Elektromagnetische Strahlungskorrekturen zum Prozess $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$

Diplomarbeit
von
Andreas Kaiser

Themenstellung von
PD. Dr. S.Dittmaier

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

28.09.2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Ergebnisse, die aus Quantenfeldtheorien, wie z.B. der Quantenelektrodynamik (QED), gewonnen wurden, konnten an vielen Effekten, wie dem Lamb-Shift in den Spektrallinien des Wasserstoffatoms oder am anomalen magnetischen Moment des Elektrons und des Myons überprüft werden. Dabei stellte man stets eine bemerkenswerte Übereinstimmung von experimentellen Ergebnissen und den theoretischen Vorhersagen fest. Die Quantenfeldtheorie als solche ist also ein erprobtes Konzept, um die uns umgebende Welt zu beschreiben. Nun sind aber insgesamt vier Naturkräfte bekannt, und die Elektromagnetische Kraft, die durch die QED erklärt wird ist nur eine davon. Eines der großen Ziele ist es daher alle Kräfte in einer Theorie zu vereinigen. Ein umfassendes Modell, das zumindest die Elektromagnetischen und Schwachen Phänomene auf die gemeinsame Grundlage, der Elektroschwachen Wechselwirkung stellt, ist das Glashow-Salam-Weinberg-Modell (GSW-Modell) oder Standardmodell der Elektroschwachen Wechselwirkung.

Das einzige Teilchen des Glashow-Salam-Weinberg-Modells, das bis heute noch nicht experimentell nachgewiesen werden konnte, ist das Higgs-Boson. Dieses hypothetische Teilchen ist allerdings auch ein wesentlicher Bestandteil des GSW-Modells, da es der zugrundeliegende Higgs-Kibble-Mechanismus vermag, sowohl den Elektroschwachen Eichbosonen, als auch den fundamentalen Fermionen eine Masse zu geben. Bis heute wurde auch kein weiterer Mechanismus gefunden, der in der Lage wäre die Existenz der Massen auf so einfache Weise zu erklären. Es wäre also sehr interessant, ein Higgs-Boson in einem Experiment zu finden und näher untersuchen zu können. So könnte z.B. anhand der Untersuchung der Kopplungen eines Higgs-Bosons an die bekannten Fermionen entschieden werden, ob dieses Higgs-Boson das Higgs-Boson des Standardmodells ist, oder ob es sich um eines der Higgs-Bosonen einer supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells handelt (siehe dazu [15], [17], [18], [19] und [20]). Da das Higgs-Boson allerdings proportional zur Masse der jeweiligen Fermionen an diese koppelt, ist es an einem e^+e^--Collider kaum möglich ein Higgs-Ereignis direkt im sogenannten S-Kanal zu beobachten, da es im Untergrund der vielen γ- und Z-Ereignisse verloren geht. Diese Situation bessert sich jedoch erheblich, wenn man Myonen statt Elektronen zur Kollision bringt. Myonen sind über 200 mal schwerer als Elektronen, was den Wirkungsquerschnitt $\sigma(\mu^-\mu^+ \to H^* \to f\bar{f})$

gegenüber dem Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^- e^+ \to H^* \to f\bar{f})$ um einen Faktor von ca. 40000 verstärkt, während die anderen Reaktionskanäle weitgehend unverändert bleiben. Ein Myon-Collider, wie er z.B. in [13] diskutiert wird, ist also eine vorzügliche Maschine, um sowohl nach einem Higgs-Boson zu suchen, als auch seine Eigenschaften näher zu untersuchen. Thema dieser Diplomarbeit ist es daher, den Wirkungsquerschnitt für den Prozess $\mu^- \mu^+ \to f\bar{f}$ zu untersuchen, und die photonischen Korrekturen inkl. der Abstrahlung reeller Photonen zu berechnen.

Ein wesentliches Problem in der Suche nach dem Higgs-Boson ist, dass seine Masse von Seite der Theorie her nicht näher bestimmt werden kann, da sie einer der freien Parameter des Standardmodells ist. Theoretische Schranken für die Higgs-Boson-Masse M_H ergeben sich nur, wenn man betrachtet, bis zu welchen Energien sich das Standardmodell noch störungstheoretisch auswerten läßt. Dabei ist es klar, dass bei Energien, die in der Grössenordnung der Planck-Masse $\Lambda_{Pl} \approx 10^{19}$ GeV liegen, das Standardmodell die dann vorliegende Physik nicht mehr richtig beschreiben kann, da hier Effekte der Quantengravitation nicht mehr vernachlässigt werden können. Das Standardmodell wird insofern zu einer effektiven Theorie für niedrige Energien. Je nachdem, wo man die Energiegrenze Λ setzt, ab der sogenannte neue Physik zum Tragen kommt, erhält man verschiedene Abschätzungen für den erlaubten Massenbereich eines Higgs-Bosons (siehe [21] und [22]). So reichen die Massenabschätzungen von $160 \leq M_H \leq 170$ GeV für $\Lambda = 10^{19}$ GeV bis $80 \leq M_H \leq 500$ GeV für $\Lambda = 10^4$ GeV. Es bleibt also nur die Möglichkeit in Experimenten nach Higgs-Bosonen direkt, oder nach Effekten, die durch die Anwesenheit eines Higgs-Bosons verursacht werden, zu suchen. Die vorhandenen experimentellen Daten von e^+e^- Collidern, an denen insbesondere im Kanal $e^+e^- \to ZH$ nach Higgs-Bosonen gesucht wird, setzen zumindest eine untere Schranke an die Masse des Higgs-Bosons. Diese Schranke liegt zur Zeit, mit einem Vertrauensniveau von 95 %, bei $M_H \geq 107.9$ GeV für ein Standardmodell-Higgs-Boson (siehe [8]). Durch die Kombination vorläufiger Ergebnisse Elektroschwacher Messungen mit den theoretischen Einschränkungen, die sich ergeben, wenn man von der Richtigkeit des Standardmodells ausgeht, kann auch eine Higgs-Boson-Masse berechnet werden. So wird in [28] die Masse des Higgs-Bosons mit $H_H = 77^{+69}_{-39}$GeV angegeben, was einen Bereich von $38 \leq M_H \leq 146$ GeV bedeutet. Da aber sehr leichte Higgs-Bosonen experimentell bereits ausgeschlossen wurden, ist ein Standardmodell Higgs-Boson zu erwarten, das eine Masse von $107.9 \leq M_H \leq 146$ GeV besitzt.

Kapitel 1

Das Standardmodell

Das Elektroschwache Standard- oder Glashow-Salam-Weinberg-Modell beschreibt die Schwachen und Elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen. Die Wechselwirkungen der fundamentalen Fermionen werden dabei durch den Austausch von sogenannten Eichbosonen vermittelt, die über lokal geltende Symmetrien in die Theorie eingeführt werden. Dabei wird angenommen, daß der Theorie eine Symmetrie zugrunde liegt, die die beobachtbaren physikalischen Observablen nicht ändert. Dargestellt wird dieses durch die Forderung, dass die zugrundeliegende Lagrangefunktion ihre Form nicht ändert, wenn man eine Transformation der Symmetriegruppe auf die Objekte in der Lagrangefunktion anwendet. Um diese Eigenschaft der Lagrangefunktion zu gewährleisten, müssen dort Eichfelder eingeführt werden, die zu zusätzlichen Teilchen, den Eichbosonen, führen. Die im Fall des Standardmodells verwendete Symmetrie ist durch die Gruppe $SU(2)_W \times U(1)_Y$ gegeben.

1.1 Darstellung der Symmetrie

Eine kontinuierliche Symmetrietransformation, die auf ein Multiplett von Fermionen Ψ wirkt, kann geschrieben werden in der Form

$$\Psi \to \Psi' = U(\theta^a)\Psi, \tag{1.1}$$

mit einer unitären Matrix

$$U(\theta^a) = \exp\{igT^a\theta^a\}, \tag{1.2}$$

wobei g eine beliebige Kopplungskonstante und T^a die Generatoren der Gruppentransformation U sind. Im Fall der Elektroschwachen Wechselwirkung wählt man die Generatoren für die Schwache Isospin-Gruppe $SU(2)_W$ proportional zu den Pauli-Matrizen σ^i und den Generator der Hyperladungs-Gruppe $U(1)_Y$ proportional zu 1 :

$$T_W^a \quad = \quad I^a = \begin{cases} \frac{\sigma^a}{2} & \text{für} \quad \Psi_L, \\ 0 & \text{für} \quad \Psi_R, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$T_Y = Y/2 = Q - I_3. \tag{1.4}$$

1.2 Lagrangedichte des Standardmodells

Die Lagrangedichte des Elektroschwachen Standardmodells setzt sich aus verschiedenen Anteilen zusammen. Die Herkunft und Bedeutung dieser Anteile soll in diesem Abschnitt erläutert werden.

1.2.1 Fermionischer Anteil

Der fermionische Anteil beschreibt die freie Ausbreitung der Fermionen. Dabei werden vorerst alle Fermionen als masselos behandelt, da die Einführung von Massen hier zu einer Verletzung der $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Eichinvarianz führen würde. Ferner sollen die linkshändigen Feldkomponenten $\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$ als $SU(2)_W$-Dublett und die rechtshändigen Feldkomponenten $\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$ als $SU(2)_W$-Singlett transformieren. Die Lagrangedichte der freien Fermionen ist dann

$$\mathcal{L}_{Fermion} = \sum_{Fermionen} \left(\bar{\Psi}_L \, \not{\partial} \Psi_L + \bar{\psi}_R \, \not{\partial} \psi_R \right), \tag{1.5}$$

wobei

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{1,L} \\ \psi_{2,L} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Die bekannten elementaren Fermionen gliedern sich dabei wie folgt in dieses Schema:

$$\Psi_{l_L} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

$$\psi_{l_R} = e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R, \tag{1.8}$$

$$\Psi_{q_L} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

$$\psi_{q_R} = u_R, \quad d_R, \quad c_R, \quad s_R, \quad t_R, \quad b_R. \tag{1.10}$$

1.2.2 Yang-Mills-Anteil

Fordert man nun Eichinvarianz der Lagrangedichte unter einer lokalen Transformation, d.h. unter einer separaten Eichtransformation an jedem einzelnen Raumzeitpunkt, so stellt man fest, dass der fermionische Anteil allein nicht eichinvariant ist. Es müssen noch weitere Felder, die Vektorfelder, in die Lagrangedichte eingeführt werden, um die Eichinvarianz wieder herzustellen. Formal geschieht dieses durch den Übergang zur kovarianten Ableitung

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu(x) - i g_2 I^a W_\mu^a(x) \tag{1.11}$$

mit den Kopplungen

$$g_1 = \frac{e}{\cos\theta_w}, \qquad g_2 = \frac{e}{\sin\theta_w}. \tag{1.12}$$

Dabei ist e die aus der Elektrodynamik bekannte Elementarladung des Elektrons und θ_w der Weinberg-Winkel. Die Eichinvarianz wird dabei durch das Transformationsverhalten der Vektorfelder hergestellt. Es werden so im Modell insgesamt vier Vektorfelder $B_\mu, W_\mu^0, W_\mu^1, W_\mu^2$ eingeführt, aus denen sich die bekannten Vektorfelder für das Photon und die drei Schwachen Austauschteilchen $Z, W^\pm$ herleiten lassen:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \tag{1.13}$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^0 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Der Weinberg-Winkel θ_w, der hier als Mischungswinkel auftritt, hängt von den noch nicht eingeführten Eichbosonenmassen ab. Um später ein masseloses Photonfeld zu erhalten, muss θ_w so gewählt werden, dass $\cos\theta_w = M_W/M_Z$ ist.

Für den freien Anteil der Eichfelder addiert man den Term

$$\mathcal{L}_{Eichfelder} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} \tag{1.15}$$

wobei

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{1.16}$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \tag{1.17}$$

Dieser Anteil ist für sich bereits eichinvariant und beschreibt die freie Propagation, sowie die Wechselwirkungen der Eichfelder untereinander. Somit hat der gesamte Yang-Mills-Anteil, inklusive Fermionen, die Form

$$\mathcal{L}_{YM} = \sum_f \left(\bar{\Psi}_{f,L} \not{D} \Psi_{f,L} + \bar{\psi}_{f,R} \not{D} \psi_{f,R} \right) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu}. \tag{1.18}$$

1.2.3 Higgs-Anteil

Da bis jetzt noch kein Teilchen eine Masse hat, was natürlich im Widerspruch zu den experimentellen Daten steht, sollen jetzt die Massen der Elektroschwachen Eichbosonen eingeführt werden. Wenn die Eichbosonen eine von Null verschiedene Masse haben sollen, kann aber die $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Symmetrie nicht exakt gelten, d.h. sie muss durch einen weiteren Term gebrochen werden. Der Higgs-Anteil hat genau diese Funktion, da er ein Potential V enthält, durch das die $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Symmetrie spontan gebrochen wird. Dazu führt man ein Dublett Φ aus zwei komplexen Skalarfeldern ein, so dass insgesamt vier neue Freiheitsgrade in der Theorie zur Verfügung stehen. Drei dieser Freiheitsgrade werden nun gebraucht, um den Austauschteilchen der Schwachen Wechselwirkung eine Masse, und somit auch eine longitudinale Polarisation, zu geben. Über das Potential

$$V(\Phi) = -\mu^2(\Phi^\dagger\Phi) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \qquad \lambda, \mu^2 > 0 \tag{1.19}$$

wird dem skalaren Feld ein Grundzustandswert gegeben, der von Null verschieden ist. Sei dieser Grundzustand gegeben durch

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v = 2\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \tag{1.20}$$

so kann der allgemeine Zustand Φ über die Feldanregungen $H, \chi, \phi^+, \phi^- = (\phi^+)^\dagger$ beschrieben werden:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{v+H+i\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Die Feldanregungen H, χ, ϕ^+, ϕ^- sind dabei reelle Felder. Das Feld H, das dem Higgs-Boson zugeordnet wird, ist jedoch das einzige neue physikalische Feld. Die Felder χ, ϕ^+, ϕ^- erzeugen sogenannte Pseudo-Goldstone-Bosonen, deren Freiheitsgrade die longitudinale Polarisation der Eichbosonen Z, W^+ und W^- ermöglichen. Der Beitrag zur Lagrangedichte ist dann

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi), \tag{1.22}$$

und es können durch Ausmultiplizieren der Lagrangedichte folgende Werte für die Massen der Eichbosonen abgelesen werden:

$$M_W = \frac{ev}{2s_w}, \qquad M_Z = \frac{ev}{2s_wc_w}, \qquad M_\gamma = 0, \qquad M_H = \sqrt{2\mu^2}. \tag{1.23}$$

1.2.4 Yukawa-Anteil

Es fehlen noch Massenterme für die Fermionen. Da Terme der Form $m\bar{\Psi}\Psi$ nicht eichinvariant wären, werden die Massen über Kopplungen der Fermionen an das Skalarfeld Φ erzeugt. Der von Null verschiedene Wert des Grundzustandes Φ_0 gibt dann auch den Fermionen eine Masse. Realisiert wird dieses über Yukawa-Kopplungen. Für die Massen der Leptonen führt man einen Term

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{Leptonen} = -\bar{\Psi}_{lep}^L G^{lep} \psi_{lep}^R \Phi + h.c. \tag{1.24}$$

in die Lagrangedichte ein. Die Matrix G^{lep} mischt dabei die drei Fermiongenerationen untereinander. Mit einer unitären Transformation U_{lep} können nun die Wechselwirkungszustände Ψ in Masseneigenzustände $\hat{\Psi}$ transformiert werden:

$$\hat{\Psi}_{lep} = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_e \\ \hat{\Psi}_\mu \\ \hat{\Psi}_\tau \end{pmatrix} = U_{lep} \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_\mu \\ \Psi_\tau \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

Die diagonale Matrix M_{lep}, die die Werte der Leptonenmassen enthält, erhält man dann durch:

$$M_{lep} = \frac{v}{\sqrt{2}} U_{lep} G^{lep} U_{lep}^{\dagger}. \tag{1.26}$$

Um den Quarks Massen zu geben geht man analog vor. Die Yukawa-Kopplungen der Quarks werden dabei durch den Term

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{Quarks} = -\bar{\Psi}_Q^L G^+ \psi_{q+}^R \tilde{\Phi} - \bar{\Psi}_Q^L G^- \psi_{q-}^R \Phi + h.c. \tag{1.27}$$

bestimmt. Hier ist $\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^*$ das ladungskonjugierte Higgs-Dublett, und die Matrizen G^+ und G^- mischen wieder die drei Fermiongenerationen untereinander. Der Index Q bezeichnet hierbei die Quark-Dubletts, während mit $q+$ die positiv geladenen rechtshändigen Quarks und mit $q-$ die negativ geladenen rechtshändigen Quarks bezeichnet werden. Über entsprechende Matrizen U^{q+} und U^{q-} können die Wechselwirkungseigenzustände wieder auf Masseneigenzustände projiziert werden. Betrachtet man dann aber die Wechselwirkungen der Masseneigenzustände, so bleibt im Fall der Quarks auch ein nicht diagonaler Anteil übrig. Die Mischung der Masseneigenzustände, die hieraus resultiert, wird mit der Cabibbo-Kobayschi-Mashawa-Matrix (CKM-Matrix) beschrieben. Sie ist definiert als

$$V = U^{q+} (U^{q-})^{\dagger}. \tag{1.28}$$

Somit ist es möglich, dass sich ein Quark in ein anderes Quark umwandelt, was dazu führt, dass Quantenzahlen wie Strangeness und Charm nicht streng erhalten sind. Eine leptonische CKM-Matrix gibt es nicht, da im Standardmodell die Neutrinos masselos sind. In der CKM-Matrix V gibt es insgesamt vier unabhängige Parameter. Dieses sind drei reelle Drehwinkel und eine Phasendrehung, über die die CP-Verletzung beschrieben wird.

Der Beitrag, der über die Yukawa-Kopplungen in der Lagrangefunktion zu finden ist, ist insgesamt:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\bar{\Psi}_{lep}^L G^{lep} \psi_{lep}^R \Phi - \bar{\Psi}_Q^L G^+ \psi_{q+}^R \tilde{\Phi} - \bar{\Psi}_Q^L G^- \psi_{q-}^R \Phi + h.c.. \tag{1.29}$$

1.3 Quantisierung

Die Quantisierung soll mit der Pfadintegralmethode erfolgen. Hierzu muss das Wirkungs-Integral über alle möglichen Feldkonfigurationen berechnet werden. Ein Problem, das dabei auftritt, betrifft die Integration über die Eichfelder im Pfadintegral. Da an jedem Raumzeitpunkt x ein neuer Eichparameter θ^a gewählt werden kann, enthält das Maß $\mathcal{D}A^{\theta^a}$ für jeden Raumzeitpunkt auch das Gruppenvolumen der Eichgruppe, welches unendlich ist. Da die Integration über $\mathcal{D}\theta^a$ jedoch ausfaktorisiert werden kann, und die physikalischen Eigenschaften per Definition nicht von der Eichung abhängen können, ist es möglich, eine spezielle

Wahl für die Eichung zu treffen. Eine solche Wahl wird durch Hinzufügen eines Eichfixierungsterms $\mathcal{L}_{fix}$ realisiert:

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2}((F_\gamma)^2 + (F_Z)^2 + 2F_+F_-). \tag{1.30}$$

Hierbei sind die einzelnen Fixierungsterme in allgemeiner R_ξ-Eichung gegeben durch

$$\begin{aligned} F_\gamma &= (\xi_1^\gamma)^{-1/2}\partial_\mu A^\mu, \\ F_Z &= (\xi_1^Z)^{-1/2}\partial_\mu Z^\mu - M_Z(\xi_2^Z)^{1/2}\chi, \\ F_\pm &= (\xi_1^W)^{-1/2}\partial_\mu W^{\pm,\mu} \mp M_W(\xi_2^W)^{1/2}\phi^\pm. \end{aligned} \tag{1.31}$$

In den späteren Rechnungen wird allerdings die t'Hooft-Feynman-Eichung benutzt, bei der alle Eich-Parameter $\xi = 1$ gesetzt werden.

Da durch diese Form der Eichfixierung jedoch auch unphysikalische Freiheitsgrade quantisiert werden, muß nun noch ein weiterer Term zugefügt werden, der diese Freiheitsgrade unphysikalischer Felder wieder kompensiert. In diesem Term tauchen Grassmann-wertige Hilfsfelder $u^\beta(x)$ und $\bar{u}^\alpha(x)$, die sogenannten Faddeev-Popov Geistfelder, auf:

$$\mathcal{L}_{FP} = \bar{u}^\alpha(x)K_{\alpha\beta}u^\beta(x), \qquad \alpha,\beta = +,-,Z,\gamma, \tag{1.32}$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\delta F_\alpha}{\delta\theta^\beta(x)}. \tag{1.33}$$

$K_{\alpha\beta}$ beschreibt dabei die Änderung der Eichfixierungsoperatoren bei infinitesimalen Eichtransformationen.

Nun ist die vollständige Lagrangedichte des Glashow-Salam-Weinberg-Modells

$$\mathcal{L}_{GSW} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{Yukawa} + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{FP}. \tag{1.34}$$

Im Folgenden soll nun kurz dargestellt werden, wie mit Hilfe dieser Lagrangefunktion Vorhersagen über Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten gemacht werden können.

1.3.1 Das S-Matrixelement

Zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsbreiten benötigt man Kenntnisse über den S-Operator. Mit dem S-Operator wird die Übergangsamplitude eines einlaufenden Teilchenzustandes $|i\rangle$, der zu verstehen ist als $\lim_{t\to-\infty}|\psi_i(t)\rangle$, zu einem Endzustand $|f\rangle$, definiert als $\lim_{t\to\infty}|\psi_f(t)\rangle$, beschrieben. Dabei wird angenommen, dass die Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ für $t\to\infty$ freie Zustände, ohne jede Wechselwirkung sind. Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang $|i\rangle \to |f\rangle$ ist dann

$$P_{|i\rangle\to|f\rangle} = |\langle f|\,S\,|i\rangle|^2\,. \tag{1.35}$$

Da stets Impulserhaltung gilt und man im wesentlichen an Übergängen interessiert ist, bei denen $|i\rangle \neq |f\rangle$, spaltet man von S die Übergangsamplitude M_{fi}, die nur die Wechselwirkung beschreibt, ab:

$$\langle f|\, S\, |i\rangle = \langle f|\, \mathbf{1}\, |i\rangle + i(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)M_{fi}. \tag{1.36}$$

p_i ist hierbei der Viererimpuls des einlaufenden und p_f der Impuls des auslaufenden Zustandes. $|M_{fi}|^2$ ist dann die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Übergang $|i\rangle \to |f\rangle$. Die Amplitude M_{fi} hängt dabei von den Impulsen p_k der einlaufenden Teilchen und den Impulsen k_l der auslaufenden Teichen ab. Das zugehörige Phasenraumvolumen berechnet sich bei n Teilchen im Endzustand zu

$$\Phi_f = \int \left(\prod_{l=1}^{n} \frac{d^3\vec{k}_l}{(2\pi)^3 2k_l^0}\right)(2\pi)^4\delta^4(p_i - \sum_{l=1}^{n} k_l). \tag{1.37}$$

Der Wirkungsquerschnitt σ für eine Teilchenreaktion der Form
$A + B \to 1 + 2 + \ldots + n$ ergibt sich dann aus

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{2\kappa(S, m_A^2, m_B^2)} \int \left(\prod_{l=1}^{n} \frac{d^3\vec{k}_l}{(2\pi)^3 2k_l^0}\right)\delta^4(p_i - \sum_{l=1}^{n} k_l)\, |M_{fi}|^2 \tag{1.38}$$

mit der Källen-Funktion definiert als

$$\kappa(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz} \tag{1.39}$$

und der Mandelstam-Variable $S = (p_A + p_B)^2$, die gleich dem Quadrat der Schwerpunktsenergie der Teilchenstreuung ist.

1.3.2 Green-Funktionen und erzeugendes Funktional

Green-Funktionen $G^{\phi_1\ldots\phi_k}(x_1, \ldots, x_k)$ sind definiert als Vakuumerwartungswerte eines zeitgeordneten Produktes von Feldoperatoren

$$G^{\phi_1\ldots\phi_k}(x_1, \ldots, x_k) = \langle 0|\, T\phi_1(x_1)\ldots\phi_k(x_k)\, |0\rangle \tag{1.40}$$

Hierbei sollen die Operatoren $\phi_1(x_1), \ldots, \phi_k(x_k)$ stellvertretend für die Feldoperatoren aller auftretenden Teilchen verwendet werden. Aus den Green-Funktionen können mit dem Lehmann-Symanzik-Zimmermann-Reduktionsschema (siehe [2]) Vorhersagen des Modells gewonnen werden, indem die Amplitude M_{fi} über die Green-Funktionen bestimmt wird. Die Green-Funktionen an sich können dabei aus dem Erzeugenden Funktional $Z[J]$ gewonnen werden. Die Hilfsgröße J nennt man die Erzeugende oder die Quelle des Feldes ϕ, sie wird bei der Berechnung der Green-Funktionen später wieder auf Null gesetzt. Das Erzeugende Funktional wird definiert als

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{i \int d^4x(\mathcal{L}_{GSW} + \phi J)\right\}. \tag{1.41}$$

Die Normierung des Integrals erfolgt über den Faktor $\mathcal{N}$. Eine gesuchte Green-Funktion kann nun durch eine Funktionalableitung nach der entsprechenden Quelle gewonnen werden

$$G^{\phi_1 \ldots \phi_k}(x_1, \ldots, x_k) = \left. \frac{\delta^k Z}{i\delta J_1(x_1) \ldots i\delta J_k(x_k)} \right|_{J=0}. \tag{1.42}$$

Die zusammenhängenden Green-Funktionen $G^{\phi_1 \ldots \phi_k}_{con}(x_1, \ldots, x_k)$ gewinnt man, wenn man zum Funktional

$$Z_{con}[J] = \ln Z[J] \tag{1.43}$$

übergeht. Das Erzeugende Funktional kann nun in eine Störungsreihe entwickelt werden, indem man die Lagrangedichte in einen freien Anteil $\mathcal{L}_0$ und einen wechselwirkenden Anteil $\mathcal{L}_I$ aufteilt. Man erhält somit ein Erzeugendes Funktional Z_0 für den freien und ein Erzeugendes Funktional Z_I für den wechselwirkenden Teil der Theorie. Das Funktional Z_I kann dann in eine Störungsreihe in der Kopplungskonstanten entwickelt werden.

Die Entwicklung in der Kopplungskonstanten läßt sich auch graphisch darstellen. Die Feldpunkte $x_1, \ldots, x_k$ in den Green-Funktionen werden durch Punkte, und die in der Entwicklung auftretenden Propagatoren durch Linien, die die Feldpunkte verbinden, dargestellt. Die Green-Funktionen können so als Graphen geschrieben werden. In dieser Entwicklung treten in höherer Ordnung dann im Gegensatz zu den äußeren Feldpunkten $x_1, \ldots, x_k$ auch sog. innere Feldpunkte $y_1, \ldots, y_l$ auf, die ebenfalls durch Punkte symbolisiert werden.

Genauso, wie man Green-Funktionen ableiten kann, kann man auch Vertexfunktionen über ein Erzeugendes Funktional $\Gamma[\tilde{\phi}]$ ableiten. Vertexfunktionen werden definiert als

$$\Gamma^{\phi_1 \ldots \phi_k}(x_1, \ldots, x_k) = \left. G^{\phi_1 \ldots \phi_k}_{amp}(x_1, \ldots, x_k) \right|_{nur\, 1PI-Graphen}, \tag{1.44}$$

wobei $G^{\phi_1 \ldots \phi_k}_{amp}(x_1, \ldots, x_k)$ die amputierten Green-Funktionen, d.h. Greenfunktionen ohne äußere Feldpunkte, sind. Der Zusatz „$nur\, 1PI - Graphen$“ meint, dass nur Green-Funktionen betrachtet werden, die nicht durch Weglassen einer Linie in zwei separate Green-Funktionen ausfaktorisieren. Das Erzeugende Funktional $\Gamma[\tilde{\phi}]$ der Vertexfunktionen ist die Legendre-Transformierte von Z_{con} und wird auch als Effektive Wirkung bezeichnet:

$$\Gamma[\tilde{\phi}] = Z_{con}[J] - i \int d^4x J[\tilde{\phi}(x)]\tilde{\phi}(x) \tag{1.45}$$

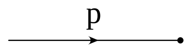
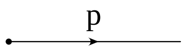
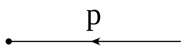
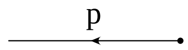
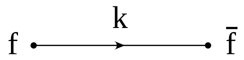
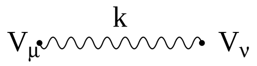
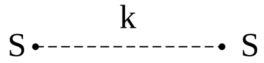
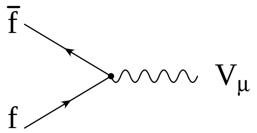
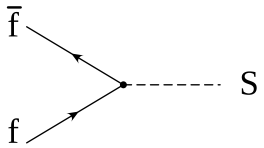
mit

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{\delta}{i\delta J(x)} Z_{con}[J]. \tag{1.46}$$

Die Vertexfunktionen erhält man auch hier wiederum durch die entsprechenden Funktionalableitungen:

$$\Gamma^{\phi_1 \ldots \phi_k}(x_1, \ldots, x_k) = \left. \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}(x_k)} \Gamma(\tilde{\phi}) \right|_{\tilde{\phi}=0}. \tag{1.47}$$

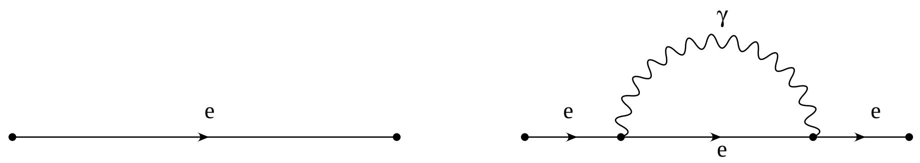
Tabelle 1.1: Die verwendeten Feynman-Regeln im Impulsraum

	$= u(p)$
	$= \bar{u}(p)$
	$= v(p)$
	$= \bar{v}(p)$
	$= \dfrac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2}$
	$= \dfrac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - M_V^2}$
	$= \dfrac{i}{k^2 - M_S^2}$
	$= ie\gamma^\mu(C_V^+\omega_+ + C_V^-\omega_-)$
	$= ie(C_S^+\omega_+ + C_S^-\omega_-)$

Insgesamt ist es jetzt möglich, die erhaltenen Green- und Vertexfunktionen graphisch als Feynman-Diagramme aufzuschreiben, die dann die Störungsreihe symbolisieren und anhand von Feynman-Regeln direkt algebraisch ausgewertet werden können. Die von mir verwendeten Feynman-Regeln und Konventionen für die Kopplungen stammen insgesamt aus [1]. Diese Feynman-Regeln (siehe Tabelle 1.1) sind für den Impulsraum definiert und beinhalten weiterhin noch die spezielle Wahl der t'Hooft-Feynman-Eichung. Die Größen $u(p)$ und $\bar{u}(p)$ sowie $v(p)$ und $\bar{v}(p)$ sind dabei Spinoren, die für die äußeren Beine eingesetzt werden. Als Vektorfelder V_μ treten das Photon γ und das Z-Boson Z auf und als Skalarfelder S treten das Higgs-Boson H und das Pseudo-Goldstone-Boson χ auf. Mit $C_V^\pm$ und $C_S^\pm$ werden generalisierte Kopplungen beschrieben. Die expliziten Kopplungen für die auftretenden Teilchen stehen in [1] und Gleichung 2.10.

1.4 Renormierung

Wenn in der Störungsentwicklung über die niedrigste Ordnung hinaus auch höhere Ordnungen betrachtet werden, müssen die physikalischen Eingangsparameter noch durch renormierte Grössen ersetzt werden, da Selbstenergien und Vertexkorrekturen Beiträge zu physikalisch messbaren Grössen wie der Teilchenmasse und Ladung geben. So enthält in $\mathcal{O}(\alpha)$ der QED der Elektronenpropagator die Diagramme:



Addiert man diese Diagramme, so sollte sich im Propagator wieder die experimentelle Elektronenmasse ergeben. Dieses Vorgehen nennt man On-Shell-Renormierung, da man durch diese Forderung erreicht, dass für ein freies Teilchen der Masse m mit Impuls p die Massenschalenbedingung $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ in jeder Störungsordnung gültig bleibt. Um nun den Selbstenergiebeiträgen dieser Art Rechnung zu tragen, geht man zu den renormierten Parametern über:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1+\delta Z_e)e, \\ M_{Z,0}^2 &= M_Z^2 + \delta M_Z^2, \\ M_{W,0}^2 &= M_W^2 + \delta M_W^2, \\ M_{H,0}^2 &= M_H^2 + \delta M_H^2, \\ m_{f_i,0} &= m_{f_i} + \delta m_{f_i}, \\ V_{ij,0} &= V_{ij} + \delta V_{ij}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Dabei sind die mit einer Null indizierten Größen nackte Größen, die nicht physikalisch messbar sind. Zudem müssen auch die einzelnen Felder renormiert werden, um endliche Green-Funktionen zu garantieren:

$$\begin{aligned} W_0^\pm &= Z_W^{\frac{1}{2}} W^\pm = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_W) W^\pm, \\ \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{ZZ}^{\frac{1}{2}} & Z_{ZA}^{\frac{1}{2}} \\ Z_{AZ}^{\frac{1}{2}} & Z_{AA}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} & \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} & 1 + \frac{1}{2}\delta Z_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}, \\ H_0 &= Z_H^{\frac{1}{2}} H = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_H) H, \\ f_{i,0}^L &= (Z_{ij}^{f,L})^{\frac{1}{2}} f_j^L = (\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,L}) f_j^L, \\ f_{i,0}^R &= (Z_{ij}^{f,R})^{\frac{1}{2}} f_j^R = (\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,R}) f_j^R. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Die Renormierungskonstanten δZ werden über Renormierungsbedingungen festgelegt. Solche Renormierungsbedingungen beziehen sich z.B. auf die Polstellen von Propagatoren. Die entsprechenden Renormierungskonstanten lassen sich dann durch die Berechnung von Schleifen-Diagrammen bestimmen.

Durch die multiplikative Renormierung in der Form $Z = (1 + \delta Z)$ ist es nun möglich, die Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ in einen Teil $\mathcal{L}$, der von den renormierten Parametern abhängt, und einen Counterterm-Teil $\delta\mathcal{L}$, der nur die Counterterme enthält, aufzuspalten:

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}. \tag{1.50}$$

Die Counterterm-Lagrangefunktion führt zu weiteren Feynman-Diagrammen, die Counterterm-Vertizes enthalten und zu den anderen Diagrammen der Störungsentwicklung addiert werden müssen.

1.5 UV- und IR-Divergenzen

Schreibt man die Störungsreihe als Reihe von Feynman-Diagrammen, so tauchen Diagramme auf, die zu unendlichen Termen führen. Bei diesen unendlichen Termen unterscheidet man zwischen den ultraviolett-(UV-)divergenten und den infrarot-(IR-)divergenten Anteilen in den Schleifenintegralen.

Die UV-Divergenzen ergeben sich aus Schleifenintegralen, die für grosse Integrationsimpulse q nicht beschränkt sind. Solche Integrale treten in den Selbstenergietermen, bei Vertexkorrekturen und in Vertizes mit vier Beinen auf. Insgesamt kompensieren sich diese Unendlichkeiten jedoch, wenn alle Diagramme der entsprechenden Störungsordnung renormiert und aufaddiert werden. Um eine solche Rechnung, in der sich unendliche Terme gegeneinander aufheben, durchführen zu können, müssen die divergenten Integrale regularisiert werden. Bei den UV-Divergenzen geschieht dies z.B., indem man von der Integration in den vier Raumzeitdimensionen zu einer Integration in D Dimensionen übergeht. Wenn man nur Diagramme mit einer Schleife betrachtet, bekommen die UV-divergenten Anteile durch dimensionale Regularisierung die Form eines einfachen Pols für $D = 4$. Insgesamt lassen sich die UV-divergenten Anteile in Summanden der Form

$$\Delta = \frac{2}{4 - D} - \gamma_E + \log(4\pi) \tag{1.51}$$

zusammenfassen, wobei sich die Euler-Konstante $\gamma_E = -\Gamma'(1) = 0.577\ldots$ aus der Gamma-Funktion ergibt. Die Terme proportional zu Δ eliminieren sich, wenn alle UV-divergenten Diagramme der entsprechenden Störungsordnung aufsummiert werden. Der Grenzwert für $D \to 4$ kann dann gebildet werden.

Die IR-Divergenzen können aufgrund der Masselosigkeit des Photons bei kleinen Integrationsimpulsen q in den Schleifenintegralen auftreten. Wird zwischen zwei äußeren Beinen ein Photon ausgetauscht, so führt dies zu einer IR-Divergenz. Diese unendlichen Anteile kompensieren sich erst, wenn auch die Abstrahlung weicher Photonen, d.h. Photonen sehr geringer Energien, in die Rechnung mit einbezogen wird. Ein Weg, die IR-Divergenzen zu regularisieren, ist dem Photon eine kleine Masse λ zu geben. Durch diesen Massenterm wird verhindert, dass die Nenner der Propagatoren, die die IR-Divergenzen hervorrufen, verschwinden. Die IR-divergenten Anteile sind dann proportional zu $\log \lambda$ und heben sich weg, wenn zur Übergangsamplitude für den eigentlichen Prozess auch die Übergangsamplitude eines zugehörigen Soft-Photon-Prozesses addiert wird, bei dem Photonen von den äußeren Beinen abgestrahlt werden. Die Abstrahlung von niederenergetischen Photonen muss auch wegen der Energie-Auflösung von Photon-Detektoren mit in die Rechnung aufgenommen werden. Photonen mit Energien unterhalb einer gewissen Energieschwelle ΔE können von den Detektoren nicht wahrgenommen werden, und deshalb tragen auch Streuungen der Form $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}\gamma$ zum experimentellen Wirkungsquerschnitt für $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$ bei. Die Addition einer Soft-Photon-Korrektur ist also in jedem Fall notwendig, was auch aus dem Bloch-Nordsieck-Theorem (siehe [23]) hervorgeht. Dieses Theorem besagt, dass Übergangsamplituden für die Abstrahlung von Quanten kleiner Energie proportional zur abgestrahlten Gesamtenergie, und nicht proportional zur Anzahl oder Frequenz der abgestrahlten Quanten sind.

Kapitel 2

Techniken zur Auswertung der Theorie

In diesem Kapitel sollen die Techniken beschrieben werden, die für die Berechnung der photonischen Ein-Schleifen-Korrektur der Prozesse $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$ und $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}\gamma$ verwendet wurden. Dabei wird stets angenommen, dass $\mu \neq f$ ist, was bedeutet, dass nur die sog. S-Kanal Diagramme betrachtet werden müssen.

2.1 Die Störungsreihe

Auf der Ebene der Baumgraphen gibt es vier verschiedene Diagramme. Sie unterscheiden sich nur durch das Teilchen, das zwischen dem Myon- und dem Fermionpaar ausgetauscht wird (siehe Abbildung 2.1).

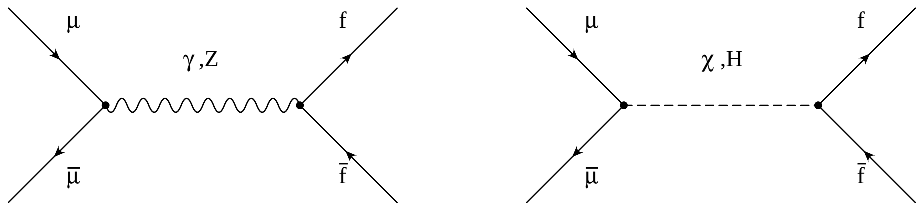


Abbildung 2.1: Die Tree-Level-Diagramme

Es sollen nun alle Elektromagnetischen Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha)$ betrachtet werden, die durch den Austausch von Photonen entstehen. Die QED-Korrekturen sind, da sie den größten Beitrag liefern, auch die wichtigsten Korrekturen. Für QED-Korrekturen gilt die Elektromagnetische $U(1)_{em}$-Eichinvarianz separat, deshalb können diese Korrekturen betrachtet werden, ohne die gesamte Elektroschwache Korrektur in $\mathcal{O}(\alpha)$ untersuchen zu müssen.

Die Selbstenergiebeiträge der äußeren Fermionen werden nicht als separate Diagramme, sondern über die Diagramme, die sich aus der Counterterm-

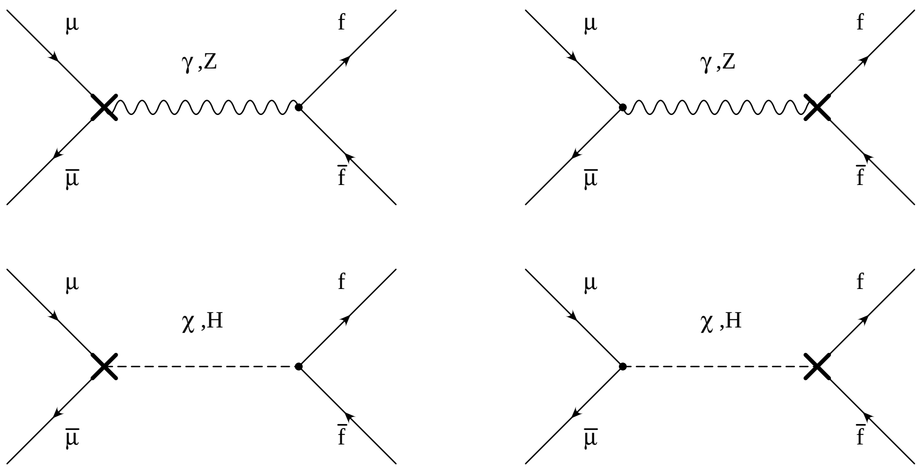


Abbildung 2.2: Counterterm-Diagramme für eine photonische Korrektur in $\mathcal{O}(\alpha)$

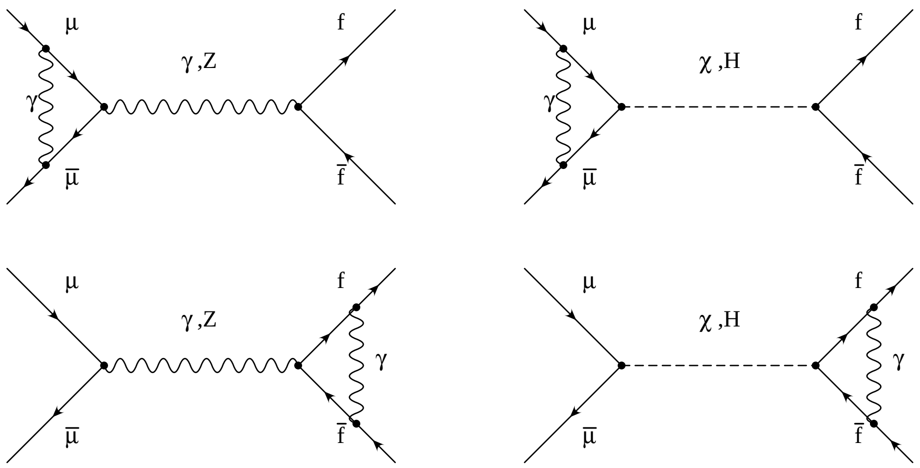


Abbildung 2.3: Die photonischen Vertexkorrekturen

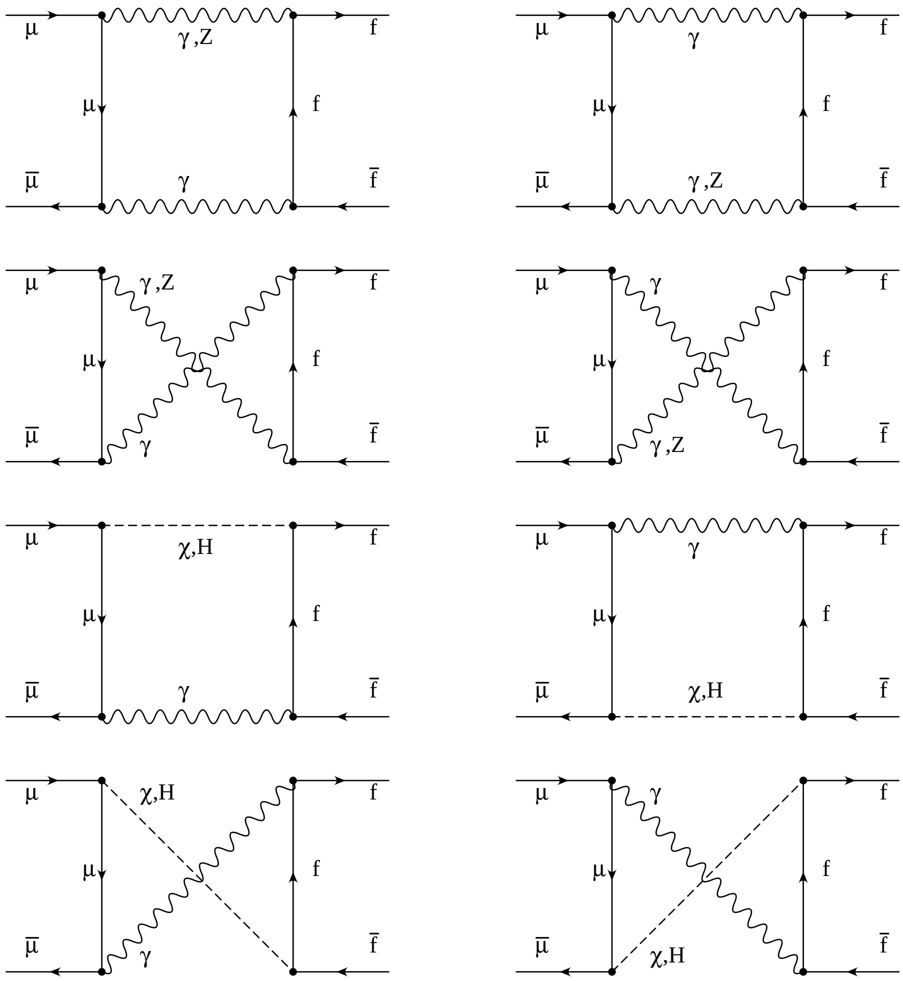


Abbildung 2.4: Box-Diagramme mit Photonaustausch

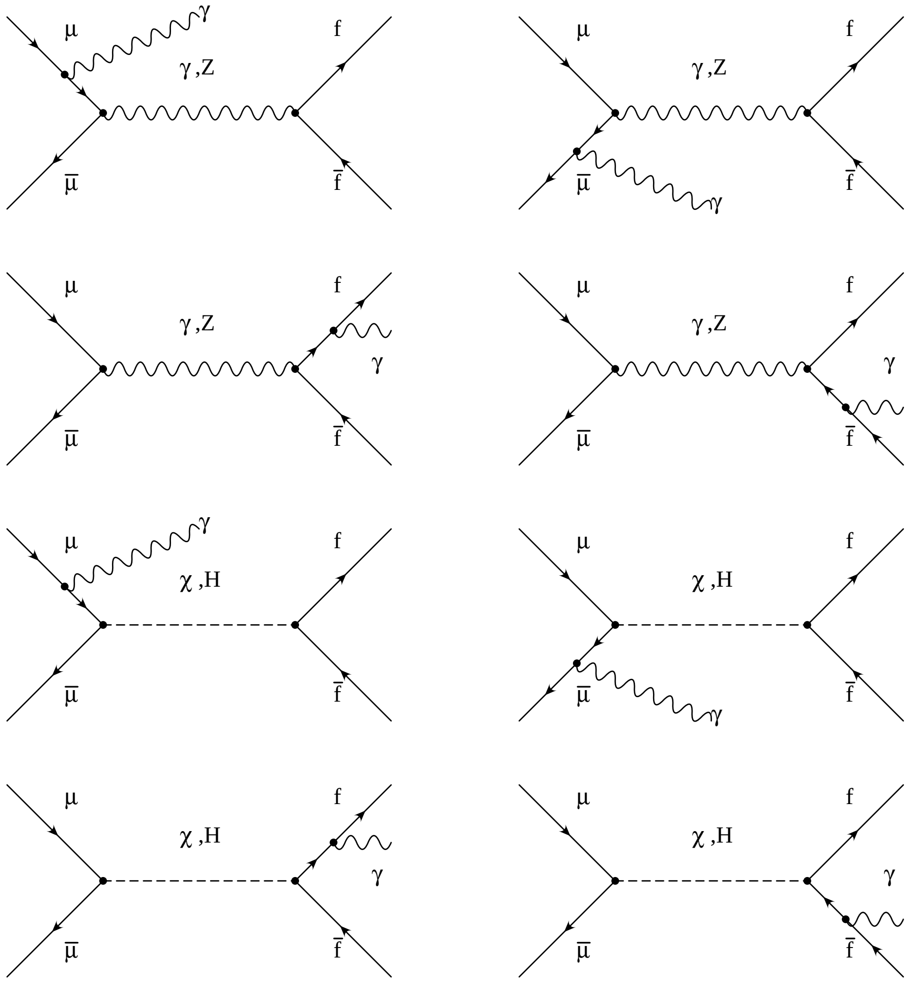


Abbildung 2.5: Bremsstrahlungs-Diagramme

Lagrangefunktion ergeben, betrachtet. Dabei wird eine On-Shell-Renormierung durchgeführt, so dass die Selbstenergiebeiträge durch Counterterm-Vertizes in die Berechnung mit einbezogen werden (siehe Abbildung 2.2). Die Korrekturen zu den Wechselwirkungen der Anfangs- und Endzustände werden beschrieben durch die Diagramme in Abbildung 2.3. In ihnen treten sowohl IR- als auch UV-Divergenzen auf. Um die IR-Divergenzen zu kompensieren, müssen auch die Diagramme in Abbildung 2.5 berücksichtigt werden, in denen neben den beiden Fermionen noch ein zusätzliches Photon im Endzustand auftritt. Weitere IR-divergente Integrale tauchen in den sogenannten Box-Diagrammen auf, die in Abbildung 2.4 aufgeführt sind. Auch diese Divergenzen werden durch die Abstrahlung weicher Photonen kompensiert.

2.2 Schleifen-Integrale

Die Schleifen-Integrale treten bei Diagrammen auf, in denen es einen freien inneren Impuls q gibt. Da die Integration über diesen freien Impuls im Allgemeinen in vier Raumdimensionen nicht konvergiert, geht man zur Berechnung zum allgemeinen Fall mit D Raumdimensionen über:

$$\int d^4q \to (2\pi\mu)^{4-D} \int d^Dq. \tag{2.1}$$

Dieses Vorgehen heißt dimensionale Regularisierung. Der Faktor μ hat dabei die Dimension einer Masse und dient so zur Dimensionserhaltung der physikalischen Größen.

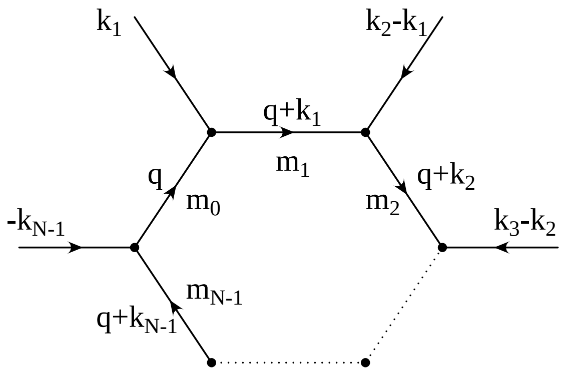


Abbildung 2.6: Impulse und Massen beim N-Punkt-Tensorintegral

Das allgemeine N-Punkt-Tensorintegral, das in Abbildung 2.6 graphisch dargestellt ist, wird definiert als (siehe [1])

$$T^N_{\mu_1 \ldots \mu_k}(k_1, \ldots, k_{N-1}, m_0, m_1, \ldots, m_{N-1}) = \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^Dq \frac{q_{\mu_1} \cdots q_{\mu_k}}{D_0 D_1 \ldots D_{N-1}}. \tag{2.2}$$

Die Faktoren D_0 bzw. D_i im Nenner sind die Nenner der Teilchenpropagatoren auf den inneren Linien. Sie haben die Form

$$D_0 = q^2 - m_0^2 + i\varepsilon, \quad D_i = (q + k_i)^2 - m_i^2 + i\varepsilon. \tag{2.3}$$

Zur besseren Unterscheidung der einzelnen Integrale ordnet man ihnen noch Namen entsprechend der Zahl der äußeren Beine, bzw. Anzahl der äußeren Impulse, zu. So heißen die 1-Punkt-Integrale A, die 2-Punkt-Integrale B, die 3-Punkt-Integrale C usw. Die Tensorintegrale lassen sich weiterhin noch auf die skalaren Integrale $A_0, B_0, C_0, \ldots$ reduzieren, indem man ausnutzt, dass die Lorentzstruktur in den Tensorintegralen nur von den Impulsen $k_1, \ldots, k_{N-1}$ sowie der Metrik $g_{\mu\nu}$ abhängen kann. So muss sich z.B. das Integral $B_{\mu\nu}$ schreiben lassen als

$$B_{\mu\nu}(k_1, m_0, m_1) = g_{\mu\nu} B_{00}(k_1, m_0, m_1) + k_{1\mu} k_{1\nu} B_{11}(k_1, m_0, m_1). \tag{2.4}$$

Multipliziert man diese Gleichung wiederum mit $g^{\mu\nu}$ bzw. $k_1^\mu k_1^\nu$, so können in $B_{\mu\nu}$ Faktoren im Nenner gegen die auftretenden Faktoren q^2 bzw. $k_1^\mu q_\mu$ gekürzt werden. Hierdurch reduziert sich dann die Ordnung des Tensorintegrals bzw. die Anzahl der Propagatoren im Nenner, und man erhält schließlich ein lineares Gleichungssystem, aus dem sich die Koeffizienten der Integrale B_{00} und B_{11} berechnen lassen:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} B_{\mu\nu}(k_1, m_0, m_1) &= A_0(m_1) + m_0^2 B_0(k_1, m_0, m_1) \\
&= D B_{00}(k_1, m_0, m_1) + k_1^2 B_{11}(k_1, m_0, m_1), \\
k_1^\mu k_1^\nu B_{\mu\nu}(k_1, m_0, m_1) &= \frac{k_1^2}{2} A_0(m_1) - \frac{k_1^2}{2}(k_1^2 - m_1^2 + m_0^2) B_1(k_1, m_0, m_1) \\
&= k_1^2 B_{00}(k_1, m_0, m_1) + (k_1^2)^2 B_{11}(k_1, m_0, m_1).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Auch B_1 läßt sich noch weiter reduzieren, so dass letztlich nur skalare Integrale übrig bleiben. Die Abhängigkeiten der skalaren Integrale lassen sich auch über lorentzinvariante Ausdrücke schreiben, so dass sich die in der 1-Loop-Näherung auftretenden Integrale darstellen lassen über die vier Funktionen

$$A_0(m_0) = m_0^2 B_0(0, 0, m_0), \tag{2.6}$$
$$B_0(p_1^2, m_0, m_1), \tag{2.7}$$
$$C_0(p_1^2, (p_1 + p_2)^2, p_2^2, m_0, m_1, m_2) \text{ und} \tag{2.8}$$
$$D_0(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, (p_1 + p_2)^2, (p_1 - p_4)^2, m_0, m_1, m_2, m_3). \tag{2.9}$$

Die Impulse $p_1, \ldots, p_4$ sind dabei die Impulse auf den äußeren Beinen, wobei die Impulse p_1, p_2 als einlaufend und die Impulse p_3, p_4 als auslaufend betrachtet werden. Die Integrale A_0 und B_0 sind UV-divergent, während die IR-Divergenzen in den Integralen C_0 und D_0 enthalten sind. (Für die exakten Formen sowie Definitionen der IR-endlichen Anteile siehe Anhang A.1 oder [1] und [3].)

2.3 Konventionen und Bezeichnungen

Zur besseren Übersicht sollen für die Kopplungen an den Vertizes stets generische Kopplungen verwendet werden. D.h. für die Kopplung eines Fermions an ein Vektorboson wird ganz allgemein ein Term $ie\gamma^\mu(C_V^-\omega_- + C_V^+\omega_+)$ eingesetzt. Dabei bezeichnen C_V^- und C_V^+ die links- bzw. rechtshändige Kopplung des Vektorbosons mit dem Fermion. Für die Kopplung eines Fermions an ein Skalarfeld wird gleichfalls ein allgemeiner Term $ie(C_S^-\omega_- + C_S^+\omega_+)$ eingesetzt, der die links- und rechtshändigen Kopplungen mit den skalaren Teilchen beschreibt. Die Kopplungskonstanten $C^\pm$ für die Kopplung an ein Fermion mit relativer Ladung Q_f und Schwachen Isospin $I_{W,f}^3$ sind dabei gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\gamma\bar{f}f \quad &\to \quad \begin{cases} C_\gamma^+ = -Q_f, \\ C_\gamma^- = -Q_f, \end{cases} \\
Z\bar{f}f \quad &\to \quad \begin{cases} C_Z^+ = -\frac{s_w}{c_w}Q_f, \\ C_Z^- = \frac{I_{W,f}^3 - s_w^2 Q_f}{s_w c_w}, \end{cases} \\
H\bar{f}f \quad &\to \quad \begin{cases} C_H^+ = -\frac{m_f}{2s_w M_W}, \\ C_H^- = -\frac{m_f}{2s_w M_W}, \end{cases} \\
\chi\bar{f}f \quad &\to \quad \begin{cases} C_\chi^+ = i\frac{m_f}{s_w M_W} I_{W,f}^3, \\ C_\chi^- = -i\frac{m_f}{s_w M_W} I_{W,f}^3. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Auftretende Spinorketten und Dirac-Matrizen werden in sog. Standardmatrixelementen $\mathcal{M}^{\sigma\tau}$ gesammelt. Eine Streuamplitude $\mathcal{M}$ kann so in eine Reihe von Formfaktoren $\mathcal{F}_i$ zu verschiedenen Standardmatrixelementen $\mathcal{M}_i$ aufgespalten werden:

$$
\mathcal{M} \;=\; \sum_i \sum_{\sigma=\pm} \sum_{\tau=\pm} \mathcal{F}_i(\sigma,\tau)\mathcal{M}_i^{\sigma\tau}. \tag{2.11}
$$

Für den hier betrachteten Prozess

$$
\mu^-(p_1,\sigma_1) + \mu^+(p_2,\sigma_2) \to f(k_1,\tau_1) + \bar{f}(k_2,\tau_2) \tag{2.12}
$$

wurde folgender Satz von Standardmatrixelementen verwendet:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\gamma_\alpha\omega^\tau v(k_2)\Big], \\
\mathcal{M}_2^{\sigma\tau} &= \Big[\,\bar{v}(p_2)\,\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\omega^\tau v(k_2)\Big], \\
\mathcal{M}_3^{\sigma\tau} &= \Big[\,\bar{v}(p_2)\,\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\;\not{p}_1\omega^\tau v(k_2)\Big], \\
\mathcal{M}_4^{\sigma\tau} &= \Big[\,\bar{v}(p_2)\;\not{k}_1\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\omega^\tau v(k_2)\Big],
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_6^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\ \not{k}_1\omega^\sigma\, u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\ \not{p}_1\omega^\tau v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{11}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\omega^\sigma\, u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\ \not{p}_1\gamma_\alpha\omega^\tau v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{13}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\ \not{k}_1\gamma^\alpha\omega^\sigma\, u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\ \not{p}_1\gamma_\alpha\omega^\tau v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{14}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\ \not{k}_1\gamma^\alpha\omega^\sigma\, u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\gamma_\alpha\omega^\tau v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{15}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\gamma^\beta\omega^\sigma\, u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\omega^\tau v(k_2)\Big].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Dabei bezeichnet p_1 den Impuls des einlaufenden Myons, p_2 den Impuls des einlaufenden Anti-Myons, k_1 den Impuls des auslaufenden Fermions und k_2 den Impuls des auslaufenden Anti-Fermions. Die Helizitäten der Teilchen werden mit σ_1,σ_2 und τ_1,τ_2 gekennzeichnet. Mit ω^σ und ω^τ werden die Projektoren $\omega^\pm = (1 \pm \gamma_5)/2$ bezeichnet. Das Standardmatrixelement $\mathcal{M}_i^{--}$ enthält somit zwei linkshändige Kopplungen, $\mathcal{M}_i^{-+}$ enthält eine linkshändige Kopplung am ersten Vertex und eine rechtshändige Kopplung am zweiten Vertex, usw. In den Formfaktoren befinden sich die Tensor-Integrale oder Ausdrücke, in denen die Tensor-Integrale auf skalare Integrale zurückgeführt wurden. Durch die Formfaktoren wird der dynamische Teil der betrachteten Streuung beschrieben, während die Standardmatrixelemente, da sie die Spinoren der äußeren Teilchen enthalten, die Abhängigkeiten der Streuung vom Polarisationszustand beschreiben. Um auch Vorhersagen für polarisierte Eingangsteilchen machen zu können, muss entsprechend des Polarisationsgrades der eingehenden Teilchenstrahlen gemittelt werden:

$$|\mathcal{M}_{pol}|^2 = \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\tau_1,\tau_2=\pm1} \frac{1}{4}(1+P_1\sigma_1)(1+P_2\sigma_2)|\mathcal{M}(\sigma_1,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)|^2. \tag{2.14}$$

Dabei ist P_1 der Polarisationsgrad des Myonstrahls und P_2 der Polarisationsgrad des Anti-Myonstrahls. Die Polarisationen P_1 und P_2 können dabei Werte zwischen -1 und 1 annehmen, wobei -1 einem zu 100% polarisierten Strahl negativer Helizität, 0 einem unpolarisierten und 1 einem zu 100% polarisierten Strahl positiver Helizität entspricht. Die Polarisationen der Endzustandsteilchen werden nicht gesondert unterschieden, so dass die zugehörigen Amplitudenquadrate hier ohne Gewichtung aufaddiert werden.

2.4 Der Weyl-van-der-Waerden Formalismus

Der Weyl-van-der-Waerden-Formalismus (WvdW-Formalismus) eignet sich besonders zur direkten Übersetzung der erhaltenen Ergebnisse in Computerprogramme. Für eine genaue Beschreibung des WvdW-Formalismus siehe [4] und die entsprechenden Referenzen in [4]. Alle Objekte der Lorentzgruppe werden in diesem Formalismus auf die Darstellungen $D(\frac{1}{2},0)$ und $D(0,\frac{1}{2})$ zurückgeführt. Es werden dadurch zweikomponentige Spinoren eingeführt, die je nach Darstellung durch einen Punkt über dem Index gekennzeichnet werden. Das Punkten von Indizes entspricht dabei dem Komplex-Konjugierten des jeweiligen Spinors $\phi_{\dot{A}} = (\phi_A)^*$. Um den Zusammenhang zwischen der Darstellung $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = D(\frac{1}{2},0) \otimes D(0,\frac{1}{2})$ und der bekannten Dirac-Darstellung mit Vierervektoren und vierkomponentigen Dirac-Spinoren herzustellen, benötigt man lediglich die Matrizen $\sigma^{\mu,\dot{A}B} = (\mathbf{1},\vec{\sigma})$ und $\sigma^{\mu}_{A\dot{B}} = (\mathbf{1},-\vec{\sigma})$. Durch diese Matrizen lassen sich auch die Gamma-Matrizen in chiraler Darstellung schreiben:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu}_{A\dot{B}} \\ \sigma^{\mu,\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Ein vierkomponentiger Dirac-Spinor Ψ wird geschrieben als

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \psi^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Dieses ist besonders praktisch für masselose Teilchen, da sich bei ihnen der Spinor Ψ dann reduziert auf

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^{\dot{A}} \end{pmatrix} \text{bzw.} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

je nach Helizität des betrachteten Teichens.

Um Indizes zu heben oder zu senken benutzt man die Matrix ε^{AB}:

$$\psi^A = \varepsilon^{AB}\psi_B, \quad \psi_A = \psi^B\varepsilon_{BA} \tag{2.18}$$

mit

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{AB} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Ein Spinorprodukt von WvdW-Spinoren wird definiert durch

$$\langle\phi\psi\rangle = \phi_A\psi^A, \quad \langle\phi\psi\rangle^* = \phi_{\dot{A}}\psi^{\dot{A}}. \tag{2.20}$$

Wegen der Definition von ε^{AB} ist das Spinorprodukt antisymmetrisch, und die Spinorprodukte erfüllen weiterhin eine Schouten-Identität:

$$\langle\phi\psi\rangle = -\langle\psi\phi\rangle, \quad \langle\phi\phi\rangle = 0, \tag{2.21}$$

$$\langle\phi\psi\rangle\langle\xi\eta\rangle + \langle\phi\xi\rangle\langle\eta\psi\rangle + \langle\phi\eta\rangle\langle\psi\xi\rangle = 0. \tag{2.22}$$

Ein beliebiger Vierervektor k^μ kann in den WvdW-Formalismus übersetzt werden, indem man ihn mit der Matrix $\sigma^{\mu,\dot{A}B} = (\mathbf{1},\vec{\sigma})$ kontrahiert. Man erhält so für $k^\mu = (k^0,\vec{k})$:

$$K^{\dot{A}B} = \sigma^{\mu,\dot{A}B}k_\mu = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + ik_2 \\ k_1 - ik_2 & k_0 - k_3 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Ein reeller Vierervektor bedeutet in diesem Fall, dass die Matrix $K^{\dot{A}B}$ hermitesch ist, und somit Eigenvektoren $n_{i,A}$ mit Eigenwerten λ_i existieren, zu deren Basis $K^{\dot{A}B}$ zerlegt werden kann:

$$K_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \lambda_i \, n_{i,\dot{A}} \, n_{i,B}, \tag{2.24}$$

wobei die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\vec{k} = |\vec{k}|(\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$ gegeben sind durch

$$\lambda_{1,2} = k^0 \pm |\vec{k}|, \tag{2.25}$$

$$n_{1,A} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad n_{2,A} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Die Eigenvektoren $n_{i,A}$ sind dabei so gewählt, dass sie orthogonal zueinander sind. D.h. es gilt $\langle n_{1,A} n_{1,A} \rangle = 0$ und $\langle n_{2,A} n_{1,A} \rangle = - \langle n_{1,A} n_{2,A} \rangle = 1$. Nützlich ist es auch, Spinoren $\kappa_{i,A}$ zu definieren durch

$$\kappa_{i,A} = \sqrt{\lambda_i} n_{i,A}, \tag{2.27}$$

so dass

$$K_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \kappa_{i,\dot{A}} \kappa_{i,B}. \tag{2.28}$$

Aus dem Produkt der Eigenwerte können nun weitere nützliche Relationen hergeleitet werden:

$$\det(K_{\dot{A}B}) = \lambda_1 \lambda_2 = k^\mu k_\mu, \tag{2.29}$$

$$\langle \kappa_2 \kappa_1 \rangle = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \sqrt{k^2}. \tag{2.30}$$

Für einen lichtartigen Lorentzvektor l_μ (mit $l^2 = 0$) ist $\lambda_2 = 0$, daher kann er als einfaches Produkt zweier Spinoren geschrieben werden, was das Rechnen im WvdW-Formalismus sehr vereinfacht:

$$L_{\dot{A}B} = 2 l^0 n_{1,\dot{A}} n_{1,B}. \tag{2.31}$$

Für $\sigma^{\mu,\dot{A}B}$ gelten folgende Beziehungen

$$\sigma^{\mu,A\dot{B}} = (\sigma^{\mu,\dot{A}B})^* = (\mathbf{1}, -\vec{\sigma}), \tag{2.32}$$

$$\sigma^\mu_{\dot{A}B} \sigma^{\nu,\dot{A}B} = 2 g^{\mu\nu}, \quad \sigma^{\mu,\dot{A}B} \sigma^{\dot{C}D}_\mu = 2 \varepsilon^{\dot{A}\dot{D}} \varepsilon^{BC}. \tag{2.33}$$

Danach läßt sich die Kontraktion zweier Lorentzvektoren umschreiben in die Kontraktion von WvdW-Spinoren:

$$2 k^\mu p_\mu = k_\mu 2 g^{\mu\nu} p_\nu = k_\mu \sigma^\mu_{\dot{A}B} \sigma^{\nu,\dot{A}B} p_\nu = K_{\dot{A}B} P^{\dot{A}B}. \tag{2.34}$$

Im WvdW-Formalismus können nun Feynman-Regeln für einlaufende bzw. auslaufende Teilchen, sowie für Propagatoren und Vertizes aufgestellt werden. Anhand dieser Regeln (siehe [4]) wurden die Matrixelemente mit Abstrahlung reeller Photonen berechnet.

2.5 Selbstenergiebeiträge

Zur Berechnung der Counterterm-Diagramme müssen die Selbstenergien der äußeren Fermionen berechnet werden. Die Selbstenergie $\Sigma^{\bar{f}f}(p)$ ist dabei über ihren Beitrag zur Zwei-Punkt-Funktion $\Gamma^{\bar{f}f}(-p,p)$ definiert:

$$\Gamma^{\bar{f}f}(-p,p) = i(\not{p} - m) + i\Sigma^{\bar{f}f}(p). \tag{2.35}$$

Der Korrekturterm besteht für eine QED-Korrektur in $\mathcal{O}(\alpha)$ nur aus einem

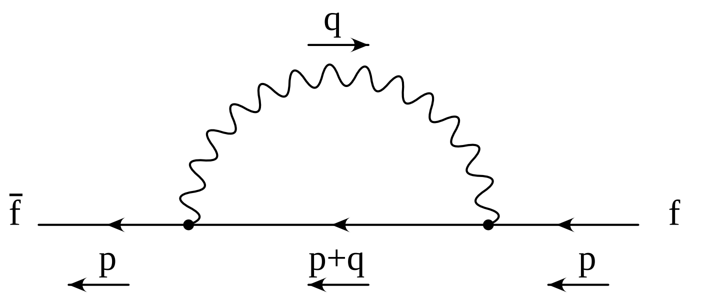


Abbildung 2.7: Selbstenergie eines Fermions durch ein Photon

einzigen Feynman-Diagramm (siehe Abbildung 2.7). Anhand dieses Diagramms kann nun der Selbstenergiebeitrag eines Fermions mit Masse m und Ladung Q durch ein Photon mit Masse λ berechnet werden zu

$$i\Sigma^{\bar{f}f}(p) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} ieQ\gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} + \not{q} - m} ieQ\gamma^\beta \frac{-ig_{\alpha\beta}}{(-q)^2 - \lambda^2}. \tag{2.36}$$

Durch Reduktion auf skalare Integrale erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma^{\bar{f}f}(p) &= -\frac{e^2Q^2}{16\pi^2}\Bigg[m\Big(-2 + 4B_0(p^2,\lambda,m)\Big) \\ &\quad + \not{p}\left(1 + \frac{A_0(m)}{p^2} - \frac{p^2+m^2}{p^2}B_0(p^2,\lambda,m)\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{2.37}$$

Aufteilung dieses Ergebnisses in einen vektoriellen Teil proportional zu $\not{p}$ und einen skalaren Teil proportional zu $m \cdot \mathbf{1}$ ergibt die Terme

$$\Sigma_V^{\bar{f}f}(p^2) = -\frac{e^2Q^2}{16\pi^2}\left[1 + \frac{A_0(m)}{p^2} - \frac{p^2+m^2}{p^2}B_0(p^2,\lambda,m)\right], \tag{2.38}$$

$$\Sigma_S^{\bar{f}f}(p^2) = -\frac{e^2Q^2}{16\pi^2}\left[-2 + 4B_0(p^2,\lambda,m)\right]. \tag{2.39}$$

Die Renormierungskonstanten δZ_f und δm_f eines Fermionfeldes sind dann

$$\delta Z_f = -\Sigma_V^{\bar{f}f}(m_f^2) - 2m_f^2 \left[\frac{\partial \Sigma_V^{\bar{f}f}(p^2)}{\partial p^2} + \frac{\partial \Sigma_S^{\bar{f}f}(p^2)}{\partial p^2}\right]\Bigg|_{p^2=m_f^2}, \tag{2.40}$$

$$\delta m_f = m_f \left[\Sigma_V^{\bar{f}f}(m_f^2) + \Sigma_S^{\bar{f}f}(m_f^2)\right]. \tag{2.41}$$

2.6 Breite des Higgs-Bosons

Das Higgs-Boson ist ein instabiles Teilchen und hat somit auch eine endliche Zerfallsbreite. Die Zerfallsbreite Γ_H des Higgs-Bosons hängt allerdings von der Masse ab. Je mehr Masse das Higgs-Boson hat, desto mehr Zerfallskanäle stehen zur Verfügung. Die allgemeine Zerfallsbreite des Higgs-Bosons in ein Fermion-Paar ist in niedrigster Störungsordnung (siehe [7])

$$\Gamma_H(H \to \bar{f}f) = \frac{N_c e^2 m_f^2}{32\pi s_w^2 M_W^2}\left(1 - \frac{4m_f^2}{M_H^2}\right)^{\frac{3}{2}} M_H\,\theta(M_H - 2m_f), \tag{2.42}$$

wobei der Farbfaktor N_c den Wert 1 für Leptonen und den Wert 3 für Quarks annimmt. Die Breiten, die aus einem Zerfall des Higgs in zwei Eichbosonen resultieren, sind

$$\Gamma_H(H \to ZZ) = \frac{e^2}{128\pi s_w^2}\frac{M_H^3}{M_W^2}\sqrt{1-x_Z}(1 - x_Z + \frac{3}{4}x_Z^2)\,\theta(M_H - 2M_Z) \tag{2.43}$$

mit $x_Z = 4M_Z^2/M_H^2$ und

$$\Gamma_H(H \to W^+W^-) = \frac{e^2}{64\pi s_w^2}\frac{M_H^3}{M_W^2}\sqrt{1-x_W}(1 - x_W + \frac{3}{4}x_W^2)\,\theta(M_H - 2M_W) \tag{2.44}$$

mit $x_W = 4M_W^2/M_H^2$. Die Summe der einzelnen Zerfallskanäle führt auf die Gesamtbreite, die in Tabelle 2.1 dargestellt ist. Abbildung 2.8 zeigt den Verlauf der Gesamtbreite in Abhängigkeit von der Higgs-Boson-Masse. Hier erkennt man deutlich, dass sich ein großer Anstieg in der Breite des Higgs-Bosons ergibt, wenn der Zerfall in ein W^+W^--Paar energetisch erlaubt ist.

Tabelle 2.1: **Breiten des Higgs-Bosons für verschiedene Massen M_H**

Masse M_H in GeV	Zerfallsbreite Γ_H in GeV
100	$4.009197 \cdot 10^{-3}$
110	$4.417678 \cdot 10^{-3}$
150	$6.046826 \cdot 10^{-3}$
170	0.363346
200	1.371928
250	3.874399
300	8.103045

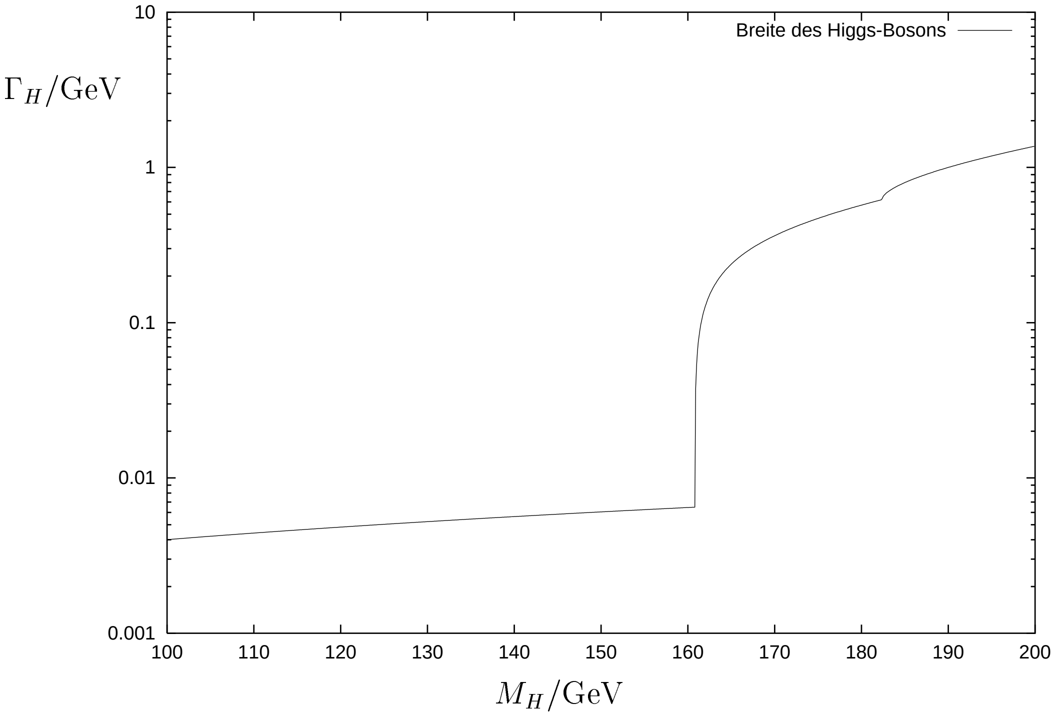


Abbildung 2.8: Breite des Higgs-Bosons in Abhängigkeit von der Higgs-Boson-Masse M_H in niedrigster Störungsordnung

Kapitel 3

Berechnung der $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrekturen

3.1 Born'sche Näherung

In der Born'schen Näherung werden nur die sogenannten Baumgraphen betrachtet. In der Störungsreihe sind das die Diagramme, die insgesamt mit dem der Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ eingehen.

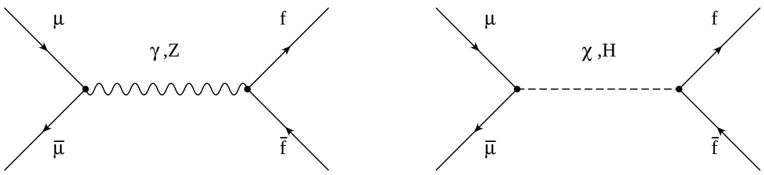


Abbildung 3.1: Die Tree-Level-Diagramme

3.1.1 Konventionen für $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$

Für den Prozess $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$ wird der Impuls des einlaufenden Myons mit p_1 und der des einlaufenden Anti-Myons mit p_2 bezeichnet. Entsprechend ist k_1 der Impuls des auslaufenden Fermions und k_2 der Impuls des auslaufenden Antifermions. Im Center-of-Mass-System (CMS) sind diese Impulse definiert durch

$$\begin{aligned}
p_1^\mu &= (E, 0, 0, |\vec{p_1}|), \qquad |\vec{p_1}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}, \\
p_2^\mu &= (E, 0, 0, -|\vec{p_1}|), \\
k_1^\mu &= (E, |\vec{p_1}|\sin(\theta), 0, |\vec{p_1}|\cos(\theta)), \\
k_2^\mu &= (E, -|\vec{p_1}|\sin(\theta), 0, -|\vec{p_1}|\cos(\theta)). \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Die Mandelstamvariablen S, T, U sind hier gegeben durch

$$\begin{aligned} S &= (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \\ T &= (p_1 - k_1)^2 \text{ und} \\ U &= (p_1 - k_2)^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Davon ist $\sqrt{S}$ die sogenannte Schwerpunktsenergie, d.h. diejenige Energie, die nach der Vernichtung des Myon-Paares für die Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung steht. Da sich hier nur zwei Teilchen im Endzustand befinden, ist das Phasenraumintegral sehr einfach zu bestimmen, so dass man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ erhält:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 S}\sqrt{\frac{E^2 - m_f^2}{E^2 - m_\mu^2}}\, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \,. \tag{3.3}$$

Die Matrixelemente $\mathcal{M}_{fi}$ sind allerdings unabhängig von φ, da nur Helizitätszustände betrachtet werden und somit keine transversalen Polarisationen auftreten können. Es kann daher über $d\Omega = d\varphi d\cos\theta$ teilweise integriert werden, und der Wirkungsquerschnitt σ für den $2 \to 2$ Prozess ist

$$\sigma = \frac{1}{32\pi S}\sqrt{\frac{E^2 - m_f^2}{E^2 - m_\mu^2}} \int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta\, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \,. \tag{3.4}$$

3.1.2 Die Amplituden $\mathcal{M}_{fi}$ in Born'scher Näherung

Zur Berechnung der Amplituden $\mathcal{M}_{fi}$ genügen auf der Ebene der Baum-Graphen die Standardmatrixelemente

$$\mathcal{M}_1^{\sigma\tau} = \Big[\bar{v}(p_2)\, \gamma^\alpha \omega^\sigma\, u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\, \gamma_\alpha \omega^\tau v(k_2)\Big], \tag{3.5}$$

$$\mathcal{M}_2^{\sigma\tau} = \Big[\,\bar{v}(p_2)\, \omega^\sigma\, u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\, \omega^\tau v(k_2)\Big]. \tag{3.6}$$

Mit Hilfe der Standardmatrixelemente können die Ergebnisse für die vier Diagramme direkt aufgeschrieben werden. Für den Austausch der Vektorbosonen Z und γ sowie der skalaren Teilchen H und χ ergeben sich mit den Kopplungen (2.10) die Matrixelemente

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathcal{M}_{fi}^{(\gamma)} = \frac{ie^2}{S} \sum_{\sigma,\tau=\pm} C^\sigma_{\gamma\bar{\mu}\mu} C^\tau_{\gamma f\bar{f}} \mathcal{M}_1^{\sigma\tau}, \\ Z &: \mathcal{M}_{fi}^{(Z)} = \frac{ie^2}{S - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} \sum_{\sigma,\tau=\pm} C^\sigma_{Z\bar{\mu}\mu} C^\tau_{Zf\bar{f}} \mathcal{M}_1^{\sigma\tau}, \\ H &: \mathcal{M}_{fi}^{(H)} = \frac{-ie^2}{S - M_H^2 + iM_H\Gamma_H} \sum_{\sigma,\tau=\pm} C^\sigma_{Z\bar{\mu}\mu} C^\tau_{Zf\bar{f}} \mathcal{M}_2^{\sigma\tau}, \\ \chi &: \mathcal{M}_{fi}^{(\chi)} = \frac{-ie^2}{S - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} \sum_{\sigma,\tau=\pm} C^\sigma_{\chi\bar{\mu}\mu} C^\tau_{\chi f\bar{f}} \mathcal{M}_2^{\sigma\tau}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Die Grössen $\Gamma_{Z/H}$ sind hierbei die Zerfallsbreiten des Z bzw. des H. Durch sie wird berücksichtigt, dass es sich hier um instabile Teilchen handelt, die aufgrund ihrer begrenzten Lebensdauer auch eine Energieunschärfe besitzen, die eine Verbreiterung der Resonanz bei $S = M_Z^2$ bzw. $S = M_H^2$ zur Folge hat.

Um den exakten Propagator eines Teilchens zu berechnen, müssen nämlich alle 1PI-Graphen, die zur Zwei-Punkt-Funktion beitragen, aufsummiert werden. Dieser Propagator besitzt eine Polstelle bei einem Impuls p, mit $p^2 = M^2$, daher ist M die physikalische Masse des Teilchens. Für ein instabiles Teilchen enthalten die Selbstenergieterme aber auch imaginäre Beiträge, so dass die Polstelle des Propagators nicht mehr auf der reellen Achse liegt. Man kann nun die Masse M wieder über den Realteil dieser Polstelle erhalten, und den Imaginärteil als Beitrag zur Breite Γ interpretieren. Dazu identifiziert man den Propagator mit einer relativistischen Breit-Wigner-Verteilung, die gerade die Form der Faktoren in (3.7) hat.

Um die Breite zu berücksichtigen und gleichzeitig die Eichinvarianz nicht zu verletzen, erfolgte die Auswertung durch die Einführung von komplexen Massen für das Z-Boson und das Higgs-Boson. Dadurch erhält man formal die richtige Störungsordnung und somit auch die Eichinvarianz zurück. Der einzige Fehler der dann noch auftritt liegt in der Definition des Weinberg-Winkels θ_w, da dann auch

$$c_w^2 = \cos^2\theta_w = \frac{M_W^2 - iM_W\Gamma_W}{M_Z^2 - iM_Z\Gamma_Z} \tag{3.8}$$

komplex wird. Da die Breiten jedoch klein gegenüber den Massen sind, hebt sich hier sowieso ein großer Teil des Imaginärteils weg und kann letztlich ganz gegenüber den Massen M_W und M_Z vernachlässigt werden.

3.2 Anfangs- und Endzustandskorrektur

Zu den Anfangs- und Endzustandskorrekturen gehören die Diagramme der Abbildungen 2.2 und 2.3. Durch die Counterterm-Diagramme in Abbildung 2.2 wird die Renormierung der äußeren Teilchen berücksichtigt. Die renormierten Wellenfunktionen (2.40) und Massenterme (2.41) tauchen hier in den Renormierungkonstanten $\delta C^{\pm}$ auf:

$$\gamma f\bar{f} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \delta C_\gamma^+ = -Q_f\delta Z_f, \\ \delta C_\gamma^- = -Q_f\delta Z_f, \end{cases}$$

$$Zf\bar{f} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \delta C_Z^+ = C_Z^+\delta Z_f = -\frac{s_w}{c_w}Q_f\delta Z_f, \\ \delta C_Z^- = C_Z^-\delta Z_f = \frac{I_{W,f}^3 - s_w^2 Q_f}{s_w c_w}\delta Z_f, \end{cases}$$

$$Hf\bar{f} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \delta C_H^+ = C_H^+\left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right) = -\frac{m_f}{2s_w M_W}\left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right), \\ \delta C_H^- = C_H^-\left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right) = -\frac{m_f}{2s_w M_W}\left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right), \end{cases}$$

$$\chi f\bar{f} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \delta C_\chi^+ = C_\chi^+ \left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right) = i\frac{m_f}{s_w M_W} I_{W,f}^3 \left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right), \\ \delta C_\chi^- = C_\chi^- \left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right) = -i\frac{m_f}{s_w M_W} I_{W,f}^3 \left(\delta Z_f + \frac{\delta m_f}{m_f}\right). \end{cases} \tag{3.9}$$

Die zugehörigen Amplituden $\mathcal{M}_{fi}$ sind dann

$$\begin{aligned}
\gamma \ &: \ \mathcal{M}_{fi}^{(\gamma)} = \frac{ie^2}{S} \sum_{\sigma,\tau=\pm} \left(\delta C_{\gamma\bar{\mu}\mu}^\sigma C_{\gamma f\bar{f}}^\tau + C_{\gamma\bar{\mu}\mu}^\sigma \delta C_{\gamma f\bar{f}}^\tau\right) \mathcal{M}_1^{\sigma\tau}, \\
Z \ &: \ \mathcal{M}_{fi}^{(Z)} = \frac{ie^2}{S - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} \sum_{\sigma,\tau=\pm} \left(\delta C_{Z\bar{\mu}\mu}^\sigma C_{Zf\bar{f}}^\tau + C_{Z\bar{\mu}\mu}^\sigma \delta C_{Zf\bar{f}}^\tau\right) \mathcal{M}_1^{\sigma\tau}, \\
H \ &: \ \mathcal{M}_{fi}^{(H)} = \frac{-ie^2}{S - M_H^2 + iM_H\Gamma_H} \sum_{\sigma,\tau=\pm} \left(\delta C_{H\bar{\mu}\mu}^\sigma C_{Hf\bar{f}}^\tau + C_{H\bar{\mu}\mu}^\sigma \delta C_{Hf\bar{f}}^\tau\right) \mathcal{M}_2^{\sigma\tau}, \\
\chi \ &: \ \mathcal{M}_{fi}^{(\chi)} = \frac{-ie^2}{S - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} \sum_{\sigma,\tau=\pm} \left(\delta C_{\chi\bar{\mu}\mu}^\sigma C_{\chi f\bar{f}}^\tau + C_{\chi\bar{\mu}\mu}^\sigma \delta C_{\chi f\bar{f}}^\tau\right) \mathcal{M}_2^{\sigma\tau}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Da die Renormierungen δZ_f und δm_f UV-divergente Loop-Integrale enthalten, sind die Beiträge der Counterterm-Diagramme ebenfalls UV-divergent. Diese Divergenzen heben sich aber gegen die UV-divergenten Anteile in den Vertexkorrekturen weg.

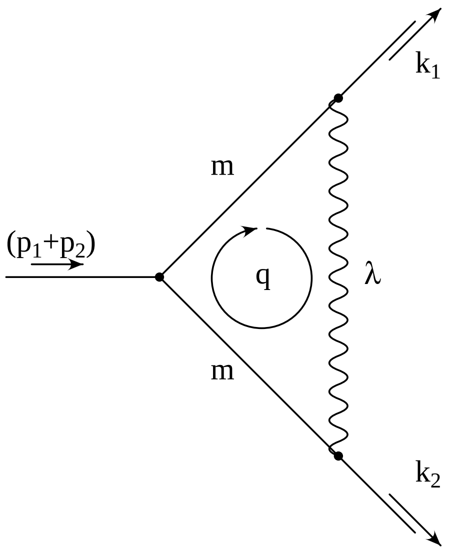


Abbildung 3.2: Der Vertex-Loop

Die Vertexkorrekturen (siehe Abbildung 2.3) enthalten alle einen Loop, wie ihn Abbildung 3.2 zeigt. Für die vektorielle bzw. skalare Vertexkorrekturfunktion $\Lambda_{V/S}$ macht man den Ansatz

$$\Gamma_V^\rho = ie\gamma^\rho(C_V^+\omega_+ + C_V^-\omega_-) + ie\Lambda_V^\rho(k_1,k_2), \tag{3.11}$$
$$\Gamma_S = ie(C_S^+\omega_+ + C_S^-\omega_-) + ie\Lambda_S(k_1,k_2). \tag{3.12}$$

Die Korrekturfunktion für den Z-Austausch gliedert sich insgesamt in vier Teile ,

$$
\begin{aligned}
\Lambda_Z^\rho(k_1,k_2) &= \frac{e^2}{16\pi^2}\Big[(C_Z^+ + C_Z^-)\left[A_Z\gamma^\rho + B_Z(k_1^\rho - k_2^\rho)\right] \\
&\quad +(C_Z^- - C_Z^+)\left[C_Z\gamma^\rho\gamma_5 + D_Z(k_1^\rho - k_2^\rho)\gamma_5\right]\Big] \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A_Z &= Q^2\left(-2 - 3B_0(S,m,m) + 4B_0(m^2,0,m) - 2(S-2m^2)C_0\right), \\
B_Z &= Q^2\left(-\frac{2m}{S-4m^2}\left(\frac{A_0(m)}{m^2} + 1 + B_0(S,m,m) - 2B_0(m^2,0,m)\right)\right), \\
C_Z &= Q^2\Bigg(2 + \frac{3S-4m^2}{S-4m^2}B_0(S,m,m) - 4\frac{S-2m^2}{S-4m^2}B_0(m^2,0,m) \\
&\quad +2(S-2m^2)C_0\Bigg)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
D_Z &= Q^2\Bigg(-\frac{2m}{S} + \frac{2A_0(m)}{Sm} + \frac{2m(-3S+4m^2)}{S(S-4m^2)}B_0(S,m,m) \\
&\quad +\frac{4m}{S-4m^2}B_0(m^2,0,m)\Bigg)
\end{aligned}
$$

wobei $\qquad C_0 = C_0(m^2,S,m^2,\lambda,m,m).$

Beim Austausch eines Photons auf der inneren Linie beträgt die Korrektur

$$
\Lambda_\gamma^\rho(k_1,k_2) = \frac{e^2}{16\pi^2}C_\gamma^+\left[A_\gamma\gamma^\rho + B_\gamma(k_1^\rho - k_2^\rho)\right], \qquad (3.14)
$$

$$
\begin{aligned}
A_\gamma &= Q^2\left(-2 - 3B_0(S,m,m) + 4B_0(m^2,0,m) - 2(S-2m^2)C_0\right), \\
B_\gamma &= Q^2\left(-\frac{m}{S-4m^2}\left(\frac{2A_0(m)}{m^2} + 2 + 2B_0(S,m,m) - 4B_0(m^2,0,m)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Die Teilchen H, χ ergeben die Korrekturen

$$
\begin{aligned}
\Lambda_H(k_1,k_2) &= -\frac{e^2}{8\pi^2}C_H^+ A_H, \qquad (3.15) \\
\Lambda_\chi(k_1,k_2) &= \frac{e^2}{8\pi^2}C_\chi^+ A_\chi\gamma_5 \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A_H &= Q^2\left(\frac{4m^2}{S-4m^2}B_0(S,m,m) - \frac{2(S-2m^2)}{S-4m^2}B_0(m^2,0,m) + 1 + (S-2m^2)C_0\right), \\
A_\chi &= Q^2\left(-1 + 2B_0(m^2,0,m) - (S-2m^2)C_0\right).
\end{aligned}
$$

Da jetzt auch Impulse in der Form $(k_1^\rho - k_2^\rho)$ in die Amplituden mit eingehen, werden zwei weitere Standardmatrixelemente $\mathcal{M}_3^{\sigma\tau}$ und $\mathcal{M}_4^{\sigma\tau}$ benötigt (siehe 2.13). Durch Anwenden der Dirac-Gleichung ist es möglich, alle auftretenden Matrixelemente mit ihren verschiedenen Impulskombinationen auf diese beiden Standardmatrixelemente zurückzuführen. Insgesamt ergeben sich so für die Diagramme in Abbildung 2.3 die Amplituden

$$\begin{aligned}
\gamma : \mathcal{M}_{fi}^{(\gamma)} &= \frac{ie^4}{16\pi^2 S} \sum_{\sigma\tau} C^\sigma_{\gamma\bar{\mu}\mu} C^\tau_{\gamma f\bar{f}} \Big[\left(A_\gamma(Q_\mu, m_\mu) + A_\gamma(Q_f, m_f)\right) \mathcal{M}_1^{\sigma\tau} \\
&\quad + \left(-m_f B_\gamma(Q_\mu, m_\mu) + m_\mu B_\gamma(Q_f, m_f)\right) \mathcal{M}_2^{\sigma\tau} \\
&\quad - m_f B_\gamma(Q_\mu, m_\mu) \mathcal{M}_2^{\sigma(-\tau)} + m_\mu B_\gamma(Q_f, m_f) \mathcal{M}_2^{(-\sigma)\tau} \\
&\quad + 2B_\gamma(Q_\mu, m_\mu) \mathcal{M}_3^{\sigma\tau} + 2B_\gamma(Q_f, m_f) \mathcal{M}_4^{\sigma\tau} \Big],
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
Z : \mathcal{M}_{fi}^{(Z)} &= \frac{ie^4}{16\pi^2 (S - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z)} \sum_{\sigma\tau} \Big[\left(A^\sigma_{Z,1} C^\tau_{Zf\bar{f}} + C^\sigma_{Z\bar{\mu}\mu} A^\tau_{Z,2} \right) \mathcal{M}_1^{\sigma\tau} \\
&\quad + \left(m_f C^\sigma_{Z,1} C^\tau_{Zf\bar{f}} + m_u C^\sigma_{Z\bar{\mu}\mu} C^\tau_{Z,2} \right) \mathcal{M}_2^{\sigma\tau} \\
&\quad + m_f D^\sigma_{Z,1} C^\tau_{Zf\bar{f}} \mathcal{M}_2^{\sigma(-\tau)} + m_\mu C^\sigma_{Z\bar{\mu}\mu} D^\tau_{Z,2} \mathcal{M}_2^{(-\sigma)\tau} \\
&\quad + 2B^\sigma_{Z,1} C^\tau_{Zf\bar{f}} \mathcal{M}_3^{\sigma\tau} + 2C^\sigma_{Z\bar{\mu}\mu} B^\tau_{Z,2} \mathcal{M}_4^{\sigma\tau} \Big]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A^-_{Z,1} &= A_Z(Q_\mu, m_\mu) - C_Z(Q_\mu, m_\mu), & A^+_{Z,1} &= A_Z(Q_\mu, m_\mu) + C_Z(Q_\mu, m_\mu), \\
A^-_{Z,2} &= A_Z(Q_f, m_f) - C_Z(Q_f, m_f), & A^+_{Z,2} &= A_Z(Q_f, m_f) + C_Z(Q_f, m_f), \\
B^-_{Z,1} &= B_Z(Q_\mu, m_\mu), & B^+_{Z,1} &= B_Z(Q_\mu, m_\mu), \\
B^-_{Z,2} &= B_Z(Q_f, m_f), & B^+_{Z,2} &= B_Z(Q_f, m_f), \\
C^-_{Z,1} &= -D_Z(Q_\mu, m_\mu) - B_Z(Q_\mu, m_\mu), & C^+_{Z,1} &= D_Z(Q_\mu, m_\mu) - B_Z(Q_\mu, m_\mu), \\
C^-_{Z,2} &= D_Z(Q_f, m_f) + B_Z(Q_f, m_f), & C^+_{Z,2} &= B_Z(Q_f, m_f) - D_Z(Q_f, m_f), \\
D^-_{Z,1} &= D_Z(Q_\mu, m_\mu) + B_Z(Q_\mu, m_\mu), & D^+_{Z,1} &= B_Z(Q_\mu, m_\mu) - D_Z(Q_\mu, m_\mu), \\
D^-_{Z,2} &= -D_Z(Q_f, m_f) - B_Z(Q_f, m_f), & D^+_{Z,2} &= D_Z(Q_f, m_f) - B_Z(Q_f, m_f),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H : \mathcal{M}_{fi}^{(H)} &= \frac{ie^4}{8\pi^2 (S - M_H^2 + iM_H\Gamma_H)} \sum_{\sigma\tau} C^\sigma_{H\bar{\mu}\mu} C^\tau_{Hf\bar{f}} \\
&\quad \left(A_H(Q_\mu, m_\mu) + A_H(Q_f, m_f)\right) \mathcal{M}_2^{\sigma\tau},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\chi : \mathcal{M}_{fi}^{(\chi)} &= \frac{-ie^4}{8\pi^2 (S - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z)} \sum_{\sigma\tau} C^\sigma_{\chi\bar{\mu}\mu} C^\tau_{\chi f\bar{f}} \\
&\quad \left(A_\chi(Q_\mu, m_\mu) + A_\chi(Q_f, m_f)\right) \mathcal{M}_2^{\sigma\tau}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Die Koeffizienten A, B, C, D stammen aus den jeweiligen Vertexkorrekturfunktionen Λ (siehe (3.13), (3.14), (3.15) und (3.16)).

3.3 Weiche Bremsstrahlung

Betrachtet man die Abstrahlung eines niederenergetischen Photons von einem der äußeren Beine der Tree-Level-Diagramme, so findet man, dass für einen Photonimpuls $k \to 0$ die entsprechenden Amplituden divergieren. Es liegt also eine IR-Divergenz vor. Explizit tritt diese IR-Divergenz auf, da es in den entsprechenden Diagrammen (siehe Abbildung 2.5) einen inneren Fermionpropagator gibt, dessen Nenner für $k \to 0$ gegen 0 geht. Um die Beiträge der weichen Bremsstrahlung zu berechnen, bedient man sich der Soft-Photon-Approximation, wie sie in [1] beschrieben wird. Man findet, dass die Soft-Photon-Korrektur proportional zum Born'schen Wirkungsquerschnitt ist. So kann man für Photonen der Energie $k^0 \le \Delta E$ und Masse λ den Beitrag zum gesamten Wirkungsquerschnitt asymptotisch auswerten durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Soft} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Born} \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int\limits_{k^0 \le \Delta E} \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} \sum_{ij} \frac{\pm p_i p_j Q_i Q_j}{p_i k p_j k} \tag{3.21}$$

wobei $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + \lambda^2}$. Das Vorzeichen $\pm$ dieses Ausdrucks ergibt sich je nachdem, ob die entsprechenden Ladungen in das Diagramm hineinfließen oder aus dem Diagramm herausfließen. Die Soft-Photon-Integrale sind definiert als

$$I_{ij} = \int\limits_{k^0 \le \Delta E} \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_k} \frac{2 p_i p_j}{p_i k p_j k}. \tag{3.22}$$

Ein allgemeines Ergebnis für das Soft-Photon-Integral, das sich ergibt, falls $p_i \neq p_j$, steht in [1]:

$$\begin{aligned} I_{ij} \;=\;& 4\pi \frac{\alpha p_i p_j}{(\alpha p_i)^2 - p_j^2} \Bigg\{ \frac{1}{2} \log \frac{(\alpha p_i)^2}{p_j^2} \log \frac{4\Delta E^2}{\lambda^2} \\ &+ \left[\frac{1}{4} \log^2 \frac{u_0 - |\vec{u}|}{u_0 + |\vec{u}|} + \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{u_0 + |\vec{u}|}{v}\right) + \mathrm{Li}_2\left(1 - \frac{u_0 - |\vec{u}|}{v}\right) \right]_{u=p_j}^{u=\alpha p_i} \Bigg\} \end{aligned} \tag{3.23}$$

mit

$$v = \frac{\alpha p_i p_j}{2(\alpha p_{i0} - p_{j0})},$$

und α definiert durch

$$\alpha^2 p_i^2 - 2\alpha p_i p_j + p_j^2 = 0, \qquad \frac{\alpha p_{i0} - p_{j0}}{p_{j0}} > 0.$$

Die Ergebnisse für die Spezialfälle, bei denen die speziellen Impulse für einen $2 \to 2$ Prozess auftreten, wurden gesondert berechnet.
Für $p_i = p_j =: p$ ist

$$I_{ii} = 2\pi \left(\log \frac{4\Delta E^2}{\lambda^2} + \frac{p_0}{|\vec{p}\,|} \log \frac{p_0 - |\vec{p}\,|}{p_0 + |\vec{p}\,|} \right), \tag{3.24}$$

und für den Fall, dass $\vec{p_i} = -\vec{p_i} =: \vec{p}$ und $p_i^0 = p_j^0 =: p^0$ gilt

$$I_{ij} = 2\pi \frac{(p^0)^2 + |\vec{p}\,|^2}{2p^0|\vec{p}\,|} \left(\log \frac{p^0 + |\vec{p}\,|}{p^0 - |\vec{p}\,|} \log \frac{4\Delta E^2}{\lambda^2} + \mathrm{Li}_2\Big(\frac{-2|\vec{p}\,|}{p^0 - |\vec{p}\,|}\Big) - \mathrm{Li}_2\Big(\frac{2|\vec{p}\,|}{p^0 + |\vec{p}\,|}\Big) \right). \tag{3.25}$$

3.4 Box-Diagramme

Die Amplituden zu den Box-Diagrammen (siehe Abbildung 2.4) wurden mit Hilfe der Programm-Pakete *FeynArts* und *FeynCalc* für *Mathematica* berechnet (siehe [24],[25], [26] und [27]). Die durch *FeynCalc* eingeführten Standardmatrixelemente lauten in der hier verwendeten Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\gamma_\alpha\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_2^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_3^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_1\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_4^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\not{k}_1\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_5^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_2\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_6^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\not{k}_1\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_1\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_7^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\not{k}_1\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_2\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{10}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_2\gamma_\alpha\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{11}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_1\gamma_\alpha\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{12}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\not{k}_1\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_2\gamma_\alpha\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{13}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\not{k}_1\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_1\gamma_\alpha\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{14}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\not{k}_1\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\gamma_\alpha\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{15}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\gamma^\beta\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{16}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_1\,\not{p}_2\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{17}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\not{k}_1\,\not{k}_2\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\omega^\tau\,v(k_2)\Big],\\
\mathcal{M}_{18}^{\sigma\tau} &= \Big[\bar{v}(p_2)\,\gamma^\alpha\omega^\sigma\,u(p_1)\Big]\Big[\bar{u}(k_1)\,\not{p}_1\,\not{p}_2\gamma_\alpha\omega^\tau\,v(k_2)\Big].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Dieser Satz von Standardmatrixelementen ist jedoch nicht minimal. Um nun einen minimalen Satz zu erhalten, wurden die Standardmatrixelemente $\mathcal{M}_5^{\sigma\tau}$, $\mathcal{M}_7^{\sigma\tau}$, $\mathcal{M}_{10}^{\sigma\tau}$, $\mathcal{M}_{12}^{\sigma\tau}$, $\mathcal{M}_{16}^{\sigma\tau}$, $\mathcal{M}_{17}^{\sigma\tau}$, $\mathcal{M}_{18}^{\sigma\tau}$ in Kombinationen der anderen Standardmatrixelemente umgerechnet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_5^{\sigma\tau} &= m_f\left(\mathcal{M}_2^{\sigma\tau}-\mathcal{M}_2^{\sigma(-\tau)}\right)-\mathcal{M}_3^{\sigma\tau},\\
\mathcal{M}_7^{\sigma\tau} &= m_f\left(\mathcal{M}_4^{\sigma\tau}-\mathcal{M}_4^{\sigma(-\tau)}\right)-\mathcal{M}_6^{\sigma\tau},\\
\mathcal{M}_{10}^{\sigma\tau} &= m_f\left(\mathcal{M}_1^{\sigma\tau}+\mathcal{M}_1^{\sigma(-\tau)}\right)+2m_\mu\left(\mathcal{M}_2^{(-\sigma)\tau}-\mathcal{M}_2^{\sigma\tau}\right)-2\mathcal{M}_4^{\sigma\tau}-\mathcal{M}_{11}^{\sigma\tau},\\
\mathcal{M}_{12}^{\sigma\tau} &= m_f\left(\mathcal{M}_{14}^{\sigma\tau}+\mathcal{M}_{14}^{\sigma(-\tau)}\right)+2\mathcal{M}_{17}^{\sigma\tau}-\mathcal{M}_{13}^{(-\sigma)\tau},\\
\mathcal{M}_{16}^{\sigma\tau} &= (2k_2p_2-m_\mu^2)\mathcal{M}_2^{\sigma\tau}-m_f\left(\mathcal{M}_3^{\sigma\tau}+\mathcal{M}_3^{\sigma(-\tau)}\right),\\
\mathcal{M}_{17}^{\sigma\tau} &= (2k_1p_2-m_f^2)\mathcal{M}_2^{\sigma\tau}+m_\mu\left(\mathcal{M}_4^{\sigma\tau}+\mathcal{M}_4^{(-\sigma)\tau}\right),\\
\mathcal{M}_{18}^{\sigma\tau} &= (2k_1p_1-m_\mu^2)\mathcal{M}_1^{\sigma\tau}+m_f\left(\mathcal{M}_{11}^{\sigma(-\tau)}-\mathcal{M}_{11}^{\sigma\tau}\right)\\
&\quad +2m_\mu\left(\mathcal{M}_3^{(-\sigma)\tau}-\mathcal{M}_3^{\sigma\tau}\right)-2\mathcal{M}_6^{\sigma\tau}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Die Ergebnisse für die Formfaktoren zu den Box-Diagrammen sind allerdings so lang, dass sie nicht in dieser Arbeit aufgeschrieben werden können. Die mit *FeynCalc* berechneten Ergebnisse für die Amplituden wurden mit Hilfe von Computeralgebra nach den Standardmatrixelementen in Gleichung 3.26 zerlegt und noch einmal vereinfacht. Aufgrund der immer noch sehr langen Ausdrücke wurden die Formfaktoren dann aber direkt in entsprechende Fortran-Terme übersetzt.

3.5 Harte Bremsstrahlung

3.5.1 Konventionen für $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}\gamma$

Im Prozess $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}\gamma$ befinden sich drei Teilchen im Endzustand. Hier bezeichnet k_1 stets den Impuls des Photons und k_2 bzw. k_3 sind die Impulse des auslaufenden Fermions bzw. Antifermions. Da es hier insgesamt mehr Möglichkeiten für die Impulsverteilung im Endzustand gibt, sehen die CMS-Impulse wie folgt aus :

$$p_1^\mu = (E,0,0,|\vec{p_1}|), \qquad |\vec{p_1}| = \sqrt{E^2-m_\mu^2}, \tag{3.28}$$

$$p_2^\mu = (E,0,0,-|\vec{p_1}|), \tag{3.29}$$

$$k_1^\mu = (p_1^0, p_1^0\sin(\theta_1), 0, p_1^0\cos(\theta_1)), \tag{3.30}$$

$$k_2^\mu = (k_2^0, |\vec{k_2}|\cos(\varphi_2)\sin(\theta_2), |\vec{k_2}|\sin(\varphi_2)\sin(\theta_2), |\vec{k_2}|\cos(\theta_2)), \tag{3.31}$$

$$k_3^\mu = (k_3^0, |\vec{k_3}|\cos(\varphi_3)\sin(\theta_3), |\vec{k_3}|\sin(\varphi_3)\sin(\theta_3), |\vec{k_3}|\cos(\theta_3)), \tag{3.32}$$

wobei der Photonimpuls $\vec{k_1}$ in die xz-Ebene gelegt wurde, da aufgrund der Helizitätszustände Drehungen um die z-Achse die Amplitude nicht ändern können.

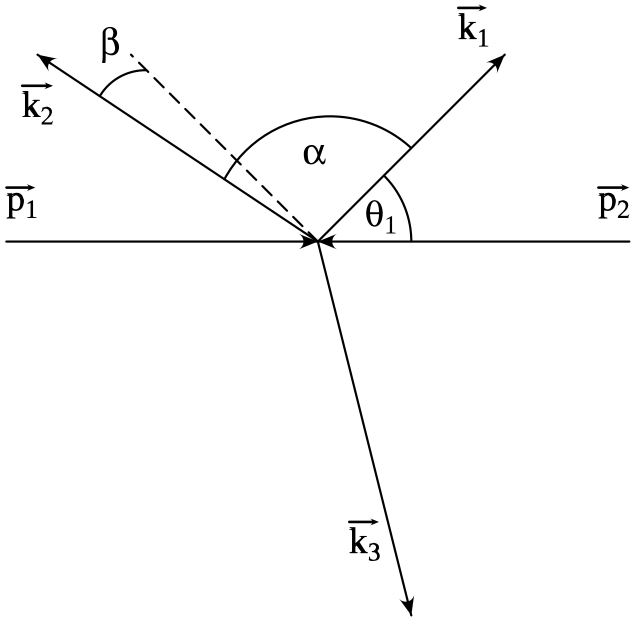


Abbildung 3.3: Impulse und Winkel bei drei Teilchen im Endzustand

Die angegebenen Winkel und Energien werden allerdings noch durch die Energie- und Impulserhaltung eingeschränkt:

$$\begin{aligned} k_1^0 + k_2^0 + k_3^0 &= \sqrt{S} = 2E, && (3.33) \\ \vec{k_1} + \vec{k_2} + \vec{k_3} &= 0. && (3.34) \end{aligned}$$

Die Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$ ist auch in diesem Fall wieder über die Mandelstamvariable $S = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2$ gegeben. Die Integration über den Drei-Teilchen-Phasenraum Φ_3 ist gegeben durch

$$\Phi_3 = \int \frac{d^3\vec{k_1}}{(2\pi)^3 2k_1^0} \frac{d^3\vec{k_2}}{(2\pi)^3 2k_2^0} \frac{d^3\vec{k_3}}{(2\pi)^3 2k_3^0} (2\pi)^4 \delta^4(p1 + p4 - k_1 - k_2 - k_3). \quad (3.35)$$

Definiert man nun den Winkel α als Winkel zwischen $\vec{k_1}$ und $\vec{k_2}$ und den Winkel β als Winkel zwischen $\vec{k_2}$ und der $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{k_1}$-Ebene (siehe Abbildung 3.3), so erhält man für den Phasenraum das Integral

$$\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^4} \int dk_2^0 \int_{-1}^{1} d\cos\theta_1 \int dk_1^0 \int_0^{2\pi} d\beta, \quad (3.36)$$

wobei die Integrationsgrenzen für k_1^0 und k_2^0 gegeben sind über

$$\begin{aligned} m_2 \leq \quad & k_2^0 \quad \leq E \text{ und} && (3.37) \\ \frac{2E(E - k_2^0)}{2E - k_2^0 + |\vec{k_2}|} \leq \quad & k_1^0 \quad \leq \frac{2E(E - k_2^0)}{2E - k_2^0 - |\vec{k_2}|}. && (3.38) \end{aligned}$$

Da, wie in Kapitel 3.3 bereits diskutiert wurde, das Matrixelement für die Abstrahlung von Photonen mit verschwindendem Impuls divergiert, muss bei der Berechnung der harten Photonen noch darauf geachtet werden, dass nur über Photonenergien $k_1^0 \geq \Delta E$ integriert wird. Ist dieses der Fall, so lassen sich weiche und harte Bremsstrahlung für kleine ΔE zu einem, von der Energieschwelle ΔE unabhängigen, Term aufaddieren.

3.5.2 Die Amplituden $\mathcal{M}_{fi}$ der harten Bremsstrahlung

Die Matrixelemente für die Abstrahlung reeller Photonen wurden mit dem WvdW-Formalismus gerechnet. Die Spinoren der äußeren Teilchen wurden hier definiert als:

$$\Psi_\mu = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \psi^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_{\bar{\mu}} = \left(\phi'^A, \psi'_{\dot{A}}\right), \quad \bar{\Psi}_f = \left(\eta^A, \xi_{\dot{A}}\right), \quad \Psi_{\bar{f}} = \begin{pmatrix} \eta'_A \\ \xi'^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Je nachdem, in welchem Helizitätszustand sich das Teilchen befindet, ist der Spinor Ψ_T eines Teilchens gegeben durch

$$\Psi_T(p,+) = \begin{pmatrix} \kappa_1(p) \\ -\kappa_2(p) \end{pmatrix} \text{ oder } \Psi_T(p,-) = \begin{pmatrix} \kappa_2(p) \\ \kappa_1(p) \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Der Spinor Ψ_{AT} eines Antiteilchens ist gegeben durch

$$\Psi_{AT}(p,+) = \begin{pmatrix} -\kappa_2(p) \\ \kappa_1(p) \end{pmatrix} \text{ oder } \Psi_{AT}(p,-) = \begin{pmatrix} \kappa_1(p) \\ \kappa_2(p) \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Die hier verwendeten Weyl-van-der-Waerden-Spinoren κ_i wurden in (2.27) definiert, und die adjungierten Spinoren $\bar{\Psi}$ erhält man über $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$.

Da das auslaufende Photon masselos ist, hat die Impulsmatrix des Photons die Form $K_{\dot{A}B} = k_{\dot{A}} k_B$. Der Spinor eines Photons im Endzustand $\varepsilon^*_{\pm,\dot{A}B}$ ist, je nach Polarisation des Photons, gegeben durch

$$\varepsilon^*_{+,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2} k_{\dot{A}} g_{+,B}}{\langle g_+ k \rangle}, \quad \varepsilon^*_{-,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2} g_{-,\dot{A}} k_B}{\langle g_- k \rangle^*}. \tag{3.42}$$

Hierbei ist $g_\pm$ ein Eichspinor, der beliebig gewählt werden kann, solange $\langle g_\pm k \rangle \neq 0$ erfüllt bleibt. Um die Übergangsamplituden relativ einfach aufzuschreiben, ist es besser, noch ein paar Hilfsgrössen zu definieren:

$$\begin{aligned}
\langle k P_2 P_1 k \rangle &= \langle k\phi' \rangle^* \langle \phi\phi' \rangle \langle \phi k \rangle^* + \langle k\phi' \rangle^* \langle \psi\phi' \rangle \langle \psi k \rangle^* \\
&\quad + \langle k\psi' \rangle^* \langle \phi\psi' \rangle \langle \phi k \rangle^* + \langle k\psi' \rangle^* \langle \psi\psi' \rangle \langle \psi k \rangle^*, && (3.43) \\
\langle k K_3 K_2 k \rangle &= \langle k\eta' \rangle^* \langle \eta\eta' \rangle \langle \eta k \rangle^* + \langle k\eta' \rangle^* \langle \xi\eta' \rangle \langle \xi k \rangle^* \\
&\quad + \langle k\xi' \rangle^* \langle \eta\xi' \rangle \langle \eta k \rangle^* + \langle k\xi' \rangle^* \langle \xi\xi' \rangle \langle \xi k \rangle^*, && (3.44)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{1,b} &= \Big[C^+_{V\bar{\mu}\mu}C^+_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi'\xi\right\rangle^*\left\langle\phi\eta'\right\rangle + C^+_{V\bar{\mu}\mu}C^-_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi'\xi'\right\rangle^*\left\langle\phi\eta\right\rangle \\
&\quad + C^-_{V\bar{\mu}\mu}C^-_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi\xi'\right\rangle^*\left\langle\phi'\eta\right\rangle + C^-_{V\bar{\mu}\mu}C^+_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi\xi\right\rangle^*\left\langle\phi'\eta'\right\rangle\Big], \quad (3.45)\\
M_{2,b} &= \Big[C^+_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\phi\phi'\right\rangle + C^-_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi'\psi\right\rangle^*\Big] \\
&\quad \Big[C^+_{Vf\bar{f}}\left\langle\eta'\eta\right\rangle + C^-_{Vf\bar{f}}\left\langle\xi\xi'\right\rangle^*\Big]. \quad (3.46)
\end{aligned}
$$

Wenn vor dem Austausch eines Vektorteilchens im Anfangszustand ein Photon mit negativer Polarisation abgestrahlt wird, so ist die Übergangsamplitude

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^V_{init,-} &= \frac{ie^3Q_\mu\sqrt{2}}{S-2\sqrt{S}k_1^0-M_V^2}\Big[-\frac{\left\langle kP_2P_1k\right\rangle^*}{2(p_1k_1)(p_2k_1)}M_{1,b} \\
&\quad -\frac{1}{p_1k_1}\left\langle\phi k\right\rangle C^+_{V\bar{\mu}\mu}\Big(C^+_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi'\xi\right\rangle^*\left\langle k\eta'\right\rangle + C^-_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi'\xi'\right\rangle^*\left\langle k\eta\right\rangle\Big) \\
&\quad +\frac{1}{p_2k_1}\left\langle\phi' k\right\rangle C^-_{V\bar{\mu}\mu}\Big(C^+_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi\xi\right\rangle^*\left\langle k\eta'\right\rangle + C^-_{Vf\bar{f}}\left\langle\psi\xi'\right\rangle^*\left\langle k\eta\right\rangle\Big)\Big],
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

und bei einem Photon positiver Polarisation

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^V_{init,+} &= \frac{ie^3Q_\mu\sqrt{2}}{S-2\sqrt{S}k_1^0-M_V^2}\Big[-\frac{\left\langle kP_2P_1k\right\rangle}{2(p_1k_1)(p_2k_1)}M_{1,b} \\
&\quad -\frac{1}{p_1k_1}\left\langle\psi k\right\rangle^* C^-_{V\bar{\mu}\mu}\Big(C^+_{Vf\bar{f}}\left\langle\xi k\right\rangle^*\left\langle\eta'\phi'\right\rangle + C^-_{Vf\bar{f}}\left\langle\xi' k\right\rangle^*\left\langle\eta\phi'\right\rangle\Big) \\
&\quad +\frac{1}{p_2k_1}\left\langle\psi' k\right\rangle^* C^+_{V\bar{\mu}\mu}\Big(C^+_{Vf\bar{f}}\left\langle\xi k\right\rangle^*\left\langle\eta'\phi\right\rangle + C^-_{Vf\bar{f}}\left\langle\xi' k\right\rangle^*\left\langle\eta\phi\right\rangle\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Für die Abstrahlung im Endzustand findet man

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^V_{final,-} &= \frac{ie^3Q_\mu\sqrt{2}}{S-M_V^2}\Big[\frac{\left\langle kK_3K_2k\right\rangle^*}{2(k_2k_1)(k_3k_1)}M_{1,b} \\
&\quad -\frac{1}{k_2k_1}\left\langle\eta k\right\rangle C^-_{Vf\bar{f}}\Big(C^+_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi'\xi'\right\rangle^*\left\langle\phi k\right\rangle + C^-_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi\xi'\right\rangle^*\left\langle\phi' k\right\rangle\Big) \\
&\quad +\frac{1}{k_3k_1}\left\langle\eta' k\right\rangle C^+_{Vf\bar{f}}\Big(C^+_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi'\xi\right\rangle^*\left\langle\phi k\right\rangle + C^-_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi\xi\right\rangle^*\left\langle\phi' k\right\rangle\Big)\Big],
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^V_{final,+} &= \frac{ie^3Q_\mu\sqrt{2}}{S-M_V^2}\Big[\frac{\left\langle kK_3K_2k\right\rangle}{2(k_2k_1)(k_3k_1)}M_{1,b} \\
&\quad -\frac{1}{k_2k_1}\left\langle\xi k\right\rangle^* C^+_{Vf\bar{f}}\Big(C^+_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi' k\right\rangle^*\left\langle\phi\eta'\right\rangle + C^-_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi k\right\rangle^*\left\langle\phi'\eta'\right\rangle\Big) \\
&\quad +\frac{1}{k_3k_1}\left\langle\xi' k\right\rangle^* C^-_{Vf\bar{f}}\Big(C^+_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi' k\right\rangle^*\left\langle\phi\eta\right\rangle + C^-_{V\bar{\mu}\mu}\left\langle\psi k\right\rangle^*\left\langle\phi'\eta\right\rangle\Big)\Big].
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Tritt die Bremsstrahlung zusammen mit einem skalaren Teilchen auf, so berechnen sich die Amplituden

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^S_{init,-} &= \frac{-ie^3Q_\mu}{\sqrt{2}(S-2\sqrt{S}k_1^0-M_S^2)}\Big[-\frac{\langle kP_2P_1k\rangle^*}{2(p_1k_1)(p_2k_1)}M_{2,b}\\ &\quad+\left(\frac{1}{p_1k_1}+\frac{1}{p_2k_1}\right)C^+_{S\bar{\mu}\mu}\langle\phi' k\rangle\langle\phi k\rangle\left(C^+_{Sf\bar{f}}\langle\eta'\eta\rangle+C^-_{Sf\bar{f}}\langle\xi\xi'\rangle^*\right)\Big],\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^S_{init,+} &= \frac{-ie^3Q_\mu}{\sqrt{2}(S-2\sqrt{S}k_1^0-M_S^2)}\Big[-\frac{\langle kP_2P_1k\rangle}{2(p_1k_1)(p_2k_1)}M_{2,b}\\ &\quad-\left(\frac{1}{p_1k_1}+\frac{1}{p_2k_1}\right)C^-_{S\bar{\mu}\mu}\langle\psi k\rangle^*\langle\psi' k\rangle^*\left(C^+_{Sf\bar{f}}\langle\eta'\eta\rangle+C^-_{Sf\bar{f}}\langle\xi\xi'\rangle^*\right)\Big],\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^S_{final,-} &= \frac{-ie^3Q_\mu}{\sqrt{2}(S-M_S^2)}\Big[\frac{\langle kK_3K_2k\rangle^*}{2(k_2k_1)(k_3k_1)}M_{2,b}\\ &\quad-\left(\frac{1}{k_2k_1}+\frac{1}{k_3k_1}\right)C^+_{Sf\bar{f}}\langle\eta k\rangle\langle\eta' k\rangle\left(C^+_{S\bar{\mu}\mu}\langle\phi\phi'\rangle+C^-_{S\bar{\mu}\mu}\langle\psi'\psi\rangle^*\right)\Big],\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^S_{final,+} &= \frac{-ie^3Q_\mu}{\sqrt{2}(S-M_S^2)}\Big[\frac{\langle kK_3K_2k\rangle}{2(k_2k_1)(k_3k_1)}M_{2,b}\\ &\quad+\left(\frac{1}{k_2k_1}+\frac{1}{k_3k_1}\right)C^-_{Sf\bar{f}}\langle\xi k\rangle^*\langle\xi' k\rangle^*\left(C^+_{S\bar{\mu}\mu}\langle\phi\phi'\rangle+C^-_{S\bar{\mu}\mu}\langle\psi'\psi\rangle^*\right)\Big].\end{aligned} \tag{3.54}$$

In [4] wurden die Amplituden für $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}\gamma$ mit positiver Polarisation des Photons ebenfalls im WvdW-Formalismus berechnet. Die dortigen Resultate stimmen mit den von mir berechneten überein.

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

Die numerische Auswertung der Formfaktoren und Standardmatrixelemente erfolgte mit einem Fortran-Programm. Um numerische Ergebnisse für den Wirkungsquerschnitt zu erhalten, müssen noch die entsprechenden Integrationen über den jeweiligen Phasenraum durchgeführt werden. Im Falle des Prozesses $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$ verbleibt nur die Integration über $\cos\theta_1$ (siehe 3.4) , die im Computerprogramm von einer Gauss-Integrationsroutine ausgeführt wird. Im Falle des Prozesses $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}\gamma$ verbleibt eine vierdimensionale Integration (siehe 3.36). Diese Integration wird numerisch mit einer Monte-Carlo-Integration durchgeführt. Damit der Integrationsfehler, der bei der Monte-Carlo-Integration auftritt, möglichst gering bleibt, erfolgt die Integration nicht über die Parameter in (3.36) , sondern über die Parametrisierung

$$\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^4} \int d(\log k_1^0) k_1^0 \int_{-1}^{1} d\cos\theta_1 \int dk_2^0 \int_{0}^{2\pi} d\beta \tag{4.1}$$

des Drei-Teilchen-Phasenraumes. Da der Integrand (d.h. das Betragsquadrat der Amplitude $\mathcal{M}_{fi}$) für $k_1^0 \to 0$ divergiert, ist es numerisch günstiger über $\log k_1^0$ zu integrieren. In diesem Fall kürzt sich dann der divergente Faktor $1/k_1^0$ in der Amplitude gegen den Faktor k_1^0, der durch die Substitution nach $\log k_1^0$ entsteht.

4.1 Eingabeparameter

Folgende Werte für die physikalischen Parameter wurden im Programm verwendet:

$\alpha = 1/137.0359895, \quad M_W = 80.410\text{GeV}, \quad M_Z = 91.187\text{GeV}, \quad \Gamma_Z = 2.49\text{GeV}.$

Die Werte der Eichboson-Massen und der Fermionenmassen in Tabelle 4.1 stammen aus [14]. Für die Masse des Higgs-Bosons wurden die Werte und zugehörigen

Breiten aus Tabelle 2.1 verwendet, wobei standardmäßig die Masse

$$M_H = 110\text{GeV mit } \Gamma_H = 0.004417678\text{GeV} \tag{4.2}$$

eingesetzt wurde. Die Breiten der Teilchen wurden durch die Einführung von komplexen Massen in der numerischen Auswertung berücksichtigt. Da die Einführung von komplexen Massen die algebraischen Relationen in den einzelnen Ausdrücken nicht verändert, bleibt auf diese Weise die Eichinvarianz bestehen (siehe Abschnitt 3.1.2).

Tabelle 4.1: Massen der Fermionen

$m_e = 0.51099907 \cdot 10^{-3}$ GeV	$m_\mu = 0.105658389$ GeV	$m_\tau = 1.77700$ GeV
$m_u = 5 \cdot 10^{-3}$ GeV	$m_c = 1.3$ GeV	$m_t = 180$ GeV
$m_d = 1 \cdot 10^{-2}$ GeV	$m_s = 0.2$ GeV	$m_b = 4.3$ GeV

4.2 Born'sche Näherung

In der Born'schen Näherung soll nun der Einfluß der Polarisation des eingehenden Myon-Paares untersucht werden.

Da die Kopplung des Higgs-Bosons an Fermionen proportional zu deren Masse ist, werden hier nur die Wirkungsquerschnitte für die Reaktion $\mu^-\mu^+ \to b\bar{b}$ untersucht, bei der ein Bottom-Quark-Paar $b\bar{b}$ mit $m_b = 4.3$ GeV im Endzustand erzeugt wird. Das nächst leichtere Endzustandsteilchen ist das τ mit $m_\tau = 1.777$ GeV, dessen Beitrag zum Wirkungquerschnitt σ jedoch wegen der kleineren Masse und dem nicht vorhandenen Farbfaktor für Leptonen nur noch etwa

$$\sigma(\mu^-\mu^+ \to H^* \to \tau\bar{\tau}) \approx \frac{1}{50}\sigma(\mu^-\mu^+ \to H^* \to b\bar{b}) \tag{4.3}$$

ist. Auch der Beitrag des Charm-Quark-Endzustandes bleibt mit

$$\sigma(\mu^-\mu^+ \to H^* \to c\bar{c}) \approx \frac{1}{11}\sigma(\mu^-\mu^+ \to H^* \to b\bar{b}), \tag{4.4}$$

bei einer Masse $m_c = 1.3$ GeV noch über eine Größenordnung unter dem Beitrag durch den Bottom-Quark-Endzustand. Da im Standardmodell die einzig größere Fermionmasse die Masse des Top-Quarks $m_t = 180$ GeV ist, ist für die Erzeugung eines $t\bar{t}$-Zustandes eine Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$ von mindestens 360 GeV notwendig, was über den betrachteten Werten für $\sqrt{S}$ liegt. Der Übergang $\mu^-\mu^+ \to t\bar{t}$ ist somit energetisch ausgeschlossen.

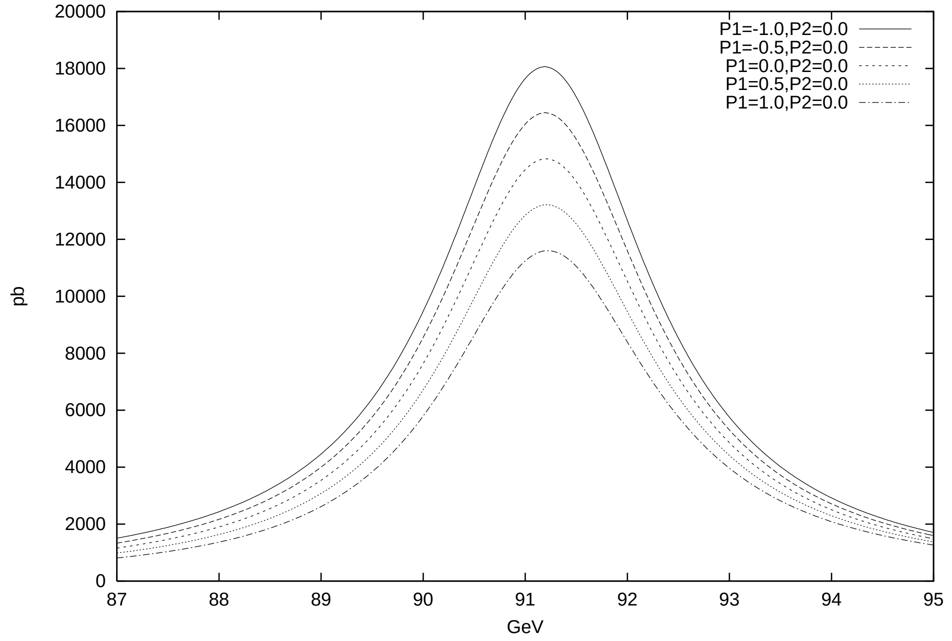


Abbildung 4.1: Wirkungsquerschnitt von $\mu^-\mu^+ \to b\bar{b}$ bei polarisiertem Myon-Strahl

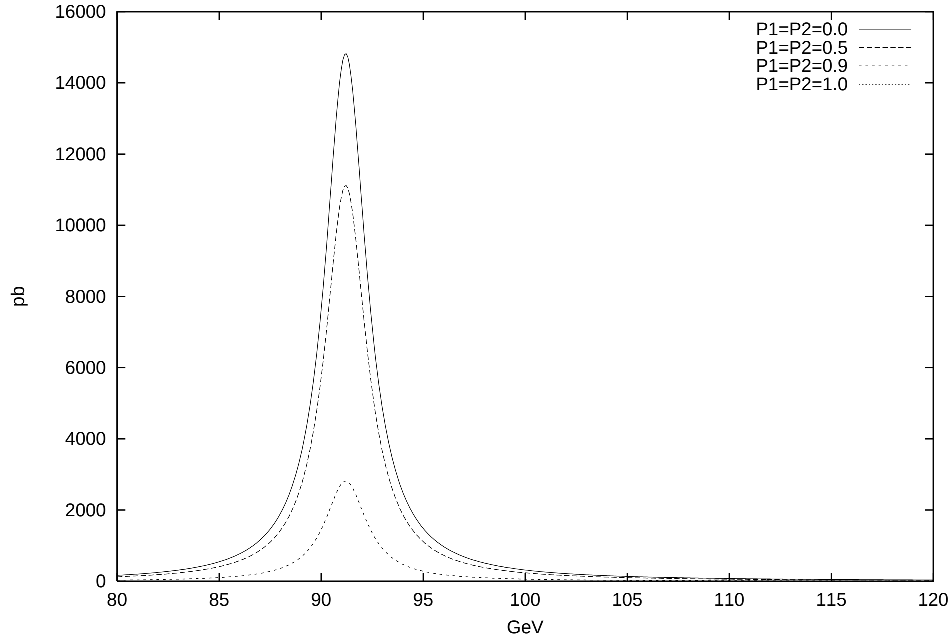


Abbildung 4.2: Wirkungsquerschnitt von $\mu^-\mu^+ \to b\bar{b}$ bei Polarisation beider Myon-Strahlen

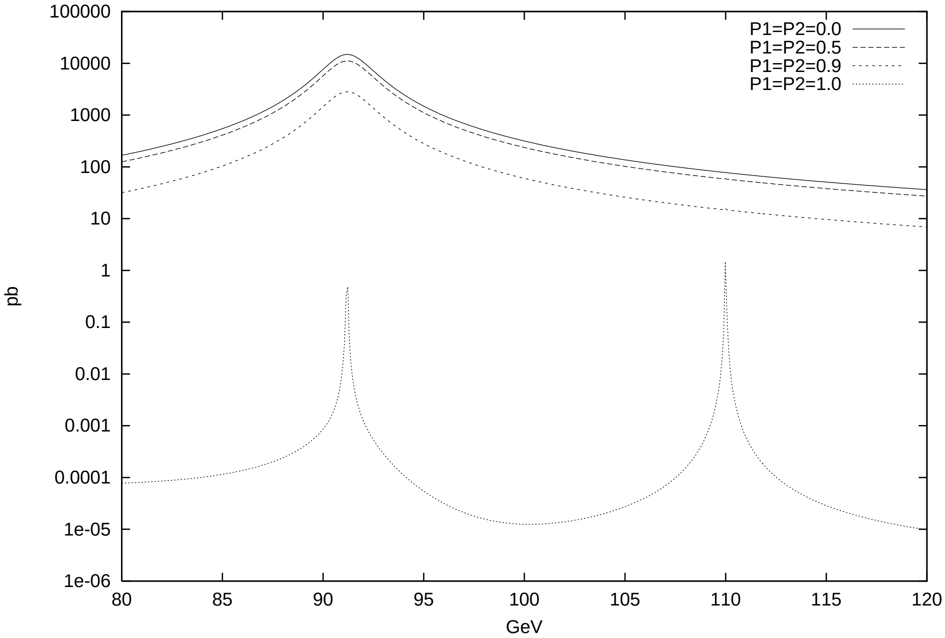


Abbildung 4.3: Wirkungsquerschnitt von $\mu^-\mu^+ \to b\bar{b}$

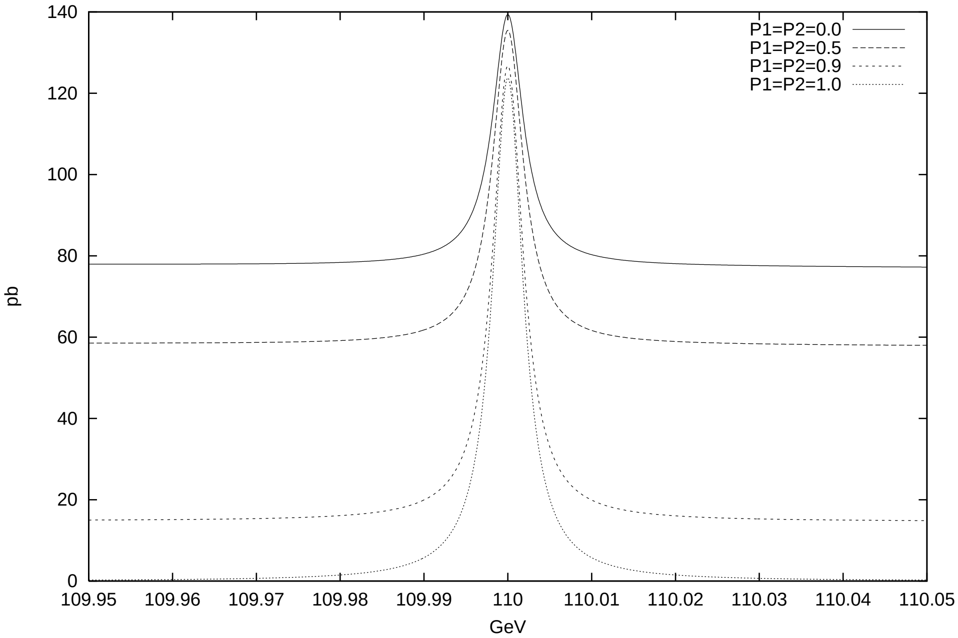


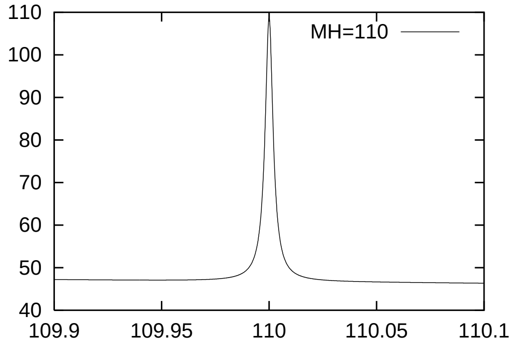
Abbildung 4.4: Resonanz des Higgs-Bosons beim Übergang $\mu^-\mu^+ \to b\bar{b}$ und unterschiedlicher Polarisationen der Myonen im Anfangszustand

Betrachtet man den Resonanz-Peak, der durch den Austausch des Z-Bosons hervorgerufen wird, bei verschiedenen longitudinalen Polarisationen der einlaufenden Teilchen (siehe Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3), so sieht man, dass der entsprechende Übergang stark polarisationsabhängig ist. Diese Abhängigkeit kann genutzt werden, um die auf der Suche nach der Resonanz des Higgs-Bosons eigentlich störende Z-Resonanz zu unterdrücken. Abbildung 4.1 zeigt die Effekte der Polarisation eines einzelnen Teilchen-Strahls. Für einen Myon-Collider wäre es jedoch sinnvoller beide Strahlen gleichzeitig zu polarisieren, da man mit einer vollständigen Polarisation beider Eingangsstrahlen den Z-Peak fast vollständig auslöschen kann (siehe Abbildungen 4.2 und 4.3). Auf diese Weise kann der Resonanzpeak des Higgs-Bosons, der in Abbildung 4.3 für $P_1 = P_2 = 1.0$ bei $\sqrt{S} = 110$ GeV sichtbar wird, besser gefunden werden.

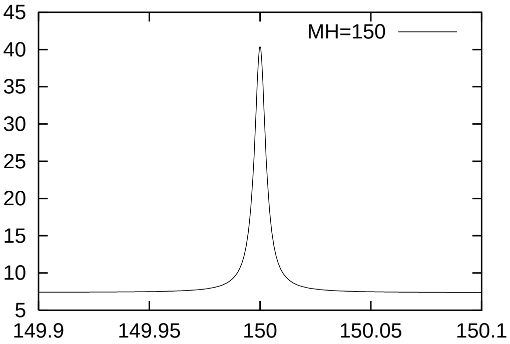
Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Polarisation der eingehenden Teilchenstrahlen wird verständlich, wenn man die Helizitäten bzw. den Spin dieser Teilchen näher betrachtet. Da für die Polarisation $P_1 = P_2 = 1.0$ die Spineinstellungen des einlaufenden Myons und die des einlaufenden Anti-Myons genau entgegengesetzt sind, addieren sich die Spins der einlaufenden Fermionen zu Null. Hierdurch wird dann der Austausch des Z-Bosons mit Spin 1 gegenüber dem Austausch eines Higgs-Bosons mit Spin 0 unterdrückt. Umgekehrt wird falls das Myon mit positiver Helizität und das Anti-Myon mit negativer Helizität einläuft der Austausch eines Higgs-Bosons unmöglich, da sich die Spins zu 1 addieren.

Betrachtet man nun die Resonanz des Higgs-Bosons allein, so wie in Abbildung 4.4, dann sieht man, dass bei den den Z-Peak unterdrückenden Polarisationseinstellungen der Peak des H-Bosons sogar noch verstärkt wird.

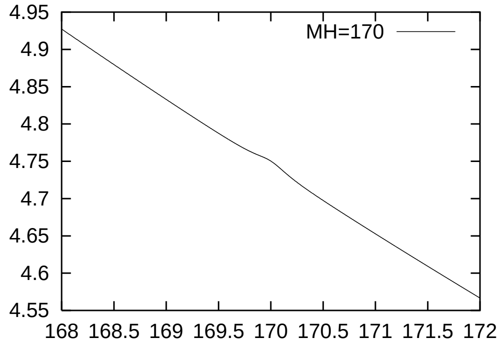
In Abbildung 4.5 ist zu sehen, wie die Form der zu erwartenden Resonanz von der Masse des Higgs-Bosons abhängt. So lange die Higgs-Boson-Masse unterhalb der Schwelle zur Erzeugung eines W^+W^--Paares liegt, also $M_H \leq 2M_W = 160.82$ GeV ist, findet man eine sehr schmale, aber deutliche Resonanz. Bei einer Masse M_H zwischen $2M_W$ und $2M_Z$ ist die Resonanz schon erheblich verbreitert und bei Higgs-Boson-Massen über der Schwellenenergie zur Z-Paar Erzeugung ist die Resonanz so breit und flach, dass sie nicht mehr zu erkennen ist. Für grosse Higgs-Boson-Massen ist erst wieder eine Resonanz erkennbar, wenn die eingehenden Myon-Strahlen entsprechend polarisiert werden, wie in Abbildung 4.6 zu sehen ist. Abbildung 4.6 zeigt aber auch, dass die Peak-Höhen für grössere Higgsmassen drastisch abnehmen, so dass die Detektion eines Higgs-Bosons erheblich erschwert wird. Außerdem ist die gezeigte Polarisation von $P_1 = P_2 = 1$ technisch nicht zu erreichen und je höher die Polarisation an einem Myon-Collider gewählt wird, desto geringer wird die Luminosität, d.h. die Ausbeute an Myonen, die für Reaktionen zur Verfügung steht. Für Details hierzu siehe [13], wonach bei einer Polarisation von 50% noch etwa 22% der nicht polarisierten Luminosität zur Verfügung steht, während bei 60% Polarisation gerade noch 8% der ursprünglichen Luminosität vorhanden ist.



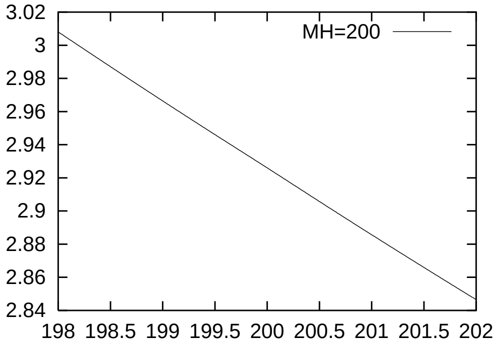
$M_H = 110$ GeV



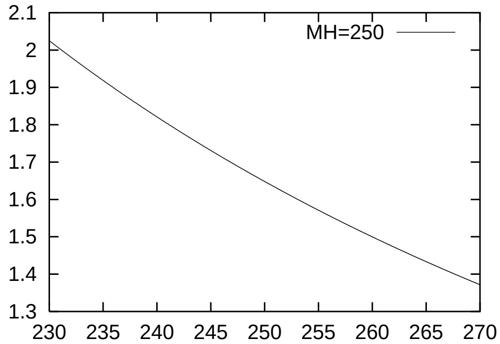
$M_H = 150$ GeV



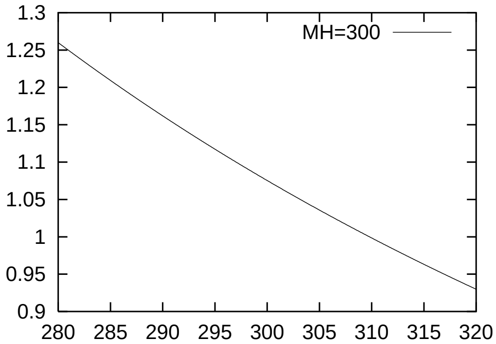
$M_H = 170$ GeV



$M_H = 200$ GeV

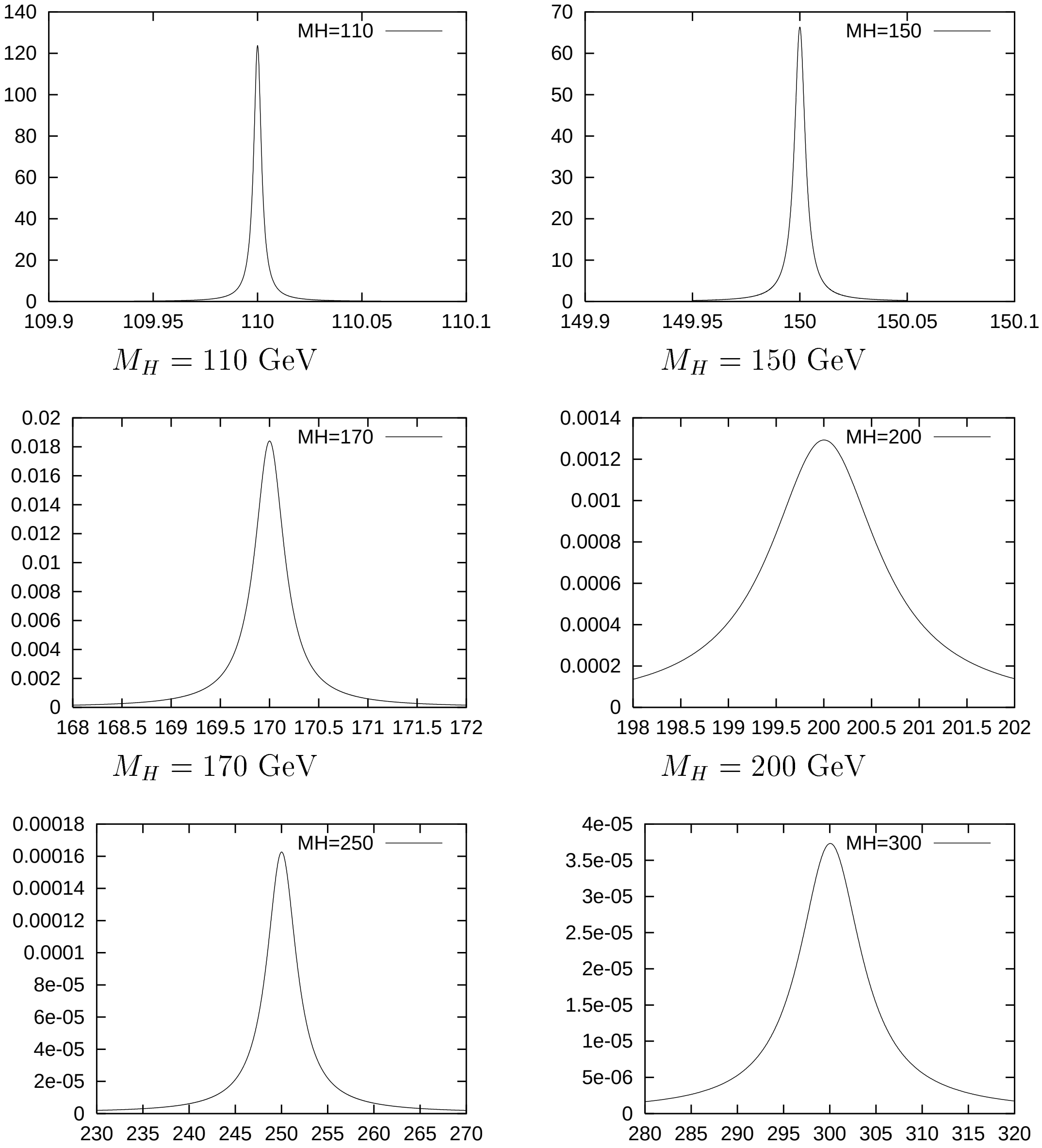


$M_H = 250$ GeV



$M_H = 300$ GeV

Abbildung 4.5: Born'sche Wirkungsquerschnitte bei unpolarisierten Myon-Strahlen ($P_1 = P_2 = 0$) für verschiedene Higgs-Boson Massen. Aufgetragen ist jeweils der Wirkungsquerschnitt in pb zur Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$.



$M_H = 110$ GeV $M_H = 150$ GeV

$M_H = 170$ GeV $M_H = 200$ GeV

$M_H = 250$ GeV $M_H = 300$ GeV

Abbildung 4.6: Born'sche Wirkungsquerschnitte bei vollständig polarisierten Myon-Strahlen ($P_1 = P_2 = 1$) für verschiedene Higgs-Boson Massen. Aufgetragen ist jeweils der Wirkungsquerschnitt in pb zur Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$.

4.3 Anfangs- und Endzustandskorrekturen

Die gesonderte Auswertung der Anfangs- und Endzustandskorrekturen dient hauptsächlich der Überprüfung der Anfangs- und Endzustandskorrekturen. So wurde z.B. auch der Wirkungsquerschnitt für $\mu^-\mu^+ \to \bar{\nu}_e\nu_e$ und $\mu^-\mu^+ \to \bar{\nu}_e\nu_e\gamma$ berechnet. Da die Neutrinos, die in diesem Prozess produziert werden, keine Ladung tragen, trägt in der photonischen $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrektur nur die Korrektur des Anfangszustandes bei. Ferner ist das Neutrino masselos, so dass es nicht an das Higgs-Boson koppelt und somit nur der Austausch eines Z-Bosons zur Amplitude beiträgt. Um ein Neutrino im Endzustand zu simulieren, wurde die Masse des Endzustandsteilchens auf $m_f = 0.1$ MeV gesetzt. Die erhaltenen Werte (siehe Tabelle 4.2) können direkt mit Ergebnissen aus [6] verglichen werden und stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit ihnen überein. Man sieht auch, dass die errechneten Korrekturen nicht von der Wahl der Energie ΔE abhängen, die die Grenze zwischen dem Soft-Photon-Anteil und dem Hard-Photon-Anteil bildet. Die Wahl von kleineren Werten für ΔE führt allerdings zu immer größeren Integrationsfehlern.

Tabelle 4.2: Wirkungsquerschnitt für $\mu^-\mu^+ \to \bar{\nu}_e\nu_e(\gamma)$ bei verschiedenen Polarisationen des Myons

$\sqrt{S}$/GeV	P_1	P_2	σ_0/pb	$\frac{\Delta E}{E}$	$\delta_{QED}/\%$	Integrationsfehler/%
0.5	-1	0	$0.935980 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}	0.337	0.0029
				10^{-4}	0.321	0.0081
				10^{-6}	0.323	0.0157
0.5	0	0	$0.754992 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}	0.358	0.0021
				10^{-4}	0.340	0.0056
				10^{-6}	0.351	0.0105
0.5	1	0	$0.574003 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}	0.390	0.0029
				10^{-4}	0.374	0.0078
				10^{-6}	0.384	0.0153
50	-1	0	2.064956	10^{-2}	-4.163	0.0179
				10^{-4}	-4.338	0.0519
				10^{-6}	-4.348	0.0993
50	0	0	1.695205	10^{-2}	-4.136	0.0124
				10^{-4}	-4.241	0.0364
				10^{-6}	-4.244	0.0647
50	1	0	1.325454	10^{-2}	-4.091	0.0185
				10^{-4}	-4.149	0.0537
				10^{-6}	-4.084	0.0949

Um die Richtigkeit der Korrekturen im Endzustand zu überprüfen, kann die Ladung des Myons auf Null gesetzt werden. In diesem Fall muss die anschließende Normierung der photonischen Korrekturen auf den Born'schen Wirkungsquerschnitt näherungsweise die $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrektur zum Z-Zerfall in zwei Fermionen wiedergeben. Für den Zerfall des Z-Bosons in zwei masselose Fermionen erhält man für die photonische Gesamtbreite in $\mathcal{O}(\alpha)$:

$$\Gamma^{(1)}_{Z\to f\bar{f}}\Big|_{\gamma} = \Gamma^{(0)}_{Z\to f\bar{f}} \left(1 + \frac{3}{4}\frac{\alpha}{\pi} Q_f^2\right). \tag{4.5}$$

D.h. die photonischen Korrekturen ergeben einen Faktor $\frac{3}{4}\frac{\alpha}{\pi}Q_f^2$ zum Born'schen Wirkungsquerschnitt. Betrachtet man wieder ein Bottom-Quark im Endzustand, so ist $Q_f = -\frac{1}{3}$ und somit ergibt sich der Zahlenwert

$$\frac{3}{4}\frac{\alpha}{\pi} Q_f^2 = 1.935683 \cdot 10^{-4}, \tag{4.6}$$

während das Computerprogramm auf dem Z-Peak bei $\sqrt{S} = M_Z = 91.187$ GeV den Wert

$$\frac{\sigma_{Korrektur}}{\sigma_{Born}} = 2.057 \cdot 10^{-4} \pm 2.13 \cdot 10^{-6} \tag{4.7}$$

errechnet. Die Abweichung von ca. 6% ergibt sich dadurch, dass im Programm das Z-Boson nicht in ein masseloses Fermionpaar, sondern in ein massives $b\bar{b}$-Paar zerfällt.

4.4 Gesamtkorrektur

Um die Gesamtkorrektur für $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}(\gamma)$ konsistent auszuwerten, müssen jetzt alle photonischen Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha)$ aufsummiert werden. Den größten Beitrag liefern dabei die Korrekturen, die durch die Abstrahlung reeller Photonen entstehen. Durch die Abstrahlung von Photonen im Anfangszustand wird nämlich die Energie vermindert, die für den anschließenden Übergang $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$ zur Verfügung steht. Der hieraus resultierende Effekt, soll nun am Beispiel der Z-Resonanz kurz erläutert werden.

Wird im Anfangszustand die Energie k_1^0 über ein Photon abgestrahlt, so vermindert dieses auch den Impuls p, den das virtuelle Z-Boson überträgt. Das Quadrat des übertragenen Impulses p ist dann $p^2 = S - 2\sqrt{S}k_1^0$, und der Z-Propagator hat damit die Form

$$\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2 - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} = \frac{ig^{\mu\nu}}{S - 2\sqrt{S}k_1^0 - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z}. \tag{4.8}$$

Ist die Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$ größer, als die Masse M_Z des Z-Bosons, kann der Energieverlust durch Bremsstrahlung die Amplitude des Übergangs verstärken.

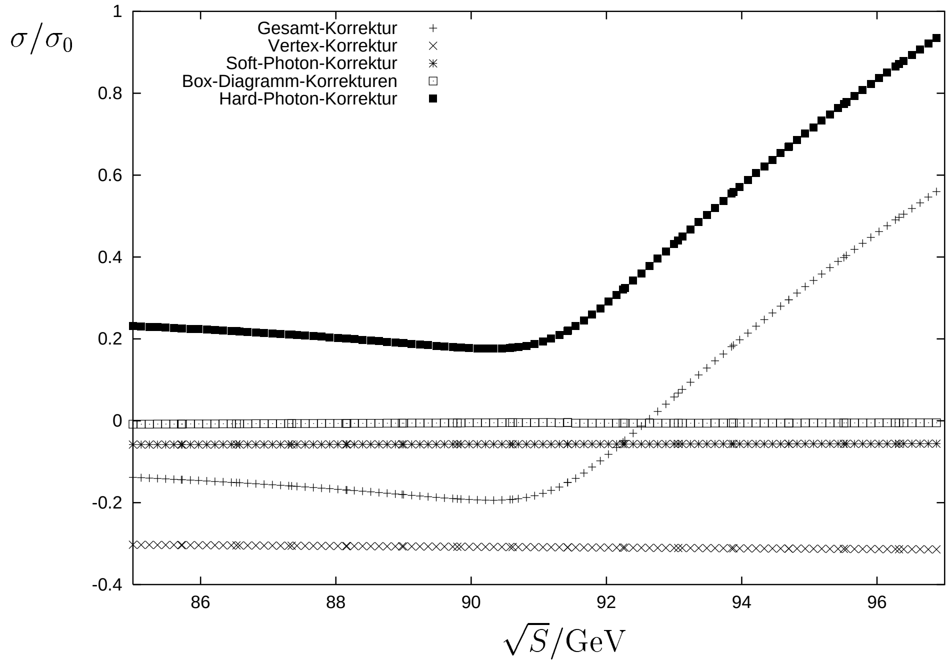


Abbildung 4.7: Die prozentualen Korrekturen zur Z-Resonanz bei unpolarisierten Myon-Strahlen und für Photnmasse $\lambda = 0.01$ GeV

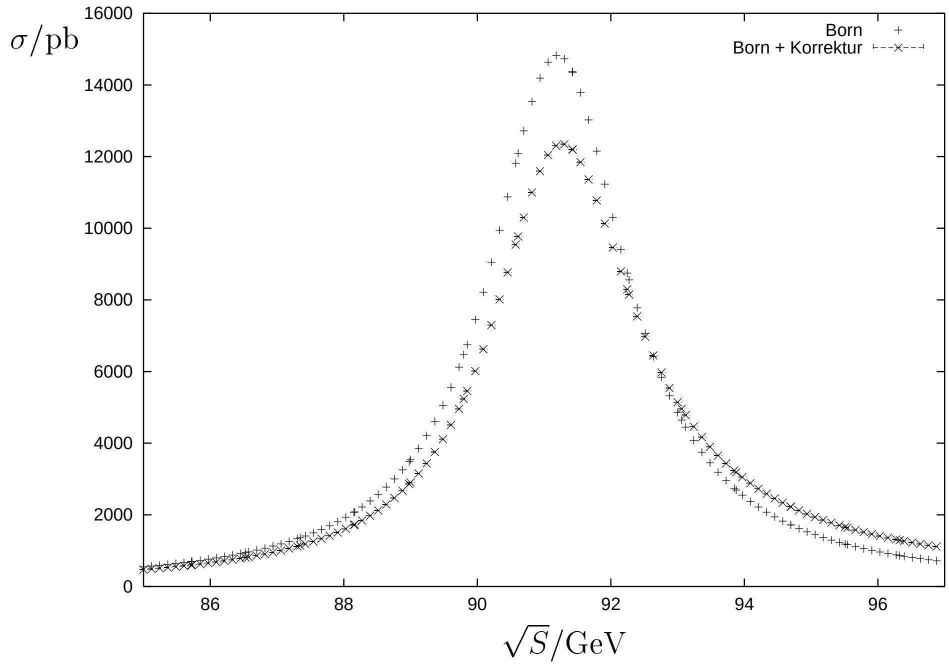


Abbildung 4.8: Form der Z-Resonanz mit und ohne Korrekturen für unpolarisierte Eingangsstrahlen

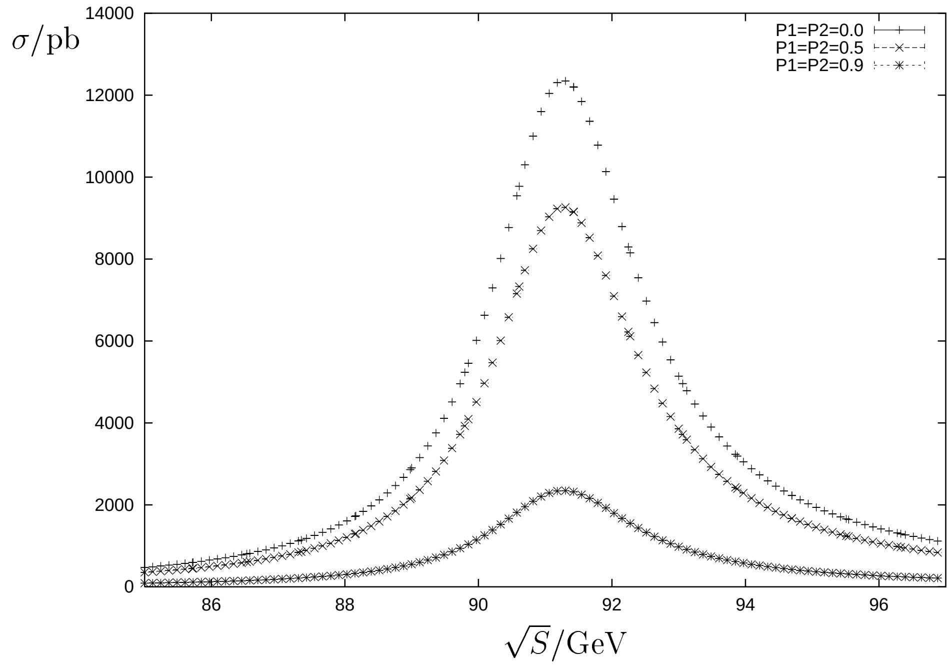


Abbildung 4.9: Die korrigierte Z-Resonanz bei polarisierten Myon-Strahlen

Der Propagator liefert nämlich einen maximalen Beitrag, falls

$$k_1^0 = \frac{S - M^2}{2\sqrt{S}} = E\left(1 - \frac{M^2}{4E^2}\right). \tag{4.9}$$

Photonen dieser Energie werden folglich mit einer größeren Wahrscheinlichkeit abgestrahlt. Der Wirkungsquerschnitt für $\mu^-\mu+ \to f\bar{f}\gamma$ wird durch die Abstrahlung solcher Photonen beträchtlich vergrößert.

Da die Vertex-Korrekturen und die Soft-Photon-Korrektur den Wirkungsquerschnitt für $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$ insgesamt verringern, der Beitrag zum Gesamtwirkungsquerschnitt durch die harten Photonen jedoch für $\sqrt{S} > M_Z$ wie oben beschrieben stark anwächst, ergibt sich insgesamt eine Verschiebung des Maximums der Z-Resonanz zu höheren Energien (siehe Abbildung 4.8).

Die anderen Korrekturen lassen die Form des Z-Peaks weitgehend unberührt, wie man aus Abbildung 4.7 entnehmen kann. Die korrigierte Resonanz für unpolarisierte Strahlen ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Man sieht deutlich, dass für Schwerpunktsenergien $\sqrt{S} > 93$ GeV der korrigierte Wirkungsquerschnitt deutlich über den Born'schen Wirkungsquerschnitt ansteigt. Dieser Anstieg erhöht auch erheblich den Untergrund, der bei einer möglichen Resonanz des Higgs-Bosons in diesem Energiebereich zu erwarten ist. Durch entsprechende Polarisation des Myon- und des Antimyon-Strahls ist es aber weiterhin möglich, die Höhe der Z-Boson-Resonanz zu vermindern und somit den Reaktionsuntergrund für einen Higgs-Boson Prozess zu verringern, wie Abbildung 4.9 zeigt. Im kor-

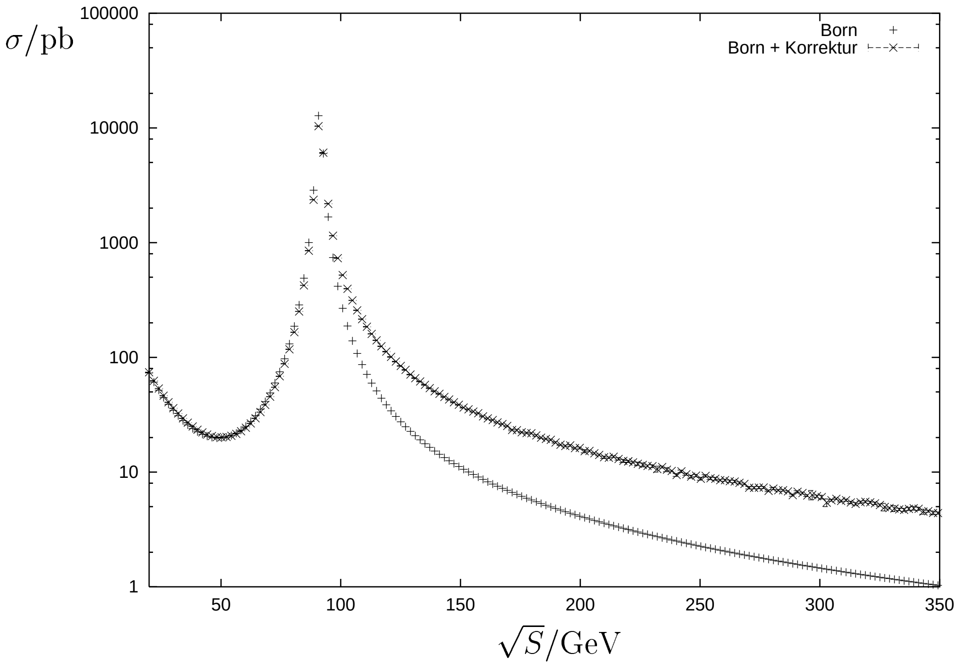


Abbildung 4.10: Verlauf des korrigierten Wirkungsquerschnitts im Vergleich zum Verlauf des Born'schen Wirkungsquerschnitts.

rigierten Wirkungsquerschnitt wird allerdings deutlich, dass der zu erwartende Hintergrund von $\mu^-\mu^+ \to Z \to f\bar{f}$-Prozessen wesentlich grösser ist, als durch eine reine Betrachtung der Tree-Level-Graphen hätte vermutet werden können. Insbesondere der hohe Beitrag, der durch die Bremsstrahlung verursacht wird, macht die Betrachtung der photonischen Korrekturen unbedingt notwendig.

Der gesamte Verlauf des korrigierten Wirkungsquerschnittes ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Die Korrekturen erreichen in dem Bereich, in dem ein Resonanzpeak durch den Übergang $\mu^-\mu^+ \to H^* \to f\bar{f}$ zu erwarten ist, Werte von über 200%. Da diese Korrekturen hauptsächlich durch Übergänge mit einem Z-Boson verursacht werden, erhöht sich so der zu erwartende Untergrund für eine Higgs-Boson-Resonanz erheblich.

Betrachtet man die Korrekturen, die in der Nähe der Higgs-Boson-Resonanz auftreten, so zeigt sich, dass der Born'sche Wirkungsquerschnitt zwar insgesamt zu höheren Werten hin korrigiert wird, die Resonanz des Higgs-Bosons selbst aber durch die Vertexkorrekturen an Grösse verliert (siehe Abbildung 4.11). Insgesamt findet man einen, im Vergleich zum Born'schen Wirkungsquerschnitt kleineren Peak mit wesentlich mehr Untergrund, wie in Abbildung 4.12 zu sehen ist. Die prinzipielle Form der Korrekturen bleibt auch für $M_H = 150$ GeV erhalten. Der entsprechende Resonanz-Peak in Abbildung 4.13 ist zwar kleiner und besitzt eine größere Breite, die photonischen Korrekturen haben aber hier auch genau den gleichen Effekt, wie im Fall $M_H = 110$ GeV.

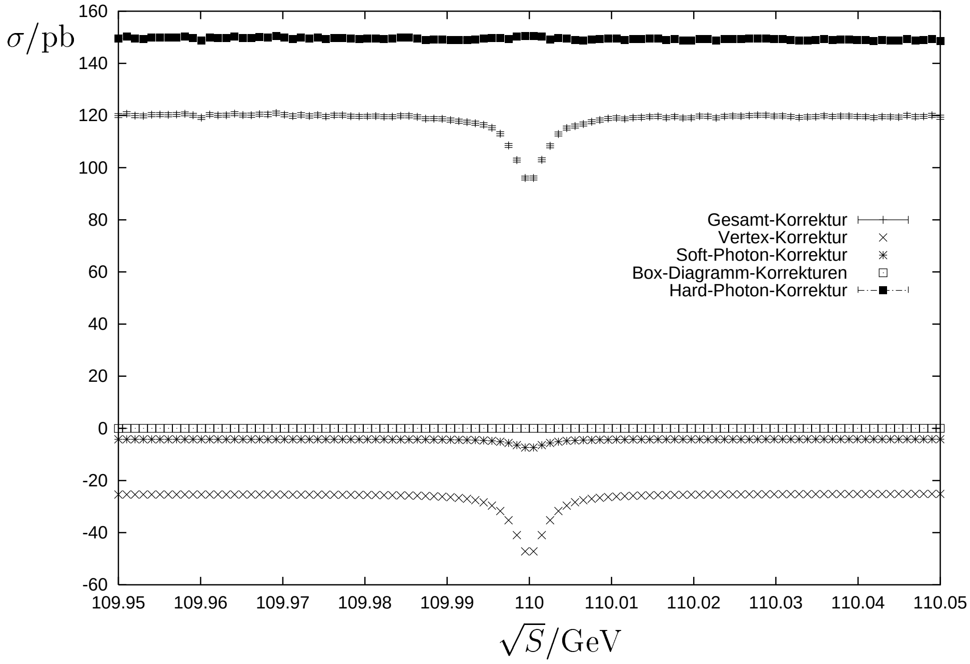


Abbildung 4.11: Die Korrekturen zur Higgs-Boson-Resonanz ohne Polarisation und Higgs-Boson-Masse $M_H = 110$ GeV, Photonmasse $\lambda = 0.01$ GeV

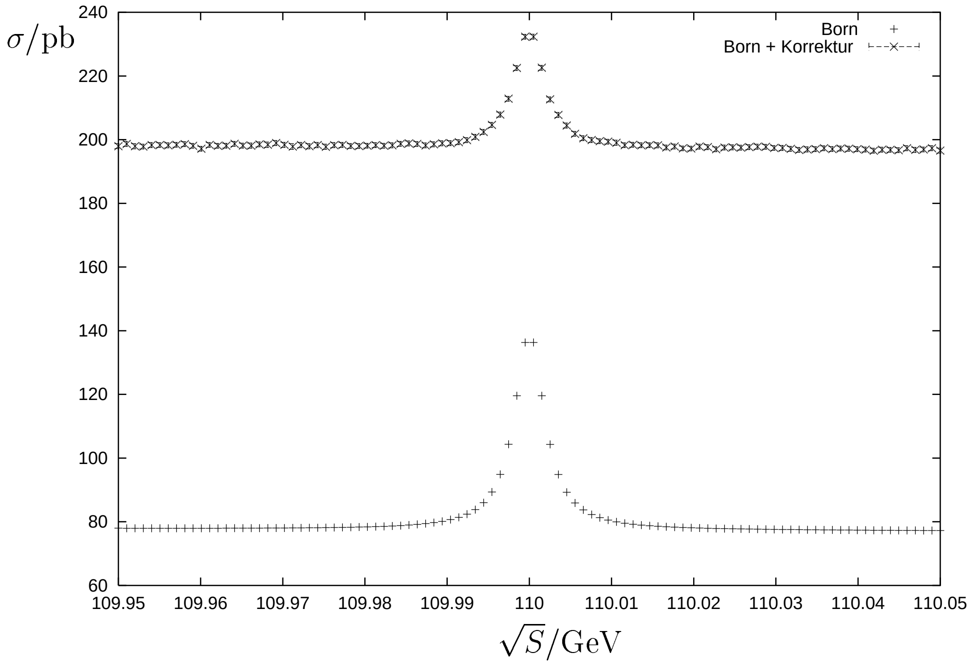


Abbildung 4.12: Vergleich von Born'scher Näherung mit der photonischen $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrektur für $P_1 = P_2 = 0$ und $M_H = 110$ GeV

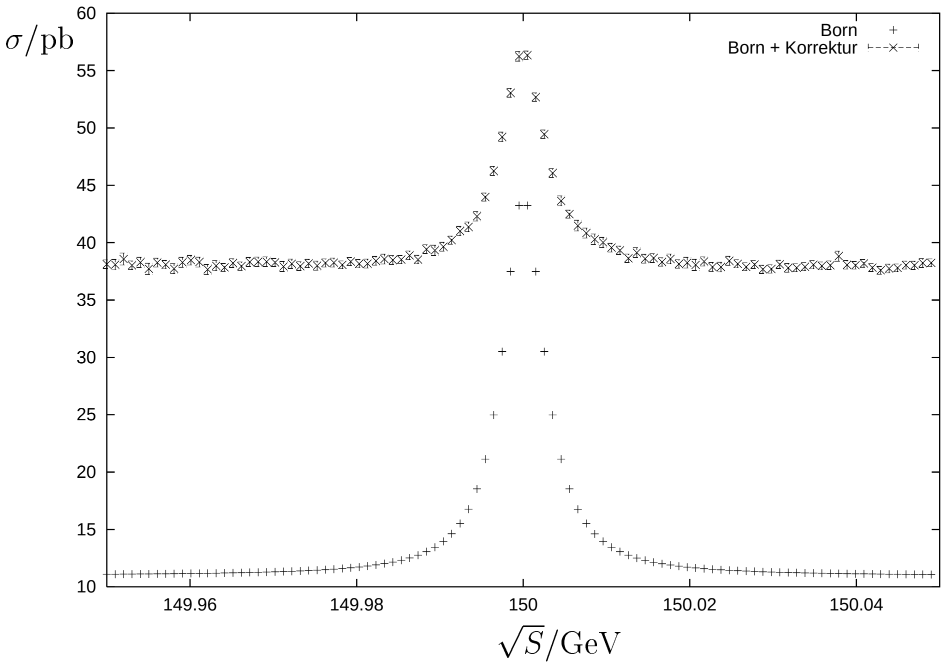
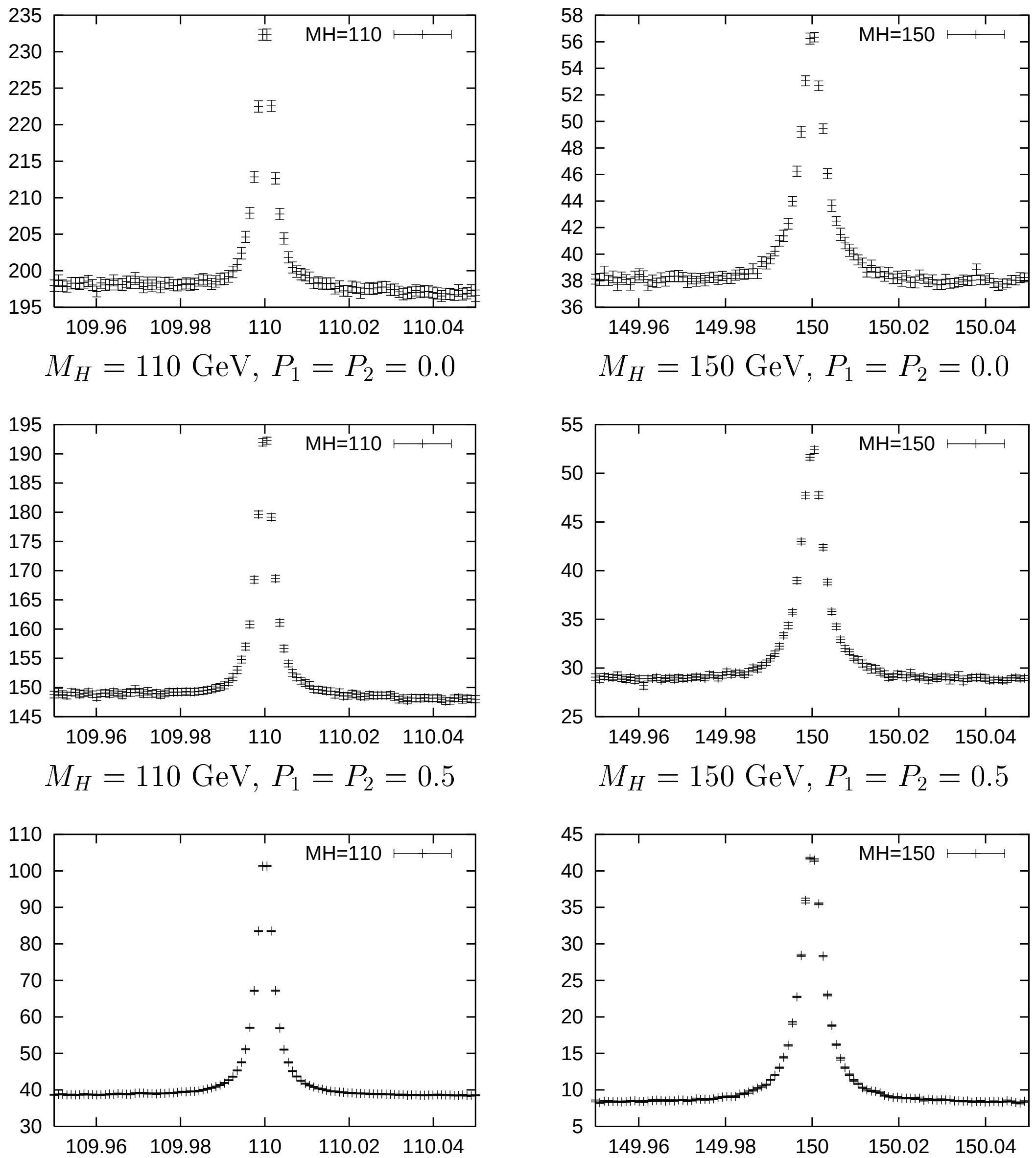


Abbildung 4.13: Vergleich von Born'scher Näherung mit der photonischen $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrektur für $P_1 = P_2 = 0$ und $M_H = 150$ GeV

Es wird noch einmal in Abbildung 4.14 gezeigt, dass sich der Anteil des Wirkungsquerschnittes, der aus dem Übergang $\mu^-\mu^+ \to H^* \to f\bar{f}$ stammt, durch geeignete Wahl der Polarisation erheblich vergrössern läßt. Wobei natürlich im Experiment ein Polarisationsgrad von 90% nicht verwirklicht werden kann (siehe [13]). Ein Myon-Collider, der mit einem Polarisationsgrad von $P_1 = P_2 = 0.5$ betrieben werden kann, würde allerdings das Verhältnis von Peak-Höhe zu Untergrund schon erheblich verbessern, wie Tabelle 4.3 zeigt. Hier wurde der absolute Wirkungsquerschnitt des Resonanzpeaks durch den Wirkungsquerschnitt, der allein durch den Z-Boson-Austausch in der Umgebung der Resonanz entsteht, geteilt.

Tabelle 4.3: Verhälnisse von Gesamthöhe der Higgs-Boson-Resonanz zum vorhandenen Untergrund durch Z- und γ-Ereignisse

	$M_H = 110$ GeV	$M_H = 150$ GeV
$P_1 = P_2 = 0.0$	1.18	1.47
$P_1 = P_2 = 0.5$	1.29	1.81
$P_1 = P_2 = 0.9$	2.50	5.25



$M_H = 110$ GeV, $P_1 = P_2 = 0.0$ — $M_H = 150$ GeV, $P_1 = P_2 = 0.0$

$M_H = 110$ GeV, $P_1 = P_2 = 0.5$ — $M_H = 150$ GeV, $P_1 = P_2 = 0.5$

$M_H = 110$ GeV, $P_1 = P_2 = 0.9$ — $M_H = 150$ GeV, $P_1 = P_2 = 0.9$

Abbildung 4.14: Vergleich verschiedener Polarisationsgrade für kleine M_H. Aufgetragen ist jeweils der Wirkungsquerschnitt in pb zur Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$.

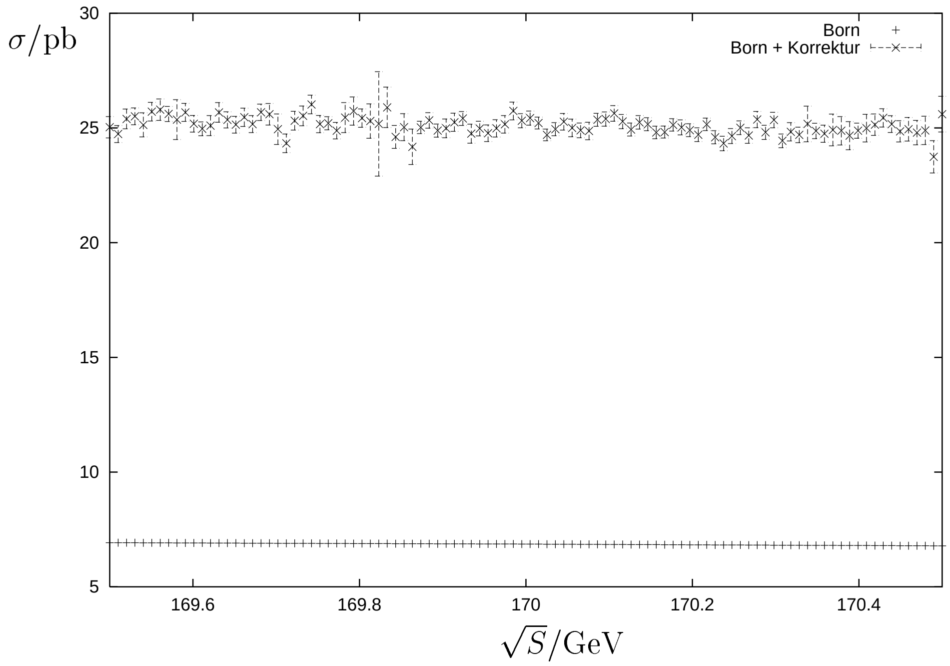


Abbildung 4.15: Vergleich von Born'scher Näherung mit der photonischen $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrektur für $P_1 = P_2 = 0$ und $M_H = 170$ GeV

Die Ergebnisse für die Higgs-Boson-Massen $M_H = 170$ GeV und $M_H = 200$ GeV enthalten leider einen Integrationsfehler, der so groß ist, dass aus den berechnenten Daten kein Peak erkennbar ist. Um diesen Integrationsfehler zu verkleinern müsste entweder die Statistik erheblich erhöht werden, was dann natürlich auch wesentlich mehr Rechenzeit erfordern würde, oder es müsste das Computerprogramm hinsichtlich der Integration weiter optimiert werden. Eine solche Optimierung könnte z.B. durch die Verwendung des Dipol-Subtraktions-Formalismus geschehen, der in [6] beschrieben wird. Zumindest müsste eine bessere Parametrisierung für die Integration gefunden werden, in der der Integrand insgesamt eine homogenere Verteilung aufweist.

Ein Higgs-Boson mit Masse $M_H \geq 170$ GeV ist aber nach den Ergebnissen in [28] auch nicht zu erwarten. Die Ergebnisse in Born'scher Näherung haben gezeigt, dass eine Resonanz solcher Higgs-Bosonen im S-Kanal eines Myon-Colliders schon allein aufgrund der Breite und Höhe des zu erwartenden Peaks nicht zu entdecken wäre. Da durch die photonischen Korrekturen hauptsächlich der Untergrund von Z-Ereignissen erhöht wird, wird auch der Korrigierte Wirkungsquerschnitt für die entsprechenden Resonanzen keine größeren Peaks aufweisen.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wurden die photonischen Strahlungkorrekturen zum Prozess $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}$ in $\mathcal{O}(\alpha)$ berechnet. Zusätzlich wurde auch die harte Bremsstrahlung, d.h. der Prozess $\mu^-\mu^+ \to f\bar{f}\gamma$ berechnet. Diese Berechnungen erfolgten insgesamt auf der Grundlage des Standardmodells der Elektroschwachen Wechselwirkung und wurden in t'Hooft-Feynman-Eichung durchgeführt.

Anschliessend wurden die Ergebnisse numerisch ausgewertet, wobei eine mögliche longitudinale Polarisation der eingehenden Myon-Strahlen mit berücksichtigt wurde. Die Auswertung erfolgte dabei in Hinsicht auf die Verwendung eines Myon-Colliders zur Detektion des Standardmodell Higgs-Bosons. Um einen möglichst großen Beitrag über den Higgs-Boson-Austausch zu erhalten, lag hier der Schwerpunkt auf der Untersuchung des Prozesses $\mu^-\mu^+ \to b\bar{b}(\gamma)$. Für diesen Prozess wurden Wirkungsquerschnitte mit verschiedenen Higgs-Boson-Massen berechnet und miteinander verglichen. Ergebnis dieses Vergleichs war, dass ein Higgs-Boson mit Masse $M_H = 110$ GeV oder $M_H = 150$ GeV an einem Myon-Collider relativ leicht gefunden werden könnte, während ein Higgs-Boson mit Masse $M_H \geq 170$ GeV aufgrund der enormen Breite der zu erwartenden Resonanz praktisch nicht zu sehen sein würde.

Insgesamt stellte sich immer wieder heraus, dass die Verwendung von polarisierten Myon-Strahlen einen sehr großen Einfluss auf die berechneten Wirkungsquerschnitte hat, und dass sich durch die Wahl einer geeigneten Polarisation der Anteil einzelner Reaktionskanäle am gesamten Wirkungsquerschnitt entscheidend verändern läßt.

Anhang A

Skalare Integrale

A.1 Resultate für die auftretenden Integrale

Um Resultate für die skalaren Integrale zu erhalten, wurden auch einige Spezialfälle berechnet, da nur diese relativ einfache Lösungen besitzen. Es treten aber bei der Berechnung der skalaren Integrale auch Integrationen auf, die nur ausgeführt werden können, wenn man spezielle Funktionen, wie den Dilogarithmus verwendet. Der Dilogarithmus Li_2 ist dabei definiert als

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^1 dt \frac{\log(1-xt)}{t}, \quad |\arg(1-x)| < \pi. \tag{A.1}$$

A.1.1 Die UV-divergenten Integrale A_0 und B_0

Die UV-Divergenten Anteile der skalaren Integrale werden bei dimensionaler Regularisierung durch Δ ausgedrückt. Δ ist definiert als

$$\Delta = \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \log 4\pi, \tag{A.2}$$

mit der Euler-Konstanten $\gamma_E = -\Gamma'(1)$. Die Lösungen der skalaren Integrale A_0 und B_0 sind dann:

$$\begin{aligned}
A_0(m) &:= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&= m^2 \left[\Delta - \log\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 1\right] + \mathcal{O}(D-4), \qquad \text{(A.3)} \\
B_0(p^2, m_0, m_1) &:= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \frac{1}{q^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(q+p)^2 - m_1^2 + i\varepsilon} \\
&= \Delta - \int_0^1 dx \log\left[\frac{x^2 p^2 - x(p^2 - m_1^2 + m_0^2) + m_0^2 - i\varepsilon}{\mu^2}\right] \\
&\quad + \mathcal{O}(D-4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta + \log\frac{\mu^2}{p^2} - \Big[(1-N_1)\log(1-N_1) + N_1\log(-N_1) \\
&\quad +(1-N_2)\log(1-N_2) + N_2\log(-N_2) - 2\Big] \\
&\quad +\mathcal{O}(D-4), \qquad (A.4)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
N_{1/2} = \frac{1}{2p^2}\Big((p^2 - m_1^2 + m_0^2) \pm \kappa(p^2 + i\varepsilon, m_0^2, m_1^2)\Big). \qquad (A.5)
$$

A.1.2 Die IR-divergente Ableitung $\partial B_0/\partial p^2$

Das Resultat der Ableitung $\partial B_0/\partial p^2$ lautet:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_0(p^2, m_0, m_1)}{\partial p^2} &= -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{\kappa(p^2, m_1^2, m_0^2)}\Big[- N_1(N_1 - 1)\log\frac{N_1}{N_1 - 1} \\
&\quad + N_2(N_2 - 1)\log\frac{N_2}{N_2 - 1}\Big], \qquad (A.6)
\end{aligned}
$$

wobei wiederum die Nullstellen N_1 und N_2 aus Gleichung A.5 auftreten. Da nur photonische Korrekturen betrachtet werden reicht es aus den Spezialfall

$$
\left.\frac{\partial B_0(p^2, \lambda, m)}{\partial p^2}\right|_{p^2=m^2} \underset{\lambda\to 0}{\sim} -\frac{1}{m^2} - \frac{1}{2m^2}\log\frac{\lambda^2}{m^2} \qquad (A.7)
$$

für infinitesimale Photonmasse λ zu betrachten.

A.1.3 Spezielle Lösung von C_0

Das Integral C_0 ist nicht UV-divergent und kann deshalb direkt in vier Dimensionen gelöst werden. In den Vertexkorrekturen tritt ausschließlich der IR-divergente Spezialfall mit Photonmasse λ und Impulsen p_1, p_2 mit $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ auf, dessen Lösung von mir berechnet wurde zu

$$
\begin{aligned}
C_0 &= C_0(p_1, p_1 + p_2, \lambda, m, m) = C_0(p_1^2, S, p_2^2, \lambda, m, m) \\
&:= \frac{1}{i\pi^2}\int d^4q (q^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)^{-1}((q+p_1)^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1}((q+p_2)^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} \\
&= \frac{1}{m^2}\frac{-y^+}{1 - y^{+2}}\Big[- \log(-y^+)\log\left(\frac{\lambda^2}{m^2}\right) + \mathrm{Li}_2(y^{+2}) + 2\mathrm{Li}_2(1 + y^+) - \frac{\pi^2}{6} \\
&\quad + \log(-y^+)\left(2\log(1 - y^{+2}) - \frac{1}{2}\log(-y^+)\right)\Big] \qquad (A.8)
\end{aligned}
$$

mit

$$
y^- = -\frac{\beta - 1}{\beta + 1}, \quad y^+ = -\frac{\beta + 1}{\beta - 1}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{S + i\varepsilon}}. \qquad (A.9)
$$

Dieses Resultat kann auf einfache Weise in das entsprechende Resultat aus [3] umgerechnet werden.

A.1.4 Die C_0-Funktionen in Box-Diagrammen

Die reguläre Version der C_0-Funktion, die bei der Berechnung der Box-Diagramme auftritt, stammt aus [1]. Wenn in diesem C_0 nur reelle Massen auftreten, und die Grösse $\alpha = \kappa(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2)$ ebenfalls reell ist, so folgt aus [1] die Form

$$
\begin{aligned}
C_0 &= C_0(p_1^2, p_{12}^2, p_2^2, m_0, m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{2} \sum_{\sigma=\pm} \left[\mathrm{Li}_2\left(\frac{y_{0i}-1}{y_{i\sigma}}\right) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{y_{0i}}{y_{i\sigma}}\right) \right],
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
p_{12}^2 &= (p_1 - p_2)^2, \\
\alpha &= \kappa(p_1^2, p_{12}^2, p_2^2), \\
\alpha_0 &= \kappa(p_{12}^2, m_1^2, m_2^2)(1 + i\varepsilon \ \mathrm{sign}(p_{12}^2)), \\
\alpha_1 &= \kappa(p_2^2, m_2^2, m_0^2)(1 + i\varepsilon \ \mathrm{sign}(p_2^2)), \\
\alpha_2 &= \kappa(p_1^2, m_0^2, m_1^2)(1 + i\varepsilon \ \mathrm{sign}(p_1^2)), \\
x_{0\pm} &= \frac{1}{2p_{12}^2}(p_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2 \pm \alpha_0), \\
x_{1\pm} &= \frac{1}{2p_2^2}(p_2^2 - m_2^2 + m_0^2 \pm \alpha_1), \\
x_{2\pm} &= \frac{1}{2p_1^2}(p_1^2 - m_0^2 + m_1^2 \pm \alpha_2), \\
y_{00} &= \frac{1}{2\alpha p_{12}^2}\Big[p_{12}^2(p_{12}^2 - p_2^2 - p_1^2 + 2m_0^2 - m_1^2 - m_2^2) \\
&\quad -(p_2^2 - p_1^2)(m_1^2 - m_2^2) + \alpha(p_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)\Big], \\
y_{01} &= \frac{1}{2\alpha p_2^2}\Big[p_2^2(p_2^2 - p_1^2 - p_{12}^2 + 2m_1^2 - m_2^2 - m_0^2) \\
&\quad -(p_1^2 - p_{12}^2)(m_2^2 - m_0^2) + \alpha(p_2^2 - m_2^2 + m_0^2)\Big], \\
y_{02} &= \frac{1}{2\alpha p_1^2}\Big[p_1^2(p_1^2 - p_{12}^2 - p_2^2 + 2m_2^2 - m_0^2 - m_1^2) \\
&\quad -(p_{12}^2 - p_2^2)(m_0^2 - m_1^2) + \alpha(p_1^2 - m_0^2 + m_1^2)\Big], \\
y_{i\pm} &= y_{0i} - x_{i\pm}.
\end{aligned} \tag{A.11}
$$

Für IR-divergente C_0-Funktionen, die nicht im oben beschriebenen Spezialfall (siehe A.8) enthalten sind, wurde folgende Form aus [3] verwendet:
Für $p_{12}^2 - (m_0 - m_2)^2 \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
C_0 &= C_0(p_1^2, p_2^2, p_{12}^2, m_0, \lambda, m_2) \\
&= \frac{x_s}{m_0 m_2(1 - x_s^2)} \Bigg\{ \log x_s \left[-\frac{1}{2}\log(x_s) + 2\log(1 - x_s^2) - \log\left(\frac{\lambda^2}{m_0 m_2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\pi^2}{6}+\mathrm{Li}_2(x_s^2)+\frac{1}{2}\log^2\left(\frac{m_0}{m_2}\right)+\mathrm{Li}_2\left(1-x_s\frac{m_0}{m_2}\right)+\mathrm{Li}_2\left(1-x_s\frac{m_2}{m_0}\right)\Bigg\}, \tag{A.12}$$

wobei

$$\begin{aligned} x_s &= -K(p_{12}^2+i\varepsilon,m_0,m_2),\\ K(z,m,m') &= \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-\frac{4mm'}{z-(m-m')^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{4mm'}{z-(m-m')^2}}} & \text{für } z\neq(m-m')^2\\ -1 & \text{für } z=(m-m')^2 \end{cases}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

A.1.5 Die IR-divergenten D_0-Funktionen

Die Auswertung der IR-divergenten D_0-Funktionen erfordert ebenfalls die Aufspaltung in mehrere Fälle. Für den Fall, dass nur ein Photon in einem Box-Diagramm auftaucht, findet man in [3] das Resultat:
Falls $T-(m_f-m_\mu)^2\neq 0$ ist

$$\begin{aligned} D_0 &= D_0(m_f^2,m_f^2,m_\mu^2,m_\mu^2,S,T,m_1,m_f,\lambda,m_\mu)\\ &= \frac{x_s}{m_f m_\mu(S-m_0^2)(1-x_s^2)}\Bigg\{2\log(x_s)\left[\log(1-x_s^2)-\log\left(\frac{m_1\lambda}{m_1^2-S-i\varepsilon}\right)\right]\\ &\quad-\sum_{\sigma,\rho=\pm1}\left[\mathrm{Li}_2(x_s x_2^\rho x_3^\sigma)+\log(1-x_s x_2^\rho x_3^\sigma)\left[\log(x_s)+\log(x_2^\rho)+\log(x_3^\sigma)\right]\right]\\ &\quad+\frac{\pi^2}{2}+\mathrm{Li}_2(x_s^2)+\log^2(x_2)+\log^2(x_3)\Bigg\} \end{aligned} \tag{A.14}$$

Wenn zwei Photonen ausgetauscht werden, gibt es auch zwei Quellen für IR-Divergenzen. Die entsprechenden Integrale sind dann:
Falls $T-(m_f-m_\mu)^2\neq 0$ ist

$$\begin{aligned} D_0 &= D_0(m_f^2,m_f^2,m_\mu^2,m_\mu^2,S,T,\lambda,m_f,\lambda,m_\mu)\\ &= \frac{-x_s}{m_f m_\mu S(1-x_s^2)}\left\{2\log(x_s)\log\left(\frac{\lambda^2}{-S-i\varepsilon}\right)\right\} \end{aligned} \tag{A.15}$$

Dabei sind x_s,x_2,x_3 definiert als

$$\begin{aligned} x_s &= -K(T+i\varepsilon,m_f,m_\mu),\\ x_2 &= -K(m_f^2+i\varepsilon,m_f,0),\\ x_2 &= -K(m_\mu^2+i\varepsilon,m_\mu,0),\\ K(z,m,m') &= \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-\frac{4mm'}{z-(m-m')^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{4mm'}{z-(m-m')^2}}} & \text{für } z\neq(m-m')^2\\ -1 & \text{für } z=(m-m')^2 \end{cases}. \end{aligned} \tag{A.16}$$

A.2 Verhalten für $D \to 4$

Führt man die Reduktion von Tensorintegralen auf skalare Integrale aus, so treten Faktoren auf, die die Raumdimension D enthalten. Bei solchen Faktoren muss dann insbesondere das Verhalten der skalaren Integrale beachtet werden. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
(D-4) \quad & A_0(m) && = -2m^2 + \mathcal{O}(D-4), \\
(D-4) \quad & B_0(p^2, m_0, m_1) && = -2 + \mathcal{O}(D-4), \\
(D-4) \quad & C_0(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2) && = \mathcal{O}(D-4), \\
(D-4) \quad & D_0(m_f^2, m_f^2, m_\mu^2, m_\mu^2, S, T, m_1, m_f, \lambda, m_\mu) && = \mathcal{O}(D-4).
\end{aligned} \tag{A.17}
$$

Weiterhin ist in D-dimensionalen Rechnungen auch zu beachten, dass

$$
\begin{aligned}
\gamma^\alpha \gamma_\alpha &= D, \\
\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha &= (2-D)\gamma^\mu, \\
\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\alpha &= 4g^{\mu\nu} + (D-4)\gamma^\mu \gamma^\nu, \\
\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\alpha &= (6-D)\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho - 4\left(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho} + \gamma^\rho g^{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{A.18}
$$

Literaturverzeichnis

[1] A.Denner
Techniques for the Calculation of Electroweak Radiative Corrections at the One-Loop Level and Results for W-Physics at LEP200
Fortschr. Phys. **41** (1993) 307

[2] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder
An Introduction to Quantum Field Theory
Perseus Books, Reading, Massachusetts (1995)

[3] W.Beenakker, A.Denner
Infrared Divergent Scalar Box Integrals with Applications in the Electroweak Standard Model
Nucl. Phys. **B**338 (1990) 349

[4] S.Dittmaier
Weyl-van-der-Waerden formalism for helecity amplitudes of massive particles
Phys.Rev. D59 (1999) 016007

[5] S.Dittmaier
Übungen zu Strahlungkorrekturen in Eichtheorien
Skriptum zu Übungen an der Herbstschule für Hochenergiephysik
Maria Laach (1997) (1998)

[6] S.Dittmaier
A General Approach To Photon Radiation Off Fermions
hep-ph/9904440

[7] John F.Gunion, Howard E.Haber, Gordon Kane, Sally Dawson
The Higgs Hunter's Guide
Addison-Wesley (1990)

[8] A. Sopczak
Higgs Boson Searches at LEP Up to $\sqrt{s} = 202$ *GeV*
hep-ph/0004015

[9] C.Itzykson, J.Zuber
Quantum Field Theory
Mc-Graw-Hill (1985)

[10] Stephen Wolfram
Mathematica
Addison-Wesley (1993)

[11] Hagen Eck, Sepp Kübleck
Generating Feynman Graphs and Amplitudes with FeynArts
October 1991

[12] T.Hahn
Generating and Calculating One-Loop Feynman Diagrams with FeynArts, FormCalc and LoopTools
hep-ph/9905354

[13] David Neuffer
$\mu^+ - \mu^-$ *Colliders*
CERN 99-12

[14] D.E. Groom *et al.*
Particle Listings
The European Physical Journal **C15** (2000) 1

[15] B. Grzadkowski, J.F.Gunion, Jacek Pliska
How Valuable is Polarisation at a Muon Collider ? A Test Case: Determining the CP Nature of a Higgs-Boson
hep-ph/0003091

[16] V.Barger, M.S.Berger, J.F.Gunion, T.Han
s-Channel Higgs Boson Production at a Muon-Muon Collider
hep-ph/9504330

[17] E. Asakawa, A.Sugamoto, I. Watanabe
Production of CP-even and CP-odd Higgs bosons at Muon Colliders
hep-ph/0004005

[18] G.J. Gounaris, F.M. Renard
Tests of Higgs Boson Couplings at a $\mu^+\mu^-$ *Collider*
hep-ph/9811413

[19] B.Grzardkowski, J.Pliszka
Measuring the Relative CP-even and CP-odd Yukawa Couplings of a Higgs Boson at a Muon-Collider Higgs Factory
hep-ph/0004034

[20] V.Barger, M.S.Berger, J.F.Genion, T.Han
Higgs Boson Physics in the s-Channel at $\mu^+\mu^-$ Colliders
hep-ph/9602415

[21] R. Sekhar Chivukula, Nick Evans
Triviality and the Precision Bound on the Higgs Mass
Nucl. Phys. **A**663-664 (2000) 687

[22] Thomas Hambye, Kurt Riesselmann
SM Higgs mass bounds from theory
hep-ph/9708416

[23] F.Bloch, A.Nordsieck
Note on the Radiation Field of the Electron
Phys. Rev. **52** (1937) 54

[24] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner
FeynArts: Computer Algebraic Generation of Feynman Graphs and Amplitudes
Comput. Phys. Commun. 60 (1990) 165

[25] H. Eck, J .Küblbeck
Guide to FeynArts 1.0
Universität Würzburg (1992)

[26] R. Mertig, M. Böhm, A. Denner
FeynCalc: Computer Algebraic Calculation of Feynman Amplitudes
Comput. Phys. Commun. 64 (1991) 354

[27] R. Mertig
Guide to FeynCalc 1.0
Universität Würzburg (1992)

[28] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL,
the LEP Electroweak Working Group,
the SLD Heavy Flavour and Electroweak Groups
A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model
CERN-EP-2000-016

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen danken, die maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle ist dabei natürlich mein Betreuer PD.Dr. Stefan Dittmaier zu nennen. Von ihm stammt nicht nur die Idee zu dieser Arbeit, sondern auch viele Tips und Anleitungen zu den durchgeführten Rechnungen. Ohne seinen Rat bei der Suche nach Programmierfehlern wäre auch das zugehörige Computerprogramm niemals rechtzeitig fertig geworden.

Weiterhin möchte ich auch Helene Worms und Andreas Staudt für ihre tatkräftige Fehlersuche beim Korrekturlesen danken.

Dank auch an alle weiteren Mitglieder der Teilchenphysikgruppe, die mir durch Diskussionen und Antworten, aber auch durch ihre Fragen, weitergeholfen haben.

Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich diese Arbeit selbst verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfmittel verwendet habe.

Bielefeld, den 28.September 2000

....
(Andreas Kaiser)