-Tension durch das langreichweitige Verhalten bestimmt wird, ist dies hier nicht nötig. Zur Bestimmung der String-Tension

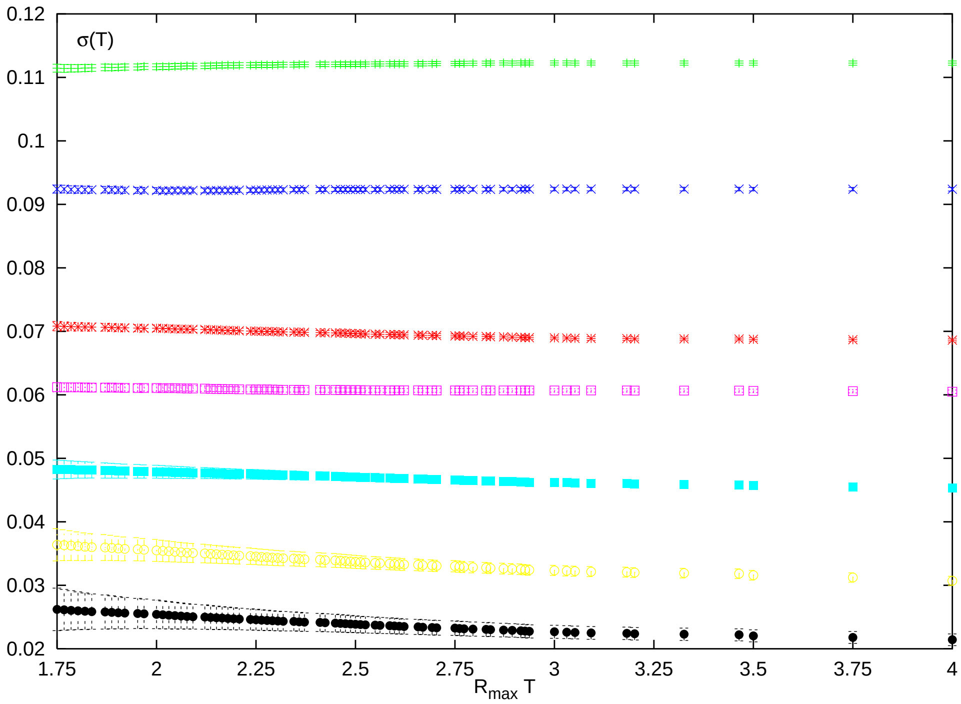


Abbildung 6.5: Abhängigkeit der String-Tension $\sigma(T)$ von der oberen Fitgrenze R_{max}.

$\sigma(T)$ wurde über die Ergebnisse des χ^2-Fits des Ansatzes (6.8) für $R_{min}T = 1.0..1.54$ gemittelt. Bei dieser Mittelung über alle $\sigma(R_{min})$ sind die einzelnen Werte stark korreliert, da jeweils nur ein Datenpunkt für den Fit weggelassen wurde. Daher ist es sinnvoll, bei der Berechnung des Fehlers des Mittelwertes einen Faktor $\sqrt{N}$ hinzuzufügen. Damit ergibt sich für den Mittelwert und den Fehler der String-Tension:

$$\sigma \quad = \quad \frac{\sum_{R_{min}} \frac{\sigma(R_{min})}{(\Delta\sigma(R_{min}))^2}}{\sum_{R_{min}} \frac{1}{(\Delta\sigma(R_{min}))^2}}$$

$$\Delta\sigma \;=\; \left(\frac{1}{N}\sum_{R_{min}}\frac{1}{(\Delta\sigma(R_{min}))^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.10}$$

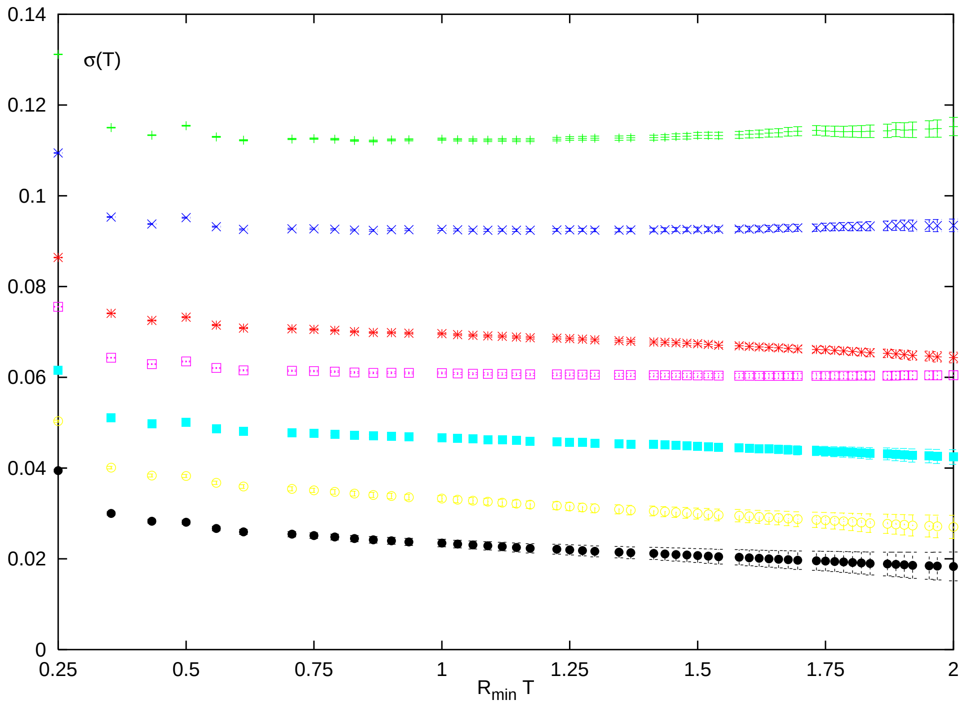


Abbildung 6.6: Abhängigkeit der String-Tension $\sigma(T)$ von der unteren Fitgrenze R_{min}.

In Abb.6.7 ist die Temperaturabhängigkeit der String-Tension $\sigma(T)$ aufgetragen. Zum Vergleich ist der Fit der Vorhersage des Nambu-Goto Modells dargestellt:

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma(0)} = a\sqrt{1 - b\frac{T^2}{T_c^2}}. \tag{6.11}$$

Der Fit ergab für die Paramter die Werte $a = 1.21(5)$ und $b = 0.990(5)$. Man erkennt hieran, daß die String-Tension bei T_c endlich bleibt, was man aufgrund der 1.Ordnung des Phasenübergangs in der reinen SU(3) erwarten kann, da die Korrelationslänge $\xi = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$ endlich bleibt. Aus (6.11) folgt für die String-Tension bei am Phasenübergang

$$\frac{\sigma(T_c)}{\sigma(0)} = 0.121(35). \tag{6.12}$$

Um zu sehen, daß der Fitansatz (6.8) für diese Daten richtig ist, wurden noch χ^2-Fits mit freiem Fitparameter C durchgeführt. Wie in Abb.6.8 zu sehen ist, stimmt

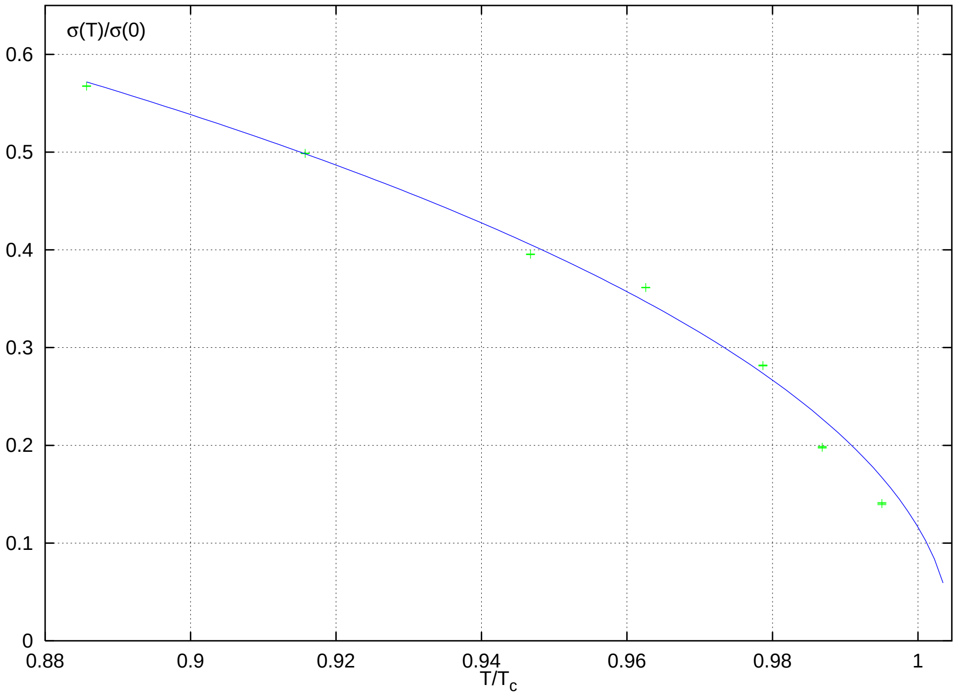


Abbildung 6.7: String-Tension $\sigma(T)$. Die durchgezogene Linie ist ein Fit der Vorhersage des Nambu-Goto Modells: $\sigma(T)/\sigma(0) = 1.21(5)\sqrt{1 - 0.990(5)T^2/T_c^2}$.

dieser Parameter innerhalb der Fehlergrenzen mit dem theoretisch erwarteten Wert von $C = 1$ überein. Dieser Parameter zeigt auch für Temperaturen in der Nähe von T_c keine Temperaturabhängigkeit.

β	T/T_c	$\sigma(T)/T^2$	V_0/T
4.000	0.886	1.800(6)	7.648(9)
4.020	0.916	1.480(5)	4.080(8)
4.040	0.947	1.098(5)	4.915(9)
4.050	0.963	0.971(5)	4.884(8)
4.060	0.979	0.732(9)	4.968(15)
4.065	0.987	0.506(14)	5.091(24)
4.070	0.995	0.353(18)	5.105(32)

Tabelle 6.1: Fitparameter aus dem χ^2-Fit des Potentials.

Als letztes wurde noch überprüft, ob es nötig ist, einen zusätzlichen Coulombterm in dem Fitansatz (6.8) zu berücksichtigen. In Abb.6.9 ist der Parameter α des Coulombterms in Abbhängigkeit der unteren Fitgrenze zu sehen. Man erkennt, daß dieser für $RT > 0.6$ innerhalb der Fehlergrenzen mit $\alpha = 0$ verträglich ist. Für die

Untersuchung der String-Tension ist es somit nicht erforderlich, einen Coulombterm einzuführen. Vergleicht man die χ^2-Fits mit (6.8) und einem Ansatz mit Coulomb-Term aber ohne logarithmischem Term, so erkennt man, daß der hier gewählte Ansatz die Daten besser beschreibt. Zum einen sind die χ^2-Werte kleiner und zum anderen zeigt sich beim Coulomb-Ansatz eine starke Abhängigkeit der Parameter vom Fitbereich.

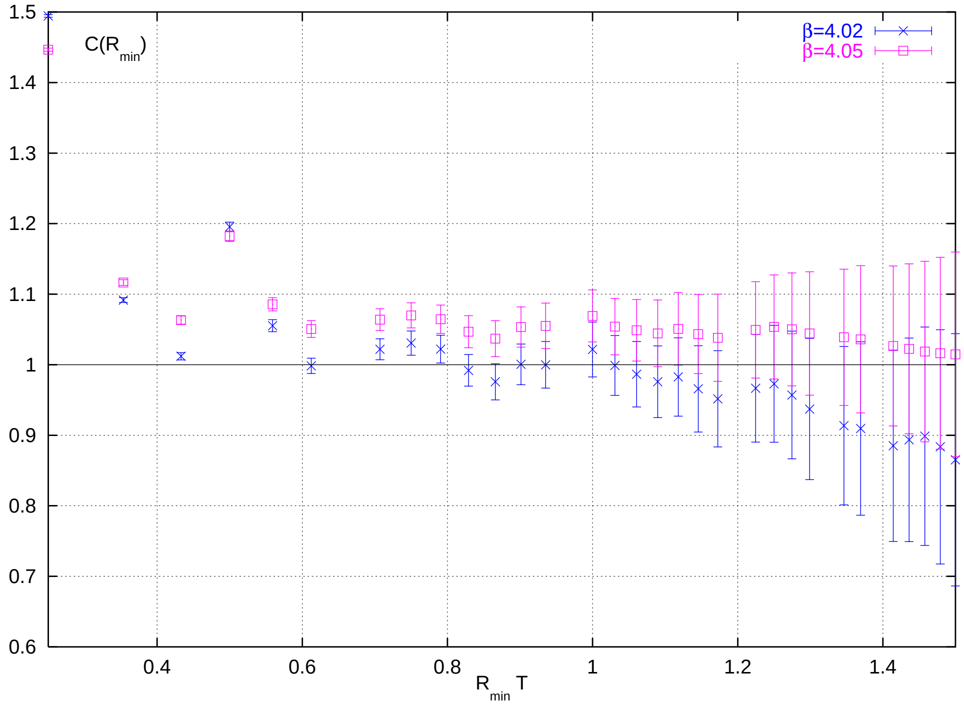


Abbildung 6.8: Fitkonstante $C(R_{min})$

Zur Untersuchung der String-Tension bei endlicher Temperatur durch Polyakov-Loop Korrelationen läßt sich abschließend sagen, daß die Daten sehr gut durch den Ansatz (6.8), der aus dem String-Modell resultiert, beschrieben werden. Zur Untersuchung der String-Tension in unmittelbarer Nähe des Phasenübergangs ist es nötig, zu noch größeren Gittern zu gehen. Der größte β-Wert, bei dem eine verläßliche Bestimmung der String-Tension möglich war, war in dieser Arbeit $\beta = 4.07$. Oberhalb dieses Wertes führten Anteile aus der anderen Phase zu einem flacheren Potential. Weiterhin ist es nötig, den Ansatz (6.8) in der Nähe von β_c zu untersuchen. Für verschwindenes $\sigma(T)$ würde der letzte Term zu einem logarithmischen Confinement führen. In der Nähe des Phasenübergangs wird daher evtl. ein anderen Ansatz benötigt. Der Vergleich (Abb.6.10) der String-Tension $\sigma(T)$ bei endlicher Temperatur mit dem führenden Term aus dem String-Modell

$$\frac{\sigma(T)}{T^2} \approx \frac{\sigma(0)}{T^2} - \frac{\pi}{3} \tag{6.13}$$

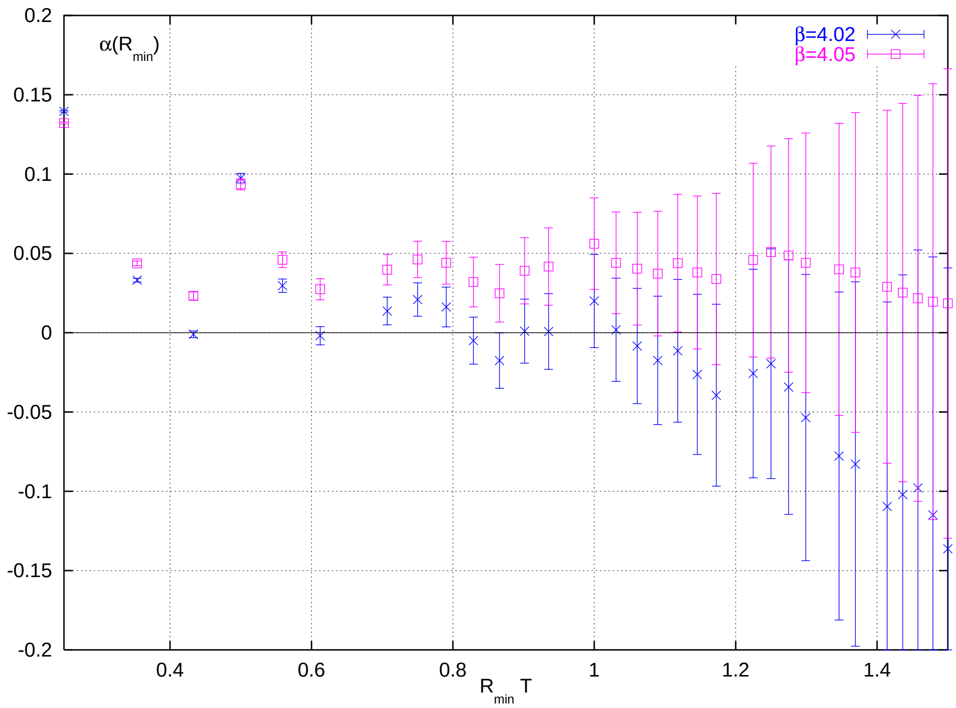


Abbildung 6.9: Fitkonstante $\alpha(R_{min})$

zeigt, daß die höheren Ordnungen hier nicht vernachlässigbar sind, sondern einen großen Beitrag liefern. In der Nähe von T_c zeigen die führenden Ordnungen kein Verschwinden der String-Tension, wie es an den Daten erkennbar ist. Für kleinere Temperaturen liegen die Werte immer noch ca. 20% über den berechneten Daten.

Es soll nun noch der Ansatz von Gao [26] diskutiert werden, der die nächste Ordnung im linearen- und im Coulomb-Term berücksichtigt,

$$\begin{aligned}\frac{V(R,T)}{T} &= \left[\frac{\sigma_0(T)}{T^2} - \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1}{2RT}\right)\right] RT \\ &- \left[\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\arctan(2RT)\right]\frac{1}{RT} \\ &- \frac{1}{2}\ln\left(1 + (2RT)^2\right) \\ &+ \frac{V_0}{T}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Hieraus ergibt sich eine String-Tension $\sigma_0(T)$, die der $T = 0$-String-Tension entsprechen soll. Die χ^2-Fits mit zwei freien Parameter $\sigma_0(T)$ und V_0 wurden mit den

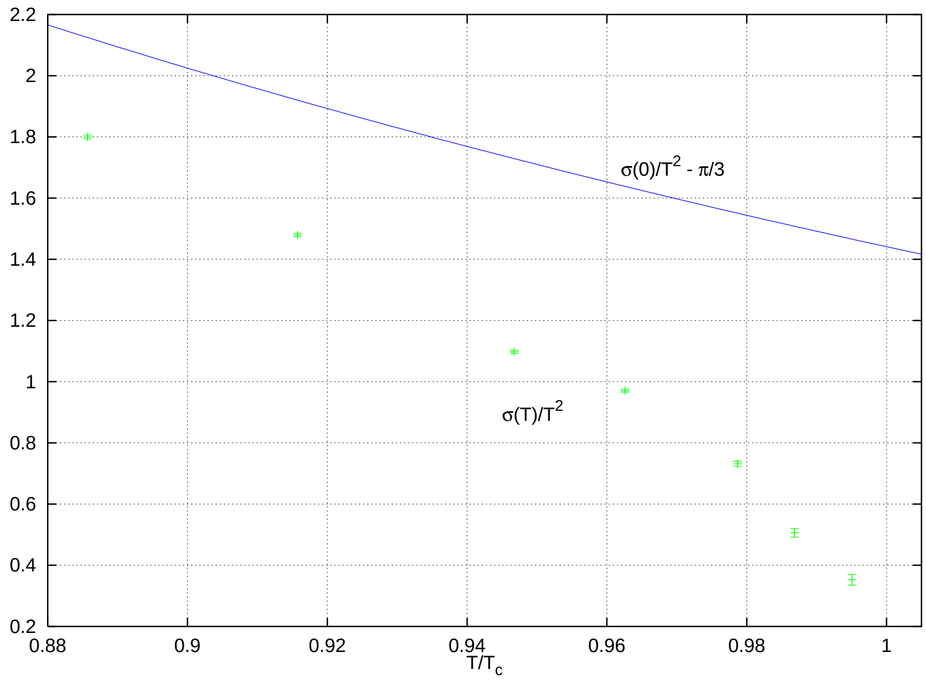


Abbildung 6.10: Vergleich der String-Tension bei endlicher Temperatur $\frac{\sigma(T)}{T^2}$ mit den führenden Termen $\frac{\sigma(T)}{T^2} = \frac{\sigma(0)}{T^2} - \frac{\pi}{3}$ aus dem Stringmodell.

gleichen Werten für R_{max} und R_{min} durchgeführt wie für $\sigma(T)$. Die Ergebnisse sind in Tab.6.2 und Abb.6.11 zu sehen. Man erkennt, daß die so gewonnenen Daten für $R < 0.97T_c$ in der Nähe der $\sigma(0)$-Kurve liegen. Für $T \to T_c$ weichen die Werte stärker von dieser Kurve ab und scheinen für kleinere T über dieser Kurve zu liegen. Ein Vergleich der χ^2-Werte der beiden untersuchten Fit-Ansätze zeigt, daß der Ansatz (6.8) für kleinere Abstände ein deutlich besseres Ergebnis liefert. Für größere Abstände sind beide Fit-Methoden etwa gleich gut. Um höhere Ordnungen in den Ansätzen zu betrachten ist es nötig, das String-Modell für Polyakov-Loop Korrelationen zu untersuchen. Hierbei wäre auch zu untersuchen, welche Terme im Ansatz (6.14) nötig für eine genaue Bestimmung der String-Tension sind.

β	T/T_c	$\sigma_0(T)/T^2$	V_0/T
4.00	0.886	3.363(6)	5.247(9)
4.02	0.916	3.025(5)	5.313(8)
4.04	0.947	2.626(5)	5.447(9)
4.05	0.963	2.491(5)	5.430(8)
4.06	0.979	2.266(8)	5.536(15)
4.065	0.987	2.011(14)	5.662(25)
4.07	0.995	1.854(18)	5.683(32)

Tabelle 6.2: Fitparameter aus dem χ^2-Fit des Potentials (6.14).

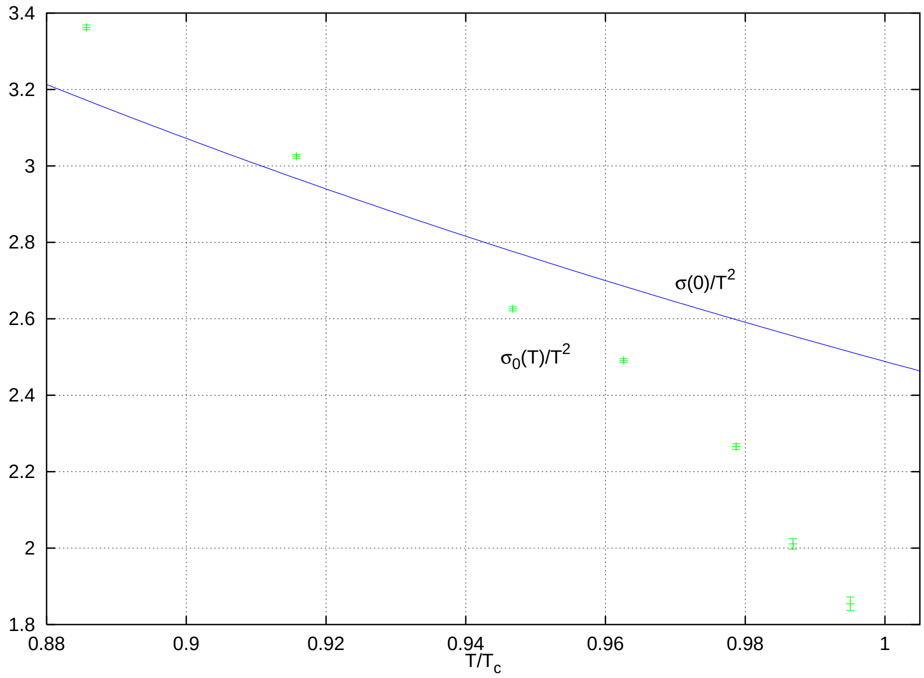


Abbildung 6.11: Vergleich der String-Tension $\sigma_0(T)$ aus dem Ansatz (6.14) mit der $T = 0$-String-Tension $\sigma(0)$ (durchgezogene Linie).

6.3.2 Die Screening-Masse

In der Deconfinementphase wurden 11 β-Werte zwischen 4.075 und 4.80 untersucht. Die Potentiale ergeben sich durch Normierung mit dem Quadrat des Polyakov-Loop Erwartungswertes zu

$$V_{q\bar{q}}(R,T) = -T \ln \frac{\langle L(0)L^\dagger(R)\rangle}{|\langle L\rangle|^2} \tag{6.15}$$

Für die Berechnung der Potentiale wurde eine Jackknife-Analyse der, mit dem Quadrat des Polyakov-Loop Erwartungswertes normierten Korrelationen durchgeführt. Es wurden hierbei 10 Jackknife Blöcke benutzt. Die hier benutzte Temperaturskala stammt von B.Beinlich et al. [10].

Zur Bestimmung der Screening-Masse m_D wurden χ^2-Fits des periodischen Ansatzes

$$V(R,T) = \alpha(T)\left(\frac{e^{-m_D R}}{R^d} + \frac{e^{-m_D(32-R)}}{(32-R)^d}\right) + V_0 \tag{6.16}$$

mit vier freien Parametern $\alpha(T)$, $m_D(T)$, d und V_0 durchgeführt. Die Potentiale mit den dazugehörigen Fitergebnissen sind in Abb.6.12 zu sehen.

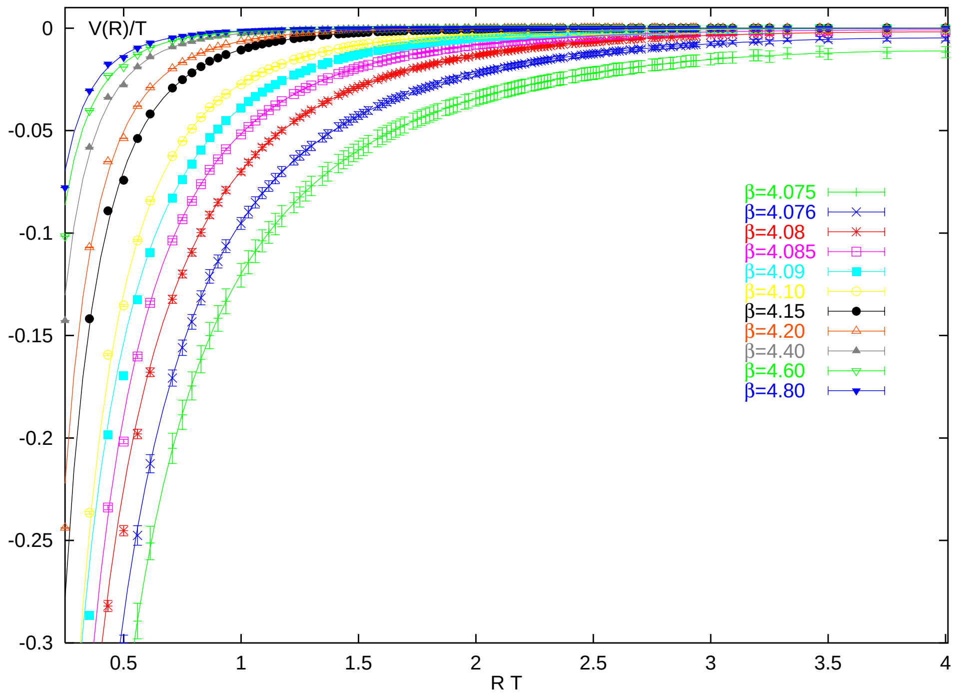


Abbildung 6.12: Potentiale $V(R,T)$ aus Polyakov-Loop Korrelationen auf Gittern der Größe $32^3 \times 4$ für $\beta > \beta_c$. Die durchgezogenen Linien sind χ^2-Fits des Ansatzes (6.16).

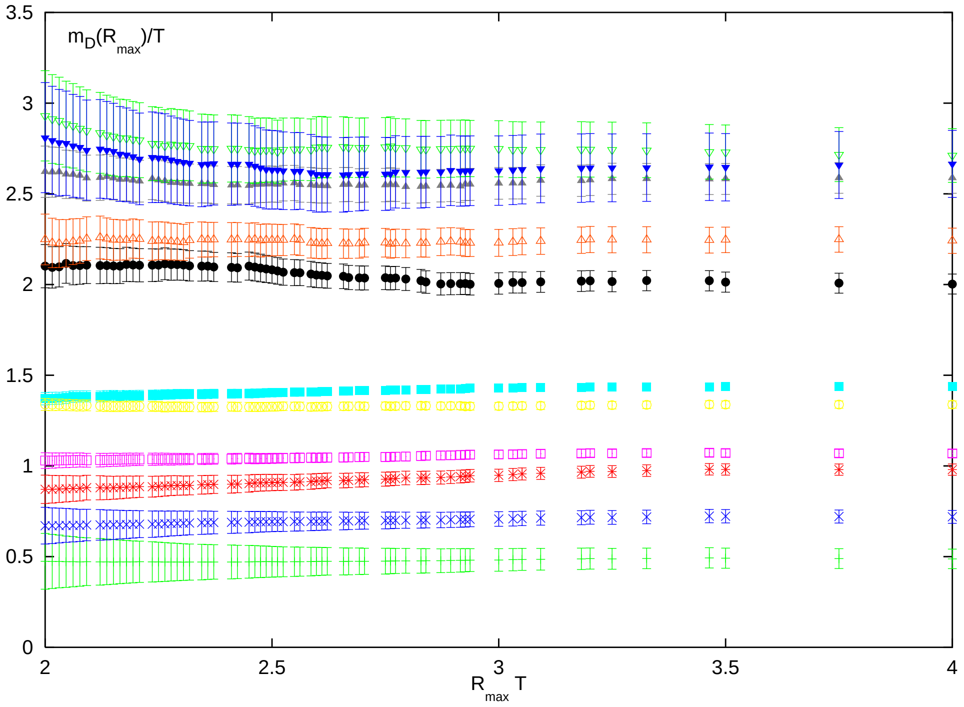


Abbildung 6.13: Abhängigkeit des Fitparameters $m_D(R_{max})$ von der oberen Grenze R_{max}

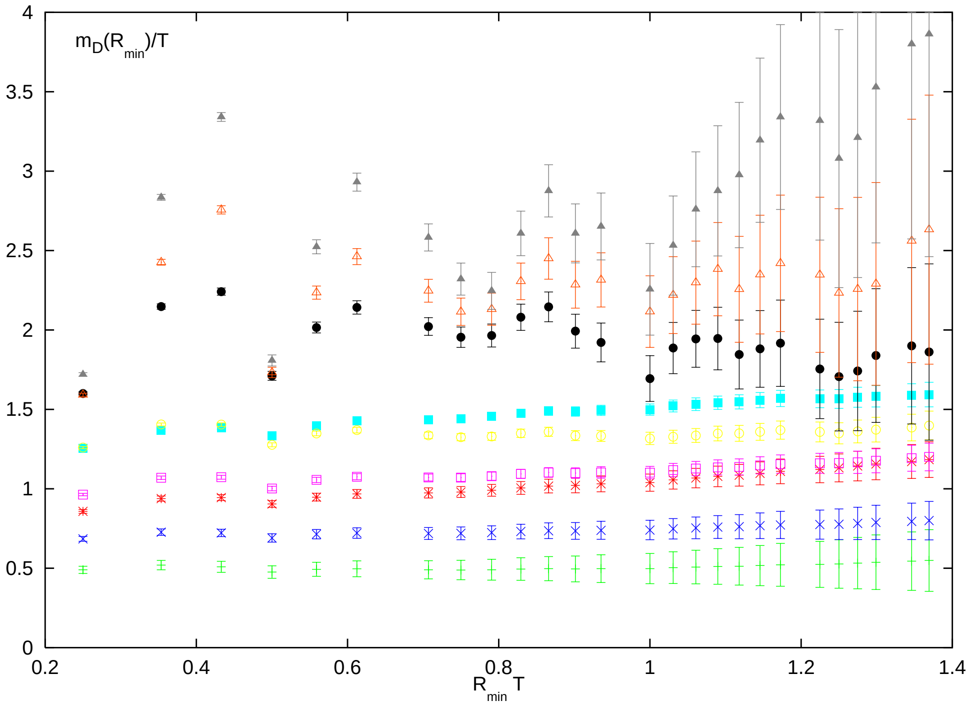


Abbildung 6.14: Abhängigkeit des Fitparameters $m_D(R_{min})$ von der unteren Grenze R_{min}

Zunächst wurde die Abhängigkeit der Fitparameter von der oberen Fitgrenze R_{max} untersucht. Man erkennt in Abb.6.13, daß es keine wesentliche Abhängigkeit der Screening-Masse von R_{max} gibt. Für die großen β-Werte wird das Potential wegen der großen Screening-Masse sehr flach, was zu den großen Fehlern bei diesen Werten führt. Für die folgenden Untersuchungen wurde die obere Fitgrenze mit $R_{max}T = 3.48$ festgelegt.

Die Konstante V_0 im Fitansatz (6.16) ist notwendig, da für große β-Werte der exponentielle Anstieg des Potentials sehr stark ist. Das Potential steigt, innerhalb der Fehlergrenzen, auf Null an. Aufgrund der statistischen Fehler liegen die Werte aber etwas über oder unter der Nullachse. Für $\beta > 4.15$ wurden die χ^2-Fits daher mit diesem zusätzlichen Parameter durchgeführt. Wie man in Tab.6.3 sehen kann, ist dieser additive Term mit Null verträglich und sollte das Ergebnis nicht beeinflußen.

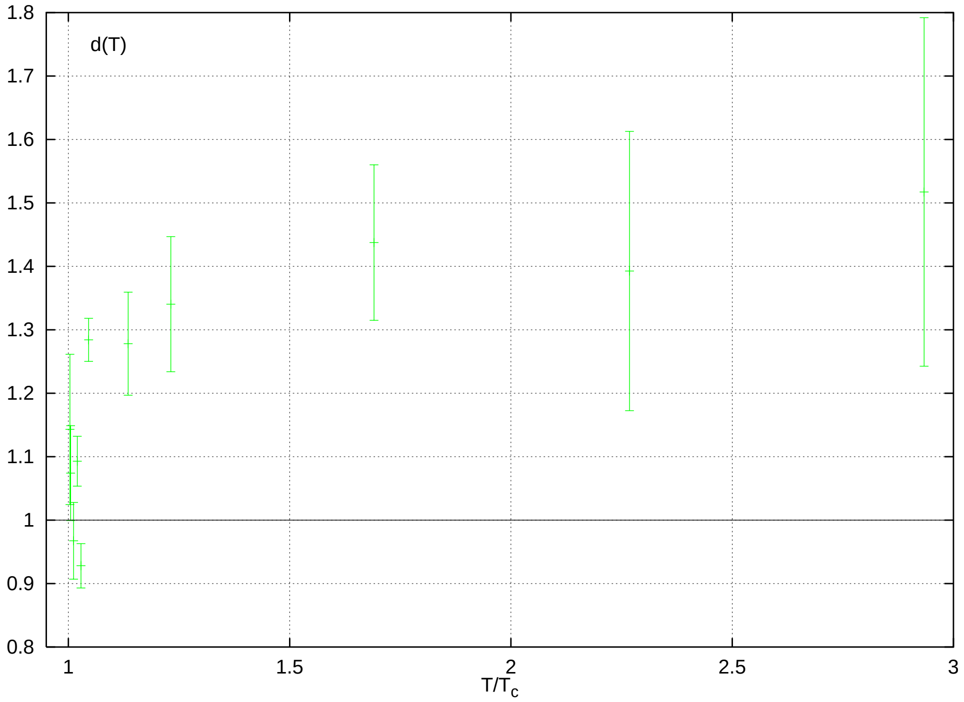


Abbildung 6.15: Fitkonstante $d(T)$.

Als nächstes wurde die Abhängigkeit der Parameter von der unteren Fit-Grenze R_{min} untersucht. Die Ergebnisse sollten hiervon unabhängig sein. In Abb.6.14 erkennt man, daß diese Unabhängigkeit für die kleinen β-Werte im ganzen Bereich gut gegeben ist. Da man für größeres R_{min} mehr Datenpunkte wegläßt, werden die Fehler hier größer. Für $\beta > 4.10$ werden die Fehler der Screening-Masse relativ groß, da man den Fit mit freiem Parameter d durchführt und die Potentiale sehr flach werden. Man erkennt hier auch eine starke Abhängigkeit vom Fit-Bereich.

Zur Bestimmung der Screening-Masse und der anderen Parameter wurde über den

Fit-Bereich $RT = 0.7..0.94$ gemittelt. Die Werte, über die gemittelt wird, sind stark korreliert, weshalb die Mittelwerte und Fehler wieder mit der Formel (6.10) berechnet wurden. In Tab.6.3 sind die Ergebnisse für die einzelnen Parameter aufgelistet.

Die endgültigen Ergebnisse für die Screening-Masse $m_D(T)/T$ sind in Abb.6.16 zu sehen. Die durchgezogene Kurve zeigt den führenden Term der Störungstheorie für kleine Temperaturen

$$m_D(T) = m_e \approx g^2(T)T, \tag{6.17}$$

wobei die die temperaturabhängige Kopplung aus (2.19) berechnet wurde. Für $T > 1.5T_c$ liegen die Daten etwa $25-50\%$ oberhalb diese Wertes. Für große Temperaturen erwartet man $m_D(T) = 2m_e$, was sich in dem hier untersuchten Temperaturbereich nicht zeigt. Für $T \to T_c$ fällt die Screening-Masse stark ab und scheint in der Nähe von T_c zu verschwinden.

β	T/T_c	$m_D(T)/T$	$\alpha(T)$	$d(T)$	V_0(T)
4.075	1.003	0.493(69)	0.238(24)	1.14(12)	0.0*
4.076	1.005	0.727(45)	0.217(14)	1.07(7)	0.0*
4.080	1.012	0.997(39)	0.180(9)	0.97(6)	0.0*
4.085	1.020	1.085(28)	0.173(5)	1.09(4)	0.0*
4.090	1.029	1.461(25)	0.151(4)	0.93(3)	0.0*
4.100	1.046	1.337(26)	0.153(3)	1.28(3)	0.0*
4.150	1.135	2.010(77)	0.115(4)	1.28(8)	-0.000007(2)
4.200	1.232	2.234(104)	0.097(4)	1.34(11)	-0.000022(2)
4.400	1.691	2.502(125)	0.061(3)	1.44(12)	-0.000009(1)
4.600	2.268	2.607(232)	0.041(3)	1.39(22)	0.000004(1)
4.800	2.934	2.499(291)	0.032(3)	1.52(27)	0.000021(1)

Tabelle 6.3: Parameter aus den χ^2-Fits des Potentials (6.16). Die mit * markierten Parameter wurden bei den Fits festgehalten.

Zur genauen Untersuchung der Potentiale ist es nötig den Exponenten d zu kennen. In der Nähe von T_c wird die Wechselwirkung viel stärker. Der Ein-Gluon-Austausch soll hier dominieren, und man erwartet nur einen exponentiellen Term mit $m_D = m_e$ und $d = 1$ führt. Für $T \gg T_c$ erwartet man das störungstheoretische Potential. Im schwachen-Kopplungs Bereich gibt es zwei Potentiale (singlett und oktett), die zu $m_D = 2m_e$ und $d = 2$ führen.

In Abb.6.15 erkennt man, daß die Annahme für $T \approx T_c$ richtig ist. In unmittelbarer Nähe der kritischen Temperatur ist der Exponent mit $d = 1$ verträglich. Für höhere Temperaturen steigt dieser Wert an, erreicht aber nicht den erwarteten Wert von $d = 2$. Für $T > 1.4T_c$ ergibt sich ein Wert von $d \approx 1.4$. In diesem Bereich werden die Fehler wieder sehr groß, was eine genauere Bestimmung des Exponenten erschwert.

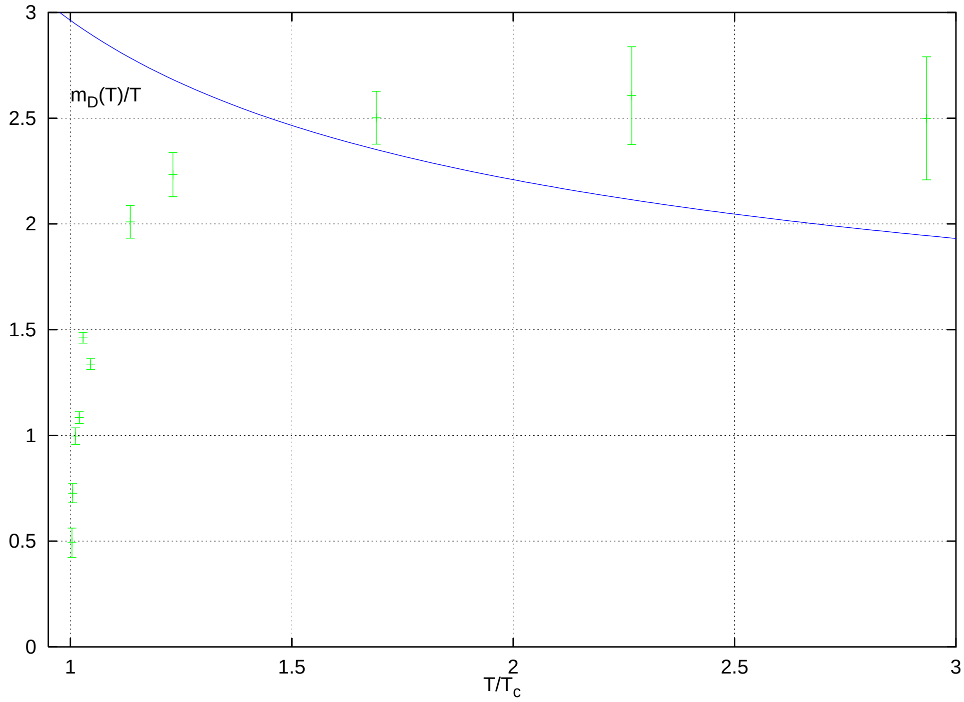


Abbildung 6.16: Screening-Masse $m_D(T)/T$. Die durchgezogene Linie zeigt die niedrigste Ordnung Störungstheorie (für kleine Temperaturen).

Die Kopplungsstärke $\alpha(T)$ steigt für $T \to T_c$ stark an und scheint für große T gegen eine Konstante zu gehen, wobei der störungstheoretisch erwartete Wert von

$$\alpha(T) = \left(\frac{g^2(T)}{4\pi} \right)^2 \tag{6.18}$$

nicht erreicht wird.

Zuletzt wurden noch die Fitergebnisse für drei verschiedene d verglichen. In Abb.6.18 erkennt man, daß die genaue Bestimmung des Exponenten sehr wichtig ist, um verläßliche Ergebnisse für die Screening-Masse zu erhalten. Für $d = 1$ ergibt sich für große Temperaturen ein Wert von $m_D(T)/T \approx 2$, während man für $d = 2$ einen Wert erhällt, der ca. 50% größer ist. Für kleine Temperaturen $T \approx T_c$ sind die χ^2-Werte für $d = 1$ am kleinsten (Abb.6.19). Ein Exponent von $d = 2$ kann in der Nähe von T_c ausgeschlossen werden. Für $T > 1.5T_c$ sind die Fits für $d = 1.5$ am besten. Auch hier liefern die Fits mit $d = 2$ das größte χ^2.

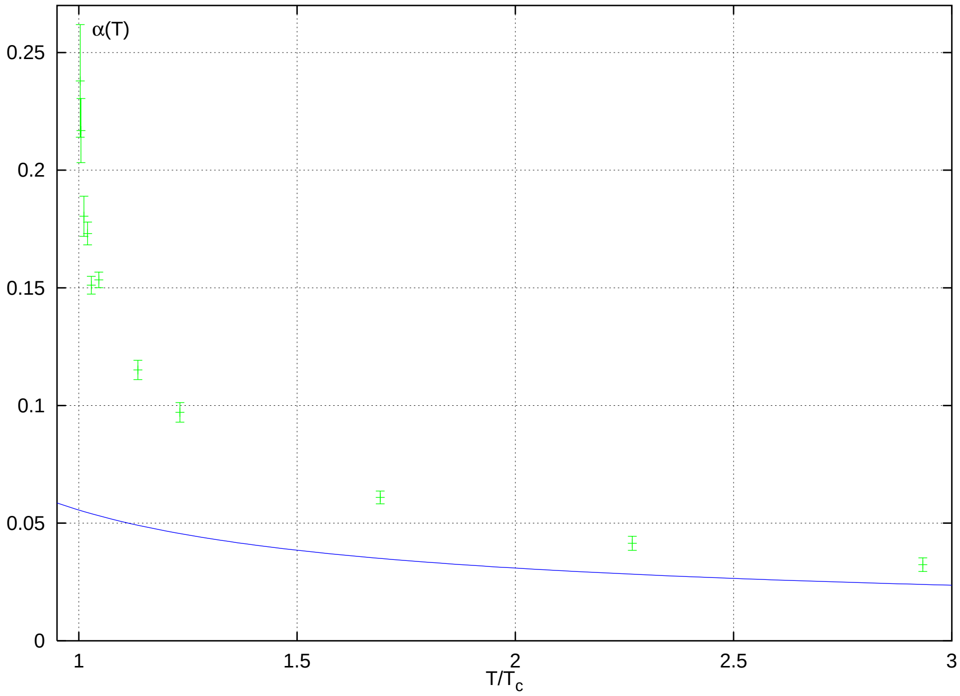


Abbildung 6.17: Fitkonstante $\alpha(T)$. Die durchgezogene Linie zeigt die niedrigste Ordnung Störungstheorie (für große Temperaturen).

Quotientenmethode

Eine zweite Methode die Screening-Massen zu bestimmen ist die Quotientenmethode, bei der R-abhängige effektive Screening-Massen $m_{R,d}$ betrachtet werden. Aus dem Quotienten der periodischen Potentiale im Abstand $\Delta R = 1$

$$\frac{V(R-1,T)}{V(R,t)} \tag{6.19}$$

$$= \frac{(R-1)^{-d}\exp[-m_{R,d}(R-1)] + (N_\sigma - R+1)^{-d}\exp[-m_{R,d}(N_\sigma - R+1)]}{R^{-d}\exp[-m_{R,d}R] + (N_\sigma - R)^{-d}\exp[-m_{R,d}(N_\sigma - R)]}$$

wurden die Screening-Massen für verschiedene Werte von d bestimmt. Für Temperaturen $T > 1.5T_c$ war diese Bestimmung nicht möglich, da die Potentiale hier zu flach wurden.
Für große Abstände R sollten die Ergebnisse unabhängig vom Wert des Exponenten d sein und gegen den gleichen Wert konvergieren

$$m = \lim_{R\to\infty} m_{R,d} \tag{6.20}$$

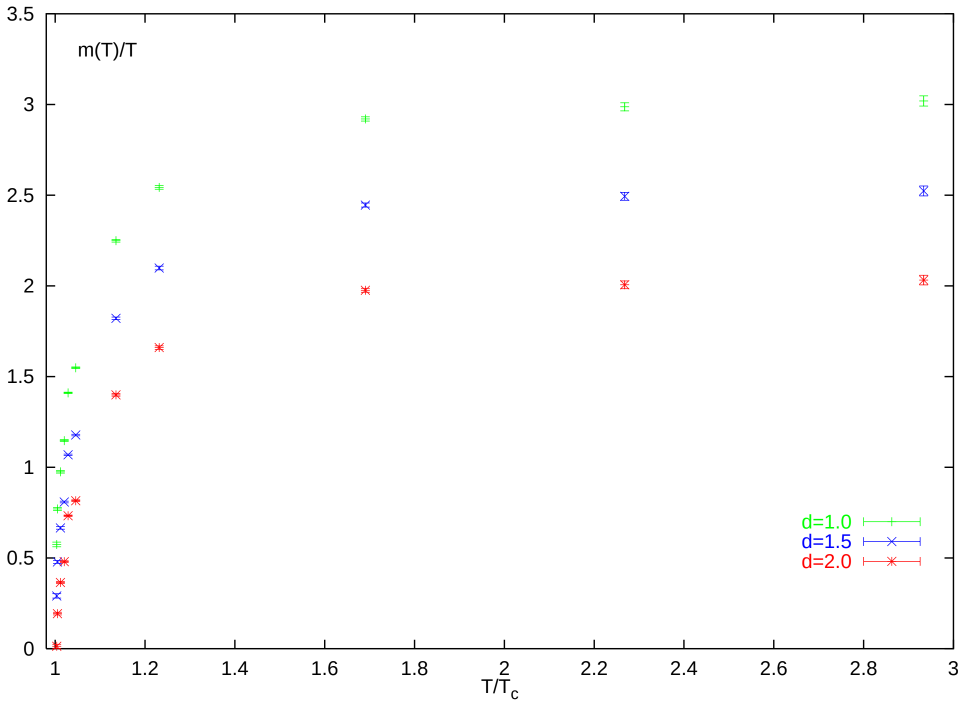


Abbildung 6.18: Screening-Masse $m_D(T)/T$ in Abhängigkeit des Fitparameters d für d=1.0,1.5,2.0.

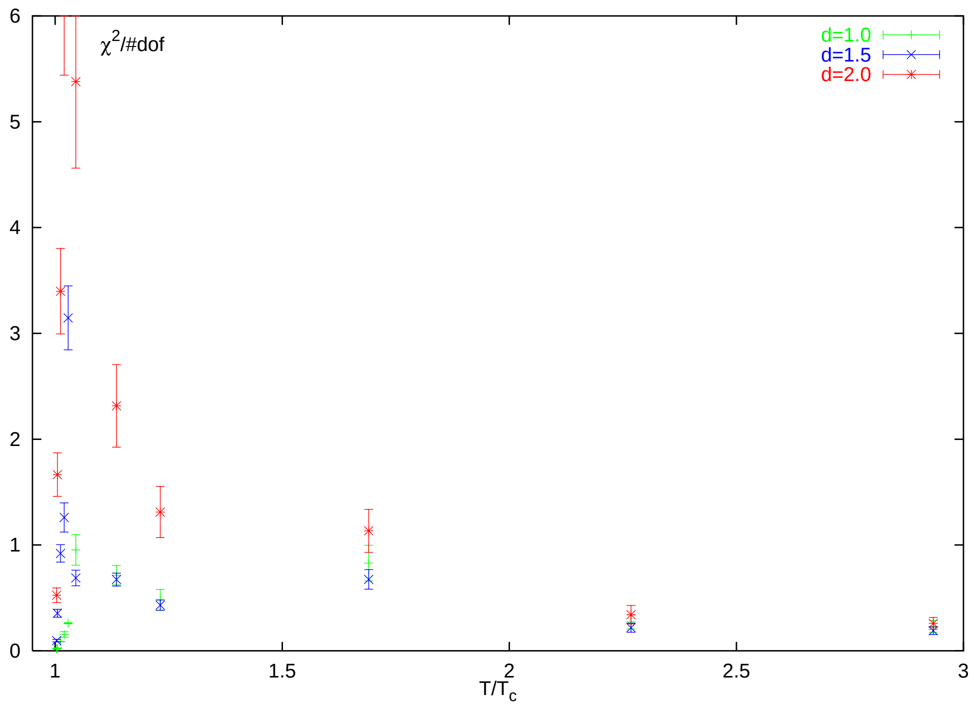


Abbildung 6.19: χ^2/#dof des Fits in Abhängigkeit des Fitparameters d für d=1.0,1.5,2.0.

Wenn das Potential wie r^{-d_0} ansteigt, so nähert sich $m_{R,d}$ für $d < d_0$ von oben und für $d > d_0$ von untem dem Wert m. Die ,,beste" Wahl für den Exponenten d ist der Wert, bei dem $m_{R,d}$ schon für kleine Abstände unabhängig von R ist.

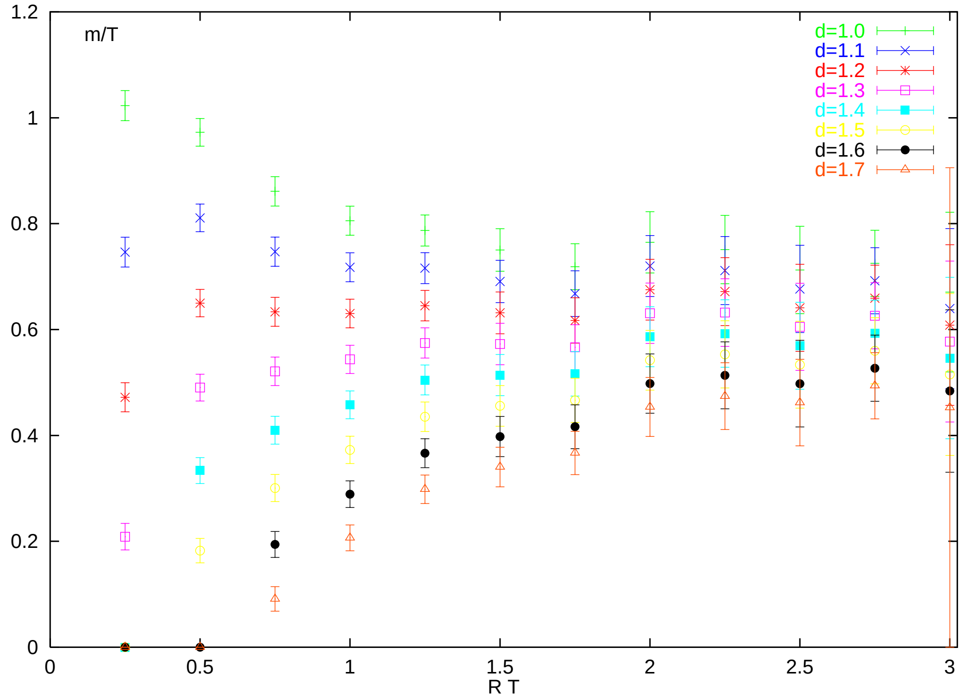


Abbildung 6.20: Screeningmasse aus dem Quotienten $V(R+1)/V(R)$ für $\beta = 4.076$.

In Abb.6.20 und 6.21 sind die Daten für $\beta = 4.076$ und $\beta = 4.10$ dargestellt. Man erkennt, daß die Werte für größere Abstände näher zusammenliegen, aber noch nicht konvergieren. Für große Abstände werden die Fehler von $m_{R,d}$ auf Grund des flacher werdenden Potentials größer und für $\beta = 4.10$ zeigen sich große Schwankungen.
Der Exponent, bei dem die R-Abhängigkeit am geringsten ist liegt für $\beta = 4.076$ im Bereich $1.1 < d < 1.2$ und für $\beta = 4.10$ bei $1.3 < d < 1.4$. Für die Screening-Massen m lassen sich hier nur Abschätzungen machen. Für $\beta = 4.076$ liegt der Wert im Bereich $0.4 < \frac{m}{T} < 0.6$ und für $\beta = 4.10$ bei $1.0 < \frac{m}{T} < 1.6$. Diese Werte sind mit den Ergebnissen der χ^2-Fits gut verträglich, erlauben aber keine genauere Bestimmung der Screening-Masse m und des Exponenten d.

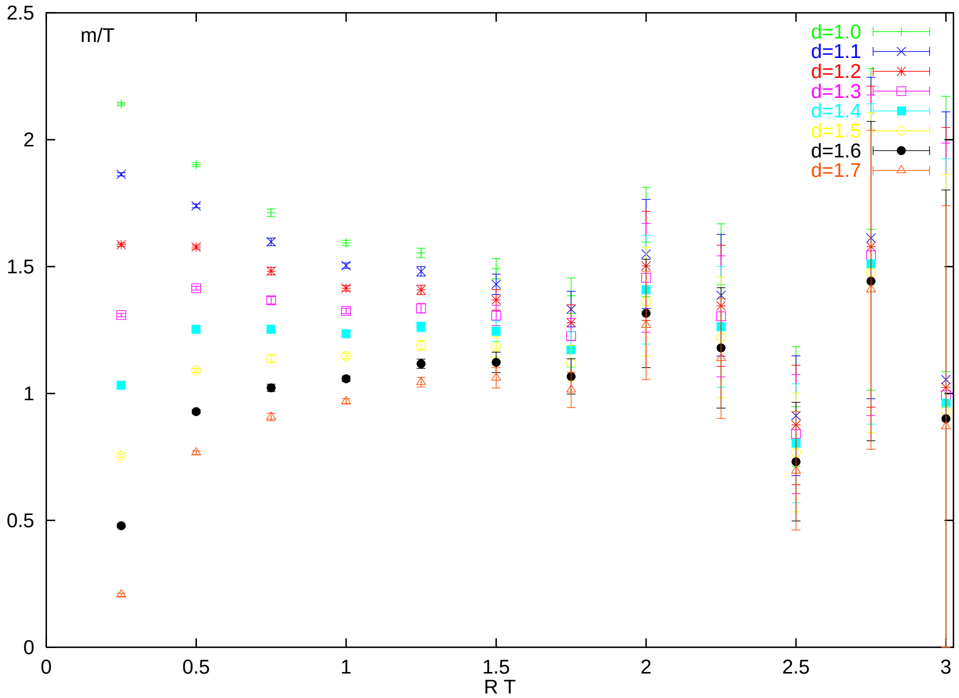


Abbildung 6.21: Screeningmasse aus dem Quotienten $V(R+1)/V(R)$ für $\beta = 4.10$.

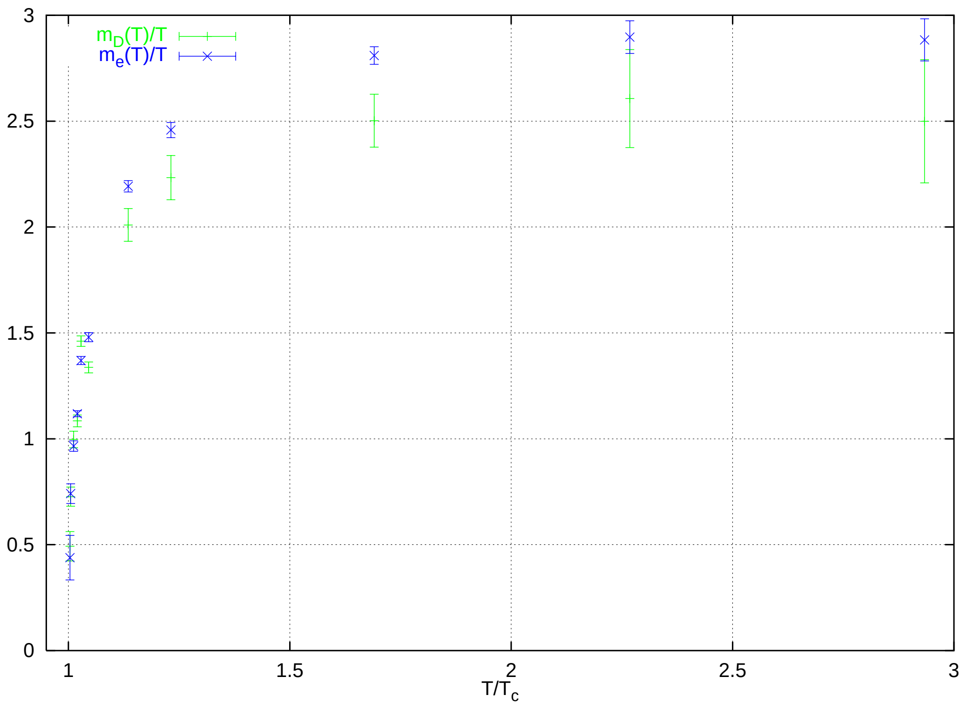


Abbildung 6.22: Vergleich zwischen den Screening-Massen $m_D(T)$ aus (6.16) und $m_e(T)$ aus (6.21).

Wie man bei den beiden letzten Methoden zur Bestimmung der Screening-Masse sehen konnte, ist es schwierig den Exponenten d genau zu bestimmen. Bei der folgenden Methode kommt man ganz ohne diesen Parameter aus. Nach (3.24) läßt sich das Potential als

$$\begin{aligned} V(R,T) &= \frac{\alpha(T)}{R} e^{-m_e(T)R} \left(1 + \frac{\beta(T)}{R} e^{-m_e(T)R}\right) \\ &+ \frac{\alpha(T)}{(32-R)} e^{-m_e(T)(32-R)} \left(1 + \frac{\beta(T)}{(32-R)} e^{-m_e(T)(32-R)}\right) + V_0 \end{aligned} \tag{6.21}$$

schreiben. Der zusätzliche Parameter V_0 wurde, wie schon bei (6.16) für die großen β-Werte benötigt. Die χ^2-Fits wurden unter den gleichen Bedingungen durchgeführt, wie beim früheren Ansatz, was zu den Ergebnisse in Tab.6.4 führte. In Abb.6.22 erkennt man, daß die Werte für $m_e(T)$ für kleine Temperaturen recht gut mit den Screening-Massen $m_D(T)$ aus dem Ansatz (6.16) übereinstimmen. Für $T > 1.1T_c$ liegen sie leicht oberhalb der Daten für $m_D(T)$. Die Kopplungsstärke $\alpha(T)$ ist etwas kleiner als die ersten Werte, zeigt aber das gleiche Verhalten. Der Vergleich der χ^2-Werte für beide Fitmethoden in Abb.6.24 zeigt, daß beide Ansätze das Potential gleich gut beschreiben.

In Abb.6.25 ist ein Vergleich des Verhaltens der String-Tension und der Screening-Masse in der Nähe von T_c zu sehen. Man erkennt, daß beide für $T \to T_c$ klein werden und gegen einen vermutlich endlichen Wert gehen. Beide Werte sind etwa von der gleichen Größenordnung.

β	T/T_c	$m_e(T)/T$	$\alpha(T)$	$\beta(T)$	V_0/T
4.075	1.003	0.439(105)	0.141(30)	0.283(47)	0.0*
4.076	1.005	0.741(46)	0.189(18)	0.077(73)	0.0*
4.080	1.012	0.966(25)	0.181(9)	0.022(47)	0.0*
4.085	1.020	1.118(14)	0.152(4)	0.061(23)	0.0*
4.090	1.029	1.370(19)	0.151(5)	0.033(27)	-0.000031(9)
4.100	1.046	1.480(21)	0.112(4)	0.121(19)	0.000002(6)
4.150	1.135	2.192(27)	0.091(3)	0.098(26)	-0.000006(2)
4.200	1.232	2.458(36)	0.074(4)	0.113(29)	-0.000021(1)
4.400	1.691	2.810(42)	0.044(2)	0.105(20)	-0.000009(1)
4.600	2.268	2.897(77)	0.032(3)	0.070(26)	0.000004(1)
4.800	2.934	2.884(99)	0.023(3)	0.065(21)	0.000021(1)

Tabelle 6.4: Fitparameter aus dem χ^2-Fit des Potentials (6.21). Die mit * markierten Parameter wurden bei den Fits festgehalten.

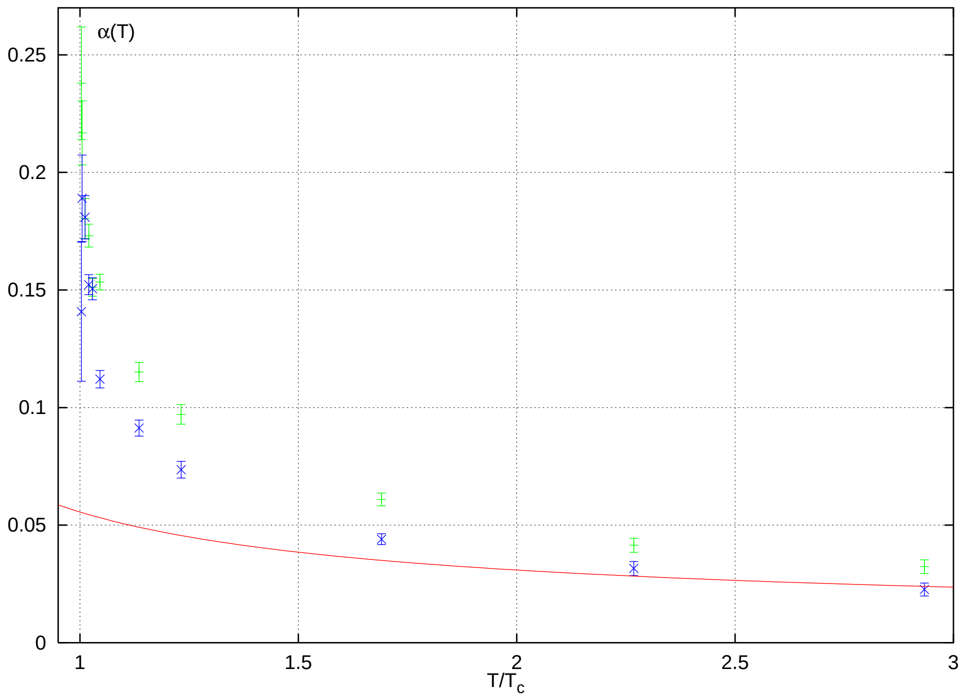


Abbildung 6.23: Vergleich von $\alpha(T)$ aus dem Fitansatz (6.16) (grün) und (6.21) (blau). Die rote Kurve ist die führende Ordnung Störungstheorie (für große Temperaturen).

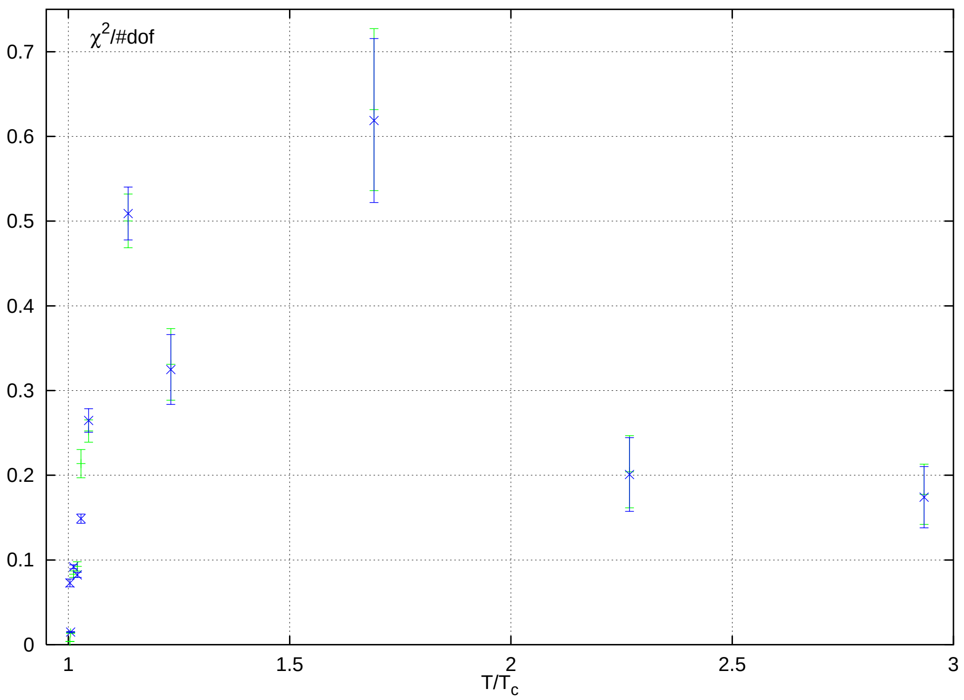


Abbildung 6.24: Vergleich von χ^2 aus dem Fitansatz (6.16) (grün) und (6.16) (blau).

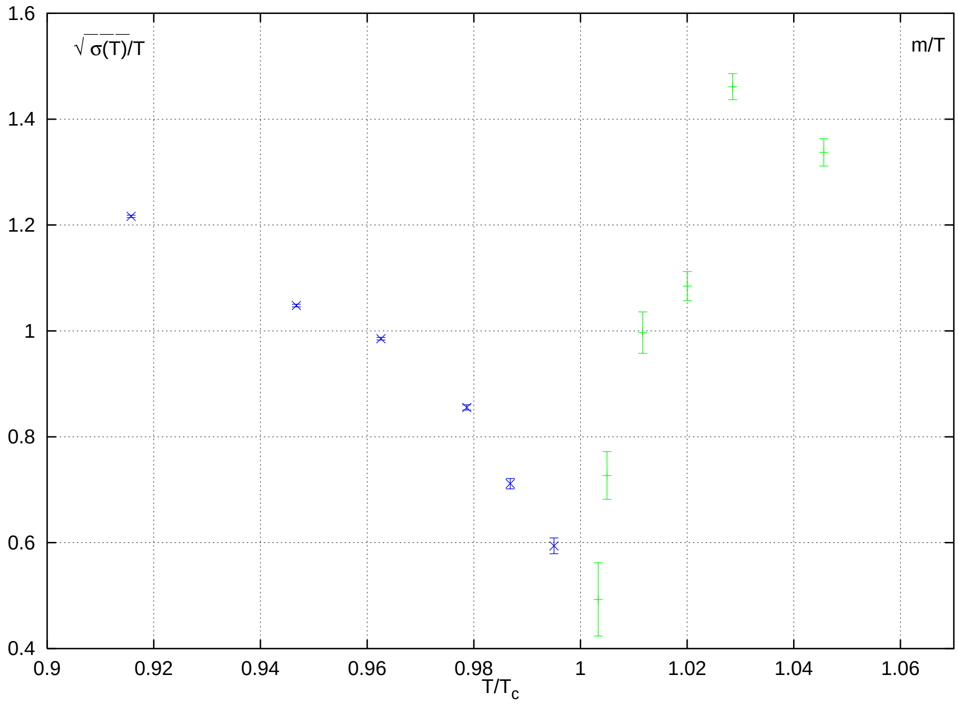


Abbildung 6.25: Vergleich der String-Tension (blau) und Screening-Masse (grün) in der Nähe von T_c

Zusammenfassung

Es wurden die Eigenschaften der Symanzik-Wirkung auf anisotropen Gittern und bei Korrelationsfunktionen in der reinen SU(3)-Eichtheorie untersucht.

In einer schwachen-Kopplungsentwicklung wurde die Energiedichte bei verschiedenen Werten der Anisotropie γ für die Wilson- und Symanzik-Wirkung verglichen. Hierbei zeigte sich, daß eine Verkleinerung des Gitterabstandes in Zeitrichtung zu einer starken Reduzierung der Cut-Off-Effekte bei der Wilson-Wirkung führt. Für die verbesserte Wirkung zeigte sich allerdings für große N_τ eine Verschlechterung. Aufgrund der Verbeserung der Wirkung sind die Cut-Off-Effekte hier schon stark reduziert. Auf anisotropen Gittern reicht es daher aus, die Verbesserung der Wirkung nur in den Raumrichtungen durchzuführen.

Für den Energie-Impuls-Tensor wurde ein verbesserter Operator entwickelt mit dem die Transportkoeffizienten durch Korrelationen des Tensors bestimmt werden sollten. Hierfür wurde ein Gitter der Größe $16^3 \times 16$ mit Anisotropie $\gamma = 4$ benutzt. Da die Korrelationen, besonders für große Abstände sehr große Fehler zeigten, war nur eine qualitative Untersuchung der Scheer-Viskosität η möglich. Hierfür wurde ein Wert von $\frac{\eta}{T^3} = 1.18 \pm 1.27$ bestimmt, der mit den Ergebnissen von Nakamura et.al [46], sowie Karsch und Wyld [37] verträglich ist. Für eine genauere Untersuchung der Transportkoeffizienten sind größere Gitter und eine höhere Statistik nötig.

Die Untersuchung der Potentiale bei endlicher Temperatur durch Polyakov-Loop Korrelationen wurde auf einem isotropen Gitter der Größe $32^3 \times 4$ durchgeführt. Für dieses Gitter wurde zunächst die pseudo-kritische Kopplung

$$\beta_c = 4.0731(1) \tag{6.22}$$

bestimmt und die Entropiedichte betrachtet. Für die Korrelationen zeigte sich eine deutliche Verbesserung der Rotationssymmetrie durch die Benutzung der verbesserten Wirkung.
Die Bestimmung der String-Tension für $T < T_c$ wurde mit zwei Ansätzen aus dem String-Modell durchgeführt. Es zeigte sich eine ähnliche Temperaturabhängigkeit, wie beim Nambu-Goto Modell,

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma(0)} = 1.21(5)\sqrt{1 - 0.990(5)\frac{T^2}{T_c^2}}. \tag{6.23}$$

Hieran erkennt man, daß die String-Tension bei T_c endlich bleibt. Man kann aus (6.23) einen Wert von

$$\frac{\sigma(T_c)}{\sigma(0)} = 0.121(35) \tag{6.24}$$

abschätzen. Weiterhin hat sich gezeigt, daß es nötig ist höhere Ordnungen in den String-Modell Ansätzen der Potentiale zu berücksichtigen.
Die Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Screening-Masse für $T > T_c$ wurde mit drei verschiedenen Ansätzen durchgeführt. Für $T \to T_c$ scheint die Screening-Masse endlich zu bleiben und das Potential zeigt die erwartete Form eines Debye-abgeschirmten Coulomb-Potentials. Ein Vegleich der String-Tension und der Screening-Masse bei T_c zeigt, daß beide ein ähnliches Verhalten zeigen und bei T_c von der gleichen Größenordnung sind. Für die höchste hier untersuchte Temperatur zeigt sich noch nicht das störungstheoretische Verhalten von

$$m(T) = 2m_e \approx 2g^2(T)T. \tag{6.25}$$

Die Werte für $T > 1.5T_c$ liegen zwischen m_e und $2m_e$. Für einen Vergleich mit den störungstheoretischen Vorhersagen für die Screening-Masse sind noch höhere Temperaturen nötig. Für große Temperaturen wurde das Potential aber sehr flach, was die Bestimmung der Screening-Massen erschwerte, bzw. für die sog. Quotientenmethode unmöglich machte. Diese Methode ermöglichte nur eine qualitative Analyse der Potentiale.
Um die String-Tension und die Screening-Masse noch näher am Phasenübergang zu untersuchen, ist es nötig zu größeren Gittern zu gehen.

Anhang A

Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation

β	#Mess.	$\lvert L\rvert$	Fehler	χ	Fehler
4.000	22500	5.0382432e-03	4.6351810e-05	6.8809660e-06	8.5425890e-08
4.020	21000	6.0350622e-03	7.4606430e-05	1.0336509e-05	2.9884892e-07
4.040	19000	7.8266555e-03	1.4325601e-04	1.7906515e-05	1.3607925e-06
4.050	24000	8.6544599e-03	1.7605960e-04	2.2474165e-05	1.4243328e-06
4.060	19000	1.0834883e-02	3.7293641e-04	3.8365612e-05	3.9817035e-06
4.065	20000	1.3342602e-02	6.1428940e-04	7.5360531e-05	1.2334262e-05
4.070	29000	1.5677299e-02	1.0282517e-03	1.0757701e-04	2.6360092e-05
4.071	17000	2.9348025e-02	8.2447008e-03	9.2728336e-04	3.2228463e-04
4.072	25500	3.3356822e-02	7.2018687e-03	1.0722655e-03	3.2557796e-04
4.073	23500	4.5018076e-02	1.7208901e-02	1.5960258e-03	2.6820523e-04
4.075	27500	1.0268359e-01	1.0043706e-03	1.7227945e-04	2.7270181e-05
4.076	24000	1.0817866e-01	6.7592893e-04	1.0402301e-04	1.0109286e-05
4.080	17000	1.1696367e-01	4.1613019e-04	6.5582164e-05	4.2594708e-06
4.085	18000	1.2533871e-01	3.1366247e-04	4.9636328e-05	3.2575245e-06
4.090	17000	1.3262013e-01	2.6516181e-04	3.6766874e-05	1.0681642e-06
4.100	19000	1.4296058e-01	1.7386758e-04	2.8327182e-05	1.1021682e-06
4.150	19500	1.7339213e-01	7.9298645e-05	1.5070151e-05	2.5685368e-07
4.200	25000	1.9302978e-01	5.3631403e-05	1.1925269e-05	1.1548481e-07
4.400	25000	2.4629285e-01	4.1365550e-05	9.5343354e-06	1.3717995e-07
4.600	24000	2.8591656e-01	3.8973119e-05	8.6732170e-06	5.8754650e-08
4.800	20000	3.1944761e-01	3.9018050e-05	7.9992492e-06	1.1027555e-07

Tabelle A.1: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der 2×1-verbesserten Wirkung für $N_\sigma = 32$ und $N_\tau = 4$.

β	#Mess.	S	Fehler	S_σ	Fehler	S_τ	Fehler
4.000	22500	8.8563985e-01	1.0333623e-05	8.8562240e-01	1.0934115e-05	8.8565730e-01	1.0751496e-05
4.020	21000	8.9167529e-01	1.0260022e-05	8.9165491e-01	1.0896750e-05	8.9169567e-01	1.0719117e-05
4.040	19000	8.9750065e-01	1.0601296e-05	8.9747143e-01	1.1324627e-05	8.9752987e-01	1.1000870e-05
4.050	24000	9.0031972e-01	9.4480513e-06	9.0028623e-01	1.0075370e-05	9.0035321e-01	9.8047257e-06
4.060	19000	9.0309664e-01	1.1403256e-05	9.0305817e-01	1.1176614e-05	9.0313511e-01	1.1681317e-05
4.065	20000	9.0449567e-01	1.3605993e-05	9.0445393e-01	1.3260346e-05	9.0453741e-01	1.3555464e-05
4.070	29000	9.0587571e-01	1.2226853e-05	9.0582514e-01	1.1292874e-05	9.0592627e-01	1.3698848e-05
4.071	17000	9.0643314e-01	1.6525622e-04	9.0634816e-01	1.4055297e-04	9.0651811e-01	1.8995652e-04
4.072	25500	9.0677412e-01	1.5914600e-04	9.0667728e-01	1.3942282e-04	9.0687096e-01	1.7890323e-04
4.073	23500	9.0732008e-01	3.8172084e-04	9.0718538e-01	3.2974160e-04	9.0745478e-01	4.3370562e-04
4.075	27500	9.0920375e-01	3.4205508e-05	9.0887945e-01	3.0452711e-05	9.0952805e-01	3.8284851e-05
4.076	24000	9.0963731e-01	2.4822769e-05	9.0928685e-01	2.1984756e-05	9.0998778e-01	2.7825827e-05
4.080	17000	9.1093285e-01	1.9017565e-05	9.1054302e-01	1.6708793e-05	9.1132268e-01	2.1244148e-05
4.085	18000	9.1244044e-01	1.5278234e-05	9.1200019e-01	1.4751809e-05	9.1288069e-01	1.6971532e-05
4.090	17000	9.1389768e-01	1.4462161e-05	9.1342547e-01	1.3692156e-05	9.1436990e-01	1.5939594e-05
4.100	19000	9.1658639e-01	1.1795760e-05	9.1605891e-01	1.1709351e-05	9.1711386e-01	1.2541360e-05
4.150	19500	9.2839277e-01	8.2427030e-06	9.2773348e-01	8.6046977e-06	9.2905207e-01	8.7329339e-06
4.200	25000	9.3886627e-01	6.1782741e-06	9.3815396e-01	6.8510137e-06	9.3957857e-01	6.7811661e-06
4.400	25000	9.7442068e-01	5.2453897e-06	9.7363661e-01	6.1523672e-06	9.7520476e-01	5.8167148e-06
4.600	24000	1.0040546e+00	4.6921552e-06	1.0032690e+00	5.4610128e-06	1.0048402e+00	5.2958672e-06
4.800	20000	1.0297967e+00	4.8451348e-06	1.0290233e+00	5.6762360e-06	1.0305700e+00	5.4289123e-06

Tabelle A.2: Erwartungswerte der gesamten, räumlichen und zeitlichen Wirkung der 2×1-verbesserten Wirkung für $N_\sigma = 32$ und $N_\tau = 4$.

	$\beta = 4.00$	$\beta = 4.02$	$\beta = 4.04$	$\beta = 4.05$	$\beta = 4.06$
R^2	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$
0	0.54856(1)	0.54834(2)	0.54796(2)	0.54796(2)	0.54738(3)
1	1.07076(9)	1.05859(10)	1.04600(13)	1.04600(13)	1.03228(27)
2	1.25390(15)	1.23281(17)	1.21094(24)	1.21094(24)	1.18716(57)
3	1.35516(21)	1.32748(24)	1.29885(33)	1.29885(33)	1.26762(75)
4	1.40113(25)	1.37043(29)	1.33843(39)	1.33843(39)	1.30363(88)
5	1.46764(30)	1.43168(35)	1.39421(48)	1.39421(48)	1.35335(115)
6	1.52012(36)	1.47950(42)	1.43741(56)	1.43741(56)	1.39143(135)
8	1.59744(47)	1.54972(54)	1.50046(72)	1.50046(72)	1.44650(167)
9	1.63000(52)	1.57942(59)	1.52671(78)	1.52671(78)	1.46921(181)
10	1.66052(57)	1.60704(65)	1.55115(85)	1.55115(85)	1.49045(199)
11	1.69165(62)	1.63483(70)	1.57573(94)	1.57573(94)	1.51132(215)
12	1.72228(75)	1.66163(81)	1.59937(102)	1.59937(102)	1.53139(234)
13	1.74557(74)	1.68279(83)	1.61810(108)	1.61810(108)	1.54710(250)
14	1.77095(79)	1.70539(89)	1.63786(114)	1.63786(114)	1.56370(244)
16	1.81351(104)	1.74365(108)	1.67049(132)	1.67049(132)	1.59162(292)
17	1.83658(96)	1.76377(106)	1.68839(135)	1.68839(135)	1.60629(313)
18	1.85745(103)	1.78229(113)	1.70453(144)	1.70453(144)	1.61958(326)
19	1.87840(111)	1.80074(121)	1.72050(153)	1.72050(153)	1.63255(343)
20	1.89610(116)	1.81648(124)	1.73393(159)	1.73393(159)	1.64391(356)
21	1.91536(121)	1.83322(131)	1.74836(166)	1.74836(166)	1.65569(374)
22	1.93501(135)	1.85017(143)	1.76283(176)	1.76283(176)	1.66740(390)
24	1.96849(145)	1.87971(153)	1.78810(191)	1.78810(191)	1.68838(419)
25	1.98355(149)	1.89318(159)	1.79974(195)	1.79974(195)	1.69787(431)
26	1.99944(153)	1.90738(163)	1.81151(202)	1.81151(202)	1.70761(449)
27	2.01478(163)	1.92127(173)	1.82308(212)	1.82308(212)	1.71690(467)
29	2.04559(174)	1.94832(185)	1.84599(226)	1.84599(226)	1.73513(495)
30	2.05962(187)	1.96045(195)	1.85623(235)	1.85623(235)	1.74383(506)
32	2.08910(230)	1.98621(220)	1.87829(253)	1.87829(253)	1.76094(486)
33	2.10297(215)	1.99781(214)	1.88786(259)	1.88786(259)	1.76915(502)
34	2.11508(219)	2.00873(224)	1.89767(268)	1.89767(268)	1.77672(520)
35	2.12948(230)	2.02023(230)	1.90742(276)	1.90742(276)	1.78452(531)
36	2.13991(249)	2.03244(247)	1.91574(287)	1.91574(287)	1.79205(544)
37	2.15290(274)	2.04229(263)	1.92469(300)	1.92469(300)	1.79907(622)
38	2.16680(251)	2.05381(253)	1.93493(300)	1.93493(300)	1.80670(574)
40	2.19132(291)	2.07476(282)	1.95246(319)	1.95246(319)	1.82038(665)
41	2.20243(273)	2.08532(276)	1.96121(322)	1.96121(322)	1.82764(612)
42	2.21536(303)	2.09627(288)	1.97013(336)	1.97013(336)	1.83448(692)
43	2.22529(333)	2.10585(308)	1.97862(353)	1.97862(353)	1.84149(640)
44	2.23876(338)	2.11488(317)	1.98628(358)	1.98628(358)	1.84713(653)
45	2.24779(319)	2.12517(309)	1.99464(360)	1.99464(360)	1.85356(667)
46	2.25975(340)	2.13414(322)	2.00228(370)	2.00228(370)	1.86002(683)
48	2.27713(500)	2.15596(410)	2.01857(416)	2.01857(416)	1.87242(719)
49	2.28961(373)	2.16198(358)	2.02528(401)	2.02528(401)	1.87839(726)
50	2.30075(374)	2.17183(359)	2.03247(404)	2.03247(404)	1.88452(739)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
162	3.04474(7272)	2.82815(4286)	2.54961(2421)	2.54961(2421)	2.26624(2448)
164	3.09854(8186)	2.85031(4293)	2.54501(2303)	2.54501(2303)	2.27135(2467)
177	3.12897(10406)	2.88578(5345)	2.59424(2893)	2.59424(2893)	2.29407(2649)
192	3.16656(15449)	2.97703(8814)	2.64663(3828)	2.64663(3828)	2.31986(2921)

Tabelle A.3: Potentiale $V(R,T)$ nach den Definitionen (6.5) ($T < T_c$), bzw. (6.6) ($T > T_c$).

	$\beta = 4.065$	$\beta = 4.07$	$\beta = 4.075$	$\beta = 4.076$	$\beta = 4.08$
R^2	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$
0	0.54711(6)	0.54673(7)	-0.60388(458)	-0.57905(278)	-0.54224(142)
1	1.02771(51)	1.02250(68)	-0.21275(348)	-0.19469(204)	-0.17005(101)
2	1.17901(97)	1.16976(142)	-0.13022(285)	-0.11586(164)	-0.09735(79)
3	1.25673(137)	1.24446(199)	-0.09827(252)	-0.08589(142)	-0.07050(69)
4	1.29130(160)	1.27752(231)	-0.08690(237)	-0.07537(132)	-0.06130(64)
5	1.33878(195)	1.32256(281)	-0.07233(218)	-0.06189(120)	-0.04951(58)
6	1.37478(227)	1.35653(326)	-0.06280(204)	-0.05314(111)	-0.04198(54)
8	1.42666(284)	1.40514(401)	-0.05126(185)	-0.04268(99)	-0.03308(49)
9	1.44801(310)	1.42486(436)	-0.04716(178)	-0.03899(94)	-0.03000(46)
10	1.46772(335)	1.44311(472)	-0.04365(171)	-0.03583(90)	-0.02736(45)
11	1.48713(364)	1.46103(509)	-0.04039(165)	-0.03290(86)	-0.02493(43)
12	1.50572(394)	1.47811(545)	-0.03751(160)	-0.03028(83)	-0.02280(41)
13	1.52027(417)	1.49144(579)	-0.03541(156)	-0.02846(80)	-0.02126(40)
14	1.53540(442)	1.50542(612)	-0.03332(152)	-0.02660(78)	-0.01976(39)
16	1.56115(489)	1.52859(676)	-0.03016(144)	-0.02383(73)	-0.01753(35)
17	1.57433(517)	1.54081(710)	-0.02857(141)	-0.02245(70)	-0.01637(35)
18	1.58645(542)	1.55174(742)	-0.02722(139)	-0.02126(68)	-0.01543(35)
19	1.59815(567)	1.56249(775)	-0.02595(135)	-0.02013(67)	-0.01454(34)
20	1.60833(592)	1.57171(807)	-0.02493(133)	-0.01927(65)	-0.01383(33)
21	1.61909(617)	1.58119(838)	-0.02390(130)	-0.01835(64)	-0.01313(32)
22	1.62949(642)	1.59055(869)	-0.02293(128)	-0.01750(62)	-0.01247(31)
24	1.64819(692)	1.60732(930)	-0.02130(124)	-0.01610(60)	-0.01137(30)
25	1.65677(712)	1.61489(961)	-0.02060(123)	-0.01553(58)	-0.01087(29)
26	1.66539(736)	1.62256(994)	-0.01990(120)	-0.01493(57)	-0.01041(29)
27	1.67365(759)	1.63001(1027)	-0.01925(119)	-0.01438(56)	-0.00998(29)
29	1.68977(809)	1.64445(1083)	-0.01804(115)	-0.01336(54)	-0.00920(28)
30	1.69732(832)	1.65105(1112)	-0.01752(114)	-0.01291(53)	-0.00887(27)
32	1.71219(878)	1.66427(1166)	-0.01652(111)	-0.01205(52)	-0.00821(27)
33	1.71929(904)	1.67045(1200)	-0.01606(110)	-0.01167(50)	-0.00791(26)
34	1.72613(926)	1.67648(1230)	-0.01564(109)	-0.01132(49)	-0.00762(25)
35	1.73277(949)	1.68232(1260)	-0.01523(107)	-0.01099(48)	-0.00736(25)
36	1.73936(973)	1.68777(1290)	-0.01485(107)	-0.01066(47)	-0.00713(25)
37	1.74555(997)	1.69310(1323)	-0.01449(107)	-0.01039(47)	-0.00691(25)
38	1.75188(1020)	1.69914(1347)	-0.01413(105)	-0.01005(46)	-0.00667(24)
40	1.76372(1064)	1.70931(1407)	-0.01346(103)	-0.00955(44)	-0.00628(24)
41	1.76988(1088)	1.71483(1434)	-0.01317(102)	-0.00925(44)	-0.00608(23)
42	1.77557(1111)	1.71986(1463)	-0.01287(101)	-0.00901(44)	-0.00589(23)
43	1.78198(1135)	1.72536(1487)	-0.01259(100)	-0.00875(43)	-0.00571(22)
44	1.78622(1159)	1.72943(1524)	-0.01232(99)	-0.00856(42)	-0.00556(22)
45	1.79185(1178)	1.73435(1548)	-0.01207(99)	-0.00836(42)	-0.00540(22)
46	1.79694(1202)	1.73870(1574)	-0.01181(98)	-0.00816(41)	-0.00525(22)
48	1.80795(1260)	1.74860(1634)	-0.01135(98)	-0.00774(39)	-0.00493(22)
49	1.81233(1268)	1.75204(1663)	-0.01111(96)	-0.00760(39)	-0.00485(21)
50	1.81761(1291)	1.75652(1688)	-0.01092(96)	-0.00742(39)	-0.00471(21)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
162	2.11642(3592)	2.01261(4371)	-0.00332(68)	-0.00160(23)	-0.00063(9)
164	2.11848(3614)	2.01577(4071)	-0.00331(68)	-0.00156(23)	-0.00063(10)
177	2.13733(3869)	2.03122(4293)	-0.00307(67)	-0.00141(23)	-0.00055(9)
192	2.15718(4152)	2.04865(4545)	-0.00285(67)	-0.00123(22)	-0.00044(9)

Tabelle A.4: Potentiale $V(R,T)$ nach den Definitionen (6.5) ($T < T_c$), bzw. (6.6) ($T > T_c$).

	$\beta = 4.085$	$\beta = 4.09$	$\beta = 4.10$	$\beta = 4.15$
R^2	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$
0	-0.5099799(6695)	-0.4838963(7716)	-0.4496754(4616)	-0.3646719(1620)
1	-0.1497974(4471)	-0.1341751(4624)	-0.1155194(2424)	-0.0769823(904)
2	-0.0826640(3412)	-0.0716411(3240)	-0.0591275(1681)	-0.0354582(654)
3	-0.0584780(2832)	-0.0495959(2656)	-0.0398449(1332)	-0.0222926(557)
4	-0.0504277(2637)	-0.0424261(2348)	-0.0338216(1253)	-0.0185475(484)
5	-0.0400530(2386)	-0.0331519(1998)	-0.0258997(1018)	-0.0134617(413)
6	-0.0335126(2199)	-0.0273671(1784)	-0.0210357(887)	-0.0104713(372)
8	-0.0258974(1916)	-0.0207412(1470)	-0.0156072(735)	-0.0073116(302)
9	-0.0233028(1806)	-0.0185008(1363)	-0.0137846(706)	-0.0062963(283)
10	-0.0210718(1712)	-0.0165976(1285)	-0.0122732(661)	-0.0054590(247)
11	-0.0190351(1656)	-0.0148739(1199)	-0.0108705(613)	-0.0046983(245)
12	-0.0172854(1573)	-0.0133359(1049)	-0.0096583(520)	-0.0040408(233)
13	-0.0160072(1520)	-0.0123020(1044)	-0.0088543(512)	-0.0036391(225)
14	-0.0147746(1470)	-0.0112767(960)	-0.0080402(510)	-0.0032244(209)
16	-0.0129634(1385)	-0.0097791(911)	-0.0068513(551)	-0.0026797(153)
17	-0.0120422(1306)	-0.0089874(853)	-0.0062974(460)	-0.0023795(160)
18	-0.0112709(1303)	-0.0083655(867)	-0.0058298(419)	-0.0021452(161)
19	-0.0105682(1295)	-0.0077906(765)	-0.0053852(446)	-0.0019397(156)
20	-0.0100052(1232)	-0.0073241(739)	-0.0050336(415)	-0.0017959(145)
21	-0.0094381(1230)	-0.0068658(699)	-0.0046965(390)	-0.0016423(146)
22	-0.0089131(1157)	-0.0064204(651)	-0.0043621(381)	-0.0014919(151)
24	-0.0080358(1152)	-0.0057358(616)	-0.0038570(367)	-0.0012823(128)
25	-0.0076573(1070)	-0.0054650(686)	-0.0036612(347)	-0.0011930(123)
26	-0.0073143(1057)	-0.0051577(614)	-0.0034500(373)	-0.0011063(122)
27	-0.0069924(1044)	-0.0048932(607)	-0.0032583(377)	-0.0010223(124)
29	-0.0063698(1010)	-0.0044201(564)	-0.0029172(309)	-0.0008826(119)
30	-0.0061156(999)	-0.0042243(534)	-0.0027631(326)	-0.0008284(121)
32	-0.0055886(1061)	-0.0038401(566)	-0.0025083(330)	-0.0007181(136)
33	-0.0053905(924)	-0.0036511(518)	-0.0023764(338)	-0.0006769(98)
34	-0.0051900(918)	-0.0034895(509)	-0.0022641(311)	-0.0006372(129)
35	-0.0049841(914)	-0.0033408(460)	-0.0021538(311)	-0.0005971(115)
36	-0.0047899(897)	-0.0032029(438)	-0.0020650(265)	-0.0005697(107)
37	-0.0046375(861)	-0.0030738(424)	-0.0019825(281)	-0.0005469(116)
38	-0.0044687(846)	-0.0029397(426)	-0.0018818(295)	-0.0004972(106)
40	-0.0041538(851)	-0.0027124(417)	-0.0017455(274)	-0.0004473(138)
41	-0.0040234(860)	-0.0026168(410)	-0.0016637(292)	-0.0004209(124)
42	-0.0038755(812)	-0.0025070(422)	-0.0015831(286)	-0.0003988(120)
43	-0.0037522(758)	-0.0024179(401)	-0.0015115(286)	-0.0003827(128)
44	-0.0036378(808)	-0.0023310(318)	-0.0014728(275)	-0.0003599(118)
45	-0.0035249(820)	-0.0022400(404)	-0.0014090(260)	-0.0003380(125)
46	-0.0034024(804)	-0.0021658(422)	-0.0013566(248)	-0.0003178(134)
48	-0.0031929(728)	-0.0020211(412)	-0.0012683(181)	-0.0002922(133)
49	-0.0030990(752)	-0.0019368(295)	-0.0012111(261)	-0.0002777(123)
50	-0.0030195(751)	-0.0018705(303)	-0.0011743(239)	-0.0002613(130)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
162	-0.0003267(615)	-0.0001431(263)	-0.0000695(206)	-0.0000059(100)
164	-0.0003203(666)	-0.0001167(248)	-0.0000673(180)	-0.0000030(114)
177	-0.0002684(614)	-0.0001099(342)	-0.0000523(160)	-0.0000059(104)
192	-0.0002269(669)	-0.0000559(353)	-0.0000138(230)	0.0000062(153)

Tabelle A.5: Potentiale $V(R,T)$ nach den Definitionen (6.5) ($T < T_c$), bzw. (6.6) ($T > T_c$).

	$\beta = 4.20$	$\beta = 4.40$	$\beta = 4.60$	$\beta = 4.80$
R^2	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$	$V(R,T)$
0	-0.3197089(1258)	-0.2258042(758)	-0.1751578(369)	-0.1414932(271)
1	-0.0609789(521)	-0.0356899(267)	-0.0253700(106)	-0.0194492(103)
2	-0.0267465(340)	-0.0145486(164)	-0.0100774(63)	-0.0076304(58)
3	-0.0162925(267)	-0.0084644(124)	-0.0057895(58)	-0.0043611(44)
4	-0.0134423(265)	-0.0069368(106)	-0.0047324(50)	-0.0035664(52)
5	-0.0095183(240)	-0.0047463(86)	-0.0032163(50)	-0.0024212(49)
6	-0.0072481(194)	-0.0035155(88)	-0.0023725(55)	-0.0017850(47)
8	-0.0049342(160)	-0.0023146(78)	-0.0015551(55)	-0.0011732(51)
9	-0.0041947(176)	-0.0019433(69)	-0.0012970(51)	-0.0009822(51)
10	-0.0035950(178)	-0.0016456(53)	-0.0010991(49)	-0.0008339(51)
11	-0.0030509(156)	-0.0013721(60)	-0.0009159(62)	-0.0006974(48)
12	-0.0025870(150)	-0.0011423(61)	-0.0007605(71)	-0.0005816(46)
13	-0.0023137(142)	-0.0010129(59)	-0.0006749(67)	-0.0005176(54)
14	-0.0020231(138)	-0.0008743(48)	-0.0005818(67)	-0.0004484(57)
16	-0.0016393(198)	-0.0007001(72)	-0.0004630(59)	-0.0003615(64)
17	-0.0014505(147)	-0.0006047(46)	-0.0004047(63)	-0.0003176(58)
18	-0.0012964(115)	-0.0005329(53)	-0.0003575(61)	-0.0002811(59)
19	-0.0011547(120)	-0.0004750(54)	-0.0003186(62)	-0.0002501(61)
20	-0.0010636(135)	-0.0004270(49)	-0.0002883(60)	-0.0002303(56)
21	-0.0009606(133)	-0.0003818(50)	-0.0002589(66)	-0.0002089(60)
22	-0.0008665(149)	-0.0003423(41)	-0.0002341(72)	-0.0001872(62)
24	-0.0007246(120)	-0.0002796(54)	-0.0001905(70)	-0.0001580(58)
25	-0.0006732(109)	-0.0002609(45)	-0.0001786(63)	-0.0001466(56)
26	-0.0006181(103)	-0.0002378(38)	-0.0001607(64)	-0.0001370(62)
27	-0.0005714(96)	-0.0002146(37)	-0.0001497(72)	-0.0001269(56)
29	-0.0004817(114)	-0.0001792(48)	-0.0001243(66)	-0.0001086(63)
30	-0.0004467(101)	-0.0001654(51)	-0.0001148(71)	-0.0001021(58)
32	-0.0003805(127)	-0.0001429(57)	-0.0000999(65)	-0.0000880(58)
33	-0.0003539(124)	-0.0001276(50)	-0.0000894(65)	-0.0000842(63)
34	-0.0003336(113)	-0.0001133(52)	-0.0000833(62)	-0.0000789(62)
35	-0.0003049(92)	-0.0001073(52)	-0.0000779(65)	-0.0000750(63)
36	-0.0002888(106)	-0.0001051(50)	-0.0000715(63)	-0.0000713(54)
37	-0.0002657(107)	-0.0000990(49)	-0.0000694(67)	-0.0000699(63)
38	-0.0002506(106)	-0.0000864(47)	-0.0000660(62)	-0.0000669(57)
40	-0.0002209(110)	-0.0000786(45)	-0.0000583(70)	-0.0000625(64)
41	-0.0002080(92)	-0.0000682(50)	-0.0000539(65)	-0.0000564(56)
42	-0.0001896(99)	-0.0000612(44)	-0.0000511(65)	-0.0000539(64)
43	-0.0001839(107)	-0.0000541(44)	-0.0000482(59)	-0.0000517(66)
44	-0.0001676(115)	-0.0000538(54)	-0.0000422(56)	-0.0000510(61)
45	-0.0001555(94)	-0.0000506(47)	-0.0000415(60)	-0.0000499(63)
46	-0.0001499(90)	-0.0000459(46)	-0.0000417(63)	-0.0000474(59)
48	-0.0001402(137)	-0.0000400(67)	-0.0000370(48)	-0.0000433(63)
49	-0.0001164(104)	-0.0000395(42)	-0.0000343(63)	-0.0000441(57)
50	-0.0001136(93)	-0.0000352(43)	-0.0000326(67)	-0.0000409(64)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
162	0.0000134(89)	0.0000101(62)	-0.0000057(61)	-0.0000216(59)
164	0.0000156(93)	0.0000069(43)	-0.0000045(62)	-0.0000218(60)
177	0.0000206(86)	0.0000090(60)	-0.0000031(61)	-0.0000215(62)
192	0.0000229(80)	0.0000107(66)	-0.0000001(65)	-0.0000231(67)

Tabelle A.6: Potentiale $V(R,T)$ nach den Definitionen (6.5) ($T < T_c$), bzw. (6.6) ($T > T_c$).

Literaturverzeichnis

[1] H. J. Rothe, *Lattice gauge theories - an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1992)

[2] I. Montvay, G. Münster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge University Press (1994)

[3] M. Kaku, Quantum Field Theory, Oxford University Press (1993)

[4] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theorie, Addison Wesley (1995)

[5] K.G. Wilson, Confinement of Quarks, Phys. Rev. D10 (1974) 2445

[6] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lütgemeier, B. Petersson, Thermodynamics of SU(3) lattice gauge theory, Nucl.Phys. B469 (1996) 419

[7] F. Karsch, E. Laermann, M. Lütgemeier, Three-dimensional SU(3) gauge theory and the spatial string tension of the (3+1)-dimensional finite temperature gauge theory, Phys.Lett.B (1995) 94

[8] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann, Improved actions for QCD thermodynamics on the lattice, Nucl.Phys. B462 (1996) 414

[9] B. Beinlich, F. Karsch, A. Peikert, SU(3) latent heat and surface tension from tree level and tadpole improved actions, Phys.Lett. B390 (1997) 268

[10] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, String tension and thermodynamics with tree level and tadpole improved actions, BI-TP 97-18 (1997)

[11] F. Karsch, SU(N) Gauge Theory on asymetric lattices, Nucl.Phys. B205 [FS5] (1982) 285

[12] G. Cella, G. Curci, A. Vicere , B. Vigna, The SU(3) deconfining phase transition with Symanzik action, Phys.Lett.B333 (1994) 457

[13] M.G. Perez, P. van Baal, One-Loop anisotropy for improved actions, Phys.Lett. B392 (1997) 163

[14] J. Engels, F. Karsch und H. Satz, Finite size effects in euclidean lattice thermodynamics for non-interacting bose and fermi systems, Nucl.Phys. B205 [FS5] (1982) 239

[15] G. Burgers, F. Karsch, A. Nakamura, I.O. Stamatescu, QCD on anisotropic lattices, Nucl.Phys. B205 [FS5] (1982) 285

[16] T. Draper, C. Nenkov, M. Peardon, SU(3) lattice gauge autocorrelations with anisotropic action, Nucl.Phys.Proc.Suppl.53 (1997) 997

[17] QCD-TARO Collaboration (M. Fujisaki et al.), Finite temperature gauge theory on anisotropic lattices, Nucl.Phys.Proc.Suppl.53 (1997) 427

[18] F.Karsch, J. Engels, T. Scheideler, Direct determination of the gauge coupling derivates for the energy density in lattice QCD, hep-lat/9709011

[19] K. Symanzik, Continuum limit and improved action in lattice theories, Nucl.Phys.B226: (1983) 187/205

[20] T. DeGrand, A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, F. Niedermayer, The classically perfect fixed point action for SU(3) gauge theory, Nucl.Phys.B454 (1995) 587/615

[21] P. Hasenfratz, F. Niedermayer, Perfect lattice action for asymptotically free theories, Nucl.Phys.B414 (1994) 785

[22] S. Itoh, Y. Iwasaki, T. Yoshie, Stability of instantons on the lattice and the renormalized trajectory, Phys.Lett.147B (1984) 141

[23] J. Fingberg, U. Heller, F. Karsch, Scaling and asymptotic scaling in the SU(2) gauge theorie, Nucl.Phys.B392 (1993) 493

[24] K. Kanaya, H. Satz, Correlation and screening in finite-temperature SU(2) gauge theory, Phys.Rev. D34 (1986) 3193

[25] T.A. DeGrand, C.E. DeTar, Static screening length in the gluon plasma, Phys.Rev. D34 (1986) 2469

[26] M. Gao, Heavy-Quark potential at finite temperature from a string picture, Phys.Rev. D40 (1989) 2708

[27] O. Alvarez, Static potential in string models, Phys.Rev. D24 (1981) 440

[28] R.D. Pisarski, O. Alvarez, Strings at finite temperature and deconfinement, Phys.Rev D26 (1982) 3735

[29] M.Lüscher, K.Symanzik, P.Weisz, Anomalies of the free loop wave equation in the WKB approximation, Nucl.Phys. B173 (1980) 365

[30] Ph. De Forcrand, G. Schierholz, H. Schneider, M. Tepper, The string and its tension in SU(3) lattice gauge theory, Phys.Lett. 160B (1985) 137

[31] S.M. Tse, Effective string tension in the finite-temperature smooth-string model, Phys.Rev. D38 (1988) 2337

[32] P. Olesen, Strings, tachyons and deconfinement, Phys.Lett. 160b (1985) 408

[33] A.K. Rebhan, The nonabelian debeye mass at next-to-leading order, Phys.Rev.D48 (1993) 3967

[34] J.P. Blaizot, E. Iancu, Non perturbative aspects of screening phenomena in abelian and non abelian gauge theories, Nucl.Phys.B459 (1996) 559

[35] U.M. Heller, F. Karsch, J. Rank, Screening masses and improvement in pure SU(2) lattice gauge theory at high temperatures, to be published

[36] J.F. Arvis, The exact q anti-q potential in Nambu string theory, Phys.Lett.127B (1983) 106

[37] F. Karsch, H.W. Wyld, Thermal Green's functions and transport coefficients on the lattice, Phys.Rev. D35 (1987) 2518

[38] D.N. Zubarev, Non-equilibrium statistical thermodynamics, Plenum, New York (1974)

[39] Diskussion mit K. Rummukainen und F. Karsch

[40] A. Hosoya, M. Sakagami, M. Takao, Nonequilibrium Thermodynamics in Fild Theory: Transport Coefficients, Ann.Phys. 154 (1984) 229

[41] A. Hosoya, K. Kajantie, Transport Coefficients of QCD Matter, Nucl.Phys. B250 (1985) 666

[42] S.Gavin, Transport Coefficients in Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collision, Nucl.Phys. A435 (1985) 826

[43] M.H. Thoma, Viscosity coefficient of the quark-gluon plasma in the weak coupling limit, Phys.Lett. B269 (1991) 144

[44] M.H. Thoma, Parton interaction rates un the quark-gluon plasma, Phys.Rev. D49 (1994) 451

[45] W. Schoenmaker, An Algorithm for Transport Coefficients in non-perturbative QCD, Phys.Lett. B182 (1986) 373

[46] A. Nakamura, S. Sakai, K. Amemiya, Transport Coefficients of Quark Gluon Plasma for Pure Gauge Models, Nucl.Phys.Proc.Suppl.53 (1997) 432

[47] S. Jeon, L.G. Yaffe, From Quantum Field Theory to Hydrodynamics: Transport Coefficients and Effective Kinetic Theory, Phys.Rev. D53 (1996) 5799

[48] P. Danielewicz, M. Gyulassy, Dissipative phenomena in quark gluon plasmas, Nucl.Phys.B50 (1985) 53

[49] G. Parisi, R. Petronzio, F. Rapuano, *A Measurement of the String Tension near the Continuum Limit*, Phys.Lett. **128B** (1983) 418.

[50] R. Brower, *The External Field Problem for QCD*, Nucl.Phys. **B190** (1981) 699.

[51] Ph. de Forcrand, C. Roiesnel, *Refined Methods for Measuring Large-Distance Correlations*, Phys.Lett. **151B** (1985) 77.

[52] Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, Ninth Printing*, Dover Publications, New York (1970)

[53] S.L. Adler, Over-relaxation method for the Monte Carlo evalation of the partition function for multiquadratic actions, Phys.Rev.D23 (1981) 2901

[54] N. Cabibbo, E. Marinari, A new method for updating SU(N) matrices in computer simulations of gauge theories, Phys.Lett.B119 (1982) 387

[55] M. Creutz, Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory, Phys.Rev.D21 (1980) 2308

[56] M. Creutz, Overrelaxation and Monte Carlo simulation,Phys.Rev.D36 (1987) 515

[57] A.D. Kennedy, B.J. Pendleton, Improved heatbath method for Monte Carlo calculations in lattice gauge theories, Phys.Lett.B156 (1985) 393

[58] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, Equation of state calculations by fast computing machines, J.Chem.Phys.21 (1953) 1087

Danksagung

Diese Arbeit wurde unter Leitung von Prof. Dr. Frithjof Karsch durchgeführt. Ich danke Herrn Karsch für die hervorragende Betreuung meiner Diplomarbeit und seine Bereitschaft, sich jederzeit mit meinen Fragen und Problemen zu beschäftigen. Darüber hinaus möchte ich mich bei allen anderen in der Arbeitsgruppe für die gute Atmosphäre bedanken.
Besonderer Dank gilt meiner Mutter Ursula Kaczmarek, die mich während des gesamten Studiums unterstützt hat.

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit mit keinen weiteren als im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfmitteln angefertigt habe.

Olaf Kaczmarek