Das Glueball-Massenspektrum der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie bei endlichen Temperaturen

Diplomarbeit
an der
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Matthias Landwehr
Mai 2003

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

Nach heutigem Kenntnisstand lassen sich Elementarteilchen und ihre fundamentalen Wechselwirkungen durch quantisierte Feldtheorien beschreiben. In einer Feldtheorie werden die Teilchen durch Felder repräsentiert, welche an D-dimensionale Raum-Zeit-Punkte gebunden sind. Die mathematische Beschreibung der Feldtheorie kann im Lagrange-Formalismus erfolgen, in der die Lagrange-Dichte die definierende Größe der Theorie ist. Ein Verständnis der Feldtheorie als Eichtheorie ist unter anderem deshalb hilfreich, da aufgrund des Noether-Theorems die Suche nach Erhaltungsgrößen vereinfacht wird. Dass (quantisierte) Eichfeldtheorien hervorragende Kandidaten für eine mathematische Darstellung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen sind, ist im Vorfeld ohne Weiteres nicht ersichtlich. Tatsächlich begründet sich ihr Erfolg zum einen auf ihrer (bisherigen) Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, und zum anderen auf ihrer inneren Struktur, welche aber erst erkennbar wird, *nachdem* eine Lagrange-Dichte formuliert worden ist. Aber das in einer mathematischen Formulierung der Elementarteilchenphysik wohl vordringlichere Problem ist die Frage nach einer Modellierung von 'Wechselwirkung' überhaupt: In einem Verständnis einer Feldtheorie als Eichtheorie werden Wechselwirkungen durch den Austausch von - notwendigerweise bosonischen - Eichfeldern erklärt. Dieser Austausch von sog. Eichbosonen ist demzufolge verantwortlich für die Existenz der fundamentalen Kräfte. Zum Beispiel wird die wohlbekannte elektromagnetische Wechselwirkung in einer Eichfeldtheorie dadurch beschrieben, dass elektrisch geladene Teilchen ($\sim$ Materiefelder) virtuelle Photonen ($\sim$ Eichfelder) austauschen.

Die theoretische Grundlage dieser Arbeit bildet die Quantenchromodynamik (QCD). Sie ist die quantisierte Eichfeldtheorie (kurz: Eichtheorie), welche im Rahmen des von S.L. Glashow, A. Salam und S. Weinberg entwickelten $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$-Standardmodells der Elementarteilchen-Theorie zur mathematischen Formulierung des stark wechselwirkenden Sektors herangezogen wird. Sie ist als nicht-abelsche Eichtheorie mit der Eichgruppe $SU(3)$ eine asymptotisch freie Theorie und lässt sich daher störungstheoretisch behandeln bei großen Impulsen bzw. kleinen Abständen: In einer Störungstheorie werden die fundamentalen Größen der Theorie als Reihenentwicklung im Quadrat der (verschwindenden) Kopplung g angesetzt. Die an sich sehr gut bewährte störungstheoretische Behandlung von Feldtheorien erweist sich jedoch im Bezug auf die QCD als unbefriedigend. Dieses liegt zum einen darin begründet, dass in jeder endlichen Ordnung in g^2 die freien Teilchen die Quarks und Gluonen sind - dieses widerspricht dem experimentellen Befund des sog. Quark-Confinement - und zum anderen daran, dass eine störungstheoretische Behandlung in der QCD an den Hochenergiesektor der Theorie gekoppelt ist. Die Verwendung von

nicht-störungstheoretischen Methoden wird daher im Allgemeinen notwendig.
Ein sehr häufig verwendete Basis für nicht-störungstheoretische Untersuchungen der QCD bietet die Gitterregulariesierung in welcher das Raum-Zeit-Kontinuum durch einen endlichen Satz von Gitterpunkten ersetzt wird. Man hat nun mehrere Alternativen die regularisierte Theorie zu behandeln. Selbstverständlich lässt sich die gitterregularisierte Theorie weiterhin störungstheoretisch angehen, darüber hinaus kann man aber auch die Theorie im Sektor starker Kopplungen betrachten. Eine Möglichkeit dieses zu realisieren bietet die Gitter-Simulation mit der Monte-Carlo-Methode. Diese Methode erlaubt es, zwar mit Verlust einiger Symmetrieen ihres Kontinuum-Pendants, dann aber 'from first principles on' und statistisch exakt die Theorie auf dem gesamten Energiebereich zu analysieren.

Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist das thermale Massenspektrum der reinen $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie. Obwohl die reine, klassische Eichtheorie gar keine Massenterme besitzt, ist es theoretisch erwiesen, dass die gitterregularisierte, quantisierte Formulierung der reinen Eichtheorie eine Massenskala ausbildet; das resultierende Massenspektrum der Gitter-Eichtheorie beschreibt massive, gebundene gluonische Zustände, die wir im Folgenden als Gluebälle bezeichnen. Dem nicht-abelschen Charakters der QCD-Eichtheorie folgend lassen sich die Gluebälle durch die Selbstwechselwirkung der Gluonen verstehen: Die Existenz der Gluebälle wird nur von der QCD vorausgesagt. Damit ist aber auch die Frage nach der Existenz physikalischer Gluebälle eng mit der Frage verknüpft ob sich die Wechselwirkungen der Elementarteilchen überhaupt im Rahmen von nicht-abelschen Eichtheorien beschreiben lassen. Es ist daher unnötig zu erwähnen, dass Gluebälle bereits vielfach Gegenstand theoretischer und experimenteller Studien waren - und tatsächlich auch immer noch sind. Dieses liegt zum einen darin begründet, dass bis heute noch kein experimenteller Nachweis der Gluebälle geliefert wurde und zum anderen lassen auch bisherige theoretische Untersuchungen zu Gluebällen noch einige Fragen offen.

Für $T = 0$ ist in [1] das in Abbildung 1 gezeigte Glueball-Massenspektrum berechnet worden. In dem interessanten Bereich nahe T_c sind bisher noch nicht viele Studien für das Massenspektrum durchgeführt worden, darum werden wir versuchen ein vergleichbares Bild für endliches T bzw. $T \cong T_c$ zu erstellen. Unser Vorgehen orientiert sich an den Arbeiten von [2] und [3].

Im ersten Kapitel dieser Arbeit führen wir die wesentlichen Grundbegriffe der Theorie der starken Wechselwirkung, der QCD, ein und diskutieren die Notwendigkeit nicht-störungstheoretischer Methoden. Wir erläutern die Gitterregularisierung der $SU(3)$-Eichtheorie für die Massenberechnungen von Gluebällen und die Klassifizierung der Glueball-Zustände durch kubische Gruppen auf dem Gitter. Ferner präsentieren wir frühere Ergebnisse aus Gitterrechnungen und aus der starken Kopplungsentwicklung.

Im zweiten Kapitel geben wir einen kurzen Einblick in die von uns verwendete Monte-Carlo-Simulationstechnik auf dem Gitter und stellen unsere Glueball-Operatoren zusammen. Wir werden erläutern, warum wir die Smearing-Technik auf unsere Operatoren für zeitliche als auch für räumliche Korrelationsmessungen implementiert haben. Danach geben wir drei sich ergänzende Methoden zur Bestimmung der Glueball-Massen. Wir verwenden die Best-Fit-Analyse, die Formulierung effektiver Massen und erstmals auch die Maximum-Entropie-Methode. Dies ermöglicht es uns die zeitlichen und räumlichen Kor-

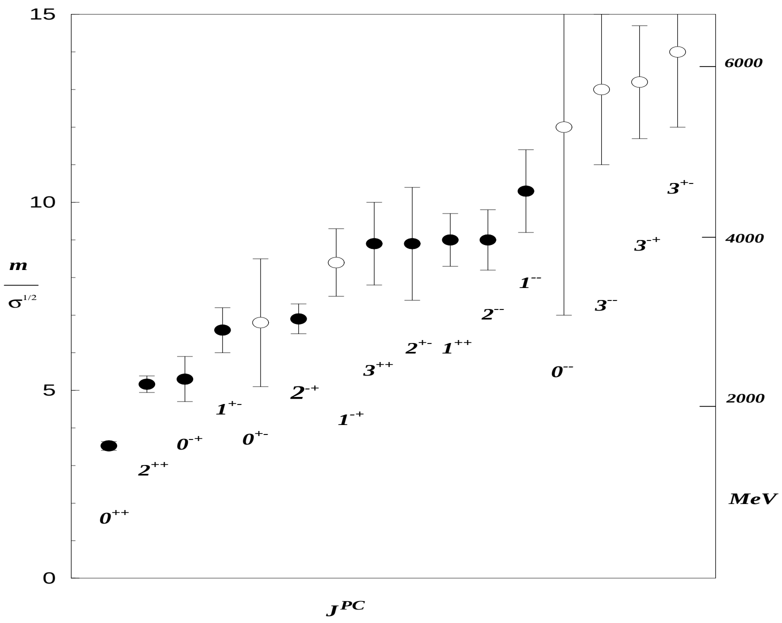

Abbildung 1: Das Glueball-Massenspektrum $m(J^{PC})$ in Einheiten der Stringtension σ in der $SU(3)$ Gitter-Eichtheorie bei Gitterkopplung $\beta = 6.4$ ($T = 0$) [1]. Die Kreise symbolisieren die berechneten Masse, während die offenen Symbole lediglich eine obere Grenze der Masse abschätzen.

relationsfunktionen unkompliziert zu betrachten.

Im dritten und letzten Kapitel dieser Arbeit präsentieren wir die Ergebnisse für die Glueball-Massen und vergleichen sie mit den Resultaten früherer Arbeiten.

Kapitel 1

Grundlagen der QCD und ihre Gitterregularisierung

Gegenstand dieses ersten vorbereitenden Kapitels ist die Einführung in die Theorie der Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen, die sogenannte Quantenchromodynamik (QCD). Da in dieser Arbeit ihr gluonischer Sektor betrachtet wird, beschränken sich die folgenden Erläuterungen auf die reine $SU(N)$-Eichtheorie. Die Grundbegriffe dieser Theorie werden im ersten Teil dieses Kapitels eingeführt. Im zweiten Teil wird die Notwendigkeit nicht-störungstheoretischer Methoden diskutiert, wobei wir in natürlicher Weise auf die Gitterregularisierung zu sprechen kommen. Diese führt auf die Existenz massiver Glueball-Zustände in der Gitter-Eichtheorie, auf die sich unsere späteren Untersuchungen beziehen. Abschließend beschreiben wir in groben Zügen das thermale Massenspektrum der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie.

1.1 Die QCD-Eichtheorie bei endlichen Temperaturen

Einen wesentlichen Bestandteil der QCD bildet das Prinzip der Eichinvarianz [4, 5, 6, 7, 8], welches aufgrund des Noether-Theorems die Existenz von erhaltenen Strömen und den davon abgeleiteten physikalischen Größen garantiert. Insbesondere das lokale Eichprinzip erlaubt es schließlich, mit Hilfe von lokalen Eichfeldern und kovarianten Ableitungen lokal eichinvariante Lagrange-Dichten und Wirkungen aufzubauen. Dabei wird die allgemeine Form der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ bereits durch die Forderung nach Lokalität derart eingeschränkt, dass $\mathcal{L}$ lediglich aus einem Funktional ihrer Felder $\phi_1, \phi_2, ...$ ($\Psi \equiv \{\phi_1, \phi_2, ...\}$) und ihrer ersten Ableitungen bestehen kann: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \partial\Psi)$.

1.1.1 Eichtheorie im Kontinuum

Ausgangspunkt lokal eichinvarianter Theorien ist die Forderung nach Invarianz der Wirkung unter Transformationen der Materie-Felder $\phi(x)$ der Form

$$\phi(x) \longrightarrow \lambda^{-1}(x)\phi(x), \quad \forall\ \lambda(x) \in SU(N). \tag{1.1}$$

Um Felder $\phi(x)$ an unterschiedlichen Raum-Zeit-Punkten miteinander vergleichen zu können, und so eichinvariante Wirkungen überhaupt erst formulieren zu können, bedient man sich mathematischer Konzepte aus der Differentialgeometrie [9]: Man führt sogenannte Paralleltransporter $U(\mathcal{C}) \in SU(N)$ entlang eines Weges $\mathcal{C}$ ein, welche mit einem Eichfeld A_μ über das pfadgeordnete Integral $U(\mathcal{C}) = \mathcal{P}e^{-\int_\mathcal{C} dx^\mu \; A_\mu}$ verbunden werden. Das Eichfeld selbst ist ein Element aus der Gruppe $SU(N)$ und transformiert sich demzufolge gemäß $A_\mu(x) \longrightarrow \lambda^{-1}(x)(\partial_\mu + A_\mu(x))\lambda(x)$. Die sogenannte kovariante Ableitung erhält die Form $D_\mu \equiv \partial_\mu + A_\mu(x)$, so dass die Eichfelder an die Materiefelder $\phi(x)$ koppeln. Man definiert den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ (mathematisch: Krümmungstensor) der Theorie über den Kommutator zweier kovarianter Ableitungen,

$$F_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \tag{1.2}$$

Die spezielle Form von (1.2) ist ausschlaggebend für die noch zu konstruierende Theorie und bildet daher die Grundlage für eine Klassifizierung der Eichtheorien: Theorien mit $[A_\mu(x), A_\nu(x)] = 0$ heißen *abelsch*, während Theorien mit $[A_\mu(x), A_\nu(x)] \neq 0$ *nicht-abelschen* genannt werden. Diese Klassifizierung bezieht sich auf die Gruppenstruktur der Eichfelder selbst: Durch Abspalten der (N^2-1) spurfreien Generatoren T_a der Gruppe $SU(N)$ aus den Komponenten der Felder, $A_\mu(x) \equiv -igA_\mu^a(x)T_a$, erhält man mit $F_{\mu\nu}^a(x) \equiv -igF_{\mu\nu}(x)T_a$:

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x). \tag{1.3}$$

Hierbei bezeichnet g eine dimensionslose Kopplungskonstante und f_{abc} die vollkommen antisymmetrischen, reellen Strukturkonstanten der Gruppe $SU(N)$. Die zugrunde liegende Algebra der $SU(N)$ ist definiert durch die Algebra ihrer Generatoren, $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$, und überträgt sich daher direkt auf (1.2), wobei die Normierung in Form von $\mathrm{Tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ gewählt werden kann. Zum Beispiel liefert die $SU(3)$ eine nicht-abelsche Eichtheorie und entspricht der Eichgruppe der QCD. Die QCD-Eichfelder bezeichnen die Gluonen, mit dem sogenannten Farb-Freiheitsgrad N. Diese erscheinen z.B. für $N \equiv 3$ in $3^2 - 1 = 8$ unterschiedlichen Konfigurationen.

Um nun von (1.3) ausgehend eine lokal eichinvariante Wirkung für das Eichfeld zu konstruieren, betrachtet man einen Paralleltransport entlang infinitesimal kleiner, geschlossener Kurven $\mathcal{C}_x^x(\mu,\nu)$. Dieser Paralleltransport ist mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ über $U(\mathcal{C}_x^x) = 1 - F_{\mu\nu}d\mathcal{C}^{\mu\nu}$ verbunden. Er transformiert sich gemäß $F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \lambda^{-1}(x)F_{\mu\nu}(x)\lambda(x)$ und folglich ist auch die bezüglich der Eichgruppe gebildete Spur des Quadrates von $F_{\mu\nu}$ lokal eichinvariant. Ein Term dieser Art wird zur Beschreibung der Dynamik des Eichfeldes selbst als Lagrange-Dichte vorgeschlagen. Im Falle von nicht-abelschen Eichtheorien bezeichnet man ihn als Yang-Mills-Lagrange-Dichte und die entsprechend definierte Theorie auch als Yang-Mills-Theorie. Die Wirkung $S[A] \equiv \int d^4x \; \mathcal{L}$ solcher Theorien lautet daher:

$$S_{YM}[A] = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x \; \mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\int d^4x \; F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \tag{1.4}$$

An (1.4) kann man ablesen, dass aufgrund des Quadrates von $F_{\mu\nu}^a$ im Falle der $SU(3)$ die Gluonen an sich selbst koppeln, also neben Termen $\mathcal{O}(\partial_\mu A_\mu^2)$, welche die Ausbreitung

(Propagation) der Gluonfelder beschreiben, auch Terme $\mathcal{O}(\partial AA^2)$ und $\mathcal{O}(A^4)$ auftreten. Letztere Terme, sog. Vertex-Terme, beschreiben die Wechselwirkung von 3 bzw. 4 Gluonenfeldern an einem gegebenen Ort x. Die Existenz dieser Selbstkopplungsterme hat viele Konsequenzen für die Theorie. Zum einen zeigt (1.4), dass die Kopplung der verschiedenen Gluon-Terme universal ist. Diese Eigenschaft bleibt auch dann erhalten, wenn man Materiefelder in die Lagrange-Dichte mit einbezieht. Zum anderen kann man zeigen, dass die resultierende physikalische Kopplung $\bar{g}$, keine Konstante ist. Beschreibt E z.B. den Impulsübertrag der Gluonen, so kann man folgern, dass die Kopplung als Funktion von E in etwa einer Relation $\bar{g}^2 \sim 1/\ln E$ genügt. Es folgt also, dass für große Impulse E die Kopplung verschwindet, und die Gluonen, und ebenso die Materieteilchen, sind nur noch schwach bis verschwindend gekoppelt. Man sagt, die Theorie sei asymptotisch frei. In der Tat kann man zeigen, dass diese Eigenschaft bereits dadurch eingeführt wird, dass man nicht-abelsche Eichfelder betrachtet: Jede nicht-abelsche Eichtheorie ist eine asymptotisch freie Theorie [10]. Da diese Eigenschaft durch die Eichfelder selbst erklärt wird folgt auch, dass die reine Eichtheorie diese Eigenschaft bereits besitzt. Betrachten wir z.B. thermale Gluonen, so wird erwartet, dass die Energie ($E \simeq T$) der Gluonen proportional zur Temperatur T des Systems ist, wobei der Proportionalitätsfaktor die Boltzmann-Konstante ist. In diesem Sinne wird die Kopplung $\bar{g}$ temperaturabhängig, $\bar{g} \sim 1/\ln T$, und wir erwarten dass ein Phasenübergang zu einem System ungebundener oder nur schwach gekoppelter Teilchen bei hohen Temperaturen statt findet. Dies ist der sog. Confinement-Deconfinement-Phasenübergang, welcher auch tatsächlich Gegenstand der aktuellen experimentellen und theoretischen Forschung ist (siehe z.B. [11, 12] und angegebene Referenzen). Neben dieser Eigenschaft nicht-abelscher Eichtheorien ist es auch vorstellbar, dass die Eichfelder selbst massive, gebundene Zustände formieren [13]. Der experimentelle Nachweis dieser sogenannten Gluebälle ist zwar Gegenstand der Forschung [14], steht aber noch aus. Wir stellen also fest, dass einige wesentliche Eigenschaften der (vollen) QCD bereits qualitativ durch die Eigenschaften ihrer Eichfelder erklärt werden. Deshalb ist die Betrachtung der reinen Eichtheorie oft physikalisch gerechtfertigt und in der Tat für unsere Zwecke, nämlich die qualitative (und quantitative) Erfassung des thermalen Glueball-Massenspektrums, völlig ausreichend.

Ist erst einmal die Lagrange-Dichte der Theorie bekannt, so ist die Berechnung von physikalischen Messgrößen von besonderer Bedeutung. Analog zur Quantenmechanik werden den physikalischen Größen $\mathcal{O}$ in einer quantisierten Theorie Operatoren $\hat{\mathcal{O}}$ derart zugeordnet, dass Erwartungswerte dieser Operatoren, die Erwartungswerte der Messgrößen liefern. Zunächst einmal ist es daher notwendig, eine Quantisierungsvorschrift für eine Feldtheorie zu definieren. In der Tat stehen unterschiedliche Quantisierungsmethoden zur Verfügung (kanonische Quantisierung [6], Pfadintegrale [15], statistische Quantisierung [6]). In dem folgenden Abschnitt stellen wir in kurzen Zügen die auch von uns verwendete Pfadintegral-Quantisierung vor [15, 16]. Wir bezeichnen eine Theorie bereits als quantisiert, wenn wir in der Lage sind, Erwartungswerte von Operatoren zu berechnen.

1.1.2 Pfadintegralquantisierung und Greensche Funktionen

Der Quantenmechanik folgend, lassen sich Übergangsamplituden von Zuständen als Summation über alle (räumlichen) Pfade, gewichtet mit deren Auftrittswahrscheinlichkeit, darstellen. Im Rahmen von Feldtheorien kann man zeigen [15], dass diese Methode unter Einbeziehung der zeitlichen Fluktuationen der Felder zu einer Quantisierung der Theorie führt. Definieren wir *zunächst formal* die Summation über alle möglichen Feldkonfigurationen als $\int \mathcal{D}A$, so lassen sich Vakuum-Vakuum Übergangsamplituden in diesem Formalismus durch

$$\langle 0|0\rangle \quad = \quad \int \mathcal{D}A \; e^{-S_E[A]} \tag{1.5}$$

darstellen, wobei wir bereits die euklidische Formulierung[1] der Feldtheorie vorausgesetzt haben. Mathematische Funktionale mit den Eigenschaften (1.5) werden in der Statistischen Physik gewöhnlich als Zustandssumme $\mathcal{Z}$ bezeichnet: Interpretiert man z.B. den Integranden $e^{-S_E[A]}$ als Wahrscheinlichkeitsverteilung, so kann (1.5) formal mit einer Zustandssumme eines statistischen Systems verglichen werden,

$$\mathcal{Z}(\beta) = \mathrm{Tr} e^{-\beta H}. \tag{1.6}$$

Hierbei bezeichnet $\beta = 1/T$ die inverse Temperatur und H den Hamiltonian des statistischen Systems. Es liegt daher nahe, die Integration der Lagrange-Dichte zur Wirkung derart zu manipulieren, dass eine endliche Integration in Zeitrichtung mit einer Temperaturskala verglichen werden kann. Wir betrachten daher Feldtheorien bei fixierten Temperaturen durch

$$S_E[A] = \int_0^\beta dx_0 \int d^3x \; \mathcal{L}[A]. \tag{1.7}$$

Im Zuge dieses Formalismus unterliegen die Felder periodischen bzw. anti-periodischen Randbedingungen. Dem bosonischen Charakter der Eichfelder folgend gilt $A_\mu(0,x) = A_\mu(\beta,x)$. Es ist klar, dass die Formulierung (1.5) verbunden mit (1.7) für $T \to 0$ in die gewöhnliche Vakuum-Amplitude übergeht. Erwartungswerte von Operatoren berechnen wir in diesem Formalismus über

$$\langle 0|\hat{\mathcal{O}}|0\rangle \quad = \quad \int \mathcal{D}A \; \mathcal{O} \; e^{-S_E[A]}. \tag{1.8}$$

[1] In dieser Arbeit verwenden wir (von nun an ausschließlich) die euklidische Formulierung der Feldtheorie. Sie kann ausgehend von einer minkowskischen Einbettung direkt durch geeignete Wick-Rotation gewonnen werden. Wir umgehen hier lediglich das Problem, dass in einer Formulierung mit komplexer Wirkung der Integrand in (1.5) nicht als Wahrscheinlichkeitsverteilung im gewöhnlichen Sinne interpretierbar ist. Wir weisen aber an dieser Stelle darauf hin, dass ein ähnlicher Formalismus existiert, der sogenannte Real-Time-Formalismus (RTF) [8, 17], welcher auch ohne Wick-Rotation auskommt und darüber hinaus sogar allgemeiner ist. Zum Beispiel lassen sich im RTF - im Gegensatz zu dem von uns gewählten Formalismus - Systeme betrachten, welche sich *nicht* im (Temperatur-) Gleichgewicht befinden. Leider aber lässt sich dieser Formalismus ohne Weiteres nicht auf einem Computer implementieren und ist daher für unsere Zwecke ohne Bedeutung.

Bemerkenswert an dieser Darstellung ist die Tatsache, dass auf der rechten Seite von (1.8) klassische Größen (hier: Felder) stehen, aber trotzdem Erwartungswerte von Operatoren berechnet werden: Die Theorie gilt als quantisiert.

Es bleibt an dieser Stelle anzumerken, dass die Identifikation von statistischen Systemen mit einer Feldtheorie definiert durch (1.7) physikalisch zwar plausibel erscheint, aber sicherlich nur axiomatischen Charakter hat: Konkrete Rechnungen können dieses Bild bestätigen oder widerlegen. Tatsächlich aber ist diese Analogie unumstritten [8, 17]. Zentraler Gegenstand vieler Untersuchungen in Quantenfeldtheorien sind Korrelationsfunktionen von Operatoren, also Erwartungswerte von zeitgeordneten Produkten einzelner Operatoren: $\langle\Psi|\hat{\mathcal{O}}(\mathbf{x_1},t_1)\hat{\mathcal{O}}(\mathbf{x_2},t_2)...|\Psi\rangle$. Sie beschreiben nämlich Wechselwirkungen der den Operatoren zugeordneten physikalischen Größen an verschiedenen Raum-Zeit-Punkten. Im Folgenden erläutern wir daher die physikalische Bedeutung von Korrelationsfunktionen in thermalen Feldtheorien und diskutieren ihre Berechnungsstrategien. Tatsächlich beschränken sich aber die weiteren Ausführungen auf 2-Punkt-Korrelationsfunktionen in der thermalen $SU(N)$.

1.1.3 Speziell: 2-Punkt-Korrelationsfunktionen in thermaler SU(N)

Im Falle von Feldtheorien bei endlichen Temperaturen ist zwischen zeitlichen und räumlichen Korrelationen strikt zu unterscheiden, da sie zu ganz unterschiedlichen physikalischen Größen führen. Zeitliche Korrelationen entsprechen einem mathematischen Maß für die zeitgleichen Wechselwirkungen der den Operatoren zugeordneten physikalischen Größen an gegebenen Orten. Der exponentielle Abfall dieser Korrelationsfunktionen kann mit den Ruhemassen der betrachteten Teilchen in Verbindung gebracht werden. Dagegen charakterisieren räumliche Korrelationen kollektive Wechselwirkungen der Testteilchen mit dem thermalen Wärmebad. Ihr physikalischer Ursprung ist wesentlich komplizierter und im Falle von nicht-abelschen Eichtheorien bislang kaum verstanden. Wechselwirkungen dieser Art werden jedoch häufig mit dem aus der Elektrodynamik bekannten 'Screening' elektrisch geladener Teilchen in einem elektrisch sensiblen Medium verglichen. Ihre zugeordnete Masse wird daher auch Screeningmasse genannt.

Bei thermalen Korrelationsfunktionen lassen sich aufgrund der Randbedingungen der Felder teilweise relativ einfache Berechnungsformeln, sogenannte Spektraldarstellungen der Operatorerwartungswerte, angeben, auf die wir im späteren Verlauf dieser Arbeit zurückgreifen werden. Betrachten wir dazu speziell eine zeitliche 2-Punkt-Korrelationsfunktion eines beliebigen Operators $\hat{\mathcal{O}}$, also $G(\tau,\mathbf{x}) \equiv \langle\hat{\mathcal{O}}(\tau,\mathbf{x})\hat{\mathcal{O}}^\dagger(0,\mathbf{0})\rangle$, so können wir ausgehend von den periodischen Randbedingungen in zeitlicher Richtung eine Fourier-Reihenentwicklung durchführen. Dieses führt auf eine diskretisierte Darstellung der zeitlichen Impulskomponente p_0 in Form von sogenannten Matsubara-Frequenzen, $\omega_n \equiv p_0 = 2\pi nT$. Da aber die räumlichen Komponenten der Felder unbeschränkt bleiben, erhalten wir

$$G(\tau,\mathbf{x}) = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\tilde{G}(\omega_n,\mathbf{p})e^{-i(\omega_n\tau-\mathbf{px})}. \tag{1.9}$$

In dieser Darstellung bezeichnet $\tilde{G}(\omega_n,\mathbf{p})$ die 2-Punkt-Korrelationsfunktion des Operators $\hat{\mathcal{O}}$ im Impulsraum. Die Spektralfunktion $A(\omega,\mathbf{p})$ wird gewöhnlich als Residuum der

Korrelationsfunktion im Fourier-Raum eingeführt, also als

$$\tilde{G}(\omega_n, \mathbf{p}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \frac{A(\omega, \mathbf{p})}{\omega - i\omega_n}. \tag{1.10}$$

Aus der Spektralfunktion $A(\omega, \mathbf{p})$ in (1.10) lassen sich sämtliche Eigenschaften der Korrelationsfunktion rekonstruieren. In den weiterern Ausführungen betrachten wir ausschließlich Spektralfunktion $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Die genaue Kenntnis der spektralen Oberfläche $A(\omega)$ ist daher wichtig für eine Verständnis der Wechselwirkung bzw. der Korrelation der Operatoren. In führender Ordnung Störungstheorie erwartet man im Hochenergiesektor ein quadratisches Verhalten, $A(\omega) \sim \omega^2$. Für eine Untersuchung der Polmassen ist aber gerade der Niedrigenergiesektor ausschlaggebend. Eine spezielle Berechnungsmethode der Spektralfunktion, welche in der Lage ist, das gesamte Energiespektrum abzudecken, wird im zweiten Kapitel vorgestellt.

Bei der Berechnung von Korrelationsfunktionen stößt man leider auf wesentliche Probleme, auf die wir bisher (bewusst) noch nicht eingegangen sind: Zum einen haben wir das in (1.5) eingeführte Integrationsmaß noch gar nicht definiert und zum anderen treten divergente Integrale auf. Beide Probleme sind begrifflich zwar verschieden, aber doch nicht völlig zu trennen. Sie werden mit Hilfe einer Regularisierungs- und Renormierungsvorschrift gelöst. In dieser Arbeit betrachten wir die sogenannte Gitterregularisierung der QCD-Eichtheorie [18]. Im folgenden Abschnitt erläutern wir daher dieses Regularisierungsschema und diskutieren die für unsere Zwecke wesentlichen Aspekte dieser Darstellung. Unsere Ausführungen folgen im Wesentlichen den Darstellungen in [19, 20].

1.2 Gitterregularisierung der QCD-Eichtheorie

Man kann zu einer Regularisierung der Theorie gelangen, indem man sich bei Betrachtungen auf Raum-Zeit-Punkte beschränkt, welche auf einem vierdimensionalen, evtl. hyperkubischen Gitter angeordnet sind: $\Lambda \equiv a\mathbb{Z}^4 = \{x | x_\mu \in a\,\mathbb{Z}, \mu = 1,2,3,4\}$. Die Richtung der Gitterachsen werden dabei mit $\hat{\mu} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ gekennzeichnet. Die Materiefelder befinden sich nunmehr nur noch auf den Gitterpunkten. Der Paralleltransporter als Mittler zwischen diesen Feldern wird mit den Gitterkanten (sogenannten Links) identifiziert und im Falle von benachbarten Punkten x und $x + a\hat{\mu}$ mit $U_{x;\mu}$ bezeichnet. Der Paralleltransport in umgekehrter Richtung schreibt sich demnach als $U_{x+a\hat{\mu};-\mu} = U_{x;\mu}^{-1}$ und ist gleich $U_{x;\mu}^{\dagger}$, wenn $U_{x;\mu} \in SU(N)$. Für kleine Gitterabstände a ist er mit dem Eichfeld über die Beziehung

$$U_{x;\mu} = e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu x + \frac{a^2}{2} A_\mu^2(x) + \ldots \tag{1.11}$$

verknüpft.

Das Konzept des Paralleltransports führt (wie bereits im Kontinuum diskutiert) in natürlicher Weise zu einer Wirkung der Gitter-Eichtheorie. Dabei betrachtet man wieder möglichst kleine geschlossene Kurven. In der diskretisierten Beschreibung der Theorie sind infinitesimal kleine Wegstücke aufgrund des endlichen Gitterabstandes a gar nicht definiert, und als kleinste geschlossene Wege verbleiben Quadrate mit der Kantenlänge a. Sie bilden die sogenannten Plaquettevariablen $U_{x;\mu\nu}$ (siehe Abbildung 1.1).

1.2.1 Eichfeldwirkung auf dem Gitter

K. Wilson schlug vor, aus Plaquetten eine eichinvariante Wirkung für das Eichfeld zu konstruieren [18, 21]. Dabei wird der Paralleltransport um eine solche Plaquette durch die Plaquettevariable

$$U_p \equiv U_{x;\mu\nu} = U^\dagger_{x;\nu} U^\dagger_{x+a\hat{\nu};\mu} U_{x+a\hat{\mu};\nu} U_{x;\mu} \tag{1.12}$$

beschrieben. Die Wilson-Wirkung für das $SU(N)$-Eichfeld schreibt sich dann als Summe über alle gespurten Plaquetten in Hin- und Rückrichtung, $S_{\text{Lat}} \sim \sum_{x,\mu\nu} \text{Tr}(U_{x;\mu\nu} + U^\dagger_{x;\mu\nu})$. Wegen $U_{x;\mu\nu} \in SU(N)$ folgt $\text{Tr}\{U_{x;\mu\nu} + U^\dagger_{x;\mu\nu}\} = 2Re\{\text{Tr}U_{x;\mu\nu}\}$ und schließlich erhält man,

$$S_{\text{Lat}}[U] = \sum_x \sum_{1\leq\mu<\nu\leq 4} \beta \left[1 - \frac{1}{N} Re\text{Tr}\{U_{x;\mu\nu}\}\right], \tag{1.13}$$

als die sogenannte Wilson-Wirkung für das Eichfeld auf dem Gitter. Die Gitter-Eichkopplung $\beta \equiv 2N/g^2$ in (1.13) ist an dieser Stelle nicht mit der inversen Temperatur und auch nicht mit der aus der Renormierungsgruppen Theorie bekannten β-Funktion (siehe Abschnitt 1.2.2) zu verwechseln. Es ist klar, dass die Spur über die Plaquettevariable invariant unter (lokalen) Eichtransformationen bleibt und damit auch S_{Lat} lokal eichinvariant ist: Jede Plaquette ist als ein Beitrag potentieller Energie des gluonischen Wärmebades zur Wirkung interpretierbar.

Analog zur Kontinuumsschreibweise reproduziert die Plaquettevariable den Feldstärketensor. Schreibt man für die partiellen Ableitungen in (1.3) die entsprechenden Gitterableitungen, z.B. $\partial_\mu A_\nu(x) \to 1/a(A_\nu(x + a\hat{\mu}) - A_\nu(x))$, und setzt für die Plaquettevariablen die entsprechenden Paralleltransporter ein, so folgt in einer Entwicklung in a, dass $U_{x;\mu\nu} = 1 - a^2 F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3)$ ist. Man findet daher für die Wilson-Wirkung

$$S_{\text{Lat}}[U] = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^6). \tag{1.14}$$

Die Kontinuumswirkung (1.4) wird von der Wilson-Wirkung mit jedem endlichen Gitterabstand a bis auf Korrekturen der Ordnung a^2 approximiert und bei Fallenlassen der Regularisierung ($a \to 0$, sogenannter Kontinuumslimes) reproduziert. Wegen $a^4 \sum_x \to \int d^4x$ ist der Term $\mathcal{O}(a^6)$ in (1.14) effektiv eine Korrektur quadratischer Ordnung in a. Diese Korrekturen führen bei Gitterrechnungen mit endlichem Volumen $N_\sigma^3 \times N_\tau$ zu sogenannten Cut-Off-Effekten.

Mit wachsendem Anspruch an die Genauigkeit der Gittersimulationen wächst auch das Verlangen nach einer Verbesserung - oder gar Eliminierung - der Cut-Off-Effekte. Aber auch für Betrachtungen in Gitter-Störungstheorie ist eine Handhabe der Theorie nahe am Kontinuum von Interesse. Um dieses Ziel zu erreichen, sind bereits verschiedene Prozeduren vorgeschlagen worden, *ohne* dabei den Rechenaufwand drastisch zu vergrößern. Neben der Methode von K. Symanzik [22], in der die führenden Korrekturen

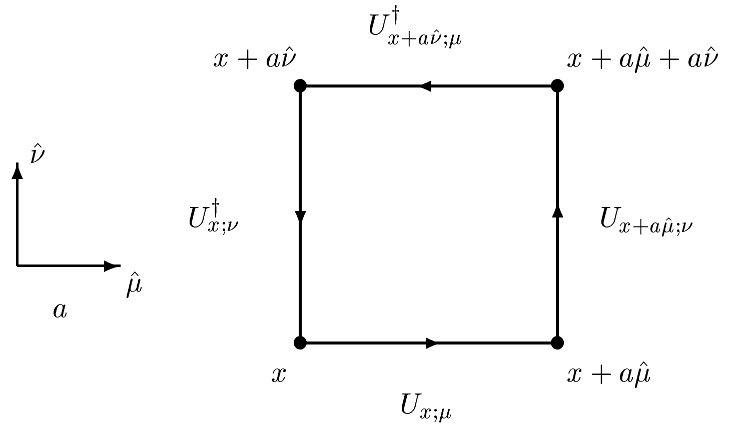

Abbildung 1.1: Darstellung einer Plaquettevariablen $U_{x;\mu\nu}$ in der $\mu - \nu$-Ebene des Gitters. Die Wechselwirkung zwischen den Gitterpunkten wird durch Paralleltransporter U_{x_i,μ_j} vermittelt, welche wiederum das Eichfeld $A(x)$ beinhalten. Der Einfachheit halber nehmen wir in dieser Darstellung an, dass die Regularisierung mittels eines isotropen Gitters durchgeführt ist, also dass der Gitterabstand a in allen Richtungen gleich ist.

zum Kontinuumslimes in der Störungstheorie eliminiert werden, sind zum Beispiel die Renormierungsgruppen-verbesserte-Wirkungen [23] und die 'perfekten' Wirkungen [24, 25] eingeführt worden. Es sollte dabei erwähnt werden, dass diese Vorschläge zur Verbesserung der Cut-Off-Effekte nicht etwa eine Verbesserung des energetischen infrarot-Bereiches der Theorie zum Ziel haben, sondern ihr Verhalten im ultraviolett-Regime verbessern. Auf dem Gitter entspricht dieser Bereich gerade kurzen Gitterabständen. Da wir in dieser Arbeit hauptsächlich den exponentiellen Abfall von Korrelationsfunktionen untersuchen, und dieser bereits bei relativ kurzen Gitterabständen beobachtet wird, ist es für unsere Zwecke sicherlich sinnvoll, verbesserte Wirkungen zu verwenden.

In dieser Arbeit wird die (2,1)-tree-level-verbesserte Wirkung [26, 27, 28] verwendet, bei der im naiven Kontinuumslimes die $\mathcal{O}(a^2)$-Korrekturen in niedrigster Ordnung Störungstheorie wegfallen. Diese Wirkung setzt sich aus den einfachen Plaquetten und symmetrisierten 2×1-Loops zusammen:

$$
\begin{aligned}
S^{(2,1)} &= \beta \sum_{x,\nu>\mu} \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{N} \mathrm{ReTr} \; \square_{\mu\nu}(n)\right) \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2N} \mathrm{ReTr} \left(\boxed{}_{\,\mu\nu}(n) + \boxed{\begin{matrix} \\ \end{matrix}}_{\,\mu\nu}(n)\right)\right). \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

Für $a \to 0$ erhalten wir dann eine Korrektur (entsprechend Gl. (1.14)) der Ordnung $\mathcal{O}(a^8)$, was also einer Verbesserung gegenüber der Wilson-Wirkung von $\mathcal{O}((aT)^2) \sim \mathcal{O}(1/N_\tau^2)$ entspricht. Dieses hat zur Folge, dass Korrekturen, die entscheidend für relativ kleine N_τ sind, die Kontinuums-Wirkung für große N_τ aber recht schnell approximiert werden kann. In der Tat zeigen bisherige Studien mit (1.15) eine deutliche Reduzierung der Cut-Off-Effekte gegenüber Rechnungen mit der Wilson-Wirkung [29]. Der Grund dafür ist die vorangeschrittene Restaurierung der - nach wie vor aber gebrochenen - Rotationssymmetrie dieser Wirkung gegenüber der Wilson-Wirkung. Diese Korrektur ist von Bedeutung bei einer Analyse von Korrelationsfunktionen auf dem Gitter.

Weil Massenterme in der reinen Eichtheorie, z.B. massive Gluonen, die Eichinvarianz verletzen, besitzt die reine (klassische) Eichtheorie a priori keine intrinsische Massenskala und ist daher skaleninvariant. Der Prozess der Gitterregularisierung erzeugt aber 'ad hoc' eine Massenskala in der regularisierten Theorie. In der Tat haben K. Osterwalder und E. Seiler [30] gezeigt, dass Massensprünge im Energiespektrum der reinen Gitter-Eichtheorie im Bereich starker Kopplungen auftreten. Demzufolge hat der niedrigste Eigenzustand des Gitter-Hamiltonian eine nicht-verschwindende Masse. Der zugrunde liegende Formalismus ist aus der Theorie der Renormierungsgruppe bekannt (vergleiche dazu z.B. [31, 32, 33]) und wird in den weiteren Erläuterungen kurz skizziert.

1.2.2 Massenskala in der Gitter-Eichtheorie

Da die renormierte Kopplungskonstante g_R mit einer physikalischen Kopplung identifiziert werden sollte, fordert man von ihr die Unabhängigkeit vom Regularisierungsparameter. Im Falle einer Regularisierung auf dem Gitter mit Regularisierungsparameter a, fordert[2] man daher

$$a\frac{d}{da}g_R = \left\{a\frac{\partial}{\partial a} - \beta_{\text{Lat}}(g)\frac{\partial}{\partial g}\right\} g_R(g, m_R a) = 0, \tag{1.16}$$

wobei β_{Lat} bei festem g_R durch

$$\beta_{\text{Lat}}(g, m_R a) = -a\,\frac{\partial g}{\partial a}\bigg|_{g_R} \tag{1.17}$$

gegeben ist. Eine störungstheoretische Behandlung der Funktion $\beta_{\text{Lat}}(g)$ zeigt die Unabhängigkeit der ersten beiden Ordnungen in der nackten Kopplung g vom Renormierungsschema. In der reinen $SU(N)$-Eichtheorie findet man für die β-Funktion in einer Entwicklung um verschwindende Kopplungen g, dass $\beta_{\text{Lat}}(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + \dots$ ist, mit den universellen Entwicklungskoeffizienten $\beta_0 = 11/3(N/16\pi^2)$ und $\beta_1 = 34/3(N/16\pi^2)^2$. Es lässt sich zeigen, dass $g = 0$ die Rolle eines ultravioletten Fixpunktes spielt, und man somit den Kontinuumslimes für fixiertes g_R durch Übergang von g nach Null erhält. Durch Separation der Variablen und Einsetzen der Entwicklung der β-Funktion ergibt sich die Lösung der partiellen Differentialgleichung (1.17) zu

$$a\Lambda_{\text{Lat}} \;=\; (\beta_0 g^2)^{\frac{-\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2}\right)\left\{1 + \mathcal{O}(g^2)\right\}, \tag{1.18}$$

[2] I.A. kann eine Theorie bereits auf der Ebene der Lagrange-Dichte eine Massenskala besitzen. In einer massiven Theorie wird dann zusätzlich zu Λ die Renormierungsgruppen-invariante Strommasse m_R über die Renomierungsgruppenfunktion γ_m eingeführt. Sie besitzt aber keine Kopplungsabhängigkeit und gilt daher als 'triviale' Renormierungsgruppen-Invariante. Dieser Prozess hat aber zur Folge, dass die renormierte Kopplung g_R zusätzlich von den renormierten Massen (z.B. Quark-Massen) abhängt. Aus diesem Grunde führen wir die Massenabhängigkeit auch hier weiter mit.

mit Λ_{Lat} als Integrationskonstante. Da die rechte Seite von (1.18) dimensionslos ist und die Gitterkonstante a die Dimension einer Länge trägt, hat Λ_{Lat} die Dimension einer Masse. Man bezeichnet

$$\Lambda_{\text{Lat}} \equiv \lim_{g \to 0} \frac{1}{a} (\beta_0 g^2)^{\frac{-\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2}\right) \tag{1.19}$$

als Gitter-Λ-Parameter. Er ist somit nach dem Grenzübergang $g \to 0$ unabhängig von der nicht renormierten Kopplung. Mit Λ_{Lat} tritt nun in der reinen Gitter-Eichtheorie eine massenbehaftete Skala auf, so dass massive physikalische Größen der Proportionalitätsbeziehung $m = C_m \Lambda_{\text{Lat}}$ genügen müssen. Demnach verhalten sich Massen, welche aus Gitterrechnungen bestimmt werden, in der Nähe des Kontinuumslimes gemäß

$$am(g) = C_m (\beta_0 g^2)^{\frac{-\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2}\right) \{1 + \mathcal{O}(g^2)\}, \tag{1.20}$$

(sogenanntes *asymptotic scaling*) oder mit anderen Worten, sie erfüllen die Renormierungsgruppengleichung. Es folgt aber auch, dass Massenverhältnisse zweier physikalischer Zustände im Kontinuumslimes wie $m_1/m_2 = C_1/C_2\{1+\mathcal{O}(a^2m^2)\}$ gegen einen konstanten Wert streben.

Findet man ein solches Skalenverhalten im Energiespektrum der quantisierten Eichtheorie, so würde sie - im Gegensatz zu ihrem klassischen Pendant - massive physikalische Zustände beinhalten. Tatsächlich sind solche Zustände, sogenannte Glueball-Zustände, bereits von H. Fritzsch und M. Gell-Mann vorausgesagt worden [13]. Man stellt sich die Gluebälle als farblos und aus Gluonen aufgebaut vor. Eine wesentliche Voraussetzung für die Existenz solcher Zustände bildet demnach die Selbstwechselwirkung der Gluonen, wie sie in nicht-abelschen Eichtheorien eingeführt werden.

1.3 Glueball-Zustände auf dem Gitter

Obwohl Gluebälle bisher noch nicht experimentell nachgewiesen worden sind [34, 35, 36], gilt ihre Existenz als theoretisch gesichert, und ihre Eigenschaften sind bereits Gegenstand vieler (theoretischer) Untersuchungen [2, 3, 37]. Auch in dieser Arbeit werden die Glueball-Massen und vor allem ihre Temperaturabhängigkeit studiert. Im Rest dieses einführenden Kapitels charakterisieren wir daher zunächst die Glueball-Zustände nach ihren Spin-Quantenzahlen und diskutieren die Darstellungstheorie von Spinzuständen durch die kubische Gruppe auf dem Gitter. Abschließend stellen wir die bisherigen Resultate des Massenspektrums früherer und - soweit uns bekannt - aktueller Arbeiten zusammen.

1.3.1 Spinzustände und kubische Gruppe

Bosonische Zustände werden im Kontinuum gewöhnlich durch Tensordarstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ charakterisiert, wobei die $SO(3)$ aus der Menge aller Rotationen um beliebige Achsen und Winkel im dreidimensionalen Raum besteht. Durch eine Diskretisierung der Theorie auf einem Gitter wird die Rotationssymmetrie jedoch gebrochen, da ein

	J	0	1	2	3	...
Darstellung:	A_1	**1**	0	0	0	
	A_2	0	0	0	**1**	
	E	0	0	**1**	0	
	T_1	0	**1**	0	1	
	T_2	0	0	**1**	1	

Tabelle 1.1: Darstellungen der Elemente der kubischen Gruppe bis einschließlich $J = 3$. A_1, A_2, E, T_1, T_2 bezeichnen die irreduziblen Darstellungen der Unterräume der kubischen Gruppe $\mathcal{O}$.

kubisches Gitter nicht invariant gegenüber Drehungen um beliebige Rotationsachsen und Winkel ist. Demnach sind auch Gitterzustände unter beliebigen Drehungen nicht invariant und somit zunächst unphysikalisch. Mit Hilfe der kubischen Gruppe $\mathcal{O}$ kann man nun die Rotationsinvarianz des physikalischen Raumes auf dem Gitter wiederherstellen, indem man die Rotationssymmetrie der kontinuierlichen Theorie durch die untergeordnete kubische Symmetrie eines Gitters austauscht. Die kubische Gruppe dient dann als Symmetriegruppe der Gitter-Eichtheorie, so dass die Eigenzustände des Gitter-Hamilton-Operators nach den irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{O}$ eingeordnet werden.

Auf der anderen Seite ist aber auch zu fragen, welche Auswirkungen die Gitterregularisierung auf Spinzustände im Kontinuum hat. Betrachten wir zunächst eine irreduzible Darstellung $\mathcal{R}^J$ der Gruppe $SO(3)$, wobei J den Spinzustand für $J = 0, 1, 2, \ldots$ bezeichnen soll. Dadurch, dass die kubische Gruppe $\mathcal{O}$ eine Untergruppe der $SO(3)$ ist, können ihre Elemente auch durch $\mathcal{R}^J$ dargestellt werden. Also lässt sich $\mathcal{R}^J$ auch als eine Darstellung $\mathcal{R}^J_{\mathcal{O}}$ von $\mathcal{O}$ auffassen, die im Allgemeinen aber reduzibel ist. Man kann sie dann in ihre irreduziblen Anteile zerlegen und erhält für $J = 0, \ldots, 3$ [38] die irreduziblen Komponenten, welche in Tabelle 1.1. dargestellt sind. Daraus geht hervor, dass die Darstellungen für Spin-0- und Spin-1-Teilchen irreduzibel sind, also ihr Darstellungsraum auch nach der Gitterdiskretisierung keine (nicht-trivialen) invarianten Unterräume besitzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^0_{\mathcal{O}} &= A_1, \\ \mathcal{R}^1_{\mathcal{O}} &= T_1. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Im Falle eines Spin-2-Teilchens zerfällt dagegen der von den $2J + 1 = 5$ Zuständen aufgespannte Darstellungsraum in einen zwei- und einen dreidimensionalen invarianten Unterraum und für ein Spin-3-Teilchen entsprechend Tabelle 1.1 in drei Unterräume:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2_{\mathcal{O}} &= E \oplus T_2, \\ \mathcal{R}^3_{\mathcal{O}} &= A_2 \oplus T_1 \oplus T_2. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Hierdurch spaltet das von den fünf Zuständen gleicher Energie im Kontinuum gebildete Multiplett zu $J = 2$ in ein Dublett E und ein Triplett T_2 mit unterschiedlichen Energien auf. Die Zustände des Dubletts transformieren sich dabei unter der irreduziblen Darstellung E der kubischen Gruppe, die des Tripletts unter der Darstellung T_2. Für einen massiven Zustand mit Spin 2 bedeutet dies, dass man in der Gittersimulation zunächst zwei

Massen $m(E)$ und $m(T_2)$ misst, deren Verhältnis $m(E)/m(T_2)$ aber im Kontinuumslimes dann gegen 1 konvergiert, sobald die volle Rotationssymmetrie des Kontinuums restauriert wird. Bezogen auf ein $J = 3$-Multiplett erwartet man, der Zerlegung in irreduzible Unterräume folgend, im Kontinuumslimes $m(A_2)/m(T_1) \to 1$ und $m(A_2)/m(T_2) \to 1$.

1.3.2 Zustandsfunktionen der Glueballe auf dem Gitter

Bezeichnet $|\,\psi\,\rangle$ einen physikalischen Zustand im Kontinuum, so lässt sich dieser wie gewohnt nach den Eigenzuständen $|\,\psi_n\,\rangle$ des Hamilton-Operators entwickeln, also

$$|\,\psi\,\rangle = \sum_n c_n\,|\,\psi_n\,\rangle\,, \tag{1.23}$$

wobei wir mit $n = \{J, m_J, ...\}$ die üblichen Quantenzahlen der Spin-J-Darstellung bezeichnen (und ggf. zusätzliche Indizes für z.B. angeregte Zustände mit gleichem Spin). Damit gehört jeder Eigenzustand $|\,\psi_n\,\rangle$ zu einem Multiplett mit fest bestimmter Spin-Quantenzahl J. Betrachten wir nun einen beliebigen Gitteroperator, welcher sich unter der irreduziblen Darstellung $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{R} \in \{A_1, A_2, E, T_1, T_2\}$ der kubischen Gruppe transformiert, so erzeugt dieser durch Anwendung auf das Vakuum einen physikalischen Zustand auf dem Gitter, der im Kontinuumslimes gemäß (1.23) als $|\,\psi_\mathcal{R}\,\rangle = \sum_n c_n^\mathcal{R}\,|\,\psi_n\,\rangle$ aufgefasst werden kann. In $|\,\psi_\mathcal{R}\,\rangle$ mischen sich demnach verschiedene Spinanteile. Der Quantenmechanik folgend konstruiert man einen Zustand Ψ durch Anwendung entsprechender Linearkombinationen eines vollständigen Satzes geeigneter Operatoren $\hat{\mathcal{O}}_i, i = 1, 2, 3\ldots$, auf den Vakuumzustand $|\,0\,\rangle$, wobei diese der Relation $\langle\,0\,|\,\hat{\mathcal{O}}_i\,|\,0\,\rangle = 0$ genügen. Auch in einer Gitter-Eichtheorie stellt man an die Operatoren die Forderung nach Eichinvarianz. Daher eignen sich als Kandidaten insbesondere Linkprodukte entlang geschlossener, raumartiger Polygonzüge $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i(\mathbf{x}, t)$ auf dem Gitter, sogenannter Wilson-Loop, wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ den Startpunkt des Polygonzuges bezeichnet. Eine Zustandsfunktion wird dann durch

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_i c_i\ \hat{\mathcal{O}}_i(\mathbf{x}, t)\,|\,0\,\rangle \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{C} \tag{1.24}$$

beschrieben, wobei man meistens bereits den Vakuum-Erwartungswert des Operators subtrahiert, z.B. $\hat{\mathcal{O}}_i(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Tr}U(\mathcal{C}_i) - \langle\,\mathrm{Tr}U(\mathcal{C}_i)\,\rangle$. Damit man die zugehörigen Eigenzustände eines Operators $\hat{\mathcal{O}}_i(\mathbf{x}, t)$ im Impulsraum erhält, projiziert man auf Zuständen mit raumartigen Gitter-Impulsen mittels einer Fourier-Transformation, also $\hat{\mathcal{O}}_i(\mathbf{p}, t) \sim \sum_\mathbf{x} e^{i\mathbf{px}}\hat{\mathcal{O}}_i(\mathbf{x}, t)$. Da das Massenspektrum der Glueballe auf Zustandsfunktionen mit verschwindendem Impuls $\mathbf{p}$ basiert, also auf Zustände mit verschwindender kinetischer Energie $p^2 = 0$, folgt

$$\hat{\mathcal{O}}_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N_\sigma^3}} \sum_\mathbf{x} \hat{\mathcal{O}}_i(\mathbf{x}, t). \tag{1.25}$$

Für Gitter-Simulationen schränkt man die Anzahl der zu berücksichtigenden Operatoren weiter ein. Im einfachsten Fall verwendet man ausschließlich Wilson-Loops der Länge 4 in einer gegebenen $t = 0$-Zeitschicht, also gerade die Plaquettevariablen U_p aus (1.12) mit $p = (\mathbf{x}, i)$ und $i \in \{1, 2, 3\}$. Aus ihnen lassen sich sechs physikalische Zustände konstruieren. Nun bildet man aus ihnen in geeigneter Weise Linearkombinationen, welche sich unter

Bez.	irreduzible Darstellung $\mathcal{R}$ der kubischen Gruppe	Linearkombinationen der Ψ_i
$\mathcal{S}_{F1}$	A_1^{++}	Re $\{\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3\}$
$\mathcal{S}_{F2}$	E^{++}	Re $\{-2\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3\}$
$\mathcal{S}_{F3}$		Re $\{\Psi_2 - \Psi_3\}$
$\mathcal{S}_{F4}$	T_1^{+-}	Im Ψ_1
$\mathcal{S}_{F5}$		Im Ψ_2
$\mathcal{S}_{F6}$		Im Ψ_3

Tabelle 1.2: Mögliche Linearkombinationen aus einfach-Plaquetten (Wilson-Loops der Länge 4) zur Darstellung der Glueball-Zustände auf dem Gitter. Man bezeichnet sie entsprechend der Dimension der irreduziblen Darstellung als Skalar- (A_1^{++}), als Tensor- (E^{++}) und als Axial-Vektor-Glueball (T_1^{+-}) [19].

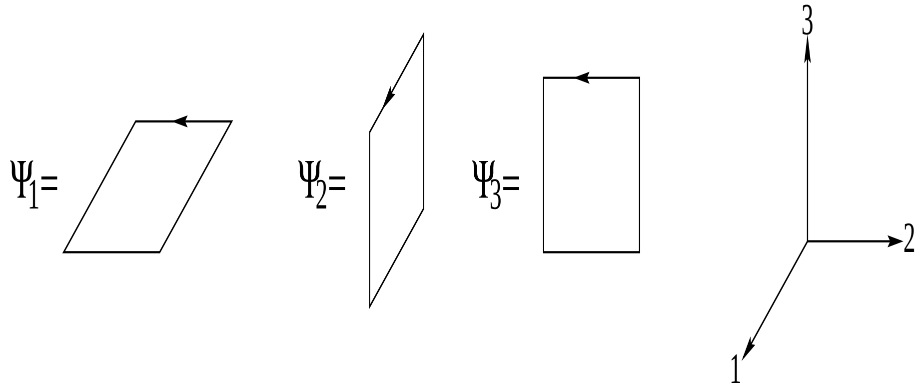

Abbildung 1.2: Darstellung der 4-Link-Plaquetten (**F**): Sie können auf drei verschiedene Arten im räumlichen Gitter liegen. Die Pfeilrichtung zeigt den Durchlaufsinn des Loops bei der Multiplikation der Link-Variablen an. Zur besseren Orientierung sind die drei Raumachsen rechts angezeigt.

irreduziblen Darstellungen der kubischen Gruppe transformieren. Sie bilden schließlich die gesuchten Glueball-Zustände auf dem Gitter. Für Wilson-Loops der Länge 4 (siehe Abbildung 1.2) findet man die Darstellungen in Tabelle 1.2. Sie erzeugen einen Skalar-, einen Tensor- und einen Axial-Vektor-Glueball. Der Axial-Vektor-Glueball existiert allerdings nur in Eichgruppen mit echt komplexen Darstellungen, wie z.B. in der $SU(3)$, wohingegen die Eichgruppe $SU(2)$ nur reelle Darstellungen besitzt. Weitere Linearkombinationen bestehend aus Wilson-Loops der Länge 6 werden im nächsten Kapitel eingeführt (siehe Abschnitt 2.2.1).

1.4 Das thermale Massenspektrum der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie

Das Temperaturverhalten der Glueball-Massen ist bislang für $T \simeq T_c$ weitestgehend unerforscht. Folgt man jedoch den Aussagen einer störungstheoretischen Behandlung der QCD, deren Gültigkeit bei Temperaturen weit oberhalb von T_c erwartet wird, so werden verschwindende[3] Massen zumindest nahegelegt. Für eine Erfassung der Glueball-Massen im wohl interessanteren Temperaturbereich, nämlich nahe bei T_c, sind nicht-störungstheoretische Methoden, z.B. Gittersimulationen, unbedingt notwendig. Darüber hinaus kann man an (1.20) ablesen, dass ein störungstheoretischer Zugang zu Glueball-Massen aufgrund der enthaltenen nicht-Analytizität im Quadrat der Kopplung $\sim e^{-1/g^2}$ tatsächlich ausgeschlossen ist. Bisherige Betrachtungen von solchen Glueball-Massen beziehen sich daher im Wesentlichen auf Entwicklungen im starken Kopplungssektor der Theorie und auf Monte-Carlo-Simulationen auf dem Gitter.

In beiden Methoden erfolgt die Berechnung von Glueball-Massen über zusammenhängende Korrelationsfunktionen der Form $\langle \mathcal{O}(t_0+t)\mathcal{O}(t_0)\rangle$. Der exponentielle Abfall der Korrelationen spiegelt die Glueball-Massen wider (z.B. $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t)\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(0)\rangle &= \langle \Psi_{\mathcal{R}}|e^{-Ht}|\Psi_{\mathcal{R}}\rangle = \sum_n |c_n^{\mathcal{R}}|^2 \,\langle\, \psi_n \,|\, \underbrace{e^{-Ht}\,|\,\psi_n\,\rangle}_{e^{-tm_n}\,|\,\psi_n\,\rangle} \\
&= C_0 e^{-tm_0}\left\{1 + C_1 e^{t(m_1-m_0)} + \ldots\right\}, \quad C_0, C_1 = \text{const.} \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ einem eichinvariantem Glueball-Operator $\sim \sum_{\mathbf{x}} \mathrm{Tr}U(t,\mathbf{x})$ bezeichnet. Wird also die Zeit t in (1.26) ausreichend groß gewählt, so dominiert der Beitrag m_0 das Exponentialverhalten der Korrelation $\langle \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(t)\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(0)\rangle \sim C_0 e^{-m_0 t}$ und kann dann extrahiert werden.

Tatsächlich hat man begonnen, zeitgleich mit dem Erstellen dieser Arbeit, das Massenspektrum der Gluebälle in thermaler $SU(3)$ auf dem Gitter zu vermessen ([2] und einbezogene Referenzen). Sie berechnen die niedrigsten beiden Glueball-Polmassen-Zustände ($J^{PC} = 0^{++}$ und $J^{PC} = 2^{++}$) auf anisotropen Gittern mit (renormierten) Anisotropien $a_\sigma/a_\tau = 4$ und Gitter-Größen $20^3 \times N_\tau$ mit $N_\tau = 24, ..., 72$. Die wesentlichen Resultate dieser Arbeiten sind in der Tabelle 1.3 für den 0^{++}-Zustand und für den 2^{++}-Zustand zusammengestellt. Die Autoren verwenden dabei die Standard-Wilson-Wirkung und beziehen sich auf die Glueball-Operatoren konstruiert durch Wilson-Loops der Länge 4, also auf (siehe z.B. Tabelle 1.2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{F1}(A_1^{++}) &\equiv \mathrm{Re}\,\{\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3\}\,, \\
\mathcal{S}_{F2}(E^{++}) &\equiv \mathrm{Re}\,\{2\Psi_1 - \Psi_2 - \Psi_3\}\,. \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

[3] Sich im Rahmen von Bindungszuständen auf die störungstheoretische Behandlung der QCD (oder $SU(3)$) zu beziehen, hat i.A. sicherlich fatale Folgen. Diesen Sachverhalt haben wir allerdings bereits in Abschnitt (1.2.2) im Zusammenhang mit (1.19) erörtert. Was wir an dieser Stelle meinen, ist die allgemein anerkannte Vorstellung, dass sich gebundene Quarkmaterie bei sehr hohen Temperaturen auflöst, d.h. ein sogenanntes Quark-Gluon-Plasma bildet. Im Rahmen der QCD wird dieser Sachverhalt mit der asymptotischen Freiheit der Theorie verbunden, welche überhaupt erst eine störungstheoretische Behandlung der QCD rechtfertigt. Die Argumentation für das Verschwinden der Glueball-Massen bei sehr hohen Temperaturen kann also auch viel allgemeiner, und ohne Bezug auf die Störungstheorie, geführt werden.

T[MeV]	$m_G(0^{++})$[MeV]	ρ[fm]	$m_G(2^{++})$[MeV]	ρ[fm]
130	1482(25)	0.43	2167(35)	0.50
187	1436(26)	0.44	2123(39)	0.43
208	1469(25)	0.41	2054(58)	0.47
218	1333(34)	0.44	2146(55)	0.56
234	1288(37)	0.41	1986(72)	0.54
246	1265(34)	0.43	2142(55)	0.44
253	1294(26)	0.41	2009(47)	0.42
260	1158(41)	0.44	1928(46)	0.49
268	1226(30)	0.40	1975(65)	0.45
275	1174(35)	0.45	1607(61)	0.47
284	1168(27)	0.44	1466(78)	0.49
312	1158(28)	0.46	1319(58)	0.50

Tabelle 1.3: Die Polmasse $m_G(0^{++})$ (linke Spalte) in MeV als Funktion der Temperatur T (in MeV) im Vergleich mit dem Temperaturverhalten der Polmasse des 2^{++}-Zustandes (rechte Spalte). Zusätzlich ist die Ausdehnung ρ[fm] des Glueballs aufgelistet. Die horizontale Linie zwischen $T = 275$MeV und $T = 284$MeV markiert die kritische Temperatur $T_c \simeq 280$MeV [2].

Um einen möglichst großen Überlappungsgrad mit der Grundzustandsmasse zu erreichen, verwenden sie die sogenannte Smearing-Methode, die wir im nächsten Kapitel vorstellen. Bei dieser Methode wird die Link-Variable U iterativ und diffus erweitert mit dem Ziel, dass der Operator auf dem Gitter in etwa die räumliche Ausdehnung des physikalischen Glueballs erhält. Man erwartet dann, dass Beiträge höherer Spin-Anregungen unterdrückt werden. Darüber hinaus ist es mit dieser Methode möglich auf die physikalische Ausdehnung des Glueballs zurückzuschließen. Die Autoren finden eine nahezu temperaturunabhängige Ausdehnung beider Glueball-Zustände von $\rho(T) \sim 0.4$ fm. Für den Grundzustand (0^{++}) finden sie eine Reduktion der 0^{++}-Polmasse bei T_c (gegenüber der Masse bei $T = 0$) von $m_{0^{++}}(T \sim T_c) \sim 0.8 m_{0^{++}}(T \sim 0)$.

In einer starken Kopplungsentwicklung werden die Korrelationsfunktionen gewöhnlich in einem Entwicklungsparameter $u \sim 1/g^2$ angegeben (eine genaue Zusammenstellung der Notation u ist z.B. in [19] gegeben). Ergebnisse solcher Betrachtungen sind für Korrelationen mit Wilson-Loops der Länge 4 in [39] und zeitgleich auch in [40] präsentiert worden:

$$m(A_1^{++}) = -4\ln u - 3u + 9u^2 - \frac{27}{2}u^3 - 7u^4 - \frac{297}{2}u^5 + \mathcal{O}(u^6), \tag{1.28}$$

$$m(E^{++}) = -4\ln u - 3u + 9u^2 - \frac{27}{2}u^3 + 17u^4 + \mathcal{O}(u^5), \tag{1.29}$$

$$m(T_1^{+-}) = -4\ln u + 3u + \frac{9}{2}u^3 - \frac{99}{4}u^4 + \mathcal{O}(u^5), \tag{1.30}$$

bzw. für die Verhältnisse der Massen: [41]

$$\frac{m(E^{++})}{m(A_1^{++})} \sim 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{m(T_1^{+-})}{m(A_1^{++})} \sim 1.8 \pm 0.3. \tag{1.31}$$

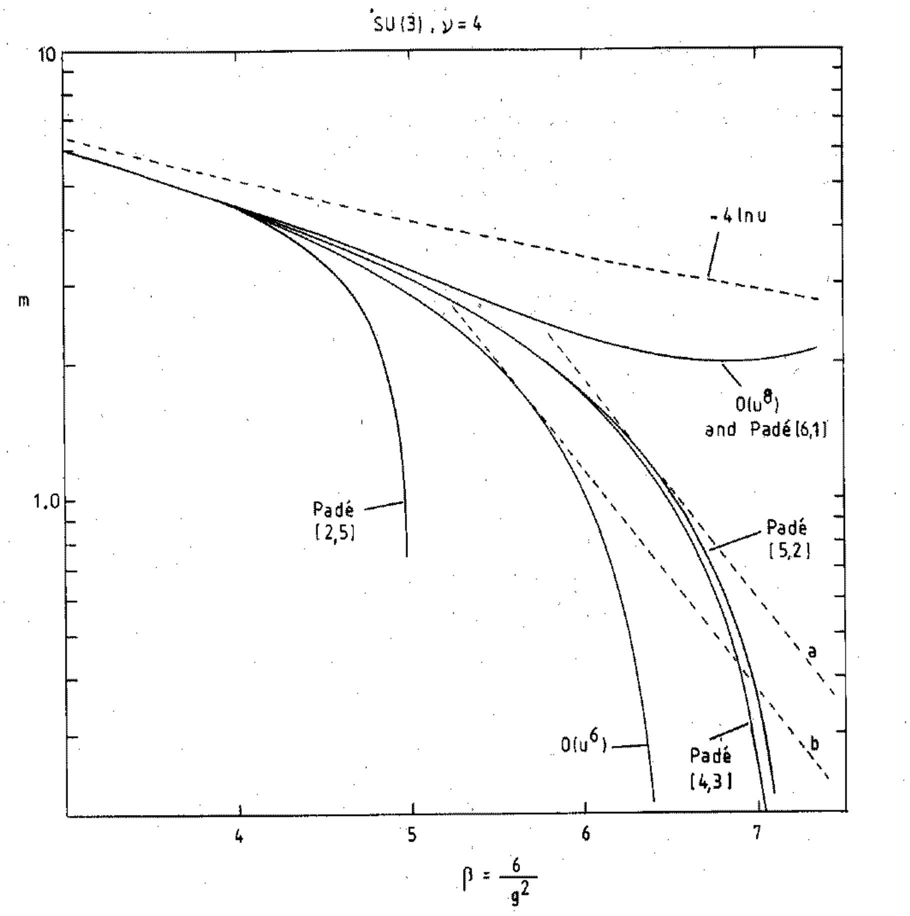

Abbildung 1.3: Darstellung der starken Kopplungsentwicklung der $SU(3)$. Der Massensprung $m(A_1^{++})$ in Einheiten des inversen Gitterabstands für die $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie in $\nu = 4$ Dimensionen. Die durchgezogenen Linien stellen die Entwicklungen der sechsten und achten Ordnung und eine Padé-Extrapolation dar. Die gestrichelten Linien sind die niedrigsten Ordnungen und passen zum schwachen Kopplungsverhalten laut der asymptotischen Freiheit (entnommen aus [39]).

Zur Veranschaulichung haben wir in Abbildung 1.3 den grafischen Verlauf von (1.28) dargestellt und werden in der Auswertung im dritten Kapitel einen Vergleich mit unserem berechneten $m(E^{++})/m(A_1^{++})$-Massenverhältnis anstellen.

Kapitel 2

Numerische Methoden

In diesem Kapitel stellen wir die von uns verwendeten Simulations- und Auswertungstechniken vor. Primäres Ziel dieser Analysetechniken ist eine Berechnung - oder erwartungstreue Schätzung - des Pfadintegrals in der gitterregularisierten Definition, also eine Berechnungsvorschrift von Funktionalen der Form

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle \quad = \quad \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \; \mathcal{O}[U] \; e^{-S[U]}, \tag{2.1}$$

angeben zu können. Meist ist eine exakte Berechnung des Erwartungswertes $\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle$ in (2.1) bereits für kleine physikalische Systeme nicht praktikabel oder sogar unmöglich. Der Grund hierfür liegt in der großen Anzahl von Mikrozuständen in einem statistischen System und dem damit verbundenen Rechenaufwand. In der Tat, ist es erforderlich, Integrale relativ hoher Dimension d ($d \sim 10^6$) zu berechnen. Da aber die Beiträge der Zustandskonfigurationen $[U]$ zum Erwartungswert von der Wirkung S exponentiell unterdrückt werden, ist es ratsam, die Berechnung auf solche Konfigurationen zu beschränken, welche die Wirkung S minimieren, und mit Hilfe dieser Konfigurationen die Integrale in (2.1) statistisch abzuschätzen. Das Auffinden und Erzeugen dieser Konfigurationen ist ein wesentliches Ziel der Monte-Carlo-Simulationstechnik (MC-Technik) in der Statistischen Physik.

Nachdem wir die Methoden der MC-Integration kurz erläutert haben, stellen wir die von uns verwendeten Operatoren zusammen. Dabei bauen wir unmittelbar auf die Darstellung der Wilson-Loops der Länge 4 aus dem einführenden Kapitel (siehe Kapitel 1) auf. Im zweiten Teil dieses Kapitels tragen wir die Auswertungstechniken zur Bestimmung der Glueball-Massen zusammen. Wir schließen dieses Kapitel mit einer ersten Diskussion der numerischen Resultate. Dabei vergleichen wir die einzelnen Beiträge der Operatoren für die J^{PC}-Glueball-Zustände bis einschließlich $J = 3$ und geben eine Abschätzung der räumlichen Größenordnung der einzelnen Zustände an.

2.1 Die MC-Technik in der Statistischen Physik

Die Monte-Carlo-Integration ermöglicht es, auch analytisch unlösbare Integrale zu berechnen, indem sie zwar nicht exakt, dafür aber statistisch beliebig genau approximiert werden. Es werden N zufällige Konfigurationen erzeugt und ein statistischer Schätzwert für die Observable auf dieser Datenmenge berechnet. Anstelle von (2.1) berechnet man

$$\langle \hat{O} \rangle \quad \approx \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mathcal{Z}} \, \mathcal{O}[U_i] \; e^{-S[U_i]}. \tag{2.2}$$

Die einzelnen Eichfelder U_i einer Konfiguration werden hierbei bereits mit der Wahrscheinlichkeit erzeugt, die durch den Boltzmann-Faktor in (2.1) vorgegeben ist:

$$p(U_i) = \frac{e^{-S[U_i]}}{\mathcal{Z}}. \tag{2.3}$$

Dieses Verfahren wird *importance-sampling* genannt. Eine Möglichkeit, Konfigurationen mit dieser Verteilung zu erzeugen, bietet der sogenannte *Metropolis*-Algorithmus [42]. In diesem Verfahren werden nacheinander Konfigurationen $U = \{U_\mu(x)\}$ in einem Markov-Prozess generiert, wobei die Markov-Kette ergodisch ist. D.h. dass alle möglichen Konfigurationen mit einer Wahrscheinlichkeit größer Null erreicht werden können. Das Erzeugen neuer Konfigurationen wird als *Update* bezeichnet.

Die Übergangswahrscheinlichkeit von einer Konfiguration zur nächsten, also $P(U_i \longrightarrow U_{i+1})$, erfüllt die Bedingung der *detailed balance*:

$$p(U_i)P(U_i \longrightarrow U_{i+1}) \quad = \quad p(U_{i+1})P(U_{i+1} \longrightarrow U_i), \tag{2.4}$$

$$e^{-S(U_i)}P(U_i \longrightarrow U_{i+1}) \quad = \quad e^{-S(U_{i+1})}P(U_{i+1} \longrightarrow U_i). \tag{2.5}$$

Ein effektiveres Verfahren als die Metropolis-Methode bietet der *Heatbath*-Algorithmus, welcher zunächst für die $SU(2)$ entwickelt wurde [43]. In einer etwas abgewandelten Form kann er aber auch für $SU(3)$-Linkvariablen benutzt werden (sogenannter *Pseudo-Heatbath* [44]). Er findet auch in dieser Arbeit Anwendung.

2.2 Bereitstellung der Glueball-Operatoren

In diesem Unterkapitel vervollständigen wir die Darstellung der kubischen Gruppe durch Wilson-Loops der Länge 6 und stellen die von uns eingesetzten Operatoren zusammen. Im Zuge dieser Darstellung legen wir auch unsere Notationen der Glueball-Korrelatoren fest. Um das 'signal-to-noise'-Verhältnis zu verbessern, verwenden wir die sogenannte Smearing-Methode [45]. Sie wird im letzten Teil dieses Abschnitts eingeführt und vervollständigt die Bereitstellung der Gitter-Operatoren.

Wir legen zunächst unsere Bezeichnungen fest: Die räumliche Gestalt eines Wilson-Loops beliebiger Länge L kann durch die Angabe der Raumrichtung der Link-Variablen in Form eines L-Tupels $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_L)$ beschrieben werden. Neben der Form des Wilson-Loops sind auch die Lage im hyperkubischen Gitter sowie seine Orientierung, also die Richtung, in welcher der Wilson-Loop durchlaufen wird, charakterisierende Eigenschaften. Sie stehen in Beziehung zu den Quantenzahlen J^{PC} des entsprechenden Glueballs.

2.2.1 Wilson-Loops der Länge 6

Unsere folgenden Betrachtungen beziehen sich zunächst auf die Gestalt der Wilson-Loops und nicht auf den Ort $(x_0, \mathbf{x})$ im Gitter. Dieser wird erst in Bezug auf räumliche oder zeitliche Korrelationen der Operatoren relevant.

Ein Wilson-Loop der Länge 4 kann auf drei verschiedene Arten im Raum liegen (siehe Abbildung 1.2 im Kapitel 1), ein Wilson-Loop der Länge 6 dagegen bereits in 22 unterschiedlichen Variationen. Wir unterscheiden daher:

- Planare 6-Operatoren (2×1-Loops) mit der Bezeichnung **S** (siehe Abbildung 2.1),
- Gebogene 6-Operatoren mit der Bezeichnung **B** (siehe Abbildung 2.2),
- Verdrehte 6-Operatoren mit der Bezeichnung **T** (siehe Abbildung 2.3).

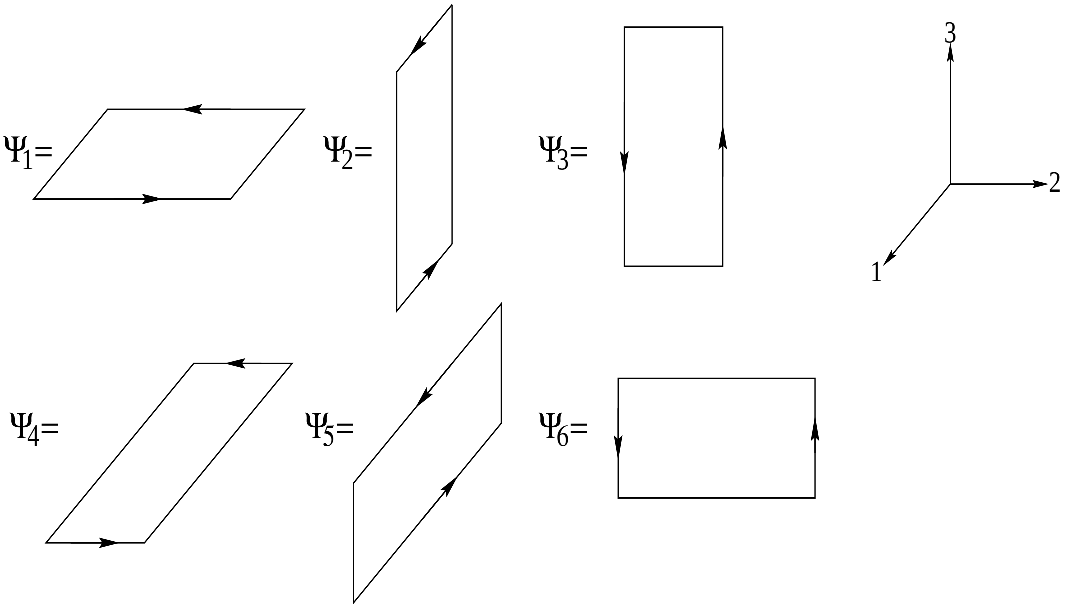

Abbildung 2.1: Darstellung der ebenen 6-Link-Plaquetten (**S**): Sie können auf sechs verschiedene Arten im räumlichen Gitter liegen. Die Pfeilrichtung zeigt den Durchlaufsinn des Loops bei der Multiplikation der Link-Variablen an. Zur besseren Orientierung sind die drei Raumachsen rechts angezeigt.

Die Lage lässt sich einfach durch die Angabe eines Startpunktes auf dem Gitter festlegen. Neben der Gestalt und Lage unterscheiden wir noch seinen Durchlaufsinn: Wir bezeichnen den Operator $\hat{\mathcal{C}}$ als C-Paritätsoperator und definieren ihn durch

$$\hat{\mathcal{C}}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_L) \equiv (-\mu_L, ..., -\mu_2, -\mu_1). \tag{2.6}$$

Er bewirkt eine Umkehrung der Richtung, in der ein geschlossener Loop zu durchlaufen ist. Betrachten wir nun Linearkombinationen eines Loops und seines umgekehrt durchlaufenen Partners, etwa

$$[\mu_1, \mu_2, ..., \mu_L]_\pm \equiv (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_L) \pm (-\mu_L, ..., -\mu_2, -\mu_1), \tag{2.7}$$

so haben beide Kombinationen einen wohldefinierten Eigenwert von +1 oder −1 bezüglich der C-Parität, denn

$$\hat{\mathcal{C}}[\mu_1, \mu_2, ..., \mu_L]_\pm = \hat{\mathcal{C}}\left((\mu_1, \mu_2, ..., \mu_L) \pm (-\mu_L, ..., -\mu_2, -\mu_1)\right) = \pm[\mu_1, \mu_2, ..., \mu_L]_\pm. \quad (2.8)$$

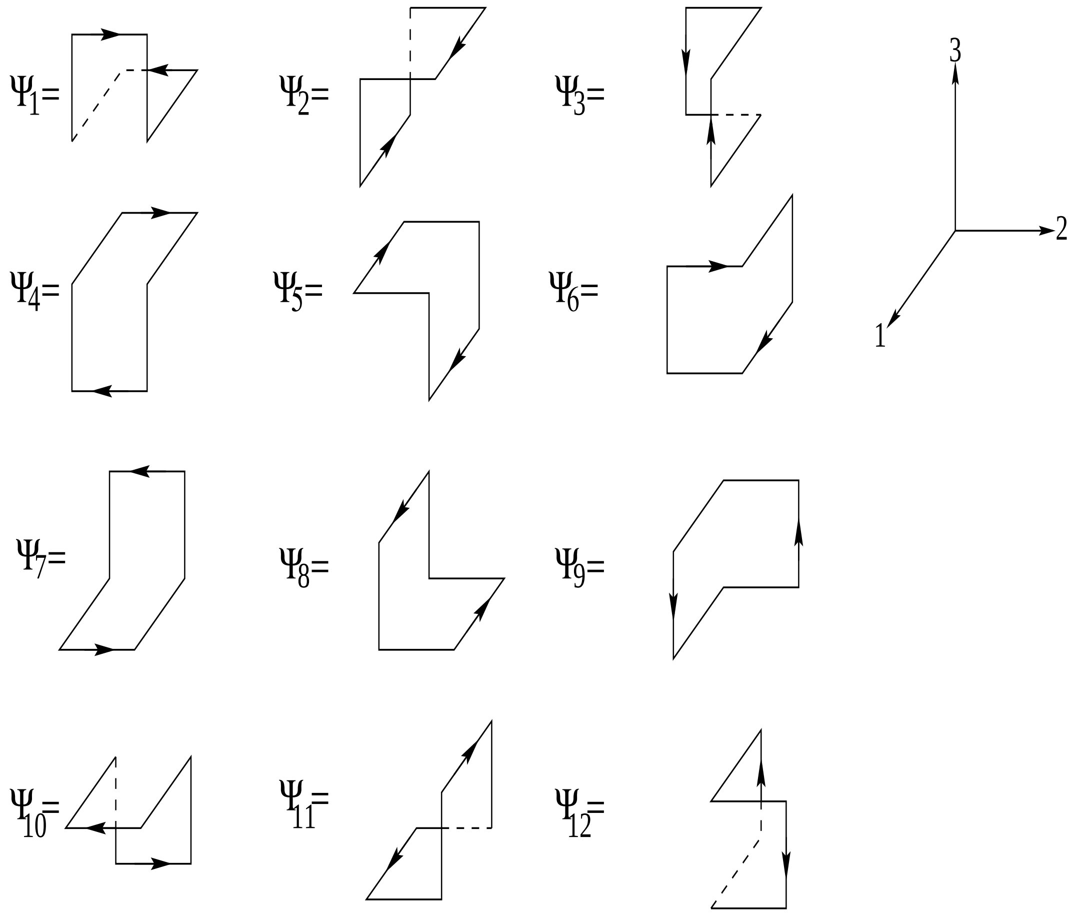

Abbildung 2.2: Die gebogenen 6-Link-Plaquetten (**B**): Sie können auf zwölf unterschiedliche Arten im Raum platziert werden. Das Dreibein bezeichnet die räumlichen Orientierungen.

Mit den Darstellungen der kubischen Gruppe und der hier eingeführten C-Parität werden den Operatoren auf dem Gitter Zustandsfunktionen der Glueball-Zustände J^{PC} im Kontinuum zugeordnet. Die von uns verwendeten Kombinationen und ihre Notationen sind tabellarisch im Anhang zusammengestellt (siehe Tabellen Tabelle C.1 bis C.7 im Anhang C). Zum Beispiel bezeichnet $\mathcal{S}_{T1}$ die Zustandsfunktion mit irreduzibler Darstellung A_1^{++} bestehend aus der Addition aller verdrehten 6-Link-Wilson-Loops (siehe auch Abbildung 2.3). Die entsprechend gebildete 2-Punkt-Korrelation, also $G(t) = \langle \mathcal{S}_{T1}(t)\mathcal{S}_{T1}(0)\rangle$, kann zur Berechnung der Glueball-(Pol-)Masse des $J^{PC} \equiv 0^{++}$-Zustands verwendet werden. Unserem Beispiel folgend, heißt das

$$\langle \mathcal{S}_{T1}(t)\mathcal{S}_{T1}(0)\rangle \simeq Ce^{-m_G(0^{++})t}. \quad (2.9)$$

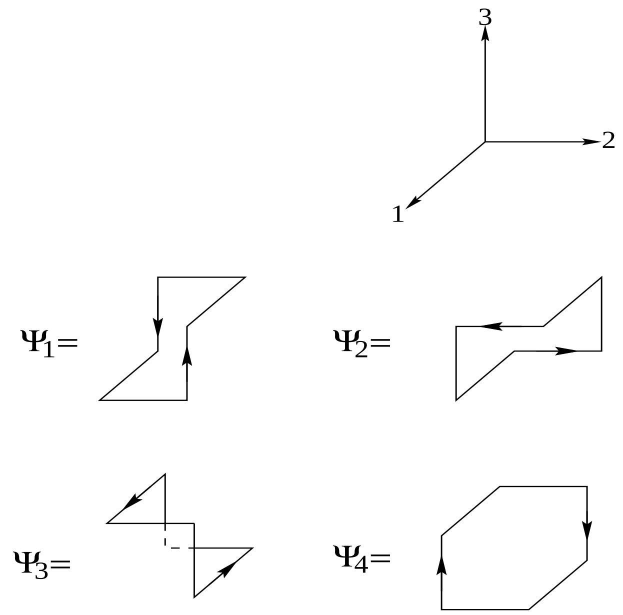

Abbildung 2.3: Gleiches Bild wie Abbildung 2.1 und Abbildung 2.2 für verdrehte 6-Link-Wilson-Loops (**T**).

Wie wir aber bereits im ersten Kapitel angedeutet haben, werden die Korrelationsamplituden zu einem gegebenen Spin J zusätzlich von Beiträgen höherer Spinfunktionen überlagert (siehe (1.26)). Somit gilt die Identifikation von $m_G(0^{++})$ in (2.9) mit einer Glueball-Masse des einzelnen 0^{++}-Zustands nur bedingt: Ohne Weiteres ist zu erwarten, dass $m_G(0^{++})$ in (2.9) die tatsächliche Glueball-Masse überschätzt.

Es ist daher erforderlich, eine Methode bereitzustellen, welche die zu messende Größe in (2.9), verglichen mit den störenden Überlagerungen höherer Spinzustände in (1.26), in den Vordergrund stellt. Ein Maß für die 'Zugriffsgenauigkeit' auf einen separaten Spin-Zustand bildet die Größe C in (2.9): Folgt man der Darstellung (1.26), so beschreibt sie den Überlappungsgrad des Grundzustandes im Kontinuum mit der Operatordarstellung auf dem Gitter. Als Wahrscheinlichkeit interpretiert, kann C nach der Quantenmechanik maximal 1 sein.

Die Problematik mit einem eventuell zu kleinen Überlappungsgrad und der damit verbundenen Fehleinschätzung der Glueball-Masse kann u.a. dadurch verstanden werden, dass die physikalische Größe der Gluebälle die Größe der Gitter-Operatoren ($\sim \mathcal{O}(a^2)$) übersteigt [45]. Einen vernünftigen Überlappungsgrad zu garantieren, wird umso problematischer je näher man am Kontinuumslimes ($a \to 0$) arbeitet.

Eine Möglichkeit dieses Problem zu beseitigen ist, die verwendeten Operatoren auf dem Gitter an die physikalische Größe der Gluebälle anzupassen. Hierfür ist eine Vielzahl von Methoden entwickelt worden [45, 46]. In dieser Arbeit verwenden wir die sogenannte *Smearing-Methode* [20, 47]. Sie ist eine häufig benutzte Technik, Beiträge der niederenergetischen Zustände hervorzuheben, indem die einzelnen Linkvariablen eines vorgegebenen Operators systematisch ausgedehnt werden. Dieses geschieht durch ein Ersetzungsverfahren der Link-Variablen durch diffus vergrößerte, sogenannte fat-Link-Variablen (kurz: fat-Links), welche iterativ aus den ursprünglichen Variablen erzeugt werden. Es ist dabei essenziell, dass das Verfahren zum einen die Eichinvarianz wahrt und zum anderen die Lokalität respektiert. Letztere Bedingung wird dadurch gewährleistet, dass nur solche Link-Variablen 'verschmiert' werden, die *nicht* in Richtung der Korrelation zeigen. Da das Verfahren einzelne Link-Variablen ersetzt, können die bereits eingeführten Operatoren übernommen werden. Im Folgenden werden wir dieses Verfahren im Detail erläutern.

2.2.2 Die Smearing-Methode

Einen geschmierten Operator erhält man, indem man die ursprünglichen Link-Variablen $U_i(s)$ in den Wilson-Loop-Operatoren durch ihre assoziierten fat-Link-Variablen $U_i^{(n)}(s)$ ersetzt. Diese $U_i^{(n)}(s)$ werden auf folgende Weise erzeugt: Starten wir bei $U_i^{(0)}(s) \equiv U_i(s)$, so definieren wir die $(n+1)$-te fat-Link-Variable $U^{(n+1)}(s) \in SU(3)$ iterativ durch:

$$U_i^{(n)}(s) \equiv \alpha U_i^{(n)}(s) + \sum_{\pm, j \neq i} U_{\pm j}^{(n)}(s) U_i^{(n)}(s \pm \hat{j}) U_{\pm j}^{(n)\dagger}(s + \hat{i}), \tag{2.10}$$

wobei $U_{-\mu}^{(n)}(s) \equiv U_\mu^{(n)\dagger}(s - \hat{\mu})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ als eine Art Geschwindigkeits-Parameter für das Smearing interpretiert werden kann. Der Summationsindex in (2.10) ist so zu wählen, dass künstlich erzeugte nicht-Lokalitäten vermieden werden.

Eine schematische Illustration eines fat-Links ist in Abbildung 2.4 gezeigt. Wir benutzen im Folgenden den n-ten geschmierten Operator als erweiterten Glueball-Operator, also z.B. einen Plaquette-Operator, der aus den vier fat-Link-Variablen $U_i^{(n)}(s)$ konstruiert wird.

Man kann zeigen, dass die mit dem n-ten geschmierten Link verbundenen Eichfelder einer Diffusionsgleichung genügen, welche als Lösung die Gauß-Verteilung besitzt [2]. Diese beschreibt die Ausdehnung des n-ten geschmierten fat-Links. Demnach spiegelt die Standardabweichung der Gauß-Verteilung die Größe des fat-Links wider, welcher wiederum unmittelbar mit der physikalischen Ausdehnung des Glueballs in Verbindung gesetzt werden kann.

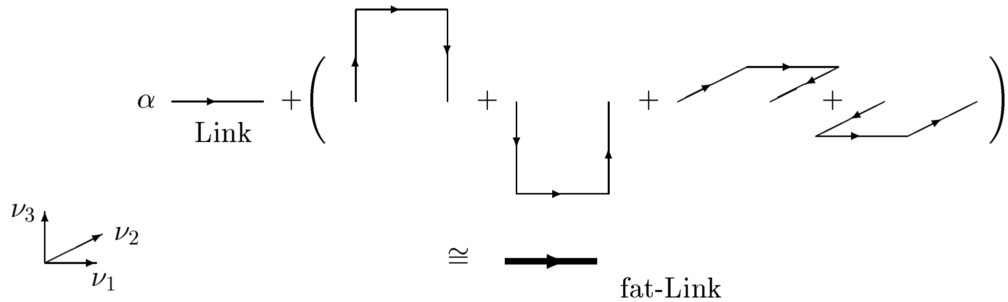

Abbildung 2.4: Illustration der Smearing-Methode. Die Abbildung zeigt in schematischer Weise den Aufbau eines fat-Links $U_i^{(n)}(s)$, wie er iterativ in (2.10) definiert ist. Notwendigerweise respektiert diese Konstruktion die Eichinvarianz und kann daher in den Operatoren an Stelle von den 'gewöhnlichen' Linkvariablen benutzt werden.

Temperatur T/T_c	Temperatur [MeV]	$a\sqrt{\sigma}$	Link-Größe $\varrho(T)$[fm]	$\rho(T)$[fm]
0.50	140	0.449	0.29	$\simeq 0.44$ *
0.75	210	0.131	0.19	$\simeq 0.41$ *
0.90	252	0.109	0.16	$\simeq 0.41$ *
1.5	420	0.064	0.10	$\simeq 0.39$ *

Tabelle 2.1: Die Link-Größe $\varrho(T)$ kann über die Beziehung (2.11) abgeschätzt werden. Wir betrachten hier die Werte für $\alpha = 2.0$ und $N_{\rm smear} = 16$. $\varrho(T)$ kann als physikalische Ausdehnung der Gluebälle interpretiert werden. Die mit einem Stern (*) gekennzeichneten Werte sind [2] entnommen. Bei dieser Abschätzung sind die Glueball-Ausdehnungen für alle Zustandsfunktionen (J^{PC}) von der gleichen Größenordnung. Auch für die räumlichen Korrelationen werden gleiche Werte gefunden.

Zwischen der Standardabweichung ϱ der Gauß-Verteilung und dem Smearing-Niveau ($N_{\rm smear}$ = Anzahl der endgültigen Iterationsschritte) gilt die Beziehung [2]:

$$\varrho \;=\; 2a\sqrt{\frac{N_{\rm smear}}{\alpha+4}}, \tag{2.11}$$

wobei a den Gitterabstand bezeichnet. Folgt man den Ausführungen in [2], so lässt sich mit dieser Relation die physikalische Ausdehnung des Glueballs abschätzen: Variiert man z.B. die Anzahl der Smearing-Iterationen (hier: $N_{\rm smear}$) und misst gleichzeitig den Überlappungsgrad C der Korrelation mit dem Grundzustand, so kann die Größe des Glueballs $\rho(T)$ bei *maximaler Überlappung* und gegebener Temperatur T durch ϱ abgeschätzt werden, $\rho(T) \simeq \varrho$.

In den folgenden Abschnitten erläutern wir kurz die verwendeten Bestimmungsmethoden der Glueball-Massen. Wir geben dabei an dieser Stelle noch keine Auswertung der Daten an - dies ist Gegenstand des dritten Kapitels - sondern bereiten hier die Auswertung der Datenmenge vor.

2.3 Auswertungstechniken

Im Rahmen dieser Arbeit werden Korrelationslängen bzw. Massen von Gluebällen berechnet, die z.B. als Koeffizienten auftreten, welche die exponentielle Unterdrückung von Korrelationsamplituden beschreiben. Wir greifen dabei auf drei ganz unterschiedliche, aber sich gegenseitig ergänzende, Methoden zurück. Mit diesem Vorgehen bezwecken wir vor allem, systematische Fehler zumindest qualitativ erfassen zu können.

Eine häufig angewendete Technik ist der χ^2*-Fit, in dem eine im Vorfeld definierte Parameterfunktion*, die sogenannte Fit-Funktion, *derart an einen gegebenen Datensatz angepasst wird, dass die Funktionswerte der Fit-Funktion im Mittel 'am wenigsten' vom Datensatz abweichen.* Durch diese Bedingung werden die freien Parameter der Funktion geschätzt und zwar in dem Sinne, dass den Parametern fehlerbehaftete numerische Werte zugeordnet werden. Im Falle von Glueball-Massen-Berechnungen sind dieses z.B. die Parameter C

und m aus (2.9). Die Parameter einer Fit-Funktion können im Allgemeinen umso besser bestimmt werden, je mehr Datenwerte zur Verfügung stehen.

Neben dieser Analyse-Methode verwenden wir auch die Extraktion der Glueball-Massen mittels der sogenannten *Maximum-Entropie-Methode* (kurz MEM) [48, 49]. In [48] wird die Maximum-Entropie-Methode besonders für die Glueball-Massen-Betrachtung empfohlen. *Mit dieser Methode berechnet man,* im Sinne der Bayes'schen Statistik, *die 'wahrscheinlichste Spektralfunktion'* zu einer gegebenen Korrelationsfunktion, *ohne dabei die Feinstruktur der Spektralfunktion vorzugeben.* Die Gitterdaten der Korrelation dienen hier unmittelbar als Input. Bei dieser Methode wird zwar nach dem Vorbild der Störungstheorie zunächst ein allgemeiner Ansatz der Spektralfunktion als Default-Startmodell vorgegeben, es ist jedoch gezeigt worden, dass mit dieser Methode die Feinstruktur der Spekralfunktion bis hinunter in den Niedrigenergiebereich reproduziert wird: Die MEM ist sensitiv gegenüber Überlagerungen höher angeregter Zustände. Gerade weil die MEM *keine* Annahmen über die Feinstruktur der Spektralfunktion als Input benötigt, eignet sich diese Methode für unsere Zwecke ganz besonders. Mit MEM steht uns ein Werkzeug zur Verfügung, mit dem wir zum einen die Grundzustands-Polmassen der Korrelationen auch im Kontext der Überlagerungszustände diskutieren können. Zum anderen eröffnet MEM uns die Möglichkeit, kollektive Anregungen, z.B. Glueball-artiges Screening, oberhalb und unterhalb von T_c zu untersuchen und das ohne Bezug auf Modellannahmen zu nehmen.

Ein weiteres Analyseverfahren der Korrelation G bietet die Einführung sogenannter *effektiver Massen.* Diese werden über das Verhältnis der Korrelation benachbarter Punkte berechnet. Neben der Tatsache, dass sich mit diesem Verfahren die Massen abschätzen lassen, gibt sie auch das allgemeine Verhalten der Korrelationsfunktion anschaulich wieder.

2.3.1 Die Best-Fit-Analyse

Das 'Anfitten' einer Parameterfunktion an einen Datensatz mittels der χ^2-Methode setzt die Kenntnis des funktionalen Zusammenhangs der Datenwerte voraus, die gegen die Abszisse aufgetragen sind. In unserem Fall ist dieser auch tatsächlich bekannt: $G(t)/G(0) \sim Ce^{-m_G t}$. Prinzipiell eignet sich also eine Fit-Funktion der Form $f(a, b; t) = ae^{-bt}$, wobei a und b die freien Parameter und t den Abszissenwert bezeichnen. Sie beschreiben der Vorgabe (2.9) entsprechend, den Überlappungsgrad C und die Masse m_G.

Da sich in den Gitterdaten die periodische Randbedingung abzeichnet, lassen sich die Daten auf einem periodisch geschlossenen Gitter durch eine hyperbolische Funktion beschreiben. Wir benutzen als Parameterfunktion $f(m_G, C, t)$ die hyperbolische 'Cosinus'-Funktion

$$\frac{G(t)}{G(0)} \simeq f(m_G, C; t) \equiv C\left(e^{-m_G t a} + e^{-m_G (N_\tau - t)a}\right). \tag{2.12}$$

Wir haben in (2.12) bereits die Parameter der Fit-Funktion entsprechend den physikalischen Größen 'Masse' (m_G) und 'Overlap' (C) bezeichnet.

Die mittlere Abweichung ($\sim \chi^2$) der Fit-Funktion von den Daten kann ein Maß für die Güte der Reproduzierbarkeit der Daten angeben. Dieses Maß wird dabei auf die Anzahl der Daten und Parameter ($\sim N_{\mathrm{DF}}$, Anzahl der Freiheitsgrade) normiert: χ^2/N_{DF} (engl.:

'reduced χ^2'). Eine mittlere Abweichung $\chi^2 \simeq 1$ entspricht einem vernünftigen Fit. Wir geben daher bei der Fitanalyse stets diesen Wert mit an.

Darüber hinaus ist im Rahmen von Fit-Analysen eine Minimierung des systematischen Fehlers besonders wichtig, z.B. variieren die Parameter mit der Festlegung der Intervalle auf denen sie bestimmt werden. Methodisch gehen wir daher folgendermaßen vor: Wir variieren das Fit-Intervall derart, dass wir bei festgehaltenem langreichweitigen Korrelationsverhalten den Einfluss der kurzreichweitigen Korrelationsamplitude auf die Variation der Parameter untersuchen. Wir verändern also im hyperbolischen Fit die periodischen äußeren Grenzen und verwenden folgende Notation für *symmetrische Intervalle*:

$$R_j \equiv j = \left[j\sqrt{\sigma}\,,\ (N_\tau - j)\sqrt{\sigma} \right] . \tag{2.13}$$

Analog definieren wir natürlich die symmetrischen Intervalle für räumliche Korrelationen ($N_\tau \to N_z$). Für jede Variation der Intervalle bestimmen wir C, die Masse m_G und die Güte des Fits in Form von χ^2/N_{DF}. Da das langreichweitige Verhalten der Korrelation im Wesentlichen durch die Grundzustandskorrelation bestimmt wird, und dieses Verhalten in unserem Verfahren in jeder Variation gleichermaßen berücksichtigt wird, erwarten wir für einige Intervalle ähnliche Massen- und C-Werte zu finden. Beobachten wir also ein stabiles, 'triviales' Verhalten der Parameterwerte als Funktion der äußeren symmetrischen[1] Fit-Grenze, dann ist dieses so zu deuten, dass die kurzreichweitigen Überlappungen der angeregten Zustände vernachlässigbar unterdrückt sind. Wäre das nicht der Fall, so würde sich ein nicht-triviales Verhalten der Fit-Massen ergeben. Selbstverständlich müssen gleichzeitig auch C und χ^2 vernünftige Werte annehmen.

Ein Beispiel:

Zur Illustration der Best-Fit-Analyse haben wir in Abbildung 2.5 die Korrelation $\mathcal{S}_{F1}$ von Zustandsfunktionen mit $J^{PC} = 0^{++}$ dargestellt (die zugehörigen Daten haben wir in Tabelle 2.2 exemplarisch dem Anhang B entnommen). Die linke Hälfte der Korrelation zeigt den exponentiellen Abfall $\sim e^{-m_G t}$ und die rechte Hälfte den exponentiellen Anstieg. Beides zusammen ergibt den Ansatz (2.12). Zusätzlich zu den Gitterdaten der Korrelation haben wir die Parameter-Fits mit den freien Parametern m_G und C eingezeichnet. Die farbigen Linien zeigen die symmetrischen Fit-Intervalle entsprechend (2.13) an. Die Parameter, einschließlich der Güte χ^2/N_{DF}, sind in Tabelle B.1 zusammengestellt. Der Tabelle folgend, finden wir relativ konstante Massenwerte für $j = 2, 3, 4$. Wir folgern daraus, dass die Beiträge der höheren Spinzustände in der Korrelation $\mathcal{S}_{F1}$ ab $j \simeq 2, 3, ...$ bereits unterdrückt werden und wir daher eine recht gute Darstellung des 0^{++}-Zustandes sehen. Hierfür sprechen zum einen die Werte von C, die unseren Ausführungen nach einen Überlappungsgrad messen ($C \simeq 0.6$ für $j \simeq 1$). Zum anderen erkennen wir ein Abfallen der Massenwerte von $m_{\mathrm{hyp}} = 4.73$ bei $j = 1$ auf einen Minimumwert $m_{\mathrm{hyp}} = 4.48$ bei

[1] Prinzipiell denkbar wäre natürlich auch asymmetrische Fitintervalle in unsere Analyse einzubeziehen. Aber eventuell stabile Fits auf asymmetrischen Intervallen ließen sich nicht weiter physikalisch interpretieren. Darüber hinaus erwarten wir auch nicht, dass sie zu kleinen χ^2 führen, außer wenn das asymmetrische Intervall von einem symmetrischen Intervall (auf dem bereits die Grundzustandsfunktion genügend dominiert) umschlossen wird. Daher haben wir asymmetrische Intervalle *nicht* berücksichtigt.

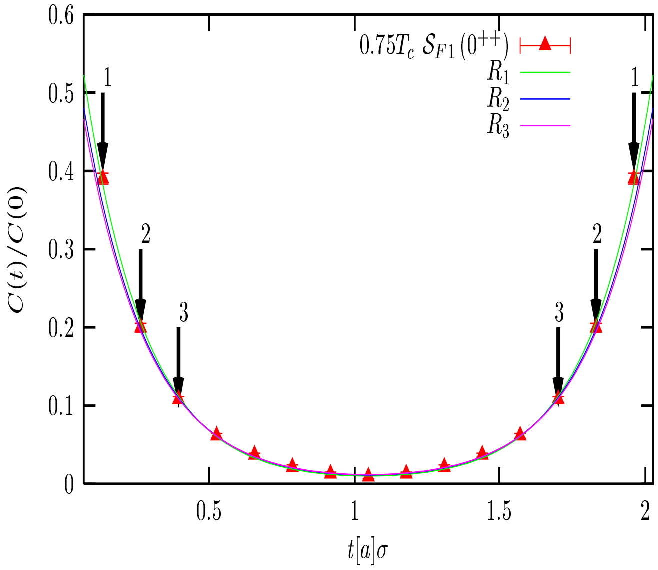

Abbildung 2.5: Beispiel eines hyperbolischen Fits: Gezeigt werden Resultate für die Operatorkorrelation $\mathcal{S}_{F1}$ (rote Dreiecke) bei $T = 0.75T_c$ und unterschiedlichen Fit-Intervallen ($N_{\text{smear}} = 16$). Wegen der Periodizität auf dem Gitter ist ein hyperbolischer funktionaler Zusammenhang begründet. Die grüne Linie beschreibt eine χ^2-Anpassung von (2.12) auf dem symmetrischen Intervall $[\sqrt{\sigma} : 15\sqrt{\sigma}]$ ($j = 1$). Die blaue ($j = 2$) und die lila ($j = 3$) Linie verwenden zur Angleichung der Fit-Parameter weiter eingeschränkte Intervalle $[2\sqrt{\sigma} : 14\sqrt{\sigma}]$ bzw. $[3\sqrt{\sigma} : 13\sqrt{\sigma}]$. (Dass das Minimum der Korrelation hier nahe bei 1 liegt, ist ohne Bedeutung. Die Minima liegen in der hyperbolischen Darstellung bei $[(N_\tau + 1)/2]a\sqrt{\sigma}$).

$j = 3$. Wir erklären uns dieses Verhalten dadurch, dass bei $j = 1$ die Überlagerungen höherer Spinzustände zu einer Überschätzung des Massenwerts für 0^{++} führen. Bei größeren Korrelationsabständen sterben diese aus, was zu einer Reduktion von m_{hyp} führt. Der Minimalwert bei $j = 3$ zeigt uns also an, dass hier die Masse des 0^{++}-Zustands am besten geschätzt wird. Das Ergebnis unserer Analyse in Tabelle 2.2 setzt sich aus dem statistischen Mittel der Ergebnisse für $j = 2, 3$ und 4 zusammen. Sie sind daher durch Fettdruck hervorgehoben.

$\mathcal{S}_{F1}$	$T/T_c : 0.75 \quad \# : 19650$		
R_j	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	4.73(6)	0.712(12)	0.95
2	**4.52(5)**	0.646(14)	0.34
3	**4.48(9)**	0.633(32)	0.40
4	**4.6(1)**	0.690(57)	0.37
Resultat	4.53(9)		

Tabelle 2.2: Zur Erläuterung des Beispiels geben wir hier die in Anhang B Abschnitt B.1 tabellierten Daten für den χ^2-Fit für die Korrelation $\mathcal{S}_{F1}$ an.

2.3.2 Prinzipien der Maximum-Entropie-Methode (MEM)

Betrachten wir als Beispiel[2] eine zeitliche Korrelationsfunktion $G(t) \equiv \int dx\; G(t, \mathbf{x})$ in der in Kapitel 1 eingeführten Confinement-Phase ($T < T_c$) (siehe z.B. (1.9)). Das Ziel der MEM ist nun, aus der Korrelationsfunktion $G(t)$ auf die wahrscheinlichste Spektralfunktion $A(\omega)$ zu schließen, *ohne* dabei auf Annahmen über die spektrale Funktion zurückzugreifen. Es ist daher zunächst notwendig, den Begriff 'wahrscheinlichste Spektralfunktion' zu definieren. Im Falle der MEM bedient man sich des Theorems von Bayes über bedingte Wahrscheinlichkeiten: Bezeichnen wir mit $p[x|y]$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis x unter der Bedingung (Vorkenntnis) y, so erhält man mit MEM die 'wahrscheinlichste Spektralfunktion' $A(\omega)$ unter der Bedingung, dass $G(t)$ die Korrelationsfunktion ist. Bezeichnen wir eventuelle weitere Vorbedingunen mit H, so kann $A(\omega)$ in Form von

$$P[A|GH] \sim P[G|AH]P[A|H] \sim e^{\alpha S - L}, \tag{2.14}$$

mit $P[G|AH] \sim \exp(-L)$ und $P[A|H] \sim \exp(\alpha S)$ ausgedrückt werden. In dieser Darstellung beziehen wir uns auf die Likelihood-Funktion L, welche als χ^2-verteilt angesetzt wird:

$$L = \frac{1}{2}\chi^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(F(t_i) - G(t_i))C^{-1}_{ij}(F(t_j) - G(t_j)), \tag{2.15}$$

Dabei bezeichnet

$$C_{ij} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{m=1}^{N}\left[G^m(t_i) - G(t_i)\right]\left[G^m(t_j) - G(t_j)\right], \tag{2.16}$$

die symmetrische Kovarianzmatrix. $F(t)$ kann als Fit-Funktion an den Korrelator $G(t)$ interpretiert werden, die durch Minimierung von $L = \frac{1}{2}\chi^2$ optimiert wird. Die Fit-Funktion setzt sich nach 1.10 aus einem vordefinierten Integral-Kern $K(\omega, t)$ und der Spektralfunktion $A(\omega)$ zusammen: $F(t) \equiv \int d\omega\; K(t, \omega)A(\omega)$. Interpretiert man die Spektralfunktion $A(\omega)$ als eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche aber in unserem Fall nicht normierbar ist[3], so kann doch die Entropie S in (2.14) nach dem Vorbild der Informationstheorie [50] parametrisiert werden: Für eine nicht normierte Wahrscheinlichkeitsfunktion $A(\omega)$ kann die Entropie durch die Shannon-Jaynes-Entropie [50, 51] formuliert werden:

$$S = \int d\omega\; \left[A(\omega) - m(\omega) - A(\omega)\log\left(\frac{A(\omega)}{m(\omega)}\right)\right]. \tag{2.17}$$

$m(\omega)$ bezeichnet das sogenannte *Defaultmodell*, es ist der erste Ansatz für die Spektralfunktion, d.h. Konstante + störungstheoretisches Verhalten im Limes $\omega \to \infty$. Zum Beispiel

[2] Wir beziehen uns bei der Vorstellung der wesentlichen Prinzipien der MEM auf *zeitliche Korrelationen* u.a. deshalb, weil für zeitliche Korrelationen die mit der MEM verbundenen Begriffe wie z.B. Spektralfunktion und Polmassen klar definiert sind. In dieser Arbeit analysieren wir zwar auch räumliche Korrelationen und kollektive Anregungen sowohl oberhalb als auch unterhalb der kritischen Temperatur, behandeln jedoch in diesem Abschnitt lediglich ihre Interpretationsmöglichkeiten in Bezug auf die MEM-Resultate.

[3] Im Prinzip kann man die Korrelationsfunktion mit einer Zahl multiplizieren, die sich dann als Faktor in der Spektralfunktion auswirkt, so dass der Flächeninhalt unter dem Peak variiert. So könnte man diese Fläche z.B. auf 1 normieren.

wird $A(\omega) \equiv \rho(\omega)\omega^2$ angesetzt. Weil wir in dieser Arbeit nur Grundzustände betrachten und mit geschmierten Operatoren arbeiten, um die niederenergetischen Anteile der Spektralfunktion hervorzuheben, wirkt sich eine Veränderung des Defaultmodells nicht stark aus [52]. Eine Variation bewirkt nur eine leichte Verschiebung des Peakmaximums nach unten oder oben. Die maximale Wahrscheinlichkeit $P[A, GH]$ in (2.14) ist gegeben, wenn $e^{-L+\alpha S}$ maximal ist, oder äquivalent dazu, wenn $-L+\alpha S$ maximal wird. Die Berechnung dieser Bedingung erfolgt mit Hilfe des Bryan-Algorithmus [53].

Ein Beispiel:

In Abbildung 2.6 zeigen wir Resultate der Maximum-Entropie-Methode für die zeitlichen Korrelationsfunktionen $\mathcal{S}_{F1}$ und $\mathcal{S}_{F3}$ bei $T = 0.75T_c$. Abgebildet sind die Spektralfunktionen $A(\omega)$ beider Korrelationsfunktionen, wobei wir bereits durch das Verhalten der Spektralfunktion bei hohen Energien $\sim \omega^2$ dividiert haben: $A(\omega)/\omega^2 \simeq$ konstant für $\omega \to \infty$. Die Skalierung der x-Achse ist in dimensionslosen Größen $\omega/\sqrt{\sigma}$ gewählt. Die Position des ersten lokalen Maximums der Spektralfunktion liefert die Glueball-Masse. Die Platzierung der Maxima wird am unteren Bildrand angezeigt (siehe fehlerbehaftete Punkte).

Neben der Lage ist auch die Schärfe eines Peaks einer Spektralfunktion aussagekräftig: Je schärfer der Peak ausgeprägt ist, umso genauer lässt sich ein Massenwert bestimmen. Darüber hinaus sagt uns die Schärfe eines Peaks wie deutlich sich eine Frequenz ω von den übrigen hervorhebt. Oder anders ausgedrückt: Die Schärfe eines Peaks und die Anzahl der Peaks in einer Spektralfunktion zeigen uns an, ob eine Operatorkorrelation neben dem

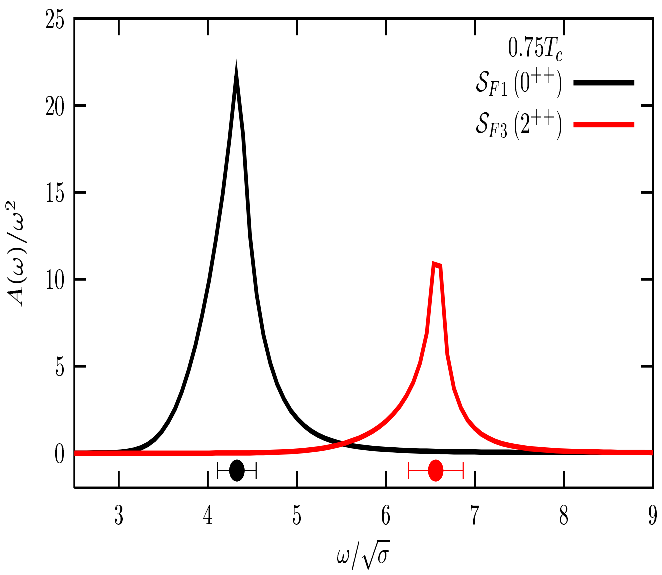

Abbildung 2.6: Spektralfunktion (mit $N_{\text{smear}} = 16$) aus der Maximum-Entropie-Methode für die Korrelationen $\mathcal{S}_{F1}$ und $\mathcal{S}_{F3}$ bei $T = 0.75T_c$. Gewöhnlich wird die Spektralfunktion durch ω^2 geteilt, um das niederenergetische Spektrum hervorzuheben ($A(\omega) \sim \omega^2$ für $\omega \to \infty$). Die Lage des Peaks dagegen bestimmt die Masse der Glueball-Zustände. Unterhalb der Abszisse sind die Fehler für die Position der Peakmaxima dargestellt, die wir mit Hilfe der Jackknife-Methode berechnet haben.

Grundzustand, zusätzlich von höheren Zuständen überlagert wird. In diesem Sinne ist die MEM-Analyse ausgezeichnet: MEM ist sensitiv auf dem gesamten Energiespektrum. Unsere Beispiele (Abbildung 2.6) zeigen also, dass die Operatorkorrelationen $\mathcal{S}_{F1}$ und $\mathcal{S}_{F3}$ die Grundzustandsenergien $m(0^{++})$ und $m(2^{++})$ deutlich wiedergeben und eventuelle Überlagerungen höherer Zustände unterdrückt sind. Diese Eigenschaft spiegelt sich in der Größenordnung des Massenfehlers wider und führt im Falle beider Massen auf relativ kleine Fehler. Wir werden im folgenden Kapitel zeigen, dass diese Eigenschaft nicht zuletzt eine Eigenschaft ist, welche durch das Smearingverfahren stark beeinflusst wird.

Die in Abbildung 2.6 unter den Spektralfunktionen angegebenen Fehler haben wir mit Hilfe der Jackknife-Methode bestimmt. Hierfür haben wir die Korrelationsfunktionsdaten in zehn gleichlange Blöcke geteilt und unter Weglassung jeweils eines Blocks zehn Spektralfunktionen ausgerechnet. Das erste lokale Maximum der zehn Funktionen am Punkte $\bar{T}_i = \omega_{\max}(i)/\sqrt{\sigma}; \quad (i \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\})$ liefert uns mit den Formeln aus Anhang A eine verbesserte Schätzung für die Glueball-Masse des Grundzustands.

Die MEM-Analyse lässt sich auch auf räumliche Korrelationen anwenden, und erscheint hier besonders wertvoll, da räumliche Korrelationen in der Regel kollektive Anregungen beschreiben. Lediglich die Begrifflichkeiten müssen geklärt werden: Da eine Spektralfunktion im Sinne von kollektiven Anregungen gar nicht existiert, erscheint es sinnvoll, hier von einer 'spektralen Darstellung' von 'inversen Korrelationslängen' zu sprechen. Die inverse Korrelationslänge $\gamma^{-1}(J^{PC})$ kann dann als Masse, z.B. Screening-Masse, interpretiert werden.

2.3.3 Diskussion effektiver Massen

In diesem Abschnitt erläutern wir die Interpretationsmöglichkeiten einer Korrelationsfunktion in Form der effektiven Massen. Diese werden über das Verhältnis der Korrelationen benachbarter Korrelationswerte $G(t+1)$ und $G(t)$ definiert. Geht man von einem exponentiellen Abfall der Korrelationsfunktion aus, so wird durch das Verhältnis $G(t+1)/G(t) \simeq e^{-m_{\text{eff}}}$ eine effektive Masse m_{eff} definiert. Mit Einbeziehung der periodischen Randbedingungen auf dem Gitter, führt die Betrachtung der Verhältnisse auf einen hyperbolischen Zusammenhang. Im Falle von zeitlichen Korrelationen $G(t)$ erhält man z.B.

$$\frac{G(t+1)}{G(t)} = \frac{\cosh\left(a\left(t+1-\frac{N_\tau}{2}\right)m_{\text{eff}}(t)\right)}{\cosh\left(a\left(t-\frac{N_\tau}{2}\right)m_{\text{eff}}(t)\right)}, \tag{2.18}$$

wobei t in Einheiten der Gitterkonstante a zu verstehen ist. Die Darstellung (2.18) *definiert* die effektive Masse $m_{\text{eff}}(t)$ bei einem gegebenem Verhältnis $G(t+1)/G(t)$ als Input. Bei räumlichen Korrelationen ist N_τ in (2.18) durch N_z, $m_{\text{eff}}(t)$ durch $\gamma_{\text{eff}}^{-1}(t)$ und t durch z zu ersetzen. Die Möglichkeiten, von dem Verhalten von $m_{\text{eff}}(t)$ auf das Verhalten der Korrelation $G(t)$ zu schließen, sind vielfältig und lassen sich am einfachsten an einem Beispiel erläutern:

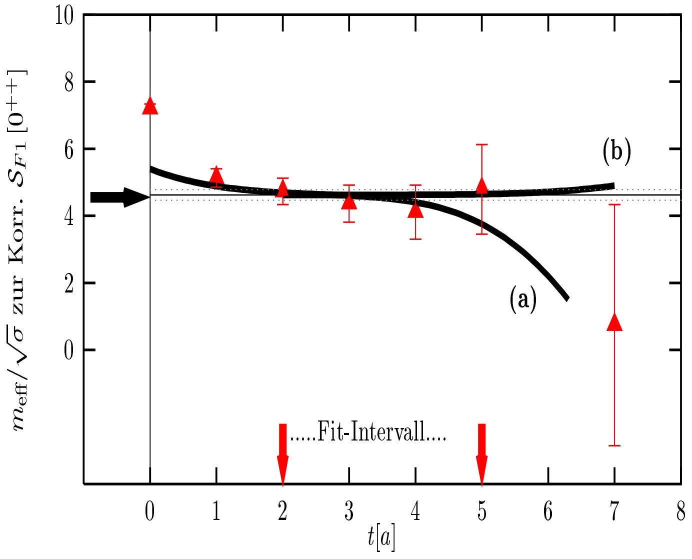

Abbildung 2.7: Zur Illustration des effektiv-Massenplots. Die roten Dreiecke beschreiben die Lösung der Definitionsgleichung (2.18) für die Korrelation $\mathcal{S}_{F1}$ des 0^{++}-Zustandes. Die waagerechten Linien markieren das Plateau in m_{eff} (siehe schwarzer Pfeil links im Bild). Die untere und obere Plateau-Grenze ist jeweils durch einen roten Pfeil auf der x-Achse angedeutet. Dieser Bereich ist gleichzeitig das Fit-Intervall für einen Fit mit konstanter Parameterfunktion. Die resultierende Fehler-Analyse ist durch die obere und untere gestrichelte Linie angezeigt. Wir haben zusätzlich zu den Daten mögliche fiktive Verlaufskurven der effektiven Massen eingezeichnet (siehe Linien **(a)** und **(b)**. Nähere Erläuterungen dazu werden im Text gegeben.

Ein Beispiel:

Für die Operatorkorrelation $\mathcal{S}_{F1}$ haben wir die effektiven Massen m_{eff} in Abbildung 2.7 als Funktion der Zeit $t[a]$ eingezeichnet. Sie sind in dieser Abbildung durch rote Dreiecke gezeigt. Wie man der Abbildung entnehmen kann, bilden die effektiven Massen auf einem Bereich $t[a] \in [1,5]$ ein Plateau (mit relativ konstanten Werten). Wir definieren als Schätzwert für die Polmasse $m(\mathcal{S}_{F1}(0^{++}))$ gerade die Plateau-Werte der effektiven Massen m_{eff}. Dieser kann z.B. mittels einer χ^2-Fit-Analyse der Plateau-Werte durch eine konstante Parameterfunktion ($f(m;t) \equiv m$) bestimmt werden. Das Fit-Intervall richtet sich dabei nach der Ausprägung des Plateaus und wird in Abbildung 2.7 mit Pfeilen am unteren Bildrand angezeigt. Auf diese Weise wird auch der Fehler der Massenschätzung bewertet. Er wird durch die Fehleranalyse des Fit-Vorganges bestimmt. Neben der Möglichkeit, dass sich ein Plateau im effektiven Massenplot (kurz EMP) ausbildet (angedeutet durch **(b)**), kann sich auch ein Verhalten zeigen, wie durch die schwarze Linie **(a)** schemenhaft dargestellt ist: Die effektive Masse scheint zunächst einen Plateauwert anzustreben, fällt aber doch für große t weiter ab. Ein solches Verhalten zeigt an, dass die Korrelation nicht unmittelbar exponentiell unterdrückt wird, sondern zunächst thermale oder auch unphysikalische Effekte dazu führen, dass der exponentielle Abfall der Korrelation gebremst wird. Dieser Verlauf kann u.a. dadurch hervorgerufen werden, dass die Korrelation neben der

Grundzustandsmasse auch die Masse höher angeregter Zustände misst.

Wir merken also, dass die Ausbildung eines Plateaus im Bild der effektiven Massen andeutet, dass in diesem Bereich die Korrelation im Wesentlichen durch den Beitrag des Grundzustandes bestimmt wird. Würden nämlich mehrere Zustände zur Korrelation beitragen, so würde man eine komplexere t-Abhängigkeit der effektiven Masse erwarten. Aus diesem Grund wird häufig das Plateau im Bild der effektiven Masse dazu verwendet, das Fit-Intervall für eine Best-Fit-Analyse zu bestimmen (siehe z.B. [2]). Im Rahmen dieser Arbeit weichen wir aber von diesem Verfahren ab: Da wir die Smearing-Methode anwenden, erwarten wir, dass der Überlappungsgrad mit dem Grundzustand bereits maximiert oder aber zumindest verbessert ist und der Bereich maximaler Überlappung in der Best-Fit-Analyse durch Variation der Fit-Intervalle selbständig bestimmt wird. Wir betrachten daher zunächst beide Methoden, die Best-Fit-Analyse und die Untersuchung durch effektive Massen, unabhängig voneinander und extrahieren auch die Massen unabhängig voneinander. Schließlich hängt die Massenbestimmung mittels effektiver Massen auch von der Festlegung der Plateaugrenzen ab. Dabei ist klar, dass der Fehler bei dieser Analysemethode *systematisch* unterschätzt wird und der Wert dagegen überschätzt wird.

2.4 Über das weitere Vorgehen

Wie wir im einführenden Kapitel diskutiert haben, ist der Temperaturbereich nahe T_c besonders interessant, denn in diesem Sektor wird das Temperaturverhalten der Glueball-Massen physikalisch relevant, z.B. als Input für diverse Modelle. Dies bezieht sich auf Temperaturbereiche sowohl oberhalb als auch unterhalb der kritischen Temperatur T_c. Neben der Polmasse ist auch das Studium der räumlichen Korrelationslänge für ein besseres Verständnis der thermalen Wechselwirkung zwischen gebundenen Glueballen und den thermischen Gluonen im Wärmebad interessant.

Für ein Studium einer Eichtheorie auf dem Gitter nahe bei T_c ist es notwendig, zum einen ein möglichst großes räumliches Gittervolumen N_σ^3 bereitzustellen, um Gitterartefakte bei endlichem Volumen zumindest zu reduzieren, und zum anderen eine entsprechend große zeitliche Gitterausdehnung N_τ zu gewährleisten, da für die Polmassen gerade zeitliche Korrelationen berechnet werden. Die Anzahl der Gitterpunkte N_τ ist unmit-

Temperatur T/T_c	Temperatur [MeV]	β	$a\sqrt{\sigma}$	a[fm]
0.50$\star$	140	4.0000	0.449	0.089
0.75	210	4.8393	0.131	0.059
0.90	252	4.9898	0.109	0.050
1.50	420	5.4261	0.064	0.030

Tabelle 2.3: Die Parameter der MC-Simulationen für ein $32^3 \times 16$-Gitter. Die kritische Temperatur ist auf $T \simeq 280$MeV angesetzt. Die Temperaturskala wird durch $a\sqrt{\sigma}$ festgelegt (Siehe dazu auch [54]). Die Temperatur $T = 0.50T_c$ wird in den weiteren Ausführungen nicht weiter berücksichtigt und ist daher mit einem $\star$ versehen. a[fm] haben wir über die Formel $a = \frac{T_c}{T} \cdot \frac{5}{N_\tau \cdot 7}$fm berechnet.

Temperatur $/T_c$	β	$N_{\text{smear}} = 0$	$N_{\text{smear}} = 8$	$N_{\text{smear}} = 16$
0.50$\star$	4.0000		18300	15000
0.75	4.8393	10400	14100	19650
0.90	4.9898	14800	3600	29700
1.50	5.4261		4800	20400

Tabelle 2.4: Anzahl der berechneten Konfigurationen dargestellt in Abhängigkeit vom Smearing-Niveau N_{smear} und Temperatur. Bei dem Smearingverfahren haben wir den Geschwindigkeitsparameter bei allen Temperaturen und N_{smear} auf 1/2 festgesetzt ($\alpha = 0.5$). Die Temperatur $T = 0.50T_c$ wird in den weiteren Ausführungen nicht weiter berücksichtigt und ist daher mit einem $\star$ versehen.

telbar mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Korrelationswerte verbunden. Um beiden Kriterien gerecht zu werden, verwenden wir in dieser Arbeit ein hyperkubisches Gitter mit $32^3 \times 16$ Gitterpunkten. Unsere Simulationsparameter sind in Tabelle 2.3 zusammengefasst. Die MC-Berechnungen basieren auf der Symanzik-verbesserten Wirkung (1.15) der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie. Die Gitterkopplungen $\beta \equiv 6/g^2$ sind so gewählt, dass $0.5 \leq T/T_c \leq 1.5$ [54]. Die Simulationen wurden auf einem QUADRICS-Parallelrechner mit 256 Prozessoren (sogenannter QH2-Rechner) implementiert. Zwischen jede Messung haben wir einen Heatbath-Update, gefolgt von vier Overrelaxation-Schritten [56] geschaltet, um unerwünschte Korrelationen zwischen den Updates zu vermeiden. Die Anzahl der ausgewerteten Konfigurationen schwankt je nach Temperatur und Smearing-Niveau zwischen 15000 und 30000 (siehe Tabelle 2.4). Ziel dieser Arbeit ist es, Glueball-Zustände bis einschließlich $J = 3$ auf ihre thermischen Eigenschaften hin zu untersuchen. Dieses Vorhaben ist aber auch an eine große Anzahl von Korrelationsfunktionen gebunden. Damit die zu verwaltende Datenmenge die Grenzen der Speicherkapazitäten auf dem Rechner (hier: QH2) nicht sprengen, sind wir gezwungen, eine Auswahl der Operatoren zu treffen. Wir beschränken daher im Folgenden unsere Betrachtungen jeweils auf die Realteile der Operatorkombinationen[4].

Damit die Präsentation und Diskussion der Ergebnisse im Kapitel 3 möglichst übersichtlich gestaltet werden kann, beginnen wir im Vorfeld bereits mit einer ersten Diskussion der Operatoren. Wir diskutieren zunächst die Operatorkorrelationen der Zustände im Einzelnen und tragen dann unsere Ergebnisse zusammen. Dieses Vorgehen hat zum einen den Vorteil, dass eventuell 'schlecht' beitragende Operatoren herausgefiltert werden können und dann nicht mehr in der Massenbestimmung der Glueball-Zustände berücksichtigt werden. Zum anderen gewinnen wir eine bessere Kontrolle über systematische Fehlerquellen. Denn im Rahmen dieses Vorgehens diskutieren wir die Auswertungstechniken unabhängig

[4] Tatsächlich haben wir mit Beginn der Implementierung der Glueball-Operatoren auf dem Rechner zunächst auch die Imaginärteile (C-Parität $= -1$) der Operatoren berücksichtigt. Es zeigte sich jedoch bei diesem Vorgehen eine deutliche Reduktion des Korrelationssignals verglichen mit den Realteil-Korrelationen (C-Parität $= +1$). Diese Eigenschaft scheint zunächst das Vernachlässigen der *ansonsten gleichwertigen* Imaginärteil-Korrelationen zu rechtfertigen. Eine Diskussion der Imaginärteil-Korrelationen wäre - wenn auch nur beispielhaft geführt - für ein Verständnis der Wirkungsweise der Operatoren auf dem Gitter sinnvoll. Diese kann leider *nicht* mehr Gegenstand dieser Arbeit sein. Trotz allem verbleibt eine enorme Menge an Korrelationsfunktionen.

voneinander.
Wir legen dabei die folgenden *Plausibilitätskriterien* zugrunde:

Folgende Kriterien für die 2-Punkt-Korrelation in den Massenbestimmungen weisen auf eine befriedigende Überlappung eines Operators mit dem Grundzustand hin:

- Die Konstante C und χ^2/N_{DF} im χ^2-Fit nahe bei eins ($\simeq 1$) liegen.
- Die effektive Masse m_{eff} ein ausgeprägtes Plateau ausbildet.
- Die inverse Korrelationslänge bzw. Masse weist besonders kleine Werte auf (verglichen mit anderen Operatoren für den identischen Zustand).
- Die Korrelation führt im Rahmen der MEM zu einem ausgeprägten und scharf lokalisierten Peak in der Spektraldarstellung.

Korrelationen, für die ein - oder möglichst mehrere - Kriterien zutreffen, erscheinen in diesem Sinne als 'plausible' Darstellungen der entsprechenden Zustände. Darüber hinaus sollten Resultate der verschiedenen Auswertungstechniken nicht deutlich voneinander abweichen.

2.5 Erste Diskussion der Gitter-Operatoren

Wir beginnen im Folgenden mit einer ersten Diskussion der Glueball-Operatoren, wie wir sie in Abschnitt 2.2 eingeführt und bezeichnet haben. Zunächst einmal ist es notwendig, die Operatoren auf den unterschiedlichen Smearing-Niveaus N_{smear} zu analysieren und hierauf aufbauend das für unsere Operatoren 'beste' Smearing festzuhalten. Bei dieser Diskussion richten wir uns hauptsächlich danach, einen möglichst großen Overlap der Korrelationen mit den entsprechenden Grundzuständen zu erreichen. Auch das Kriterium der Wirtschaftlichkeit, d.h. in unserem Fall die Frage nach der eventuell zu erwartenden Rechenzeit, wird berücksichtigt.
Anschließend betrachten wir separat die einzelnen Beiträge der Operatoren zu den Glueball-Massen. Wir unterscheiden hier die Diskussion der Polmassen von der Analyse der räumlichen Korrelationslängen. Abschließend diskutieren wir kurz den Umgang mit statistischen Fehlern und systematischen Fehlerquellen.

2.5.1 Smearing-Methode und physikalische Operatorgröße

Die Smearing-Methode wurde in thermaler $SU(3)$ und mit Bezug auf zeitliche Glueball-Korrelationen (Polmassen) bereits in [2] ausführlich diskutiert. In diesen Arbeiten sind ausschließlich Wilson-Loops der Länge 4 eingesetzt worden, also Operatoren mit relativ kleiner Gitterausdehnung $\mathcal{O}(a)$.

Im Falle von Wilson-Loops der Länge 4 werden 30 bis 40 Smearing-Iterationsschritte vorgeschlagen. Da wir jedoch zusätzlich Wilson-Loops der Länge 6 in unsere Studien einbeziehen, ist aufgrund der Operatorausdehnung auf dem Gitter zu erwarten, dass eine geringere Anzahl an Iterationsschritten bereits ausreichend ist, um einen zufriedenstellenden Overlap C mit den Grundzuständen zu erzeugen. Leider ist der Effekt der Smearing-Methode aufgrund von (2.10) für Wilson-Loops der Länge 6 nicht ohne Weiteres abzuschätzen und zumindest vom naiven Blickpunkt aus betrachtet, eventuell von der Form des Wilson-Loops abhängig. Allerdings lässt bereits die größere Ausdehnung der Operatoren (Wilson-Loops der Länge 6) darauf schließen, dass schon eine kleinere Anzahl an Smearing-Iterationsschritten N_{smear} einen sichtbaren Effekt mit sich bringt. In Tabelle 2.4 haben wir unsere Simulationsparameter zusammengefasst. Wir haben das Verhalten der Operatoren in Bezug auf eine Verbesserung des Grundzustands-Overlaps auf drei Smearing-Niveaus mit anwachsendem $N_{\text{smear}} = 0, 8, 16$ untersucht. Beispielhaft zeigen wir hier die Resultate für Wilson-Loops der Länge 4 und der Länge 6 bei einer Temperatur ($T = 0.75T_c$) und für Operatorkorrelationen zu 0^{++}- und 2^{++}-Glueball-Zustände. Unsere Ergebnisse sind also unmittelbar mit denen in [2] vergleichbar. Ganz analog zu [2] basiert unsere Untersuchung auf hyperbolischen Fits der Korrelationsdaten mit dem Ansatz (2.12). Um ein Maß für die Stabilität der Fitresultate zu gewinnen, haben wir die 'untere' Fitgrenze R_j (zur Definition von R_j siehe Kapitel 2.3.1) variiert und jeweils die mittlere Abweichung pro Freiheitsgrad (χ^2/N_{DF}) tabelliert. Der Überlappungsgrad wird in Form von C bezüglich (2.12) gewertet.

Betrachten wir zunächst die Werte für den energetisch niedrigsten Zustand 0^{++} in Tabelle 2.5. Die obere Hälfte enthält die Werte für die Darstellung über einen Wilson-Loop der

		$N_{\text{smear}}: 0$		$N_{\text{smear}}: 8$		$N_{\text{smear}}: 16$	
	R_j	C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}
$0^{++}_{\text{6-Link}}$	1	0.53(13)	0.7	0.783(33)	8.2	0.873(18)	1.45
	2	–	0.4	0.573(29)	2.2	0.769(14)	0.27
	3	–	0.4	0.356(30)	0.6	0.720(21)	0.14
	4	–	0.2	0.274(1)	0.0	0.737(37)	0.16
		$N_{\text{smear}}: 0$		$N_{\text{smear}}: 8$		$N_{\text{smear}}: 16$	
	R_j	C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}
$0^{++}_{\text{4-Link}}$	1	0.45(19)	0.7	0.637(27)	5.8	0.712(12)	0.95
	2	–	0.3	0.467(20)	1.3	0.646(14)	0.34
	3	–	0.3	0.30(3)	0.6	0.633(32)	0.40
	4	–	0.2	0.216(20)	0.2	0.690(57)	0.37

Tabelle 2.5: Zur Diskussion der Smearing-Methode am Beispiel des 0^{++}-Glueballs: Tabelliert sind die Werte des Overlaps C einer hyperbolischen χ^2-Fit-Analyse für unterschiedliche Smearing-Iterationen $N_{\text{smear}} = 0, 8, 16$ und variierende Fit-Grenzen R_j (gleiche Definition von R_j wie in Abschnitt 2.3.1). Wir vergleichen hier beispielhaft eine Operatorkonstruktion mit Wilson-Loops der Länge 4 (untere Teiltabelle für $\mathcal{S}_{F1}$) mit einer Darstellung durch Wilson-Loops der Länge 6 (ober Teiltabelle für $\mathcal{S}_{T1}$) bei fester Temperatur $T = 0.75T_c$. Um die Güte des Fits bewerten zu können, sind die entsprechenden Abweichungen pro Freiheitsgrad (χ^2/N_{DF}) mit angegeben.

	R_j	$N_{\text{smear}}:0$		$N_{\text{smear}}:8$		$N_{\text{smear}}:16$	
		C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}
$2^{++}_{\text{6-Link}}$	1	0.29(1)	1.0	0.875(44)	4.5	0.954(9)	0.40
	2	–	1.2	0.48(1)	3.3	0.871(20)	0.18
	3	–	1.2	0.13(2)	0.4	0.934(72)	0.22
	4	–	1.1	0.07(1)	0.0	1.1(2)	0.22

	R_j	$N_{\text{smear}}:0$		$N_{\text{smear}}:8$		$N_{\text{smear}}:16$	
		C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}	C	χ^2/N_{DF}
$2^{++}_{\text{4-Link}}$	1	0.36(22)	1.3	0.599(21)	1.9	0.681(6)	0.42
	2	–	1.5	0.342(22)	0.3	0.646(19)	0.38
	3	–	1.8	0.20(1)	0.2	0.509(25)	0.10
	4	–	2.3	0.10(1)	0.1	0.73(9)	0.05

Tabelle 2.6: Gleiche Tabelle wie Tabelle 2.5 für Operatoren des 2^{++}-Glueballs (untere Teiltabelle am Beispiel von $\mathcal{S}_{F2}$ und obere Teiltabelle am Beispiel von $\mathcal{S}_{T2}$). Weitere Diskussion siehe Text.

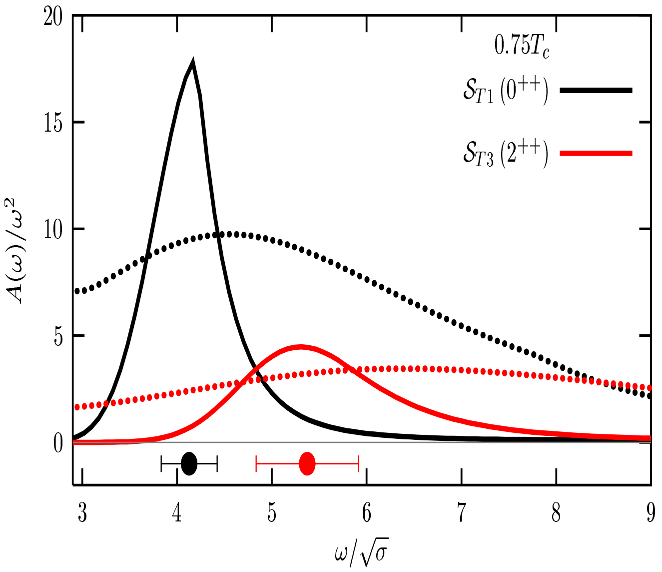

Abbildung 2.8: Vergleich der Spektralfunktionen aus der Maximum-Entropie-Methode bei Smearing-Level $N_{\text{smear}} = 16$ für die Korrelationen $\mathcal{S}_{T1}$ (schwarz) und $\mathcal{S}_{T3}$ (rot) bei $T = 0.75T_c$. Die beiden gepunkteten Linien gehören jeweils zu den entsprechenden Spektralfunktionen bei Smearing-Level $N_{\text{smear}} = 8$. Unterhalb der Abszisse sind die Fehler dargestellt, die wir mit Hilfe der Jackknife-Methode berechnet haben.

Länge 6 (hier als Beispiel die Korrelation eines planaren Wilson-Loops $\mathcal{S}_{S1}$) und die untere Hälfte die Resultate der Fit-Analyse einer Darstellung seines kleineren Pendants (hier: Wilson-Loop der Länge 4, Korrelation $\mathcal{S}_{F1}$).

In Abbildung 2.8 zeigen wir die Resultate der Maximum-Entropie-Methode für die zeitlichen Korrelationen $\mathcal{S}_{T1}$ und $\mathcal{S}_{T3}$ bei $0.75T_c$. Geplottet sind hier die Spektralfunktionen $A(\omega)$ bei den Smearing-Leveln 8 (gepunktet) und 16 (durchgezogene Linie). Wie sieht, sind die $N_{\mathrm{smear}} = 16$ wesentlich schärfer gepeakt.

2.5.2 Diskussion der zeitlichen Korrelationen

In diesem Kapitel diskutieren wir die Operatorbeiträge einzeln für jeden Zustand. Da wir die Auswertungstechniken bereits erläutert und diskutiert haben, gehen wir hier auf die Resultate in zusammengefasster Form ein. Ziel dieser Diskussion ist es, solche Operatoren zu benennen, die im Vergleich zu den übrigen Operatoren eine besonders hohe Zugriffsgenauigkeit auf den Grundzustand haben. Im Übrigen diskutieren wir aber auch die Validität der oben vorgestellten Auswertungstechniken. Wir betonen an dieser Stelle, dass sich die nun anschließende Diskussion strikt auf Korrelationen mit ($N_{\mathrm{smear}} = 16$)-Operatoren bezieht, sowohl für zeitliche als auch für räumliche Korrelationen.

2.5.2.1 Zeitliche Korrelationen mit 0^{++}-Glueball-Zuständen

In der Abbildung 2.9 präsentieren wir den in Abschnitt 2.3.1 erörterten und mit (2.18) berechneten effektiven Massenplot. Unsere Ergebnisse für die Maximum-Entropie-Methode und den hyperbolischen Fit (kurz HYP) sind am linken Bildrand (jeweils gemittelt über alle beitragenden Operatoren) als schwarzes Viereck (MEM) bzw. grauer Kreis (HYP) mit Fehlern eingetragen, damit wir sie gleich mit in unsere Diskussion der Operatoren einbeziehen können. Diese Darstellung haben wir für alle Abbildungen 2.9-2.14 bei der Polmassenbestimmung beibehalten. Wir haben auf der Abszisse die Ausdehnung in Zeitrichtung ($t[a]$) auf dem Gitter gegen die Masse $m_{\mathrm{eff}}/\sqrt{\sigma}$ auf der Ordinate geplottet. Die ausgefüllten Dreiecke stellen die Daten dar, die in unsere Betrachtung der effektiven Massen mit einbezogen wurden. Die Operatoren, für die wir kein Plateau erkennen können, sind nur als Strich mit den Fehlergrenzen geplottet. Ihre Beiträge können nicht bzw. nur eingeschränkt berücksichtigt werden. Alle der vier von uns eingesetzten Operatoren (der 4-(grün), der gebogene 6-(rot), der planare 6-(blau) und der verdrehte 6-(violet)-Operator), die zum 0^{++}-Zustand beitragen, liefern sehr ähnliche Massenwerte, so dass wir sie direkt in dieses Bild plotten können. Wir wählen unsere Fitgrenzen als $t[a] \in [2,5]$. Für die Temperatur $T = 0.75T_c$ ist ein Plateau für alle vier beitragenden Operatoren erkennbar. Die waagerechte schwarze Linie gibt die Masse an, die wir im Intervall $t[a] \in [2,5]$ angefittet haben. Die gepunkteten Linien sind die Fehlergrenzen für m_{eff}. Die Werte des Fits sind in Tabelle 2.7 aufgelistet. Für $t[a] > 6$ haben wir die Daten aufgrund ihres großen Fehlers nicht mehr weiter gezeichnet. MEM liefert einen scharf gepeakten Wert (siehe auch Bild 2.6), der leicht unter unserem Plateau liegt. Dies weist darauf hin, dass die HYP- und die m_{eff}-Methode den MEM-Wert leicht überschätzen.

Beim unteren Bild in Abbildung 2.9 sind die gleichen Operatoren für die Temperatur $0.90T_c$ dargestellt. Wenn man alleine die Datenpunkte ohne Fehler betrachtet, so ergibt sich kein erkennbares Plateau, sondern ein klarer Abfall in den effektiven Massen. Der Diskussion in Abschnitt 2.5 folgend, weichen die Korrelationsfunktionen stark von dem erwarteten exponentiellen Verhalten ab. MEM liefert zwar einen Wert in der Größenordnung der Masse bei $0.75T_c$, der aber mit einem sehr großen Fehler behaftet ist. Die Spektralfunktion weist auf ein relativ starkes Signal hin. Aber ihr Verlauf ist nicht stark genug gepeakt, um

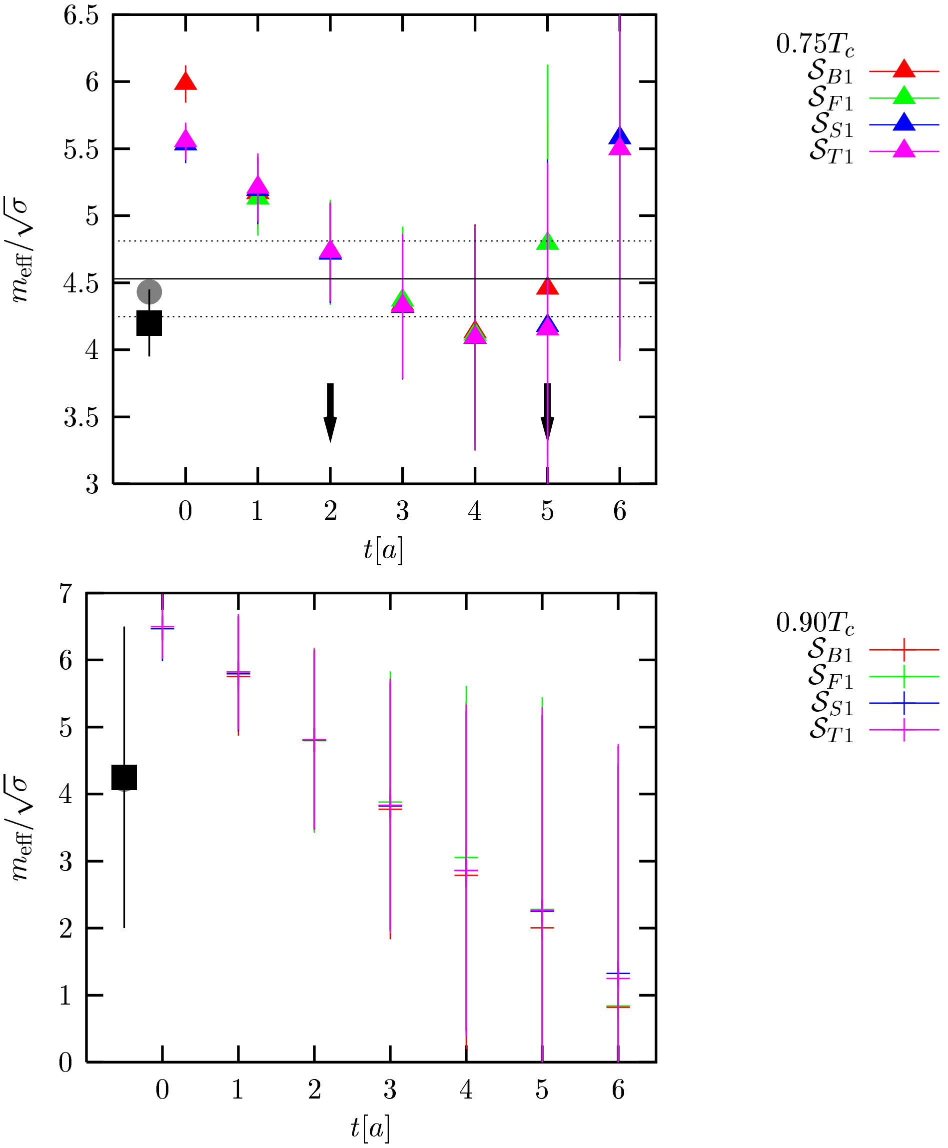

Abbildung 2.9: Die effektive Masse m_{eff} des Glueball-Zustands $J^{PC} = 0^{++}$ bei den Temperaturen $T = 0.75T_c$ (oben) und $T = 0.90T_c$ (unten). Die Bilder zeigen zusätzlich die Resultate des hyperbolischen Fits (grauer Kreis jeweils links im Bilde) und der MEM-Analyse (jeweils schwarzes Quadrat am linken Bildrand). Die waagerechten schwarzen Linien im oberen Bild zeigen die Höhe des Plateaus im effektiven Massenplot an. Die Pfeile an der x-Achse markieren die Grenzen des Plateaus. Im unteren Bild ($T = 0.90T_c$) ist kein Plateau erkennbar (siehe Text).

die genaue Position des ersten Maximums festzulegen. Der hyperbolische Fit liefert einen mit MEM vergleichbaren Wert und wird in dieser Darstellung vom schwarzen Viereck überdeckt. Die Fehler überschreiten ab $t[a] = 4$ die Grenzen unseres Plotbereiches. Man könnte ein Plateau von $t[a] \in [2, 6]$ ansetzen und würde so in den Fehlerbereichen unserer Massen auf die Resultate von MEM und HYP kommen. Da aber die großen Fehler in den Massen $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$ kein offensichtliches Plateau zeigen, benutzen wir nur die Daten,

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$m_{\mathrm{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{mem}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{mem}}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{B1}$	**4.46(7)**	**4.53(28)**	**4.3(2)**	**4.2(2)**	–	**5(2)**
$\mathcal{S}_{F1}$	**4.53(9)**	**4.55(29)**	**4.3(2)**	**4.3(2)**	–	**5(1)**
$\mathcal{S}_{S1}$	**4.37(6)**	**4.51(28)**	**4.1(3)**	**4.2(2)**	–	**3(3)**
$\mathcal{S}_{T1}$	**4.37(6)**	**4.52(28)**	**4.1(3)**	**4.2(2)**	–	**4(3)**
$1/N\sum_i x_i$	4.43(7)	4.53(28)	4.2(3)	4.2(2)		4.3(23)

Tabelle 2.7: Die Polmassen des thermalen $J^{PC} = 0^{++}$-Glueball-Zustands. Verglichen werden die Resultate der verschiedenen Methoden, aufgelistet nach den Operatorkorrelationen. Fehlende Einträge in der Tabelle zeigen an, dass eine Bestimmung der Polmasse mit dieser Methode in Bezug auf unseren Datensatz nicht erfolgen konnte. Durch Fettdruck heben wir die letztendlich verwendeten Ergebnisse hervor.

die uns MEM und HYP liefern. Wie dem Anhang in der Tabelle B.1 zu entnehmen ist, liefert HYP bei $0.90T_c$ trotz der im Vergleich mit $0.75T_c$ um 50% erhöhten Statistik, zwar ähnliche Massenergebnisse wie MEM, jedoch mit einem stark reduzierten Overlap C.

2.5.2.2 Zeitliche Korrelationen zu 2^{++}-Polmassen

Die beiden Bilder in Abbildung 2.10 zeigen die effekitven Polmassen der 2^{++}-Glueball-Zustände, die aus den irreduziblen Darstellungen E der kubischen Gruppe konstruiert werden. Zu diesem Zustand tragen alle bis auf die verdrehten 6-Operatoren bei (siehe auch Ergebnistabelle 2.8). Bei den zwei Massenplots, die wir aus den beiden planaren 6-Link-Operatoren $\mathcal{S}_{S3}$ und $\mathcal{S}_{S5}$ gebildet haben, ist eine Diskrepanz erkennbar. Sie ver-

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$m_{\mathrm{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{mem}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\mathrm{mem}}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{F2}$	**7.05(7)**	**7.1(1)**	**6(1)**	**6.9(2)**	**8.2(3)**	**5.9(7)**
$\mathcal{S}_{F3}$	**7.2(2)**	**7.1(1)**	**6.6(3)**	–	**8.0(1)**	**7.6(4)**
$\mathcal{S}_{B2}$	**6.5(5)**	**7.05(14)**	**5.6(9)**	–	**8.2(1)**	**7.7(4)**
$\mathcal{S}_{B3}$	**5.6(2)**	**6.88(22)**	**4.9(6)**	**6.8(1)**	**7.8(3)**	**5.6(9)**
$\mathcal{S}_{S2}$	**6.09(9)**	**6.9(2)**	**5.6(9)**	–	**8.0(3)**	4.9(60)
$\mathcal{S}_{S3}$	11.0(4)	–	3.5(70)	11.6(2)	–	9(1)
$\mathcal{S}_{S4}$	**6.7(1)**	**7.0(1)**	**6.0(4)**	**7.8(2)**	**8.0(2)**	**7.1(3)**
$\mathcal{S}_{S5}$	10.6(9)	–	9(2)	13(1)	–	10.9(9)
$1/N\sum_i x_i$	6.5(2)	7.0(2)	5.8(7)	7.2(2)	8.0(2)	6.8(6)

Tabelle 2.8: Die Polmassen des thermalen $J^{PC} = 2^{++}$-Glueball-Zustands. Verglichen werden die Resultate der verschiedenen Methoden, aufgelistet nach den Operatorkorrelationen. Fehlende Einträge in der Tabelle zeigen an, dass eine Bestimmung der Polmasse mit dieser Methode in Bezug auf unseren Datensatz nicht erfolgen konnte.

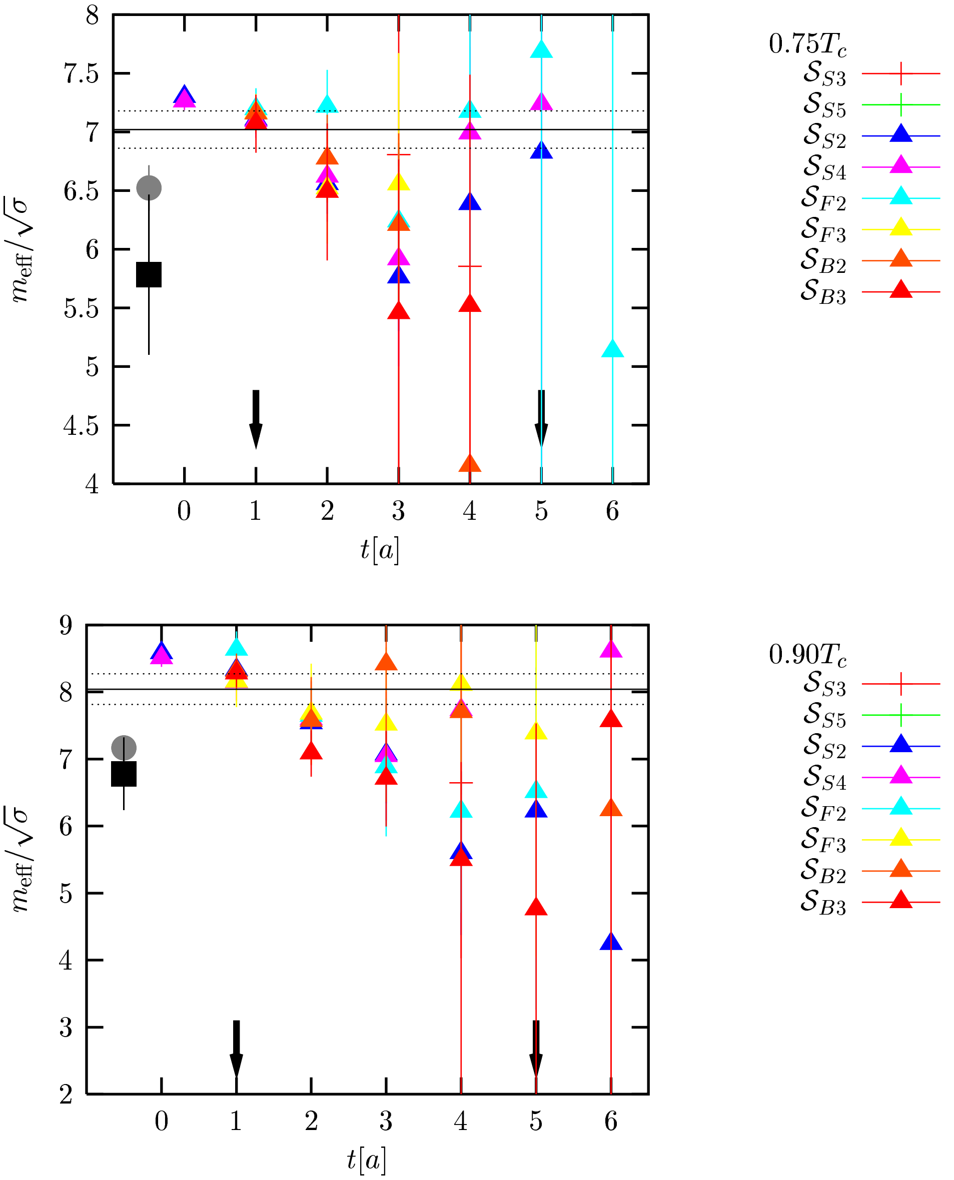

Abbildung 2.10: Effektive Massen für den 2^{++}-Glueball-Zustand, dargestellt durch die irreduzible Darstellung E (oben $0.75T_c$, unten $0.90T_c$). Die effektiven Massen der Glueball-Zustände der Korrelationsfunktionen $\mathcal{S}_{S3}$ und $\mathcal{S}_{S5}$ (siehe Striche) zeigen deutlich höhere Werte, verglichen mit den anderen sechs Korrelationen (siehe auch unsere Erläuterungen im Text).

laufen auf beiden Bildern bei effektiven Massen weit oberhalb von allen sechs übrigen Operatorkorrelationen. Wir haben sie nur mit einem dünnen Strich anstatt eines gefüllten Dreiecks gezeichnet. Beim $\mathcal{S}_{S3}$-Zustand kann man bei der Betrachtung der Spektralfunktion ein zweites störendes Maximum erkennen. Diese beiden Operatoren werden von uns als 'ungeeignet' deklariert und für die weitere Betrachtung ausgeschlossen. Bei beiden Temperaturen haben wir das Plateau im Bereich von $t[a] \in [1, 5]$ angesetzt. Die Werte ab $t[a] > 6$ haben wir aufgrund der großen Fehler nicht weiter geplottet. Bereits bei $t[a] = 3$

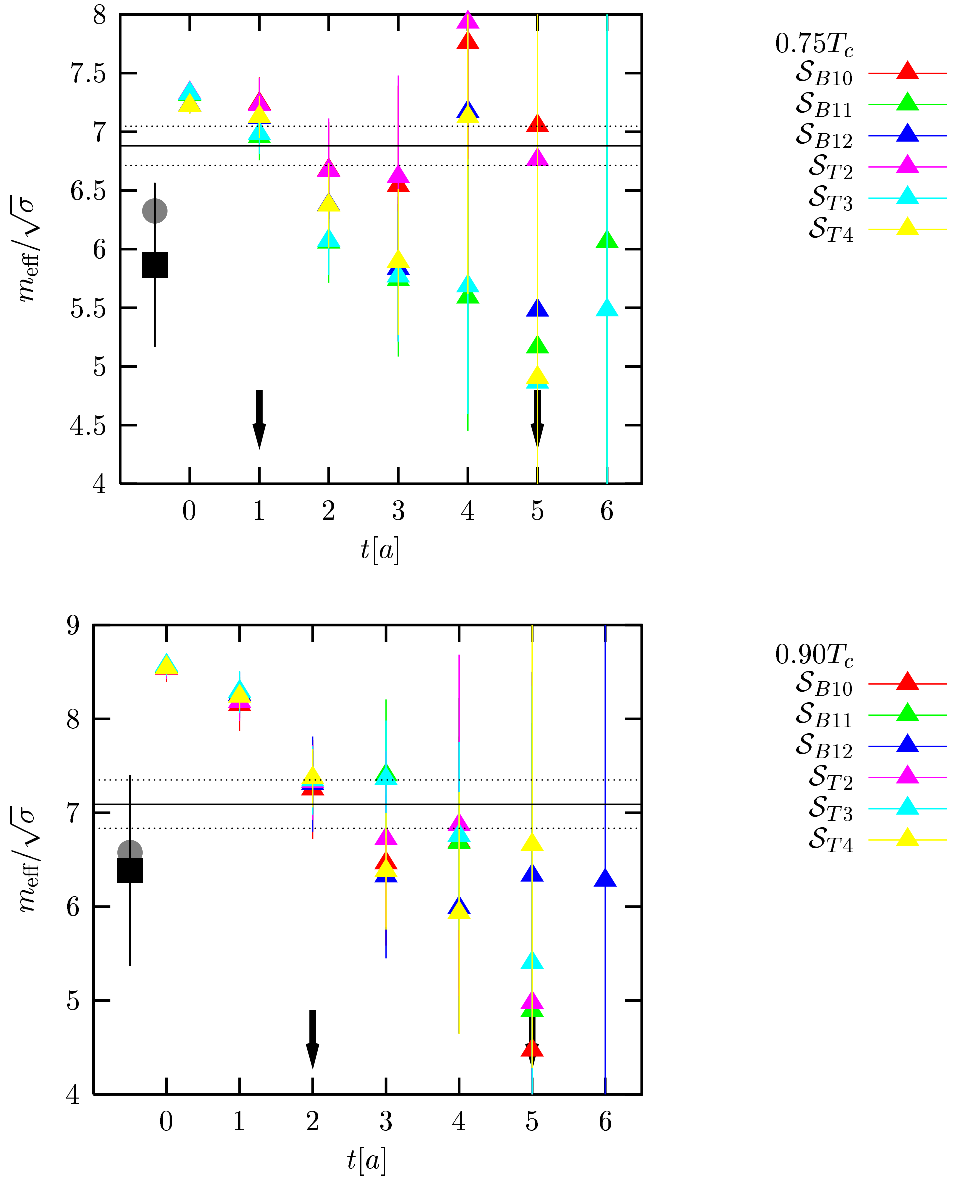

Abbildung 2.11: Effektive Massen für den 2^{++}-Glueball-Zustand, dargestellt durch die irreduzible Darstellung T_2. Das obere Bild zeigt Korrelate bei $T = 0.75T_c$ das untere entsprechend bei $T = 0.90T_c$.

überschreiten einige $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$-Fehler unseren Plotbereich. Bei $0.75T_c$ sind die Spektralfunktionen, die wir mit MEM bestimmt haben, für alle übrigen sechs Operatoren stark gepeakt und liefern jeweils einen Wert, der im Mittel unter dem Plateau unserer $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$-Werte liegt. HYP (siehe dazu auch B.3 im Anhang) liefert für beide Temperaturen einen Wert, der noch über den MEM-Ergebnissen liegt und so als eine Obergrenze für die Masse $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$ angesehen werden kann.

Die beiden Bilder in Abbildung 2.11 zeigen die effektiven Polmassen der 2^{++}-Glueball-Zustände der Operatoren, die aus den irreduziblen Darstellungen T_2 der kubischen Grup-

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{B10}$	**7.0(1)**	**7.08(20)**	**6.5(6)**	**6.0(2)**	**6.8(4)**	**6(2)**
$\mathcal{S}_{B11}$	**5.78(8)**	**6.64(16)**	**5.4(5)**	**6.8(1)**	**7.3(2)**	**7(1)**
$\mathcal{S}_{B12}$	**6.3(2)**	**6.92(15)**	**5.7(10)**	**6.56(9)**	**6.9(3)**	**6(1)**
$\mathcal{S}_{T2}$	**7.0(2)**	**7.09(20)**	**6.5(6)**	**6.5(1)**	**7.2(2)**	**6.1(5)**
$\mathcal{S}_{T3}$	**5.77(8)**	**6.66(14)**	**5.4(5)**	**6.9(1)**	**7.3(1)**	**7(1)**
$\mathcal{S}_{T4}$	**6.1(2)**	**6.91(16)**	**5.7(10)**	**6.7(1)**	**7.1(3)**	**6.2(6)**
$1/N\sum_i x_i$	6.3(2)	6.88(17)	5.9(7)	6.6(1)	7.1(3)	6.4(10)

Tabelle 2.9: Zusammenfassung der Polmassen für den 2^{++}-Zustand gebildet aus der irreduziblen Darstellung T_2 bei $T = 0.75T_c$ und bei $T = 0.90T_c$. Tabelliert sind die Resultate der Operatorkorrelationen, die plausibel erscheinen im Sinne der Konventionen aus Abschnitt 2.5.2.

pe gebildet werden. Sie bestehen jeweils aus drei verschiedenen Linearkombinationen der gebogenen und der verdrehten 6-Operatoren und geben uns so die Möglichkeit, aus einer großen Datenmenge unsere Ergebnisse zu bestimmen. Bei $0.75T_c$ haben wir das Intervall auf $t[a] \in [1,5]$ angesetzt und wieder $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$ als schwarze Linie und die Fehler als Punktlinie eingezeichnet. m_{eff} stimmt gut mit den mit MEM und HYP errechneten Werten überein. Die Fehler überragen schon bei $t[a] = 5$ den oberen und unteren Plotbereich, so dass wir für höhere Werte den $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$-Plot nicht mehr fortgesetzt haben. Für $0.90T_c$ liegt das Plateau im Bereich von $t[a] \in [2,5]$. Während MEM bei $0.75T_c$ noch einen relativ kleinen Fehler ergibt, steigt er bei der Temperatur $0.90T_c$ deutlich an. Die Spektralfunktionen der drei gebogenen Operatoren haben bei $0.75T_c$ einen auf beiden Flanken sehr stark gepeakten Verlauf. Dieses deutet auf ein sauberes Signal hin. Bei $0.90T_c$ fällt $A(\omega)/\omega^2$ rechts vom Maximum längst nicht so steil ab und liefert aus diesem Grund größere Fehler für MEM. In den Fehlergrenzen ist aber für alle Methoden ein Gleichbleiben der Massen erkennbar.

2.5.2.3 Zeitliche Korrelationen der exotischen Zustände

Zeitlicher 1^{-+}-Zustand

In Abbildung 2.12 werden die drei effektiven Polmassen für die Operatorkorrelationen dargestellt, die allesamt aus den gebogenen 6-Operatoren aufgebaut sind (siehe dazu Tabelle C.4 im Anhang). Wir sehen bei beiden Temperaturen kein klar ausgebildetes Plateau. Im Gegensatz zu den anderen Operatoren (z.B. $J^{PC} = 3^{++}$) bilden sich hier auch nicht bei sehr kurzen Gitterabständen ($t[a] \sim 4$) Plateaus aus. MEM liefert bei $0.90T_c$ bei keinem der drei Operatoren einen scharf gepeakten Wert. Alle drei zugehörigen Spektralfunktionen verlaufen sehr flach.

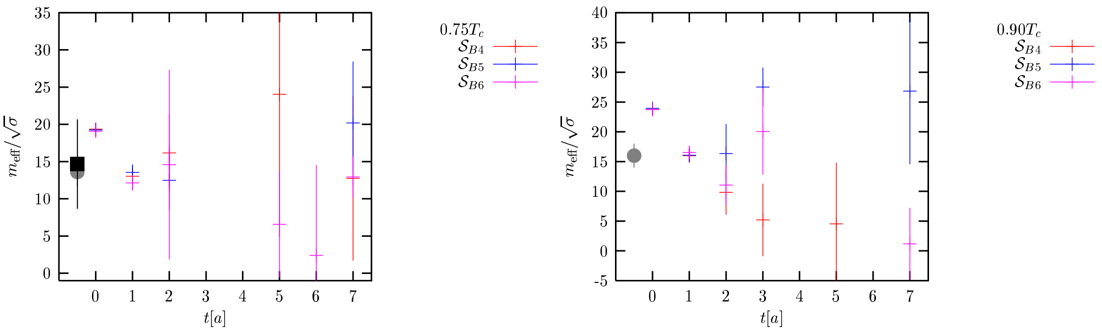

Abbildung 2.12: Der effektive Massenplot für zeitliche Korrelationen für einen Glueball-Zustand $J^{PC} = 1^{-+}$ bei $T = 0.75T_c$ (links) und $T = 0.90T_c$ (rechts). Zum Vergleich sind die Resultate mit der MEM (schwarzes Quadrat) und mit dem hyperbolischen Fit (grauer Kreis) am jeweils linken Bildrand eingezeichnet. Die effektive Masse $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$ zeigt weder bei $T = 0.75T_c$ noch bei $T = 0.90T_c$ ein Plateau an. MEM liefert bei $0.90T_c$ kein Ergebnis.

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{B4}$	**13.2(7)**	–	**16(6)**	–	–	–
$\mathcal{S}_{B5}$	**14(3)**	–	**14(5)**	**16(2)**	–	–
$\mathcal{S}_{B6}$	–	–	**14(7)**	–	–	–
$1/N\sum_i x_i$	13.6(19)		15(6)	16(2)		

Tabelle 2.10: Zusammenfassung der Polmassen für den 1^{-+}-Zustand bei $T = 0.75T_c$ und bei $T = 0.90T_c$. Tabelliert sind die Resultate der Operatorkorrelationen, die plausibel erscheinen im Sinne der Konventionen aus Abschnitt 2.5.2.

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{B7}$	**9.6(5)**	**9.57(32)**	**7.8(10)**	**10.4(2)**	**10.6(3)**	**10(2)**
$\mathcal{S}_{B8}$	**8.8(6)**	**9.66(14)**	**6(2)**	**11.3(5)**	**11.2(1)**	**11(1)**
$\mathcal{S}_{B9}$	**7.0(6)**	**9.23(25)**	**6.4(8)**	**9.8(3)**	**10.9(2)**	**8(2)**
$1/N\sum_i x_i$	8.5(6)	9.49(24)	6.7(13)	10.5(3)	10.9(2)	10(2)

Tabelle 2.11: Zusammenfassung der Polmassen für den 2^{-+}-Zustand bei $T = 0.75T_c$ und bei $T = 0.90T_c$. Die Tabelle stellt die Ergebnisse der Operatorkorrelationen dar. Mit Blick auf die Auswahlkriterien aus Abschnitt 2.5.2 können diese als nachvollziehbar angesehen werden.

Zeitlicher 2^{-+}-Zustand

Auch der 2^{-+}-Zustand setzt sich, wie der schon beschriebene 1^{-+}-Zustand, nur aus Operatoren zusammen, die aus Linearkombinationen der gebogenen 6-Operatoren (laut der Vorschriften aus der Tabelle C.4 im Anhang) gebildet werden. Bei beiden Temperaturen geben wir jeweils das Plateau im Bereich von $t[a] \in [1, 4]$ an. Dies kann aber nur als grobe

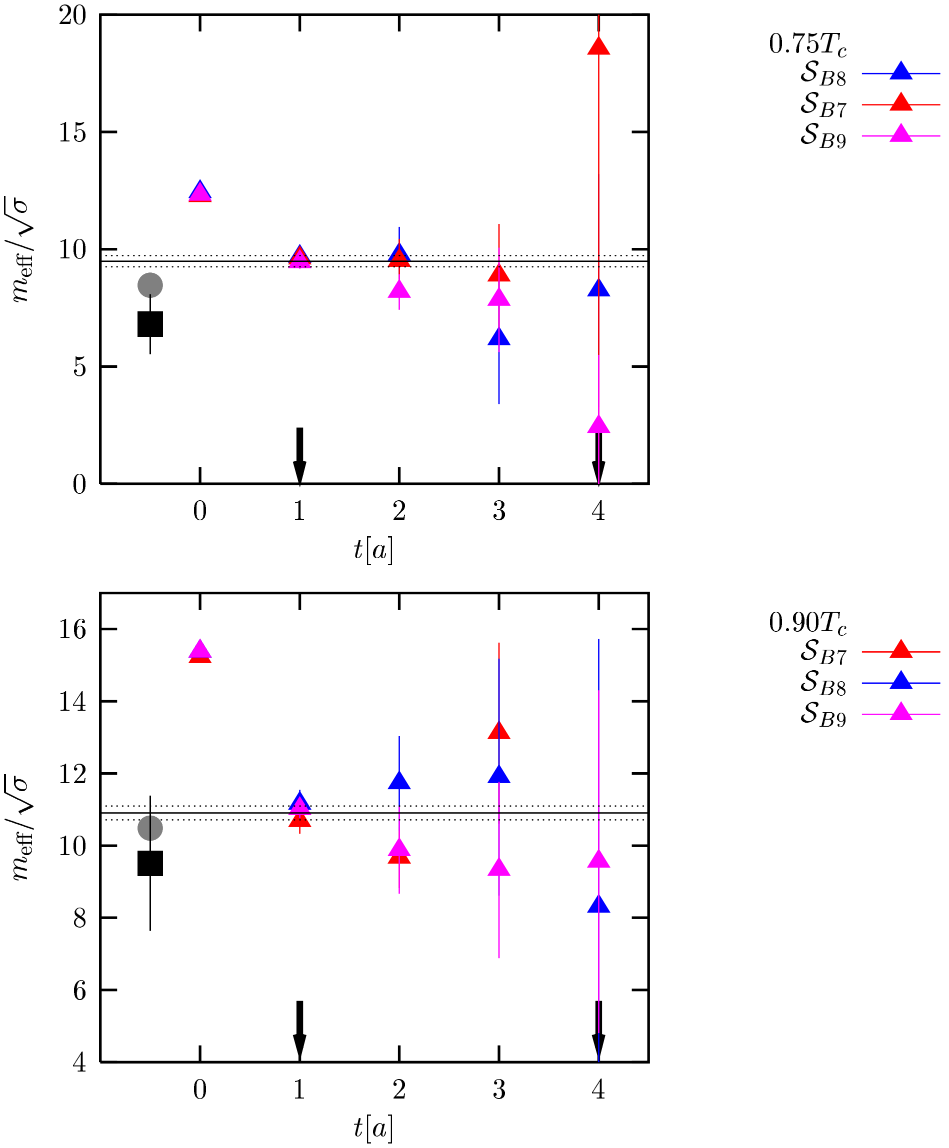

Abbildung 2.13: $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$-Resultate für den 2^{-+}-Glueball-Zustand bei $T = 0.75T_c$ (oben) und bei $T = 0.90T_c$ (unten). Bei beiden Temperaturen kann ein, wenn auch nur schwach ausgeprägtes, Plateau ermittelt werden (siehe waagerechte Linien). Die Resultate der MEM und der Fit-Analyse, ausgenommen der MEM-Wert bei $T = 0.75T_c$, stimmen zumindest im Rahmen ihrer Fehlerabschätzungen mit diesem Plateau überein.

Abschätzung der oberen Massengrenze $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$ gelten, da bereits bei den nächsten Gitterabständen die Fehler erheblich anwachsen. Die Plots gehen nur bis 4 Gittergrößen, weil rechts davon die Massen und die Fehler zu groß werden. Die Spektralfunktionen, die uns MEM für diese Operatoren liefert, fallen alle für steigendes $\omega/\sqrt{\sigma}$ relativ flach ab.

Zeitlicher 3^{++}-Zustand

In den beiden Bildern in Abbildung 2.14 ist jeweils nur der 3^{++}-Operator aufgetragen, der aus den planaren 6-Operatoren (Tabelle C.6 im Anhang entnehmen wir $-\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 - \Psi_4 - \Psi_5 + \Psi_6$) gebildet wird. Die Ergebnisse haben wir in Tabelle 2.12 zusammengestellt. MEM liefert bei $0.75T_c$ (links) kein klar gepeaktes Signal für die Masse und darum kann unser Plateau, das wir im Intervall $t[a] \in [1, 3]$ ansetzen, nur als eine grobe Obergrenze für die Masse angesehen werden. Bei $0.90T_c$ (rechts) sehen wir gar kein Plateau. Für beide Temperaturen ist bei steigendem $\omega/\sqrt{\sigma}$ für die Spektralfunktion rechts des Maximums ein flach abfallender Verlauf erkennbar. Bei $0.90T_c$ bildet sich bei $\omega/\sqrt{\sigma} \sim 15$ ein zusätzliches Maximum.

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{hyp}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{S6}$	11.5(3)	11.3(1)	9(7)	–	–	3(3)

Tabelle 2.12: Die Polmassen des thermalen $J^{PC} = 3^{++}$-Glueball-Zustands. Verglichen werden die Resultate der verschiedenen Methoden aufgelistet nach den Operatorkorrelationen. Fehlende Einträge in der Tabelle zeigen an, dass eine Bestimmung der Polmasse mit dieser Methode in Bezug auf unseren Datensatz nicht erfolgen konnte.

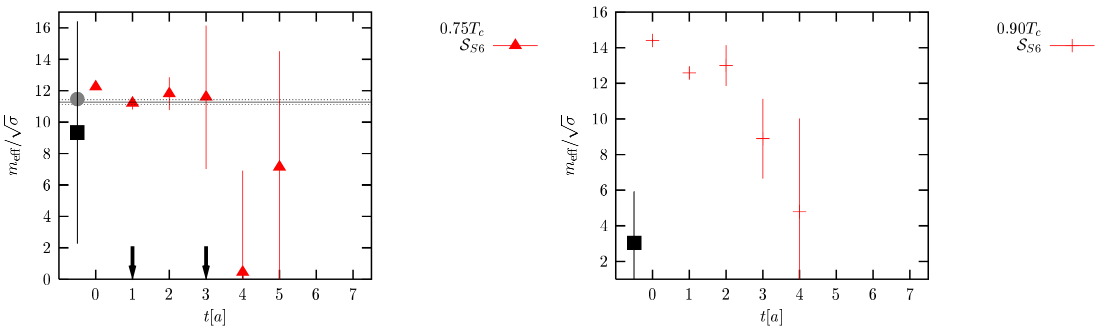

Abbildung 2.14: $m_{\text{eff}}/\sqrt{\sigma}$-Ergebnisse für 3^{++}-Glueball-Zustände bei $T = 0.75T_c$ (links) und $T = 0.90T_c$ (rechts). Dieser Zustand lässt sich im Rahmen unserer Operatoren durch planare Wilson-Loops der Länge 6 darstellen. Eingezeichnet sind auch die Resultate der MEM und der χ^2-Fit-Analyse soweit ermittelbar. Nur bei der niedrigeren Temperatur (links) lässt sich ein Plateau feststellen. Die Pfeile am unteren Bildrand zeigen die von uns gewählten Grenzen des Plateaus an. Die Höhe und der Fehler des Plateaus werden durch die schwarzen Linien angedeutet.

2.5.3 Diskussion der räumlichen Korrelationen

In den folgenden Abbildungen und Tabellen sind die effektiven Screeningmassen aufgetragen, die wir aus den räumlichen Korrelationsfunktionen berechnet haben. Wie schon im letzten Abschnitt bei der Bestimmung der Polmassen aus den zeitlichen Operatoren, haben wir die gleichen Konventionen für die Plots benutzt. Nur die Abszisse wird in $z[a]$ und die Ordinate in $\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$ umbenannt.

2.5.3.1 Glueball-Screening der 0^{++}- und 2^{++}-Glueball-Zustände

Räumliche 0^{++}-Glueball-Zustände

Im oberen Bild in Abbildung 2.15 sehen wir die effektiven Screeningmassen für den 0^{++}-Glueball-Zustand bei $T = 0.75T_c$. Für kurze Gitterabstände ist ein sehr ähnliches Verhalten zu Abbildung 2.9 erkennbar. Wir setzen unser Plateau auf den Bereich $z[a] \in [2, 6]$. MEM und HYP liefern innerhalb der Fehler vergleichbare Resultate. Die Funktionen, die MEM uns liefert, sind für alle vier Operatoren sehr scharf gepeakt. HYP (siehe Tabelle B.7) ergibt ganz konstante Werte für $R_j (j = 2, 3, 4)$ mit $\chi^2/N_{DF} \cong 1$.
Bei $0.90T_c$ (unteres Bild) dominiert wieder ein starkes Absinken der Massen (ohne Fehler) bis bei $z[a] \sim 5$ ein Plateau erreicht wird. Aber durch die großen Fehler könnte ein Plateau auch schon für $z[a] \in [2, 5]$ angesetzt werden. Wir betrachten für diese Korrelationen nur unsere HYP- und MEM-Ergebnisse, die auf der Höhe der $\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$-Werte für $z[a] > 5$ liegen. Die Datenpunkte werden, wie schon im vorherigen Abschnitt, mit Strichen dargestellt. Innerhalb der Fehlergrenzen kann man wieder auf das Niveau bei $0.75T_c$ kommen. MEM legt einen Massenwert bei ca. 1.9(14) nahe. Die MEM-Fehler sind sehr groß, weil u.a. störende höhere Zustände existieren, wie z.B. beim gebogenen 6- ($\mathcal{V}_{B1}$) oder beim verdrehten 6-Operator ($\mathcal{V}_{T1}$) (hier ist jeweils ein vorhandenes zweites Maximum gut sichtbar). Die anderen Operatoren weisen ein langsames Absinken bei ansteigendem $\omega/\sqrt{\sigma}$ auf.

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{V}_{B1}$	**4.1(1)**	**4.3(2)**	**3.9(2)**	**1.77(10)**	–	**2(2)**
$\mathcal{V}_{F1}$	**4.1(1)**	**4.3(1)**	**4.0(2)**	**1.78(10)**	–	**3(1)**
$\mathcal{V}_{S1}$	**4.0(1)**	**4.3(1)**	**3.9(2)**	**1.76(10)**	–	**1.6(16)**
$\mathcal{V}_{T1}$	**4.0(1)**	**4.3(1)**	**3.9(2)**	**1.81(10)**	–	**1(1)**
$1/N \sum_i x_i$	4.1(1)	4.3(1)	3.9(2)	1.78(10)		1.9(14)

Tabelle 2.13: Die Screeningmassen des thermalen $J^{PC} = 0^{++}$-Glueball-Zustands. Verglichen werden die Resultate der verschiedenen Methoden aufgelistet nach den Operatorkorrelationen. Fehlende Einträge in der Tabelle zeigen an, dass eine Bestimmung der Screeningmasse mit dieser Methode in Bezug auf unseren Datensatz nicht erfolgen konnte. Durch Fettdruck heben wir die letztendlich verwendeten Ergebnisse hervor.

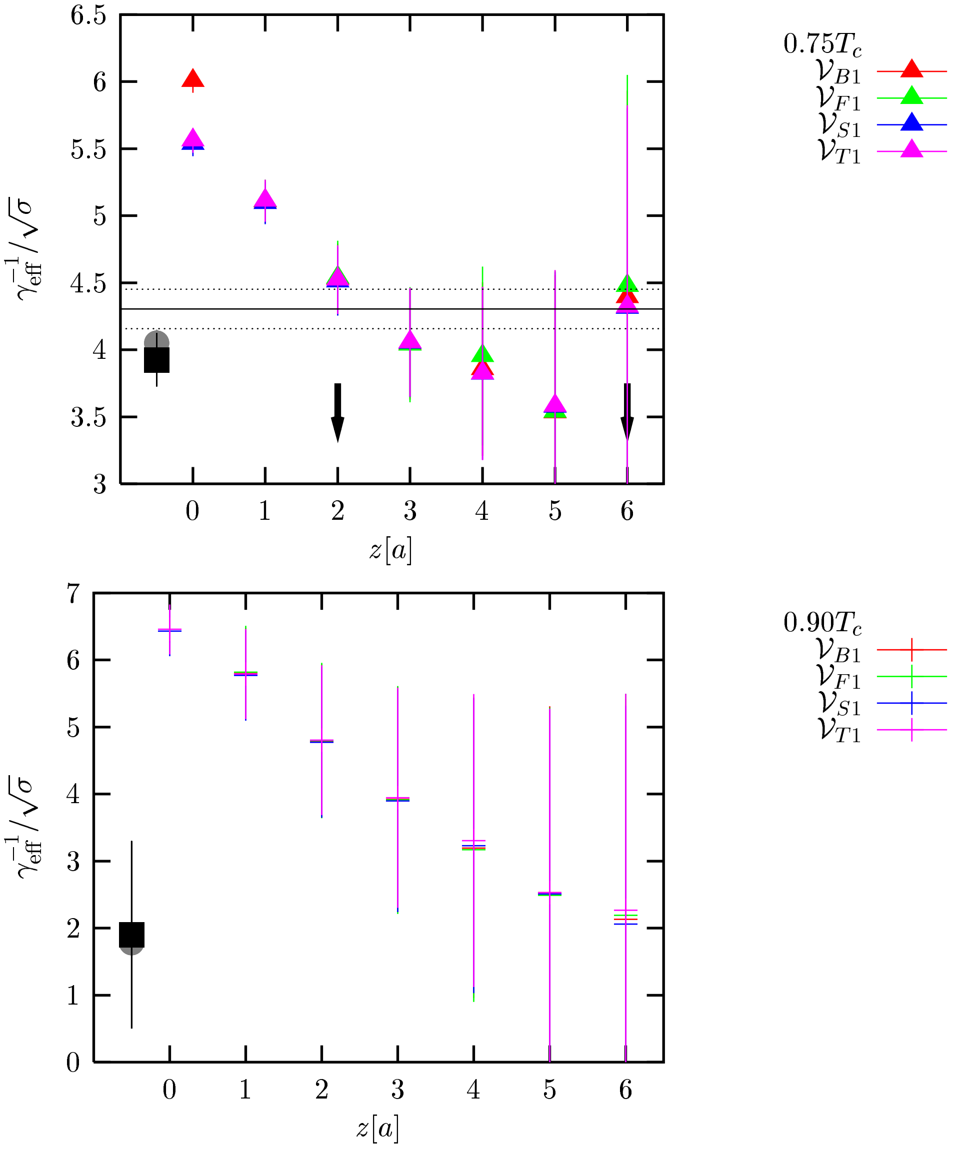

Abbildung 2.15: Die effektive Screeningmasse $\gamma_{\mathrm{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$ des Glueball-Zustands $J^{PC} = 0^{++}$ bei den Temperaturen $T = 0.75T_c$ (oben) und $T = 0.90T_c$ (unten). Die Bilder zeigen zusätzlich die Resultate des hyperbolischen Fits (grauer Kreis jeweils links im Bilde) und der MEM-Analyse (jeweils schwarzes Quadrat am linken Bildrand). Die waagerechten schwarzen Linien im oberen Bild zeigen die Höhe des Plateaus im effektiven Massenplot an. Die Pfeile an der x-Achse markieren die Grenzen des Plateaus. Im unteren Bild ($T = 0.90T_c$) ist kein Plateau erkennbar (siehe Text).

Räumliche 2^{++}-Glueball-Zustände

In Abbildung 2.16 sehen wir die Korrelationen, die aus der irreduziblen Darstellung E gebildet werden. Die planaren Operatoren $\mathcal{V}_{S3}$ und $\mathcal{V}_{S5}$ sind (vergleichbar zu $\mathcal{S}_{S3}$ und $\mathcal{S}_{S5}$) für beide Temperaturen offensichtlich auszusortieren. Deshalb plotten wir in Abbildung 2.16 diese Operatorkorrelationen erst gar nicht. Die übrigen sechs Korrelationen bilden deutliche Plateaus. Der Bereich der Plateaus wird von uns bei den Temperaturen $0.75T_c$

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{V}_{F2}$	**6.4(2)**	**6.9(2)**	**5.8(6)**	**8.0(1)**	**7.2(4)**	2.0(9)
$\mathcal{V}_{F3}$	**6.4(1)**	**7.0(1)**	**4.6(43)**	**8.3(1)**	**7.6(2)**	**3.3(77)**
$\mathcal{V}_{B2}$	**6.1(4)**	**7.1(1)**	**5.5(10)**	**7.9(1)**	**7.1(4)**	**2.2(81)**
$\mathcal{V}_{B3}$	**6.5(3)**	**7.0(1)**	**3.3(58)**	**8.3(1)**	**7.8(1)**	**7.2(7)**
$\mathcal{V}_{S2}$	**6.3(3)**	**7.0(1)**	**5.5(7)**	**7.8(1)**	**7.1(4)**	1.6(5)
$\mathcal{V}_{S3}$	–	–	2.2(9)	11(2)	–	9(1)
$\mathcal{V}_{S4}$	**6.1(3)**	**6.92(10)**	**2.3(45)**	**8.1(1)**	**7.6(2)**	**7.0(4)**
$\mathcal{V}_{S5}$	11.5(4)	–	11(1)	10.1(5)	–	9(1)
$1/N\sum_i x_i$	6.3(3)	7.0(1)	4.5(28)	7.3(3)	7.4(3)	5.0(42)

Tabelle 2.14: Die Screeningmassen des thermalen $J^{PC} = 2^{++}$-Glueball-Zustands. Verglichen werden die Resultate der verschiedenen Methoden, aufgelistet nach den Operatorkorrelationen. Fehlende Einträge in der Tabelle zeigen an, dass eine Bestimmung der Screeningmasse mit dieser Methode in Bezug auf unseren Datensatz nicht erfolgen konnte.

und $0.90T_c$ auf die Intervalle $z[a] \in [1,5]$ bzw. $z[a] \in [2,6]$ gelegt. Bei $0.75T_c$ liefern die beiden Korrelationen, $\mathcal{V}_{S4}$ (blau) und $\mathcal{V}_{B3}$ (grün), die besten Beiträge. Die Ergebnisse bei $0.90T_c$ für $\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$ sind vergleichbar zu denen der niedrigeren Temperatur.
In der Darstellung 2.17 sehen wir die Screeningmassen für den 2^{++}-Glueball-Zustand, die aus der irreduziblen Darstellung T_2 der kubischen Gruppe gebildet werden. Es zeichnen sich in beiden Bildern sehr deutliche Plateaus bei niedrigen Gitterabständen ab. Die drei gebogenen 6-Operatoren ($\mathcal{V}_{B4}$-$\mathcal{V}_{B6}$) liefern bei $0.75T_c$ bis $z[a] \sim 5$ alle sehr ähnliche Werte. Wir legen unser Plateau fest auf den Bereich $z[a] \in [2,5]$. Die MEM-Funktionen von $\mathcal{V}_{B4}$ und $\mathcal{V}_{B5}$ reproduzieren die Resultate gut in den Fehlergrenzen. Nur der Plot für $\mathcal{V}_{B6}$ liefert Werte $\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma} = 12.5(600)$ und passt darum nicht zu den anderen MEM-Ergebnissen.

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{V}_{B4}$	**6.1(2)**	**6.4(2)**	**5.5(7)**	**6.1(1)**	**7.1(4)**	3.5(9)
$\mathcal{V}_{B5}$	**6.4(2)**	**6.4(1)**	**5.7(6)**	**7.7(3)**	**7.86(4)**	**7(6)**
$\mathcal{V}_{B6}$	**6.5(1)**	**6.5(2)**	12.5(600)	–	**7.5(2)**	**7.0(5)**
$\mathcal{V}_{T2}$	**6.1(2)**	**6.4(2)**	**5.5(7)**	**5.9(2)**	**7.0(4)**	3.3(7)
$\mathcal{V}_{T3}$	**6.4(2)**	**6.6(2)**	**5.8(3)**	**6.9(3)**	**7.5(2)**	**6(1)**
$\mathcal{V}_{T4}$	**6.4(2)**	**6.3(1)**	**5.9(7)**	–	**7.8(1)**	**8.0(2)**
$1/N\sum_i x_i$	6.3(2)	6.4(2)	5.7(6)	6.7(2)	7.5(2)	7(2)

Tabelle 2.15: Zusammenfassung der Screeningmassen für den 2^{++}-Zustand aus der irreduziblen Darstellung T_2 bei $T = 0.75T_c$ und bei $T = 0.90T_c$. Tabelliert sind die Resultate der Operatorkorrelationen, die plausibel erscheinen im Sinne der Konventionen aus Abschnitt 2.5.2.

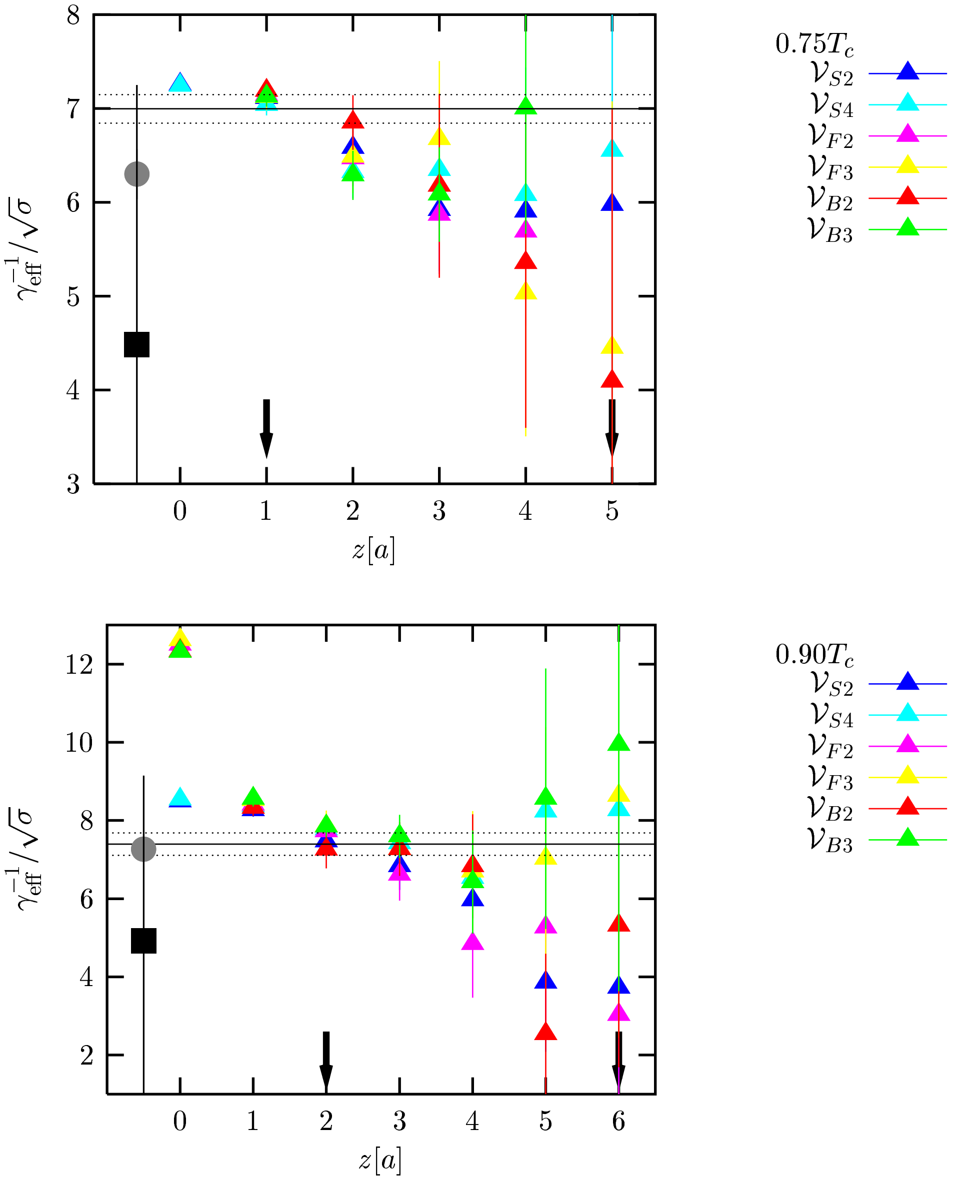

Abbildung 2.16: Effektive Screeningmassen für den 2^{++}-Glueball-Zustand, dargestellt durch die irreduzible Darstellung E (oben $0.75T_c$, unten $0.90T_c$). Die effektiven Massen der Korrelationsfunktionen $\mathcal{V}_{S3}$ und $\mathcal{V}_{S5}$ zeigen im Vergleich zu den anderen sechs Korrelationen wieder deutlich höhere Werte und werden aus diesem Grund gar nicht mehr geplottet (siehe auch Erläuterungen im Text).

Das Plateau bei $0.90T_c$ (wir legen das Intervall auf den Bereich $[2, 6]$) liefert einen im Vergleich zu $0.75T_c$ leicht erhöhten Wert. Die Funktion von $\mathcal{V}_{B4}$ hat ein zweites Maximum und verfälscht das Ergebnis. Wir legen die Ober- und Untergrenze unserer Plots absichtlich so eng an die Graphen, damit wir besser das Verhalten nahe des Plateaus sehen können. Die Fehler ragen ab $z[a] > 3$ über die Plotgrenzen hinaus. Aufgrund der großen Fehler werden die Werte $z[a] > 6$ nicht mehr dargestellt. MEM gibt die Werte von HYP und

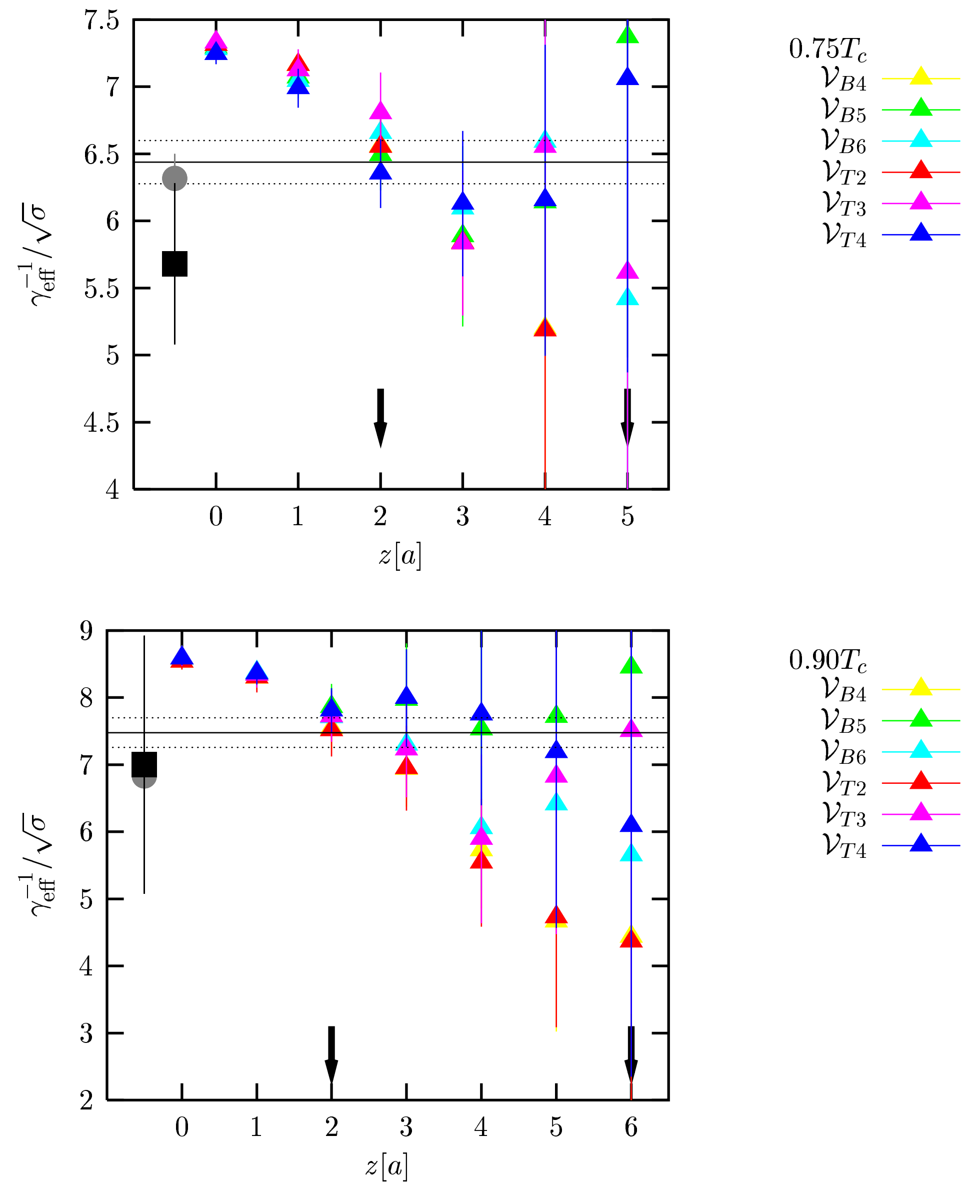

Abbildung 2.17: Effektive Screeningmassen für 2^{++}-Glueball-Zustand, dargestellt durch die irreduzible Darstellung T_2. Das obere Bild bei $T = 0.75T_c$ und das untere entsprechend bei $T = 0.90T_c$.

$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$ gut wieder. Der niedrige Wert von $\mathcal{V}_{T2}$ in Tabelle 2.15 ist dadurch zu erklären, dass neben dem Maximum bei $\omega/\sqrt{\sigma} \sim 8$ noch ein weiteres bei $\omega/\sqrt{\sigma} \sim 2$ existiert.

2.5.3.2 Räumliche Korrelationen der exotischen Zustände

Räumliche 1^{-+}-Glueball-Zustände

In Abbildung 2.18 (vergleichbar zu Abbildung 2.12) sieht man in beiden Bildern, dass auch die räumlichen 1^{-+}-Glueball-Zustände kein ersichtliches Plateau liefern.

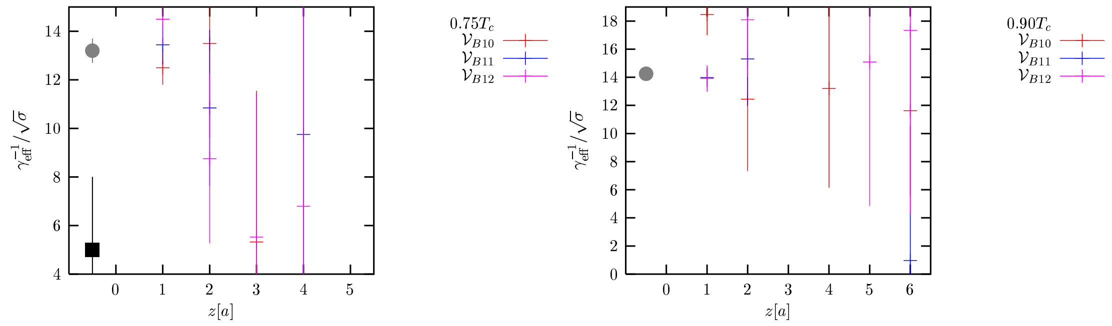

Abbildung 2.18: Der effektive Massenplot für räumliche Korrelationen für einen Glueball-Zustand $J^{PC} = 1^{-+}$ bei $T = 0.75T_c$ (oben) und $T = 0.90T_c$ (unten). Zum Vergleich sind die Resultate mit der MEM (schwarzes Quadrat) und mit dem hyperbolischen Fit (grauer Kreis) am jeweils linken Bildrand eingezeichnet.

	$0.75T_c$			$0.90T_c$		
Operator	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{V}_{B10}$	–	–	7(13)	–	–	–
$\mathcal{V}_{B11}$	13.2(5)	–	**5(2)**	14.1(4)	–	–
$\mathcal{V}_{B12}$	–	–	**5(4)**	14.4(5)	–	–
$1/N\sum_i x_i$	13.2(5)	–	5(3)	14.4(5)	–	–

Tabelle 2.16: Zusammenfassung der Screeningmassen für den 1^{-+}-Glueball-Zustand bei $T = 0.75T_c$ und bei $T = 0.90T_c$. Tabelliert sind die Resultate der Operatorkorrelationen, die plausibel erscheinen im Sinne der Konventionen aus Abschnitt 2.5.2.

Räumliche 2^{-+}-Glueball-Zustände

In Abbildung 2.19 haben wir den effektiven Massenplot für die 2^{-+}-Glueball-Zustände bei den Temperaturen $0.75T_c$ (oberes Bild) und $0.90T_c$ (unteres Bild) dargestellt. Für beide Temperaturen sehen wir ein schwach ausgeprägtes Plateau im Bereich $[1, 5]$.

Räumliche 3^{++}-Glueball-Zustände

Das Verhalten der Zustände ist äquivalent zu den zeitlichen Operatoren. Bei sehr kleinen Gitterabständen kann man einen flachen Verlauf der Effektiv-Massen sehen, aber bei der

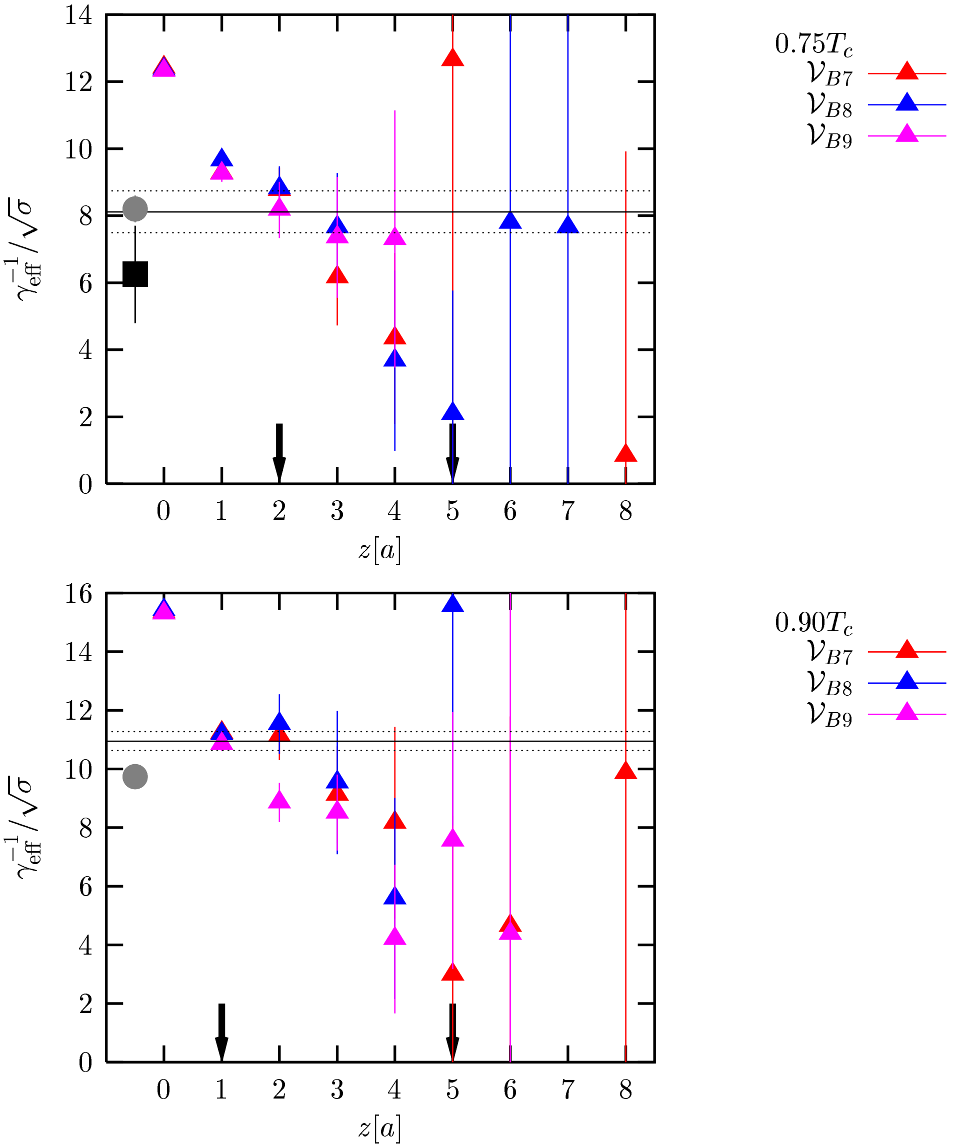

Abbildung 2.19: $\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$-Resultate für den 2^{-+}-Zustand bei $T = 0.75T_c$ (oben) und bei $T = 0.90T_c$ (unten). Bei beiden Temperaturen kann ein, wenn auch nur schwach ausgeprägtes, Plateau ermittelt werden (siehe waagerechte Linien). Die Resultate der MEM (soweit vorhanden) und der Fit-Analyse sind links als schwarzes Viereck bzw. grauer Kreis eingezeichnet. Sie stimmen im Rahmen ihrer Fehlerabschätzung mit diesen Plateaus überein.

geringen Anzahl an auswertbaren Datenpunkten, kann damit lediglich eine Obergrenze für $\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$ abgeschätzt werden.

	0.75T_c			0.90T_c		
Operator	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{V}_{B7}$	**8.5(2)**	**8.1(8)**	**5.5(9)**	**10.7(2)**	**11.2(2)**	4.5(77)
$\mathcal{V}_{B8}$	**8.8(2)**	**8.3(9)**	2(2)	**10.8(3)**	**11.2(3)**	8.1(82)
$\mathcal{V}_{B9}$	**7.3(8)**	**8.0(2)**	**7(2)**	**7.7(5)**	**10.5(4)**	–
$1/N\sum_i x_i$	8.2(4)	8.1(6)	6.3(15)	9.7(3)	11.0(3)	

Tabelle 2.17: Zusammenfassung der Screeningmassen für den 2^{-+}-Zustand bei $T = 0.75T_c$ und bei $T = 0.90T_c$. Tabelliert sind die Resultate der Operatorkorrelationen, die plausibel erscheinen im Sinne der Konventionen aus Abschnitt 2.5.2.

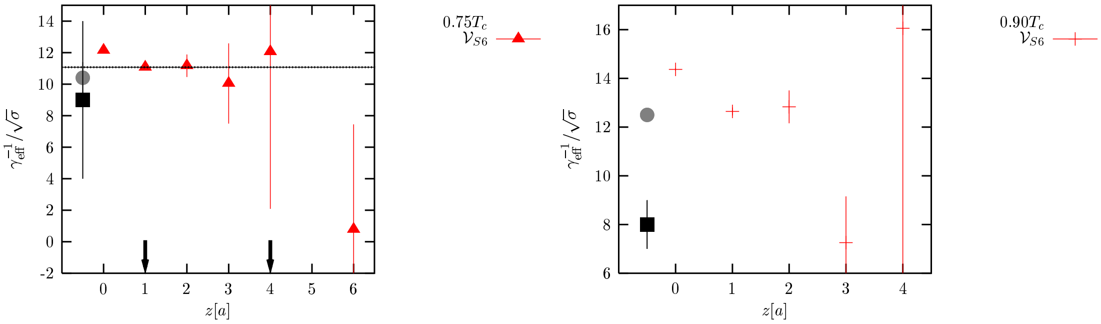

Abbildung 2.20: $\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$-Ergebnisse für 3^{++}-Glueball-Zustände bei $T = 0.75T_c$ (links) und $T = 0.90T_c$ (rechts). Dieser Zustand lässt sich im Rahmen unserer Operatoren nur durch eine Linearkombination des planaren Wilson-Loops der Länge 6 darstellen. Eingezeichnet sind auch die Resultate der MEM und der χ^2-Fit-Analyse. Nur bei der niedrigeren Temperatur (links) lässt sich ein Plateau feststellen. Die Pfeile am unteren Bildrand zeigen die von uns gewählten Grenzen des Plateaus an. Die Höhe und der Fehler des Plateaus werden durch die schwarzen Linien angedeutet. Die gestrichelten Linien markieren die Fehlerabschätzung.

	0.75T_c			0.90T_c		
Operator	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{hyp}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{eff}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{V}_{S6}$	**10.4(10)**	**11.07(1)**	**9(5)**	**12.5(2)**	–	**8(1)**

Tabelle 2.18: Zusammenfassung der Screeningmassen für den 3^{++}-Zustand bei $T = 0.75T_c$ und bei $T = 0.90T_c$. Tabelliert sind die Resultate der Operatorkorrelationen, die plausibel erscheinen im Sinne der Konventionen aus Abschnitt 2.5.2.

2.6 Systematische Fehler und erste Konsequenzen

Der Umgang mit Fehlerquellen ist bei der Gitterrechnung von zentraler Bedeutung und soll an dieser Stelle kurz diskutiert werden. Wir unterscheiden im Allgemeinen statistische von systematischen Fehlern. Während die Handhabe erstgenannter Fehler im Wesentlichen durch feste mathematische Regeln erfassbar ist (z.B. siehe Anhang A), so ist eine Behandlung oder gar Reduzierung der systematischen Fehler bedeutend schwieriger, wobei hierfür häufig nur Plausibilitätserklärungen möglich sind.

In Bezug auf unsere Arbeit und mit dem Hintergrundwissen des vorangestellten Abschnitts diskutieren wir hier den *systematischen Fehler* und Möglichkeiten ihn zu reduzieren. Sowohl bei effektiv-Massenplot als auch beim hyperbolischen χ^2-Fit ist systematisch ein sehr kleiner Fehler zu erwarten gewesen, da wir bei beiden Verfahren unsere Resultate in einem Intervall mit konstantem Wertebereich festlegen. Ein Mittel über diese relativ konstanten Ergebnisse liefert uns zwangsläufig kleine Fehler. Bei der Analyse der Daten haben wir weiterhin gesehen, dass die Ergebnisse von HYP und vom EMP fast immer am oberen Fehlerrand der MEM-Resultate liegen.

In der reinen Eichtheorie kann man grundsätzlich laut [14] und [34] von einem systematischen Fehler von 10% im Vergleich zu den experimentellen Ergebnisse ausgehen.

Wir diskutieren hier noch kurz die großen Fehler in den Pol- und Screeningmassen des 0^{++}-Glueball-Zustands bei $0.90T_c$. In Abbildung 2.15 sehen wir, dass sich die effektiven Massen nur sehr langsam einem Plateau annähern. Ein Faktor, der dazu beitragen könnte, ist das relativ kleine räumliche Gitter ($N_\sigma^3 = 32^3$ für zeitliche Korrelationen bzw. $N_\sigma^2 \times N_\tau = 32^2 \times 16$ für räumliche Korrelationen) bei der Temperatur $T = 0.90T_c$. Zusammen mit den Korrelationsfunktionen wurden von einer anderen Arbeitsgruppe zeitgleich zu unseren Rechnungen auf dem QH2-Rechner die Polyakov-Loops bei denselben Temperaturen ($T = 0.50, 0.75, 0.90$ und $1.50T_c$) ausgwertet. Aus diesem Grund plotten wir die Ergebnisse für die beiden Temperaturen $T = 0.75T_c$ und $T = 0.90T_c$, um zu sehen, ob unsere Berechnungen gegebenenfalls durch Vakuum-Fluktuationen beeinträchtigt wurden (siehe Abbildungen 2.21 und 2.22 hier wurde der Realteil des Polyakov-Loops auf die x-Achse und der Imaginärteil auf die y-Achse aufgetragen [55]). In Abbildung 2.21 sehen wir das erwartete kreisrunde (punktsymmetrische) Verhalten der Polyakov-Loop-Daten, die statistisch um ein Vakuum am Punkte $L \simeq 0$ verteilt sind. Abbildung 2.22 dagegen zeigt eine Form, die stark vom statistischen Rauschen abweicht: Die $Z(3)$-Invarianz der Figur in Abbildung 2.22 impliziert, dass die gestörte Form der Polyakov-Loop-Darstellung durch metastabile Vakua hervorgerufen wird. Diese ($T > T_c$)-Vakua bei $L \not\simeq 0$ werden von einigen Punkten angenommen. Für große Volumina sind die Vakua bei dieser Temperatur für $L \not\simeq 0$ metastabil und haben eine große Barriere[5]. Bei unserem Gitter ist wahrscheinlich die freie Energie nicht groß genug, um einen nichttrivialen Übergang in die anderen Vakua zu verhindern. Obwohl die Zahl der Konfigurationen in den drei falschen Vakua noch immer sehr klein ist, darf man sie dennoch nicht vernachlässigen. Besonders die 0^{++}-Glueball-Masse wird durch spontane Übergänge von einem Vakuum ins nächste gestört.

[5] Die Barriere ist unendlich hoch für ein unendlich großes Gitter.

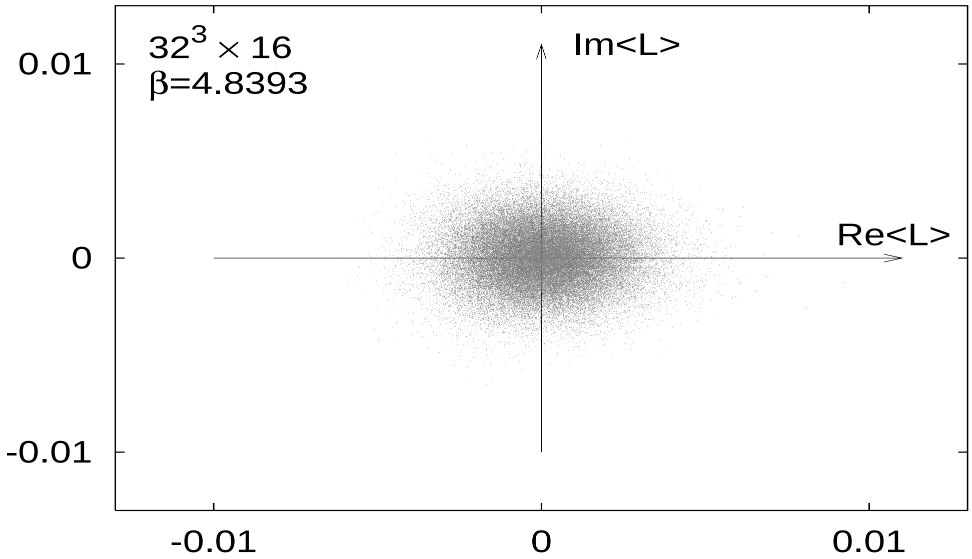

Abbildung 2.21: Zu sehen sind die Daten für den Polyakov-Loop bei $0.75T_c\,(\beta\ =\ 4.8393)$. Auf der Abszisse ist der Realteil und auf der Ordinate der Imaginärteil des Polyakov-Loop-Erwartungswertes $\langle L \rangle$ geplottet.

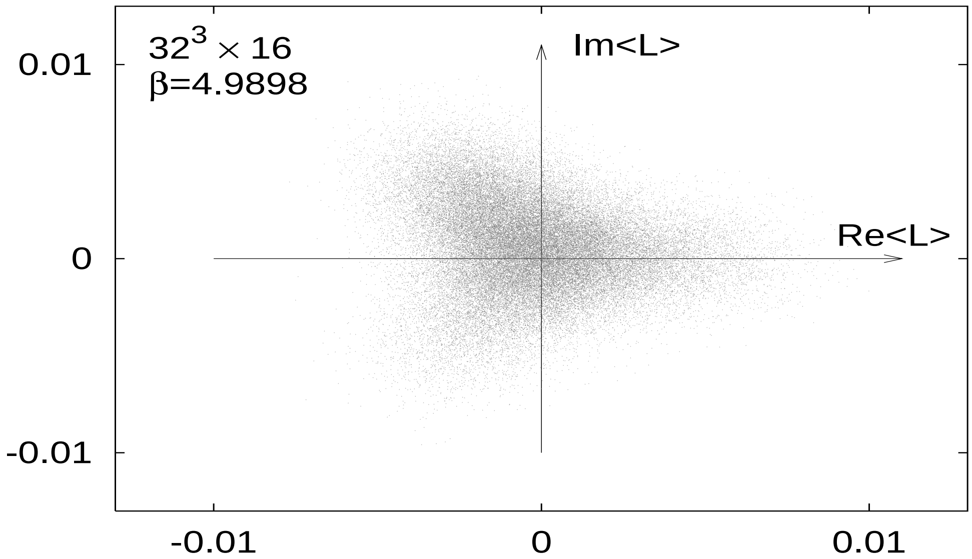

Abbildung 2.22: Zu sehen sind die Daten für den Polyakov-Loop bei $0.90T_c\,(\beta\ =\ 4.9898)$. Auf der Abszisse ist der Realteil und auf der Ordinate der Imaginärteil des Polyakov-Loop-Erwartungswertes $\langle L \rangle$ geplottet.

Im nächsten Kapitel werden wir vor allem die MEM-Resultate in unsere Betrachtungen einbeziehen, da der hyperbolische Fit und die effektive Massen-Methode die Massen systematisch überschätzen. Außerdem bietet sich MEM besonders an, weil es auch für die räumlichen Korrelationen anwendbar und auf dem gesamten Energiebereich sensitiv ist.

Kapitel 3

Das Glueball-Massenspektrum der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie

In diesem Kapitel stellen wir unsere Resultate zusammen. Wir diskutieren zunächst das Polmassenspektrum und analysieren seine Temperaturabhängigkeit. Die Auflistung der Ergebnisse stützt sich auf unsere Ausführungen im letzten Kapitel sowie im Wesentlichen auf die Resultate der MEM-Analyse. Anschließend befassen wir uns mit den räumlichen Korrelationen. Sie beschreiben die durch die Glueballe induzierten kollektiven Anregungen der thermalen Gluonen im Wärmebad und lassen sich ebenfalls mit Hilfe der MEM-Analyse untersuchen. Im dritten Teil dieses Kapitels vergleichen wir unsere Ergebnisse mit früheren Studien zu Glueball-Massen und diskutieren alternative Zugänge. Dabei betrachten wir unter anderem die starke Kopplungsentwicklung [19] und vergleichen unsere Resultate mit Potential-Modellen [57, 58] aber auch mit dem recht transparenten MIT-Bag-Modell. Wir beenden dieses Kapitel mit einer abschließenden Diskussion unserer Ergebnisse, u.a. im Hinblick auf die physikalische Relevanz unserer Arbeiten, z.B. bei der experimentellen Suche nach potentiellen Glueball-Kandidaten.

Bevor wir näher auf das Glueball-Massenspektrum eingehen, befassen wir uns mit der Struktur der Quantenzahlen von Glueball-Zuständen. Betrachten wir hierzu Glueballe, welche im einfachsten Fall aus zwei oder drei *masselosen* Gluonen bestehen (gg- und ggg-Glueballe). Wir bauen zuerst das Spektrum der gg-Glueballe auf: Gluonen sind Vektorfelder mit Spin $S_g = 1$ und Parität $P_g = -1$. Der Gesamt-Spin J eines gg-Glueballs setzt sich aus dem Bahndrehimpuls L und dem Spin S_g gemäß $|L - S_g| \leq J \leq L + S_g$ zusammen. Die Parität des zwei-Gluonsystems setzt sich multiplikativ aus den beiden Paritäten P_g der Gluonen zusammen und wird daher von dem Bahndrehimpuls L zu $P = (P_g)^2(-)^L = (-)^L$ bestimmt. Da die C-Parität immer positiv ist, ergibt sich das Spektrum der gg-Glueballe zu $J^{PC} = 0^{++}, 2^{++}$ für $L = 0$ und $J^{PC} = 0^{-+}, 2^{-+}$ für $L = 1$ sowie $J^{PC} = 0^{++}, 2^{++}, 3^{++}, 4^{++}$ für $L = 2$. Folglich treten Zustände wie 1^{-+} und 1^{++} in einem gg-System gar nicht auf. Der Grund hierfür ist die Bose-Einstein-Symmetrie und die Transversalität der Polarisation masseloser Bosonen [59]. Analoge Überlegungen führen auf die möglichen Quantenzahlen für ggg-Glueballe. Die niedrigsten Zustände für gg- und ggg-Glueballe haben wir in Tabelle 3.1 zusammengestellt.

Bahndrehimpuls: L	gg-Glueballe	ggg-Glueballe
	J^{PC}	J^{PC}
0	0^{++}, 2^{++}	0^{-+}, 1^{--}, 3^{--}
1	0^{-+}, 2^{-+}	
2	0^{++}, 2^{++}, 3^{++}, 4^{++}	

Tabelle 3.1: Die Quantenzahlen der einfachsten Glueballe geordnet nach aufsteigendem Bahndrehimpuls $L = 0, 1, 2$. Da die Gluonen einen festen Spin ($S_g = 1$) und eine wohldefinierte Parität ($P_g = -1$) besitzen, lassen sich die Quantenzahlen für gg- und ggg-Glueballe leicht angeben.

3.1 Das Polmassenspektrum der Glueballe bei endlichen Temperaturen

In diesem Abschnitt stellen wir zunächst unsere Ergebnisse der Polmassenberechnungen tabellarisch zusammen und diskutieren anschließend ihre Temperaturabhängigkeit. Nachdem wir die Polmassen unterhalb des Confinement-Phasenübergangs diskutiert haben, stellen wir unsere Resultate der Polmassenanalyse in der Plasma-Phase vor.

3.1.1 Das Polmassenspektrum im Confinement $(T < T_c)$

Wir haben die von uns ermittelten Werte in Tabelle 3.2 zusammengefasst[1]. Die Tabelle umfasst die Polmassen der Temperaturen $T = 0.75T_c$ und $T = 0.90T_c$, wobei wir uns auf die Polmassenbestimmung im Rahmen der *MEM-Analyse* beziehen. Die angegebenen Fehler sind die Mittelwerte der Fehler der Einzelmessungen. Eingetragen sind die Massen in Einheiten der Stringtension $\sqrt{\sigma} = 420\text{MeV}$ bei $T = 0$. Die Auflistung der Glueball-Zustände J^{PC} in Tabelle 3.2 entspricht der Anordnung der Glueball-Massen-Zustände nach ansteigender Masse wie in [60] angegeben.

Da die letzten beiden Polmassen in der $T = 0$ Gitter-Eichtheorie nicht angegeben sind, haben wir die Massenfolge der entsprechenden $SU(2)$-Vorbilder verwendet, also $m(1^{-+}) > m(3^{++})$ (siehe z.B. Tabelle 1 in [60]). Ein Massenwert für den $J^{PC} = 3^{++}$-Zustand bei $T = 0$ kann aber [1] entnommen werden:
$m(3^{++})/\sqrt{\sigma} = 8.9 \pm 1.1$.
Dieser Wert liegt deutlich höher, als die tabellierten Werte in [60]. Die Anordnung der J^{PC}-Zustände, bei $T = 0$ entspricht daher der Tabelle 3.2 (in der Reihenfolge von oben nach unten gelesen). Fortan bezeichnen wir die Anordnung von J^{PC} nach ansteigenden Massen bei $T = 0$, nämlich die Reihenfolge $0^{++}, 2^{++}, 2^{-+}, 3^{++}, 1^{-+}$, als Massenfolge. Betrachtet man unsere Resultate bei $T = 0.75T_c$, so erkennt man, dass die Massenfolge der Zustände den Erwartungen der Massenfolge bei $T = 0$ folgt. Dagegen erhalten wir bei $T = 0.90T_c$ eine Vertauschung dieser Abfolge, in dem Sinne, dass die Polmasse des 3^{++}-Zustands deutlich kleiner ausfällt, als die Masse des 2^{-+}-Zustandes bei gleicher Temperatur. Dieser

[1] Die Werte in der Tabelle sind als Mittelwerte der Werte aus den Tabellen 2.7 bis 2.12 zu verstehen, d.h.: $m = 1/N \sum_{i=1,\dots,N} m_i$, wobei N die Anzahl der Operatordarstellungen eines Zustands angibt.

	$T = 0.75T_c$	$T = 0.90T_c$
Zustand $(1/N \sum_i x_i)$	$m(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$	$m(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$
0^{++}	4.2 ± 0.3	4.3 ± 2.3
2^{++}	5.9 ± 0.7	6.6 ± 0.8
2^{-+}	6.7 ± 1.3	10.0 ± 2.0
3^{++}	9.0 ± 7.0	3.0 ± 3.0
1^{-+}	15.0 ± 6.0	$[16.0 \pm 2.0]$

Tabelle 3.2: Die Resultate der Polmassen $m(J^{PC})$ in Einheiten der Stringtension $\sqrt{\sigma} = 420\text{MeV}$ für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur. Die Ergebnisse beziehen sich auf die MEM-Analysen aus den Tabellen 2.7 bis 2.12. Die Reihenfolge der Zustände von oben nach unten richtet sich in dieser Tabelle nach der Massenfolge der Zustände bei $T = 0$ in $SU(3)$ (siehe [60], Tabelle 1). Die Massenfolge der letzten beiden Zustände, 3^{++} und 1^{-+}, ist sortiert nach den Erwartungen in $SU(2)$. Die Masse des Zustandes 1^{-+} bei $T = 0.90T_c$ konnte mit MEM nicht bestimmt werden. Wir haben daher den Schätzwert aus dem hyperbolischen Fit in eckigen Klammern eingetragen (siehe auch Tabelle 2.10).

Sachverhalt bleibt auch unter Berücksichtigung der angegebenen Fehler bestehen. Bemerkenswert ist dabei, dass der angegebene Wert der Masse $m(3^{++})/\sqrt{\sigma} = 3.0 \pm 3.0$, im Rahmen der Messgenauigkeit auch mit einer verschwindenden Masse verträglich ist (der Fehler entspricht 100% des Massenwertes).

Wir halten fest, dass dieser Wert zwar in dem Sinne theoretisch vertretbar ist, dass man kleine Massen nahe bei T_c erwartet, aber aufgrund des ernormen Fehlers mit Vorsicht behandelt werden sollte. Eine Fixierung der Masse des 1^{-+}-Zustandes bei $T = 0.90T_c$ konnte mit der MEM-Analyse nicht erfolgreich durchgeführt werden. Wir haben daher eine Abschätzung dieser Masse mit Hilfe eines hyperbolischen Fits durchgeführt. Da die Polmasse bei dieser Methode tendenziell überschätzt wird, haben wir den Wert in eckige Klammern gesetzt. Dieses soll andeuten, dass wir den Polmassenwert des 1^{-+}-Glueballs als eine obere Massengrenze verstehen: $m(1^{-+}) \lesssim 18\sqrt{\sigma} \simeq 7560\text{MeV}$. Der Massenwert erscheint plausibel, da er in der Größenordnung der Masse bei $T = 0.75T_c$ liegt und somit zumindest plausibel erscheint.

Betrachten wir dagegen das Temperaturverhalten der Glueball-Zustände, so stellen wir fest, dass teilweise ein *unerwartetes Anwachsen der Massen mit zunehmender Temperatur* angezeigt wird. Im Rahmen der Fehlergrenzen sind unsere Massenwerte aber auch mit einem Abfall der Polmassen verträglich. Eine Ausnahme bildet die Temperaturabfolge des 2^{-+}-Zustandes. Hier ist das Temperaturverhalten im Rahmen der Fehlergrenzen höchstens als konstant anzusehen. Wir bemerken an dieser Stelle, dass unsere Daten tendenziell auf ein Anwachsen der Massen bei steigender Temperatur hindeuten.

3.1.2 Polmassen im Kontext mit $T = 0$ Gitterrechnungen

Wir vergleichen in den weiteren Ausführungen unsere Resultate mit den Ergebnissen aus $T = 0$ Gitterrechnungen [1, 60]. Hierfür haben wir unser Polmassenspektrum aus Tabelle

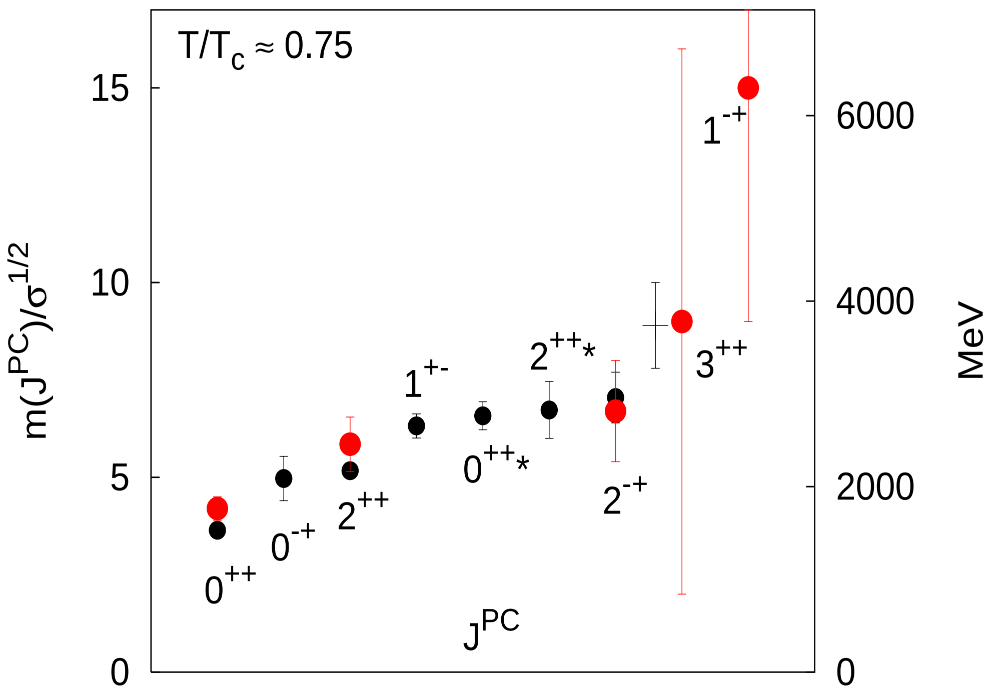

Abbildung 3.1: Das Polmassenspektrum der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie bei $T = 0.75T_c$ ($\beta \equiv 4.8393$, $N_\sigma^3 \times N_\tau = 32^3 \times 16$). Die Zustände J^{PC} sind nach aufsteigender Masse sortiert (von links nach rechts). Eingetragen sind die Polmassen $m(J^{PC})$ in Einheiten der Stringtension ($m(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$ mit $\sqrt{\sigma} = 420\text{MeV}$) und direkt in MeV bis einschließlich $J = 3$. Die roten Kreise, einschließlich der angezeigten Fehler, symbolisieren die Polmassen aus der MEM-Analyse. Zum Vergleich haben wir die ($T = 0$)-Daten [1, 60] als schwarze Kreise mit Fehlern eingezeichnet.

3.2 zusammen mit dem Spektrum bei $T = 0$ in Abbildung 3.1 (bei $T = 0.75T_c$) und Abbildung 3.2 (bei $T = 0.90T_c$) grafisch zusammengestellt. Die Skala der x-Achse ist in beiden Abbildungen als Nominalskala zu verstehen und zeigt lediglich die Quantenzahlen der Zustände J^{PC} an. Die Reihenfolge entspricht der Massenfolge der $T = 0$ Glueball-Massen. Auf der linken Skala der Abbildungen sind die Glueball-Polmassen in Einheiten der Stringtension $m(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$ angegeben, auf der rechten Skala in MeV.

Betrachten wir zunächst unsere Daten bei $T = 0.75T_c$ (vergleiche Abbildung 3.1). Die schwarzen Punkte stellen die Ergebnisse der Gitterrechnungen ([1, 60] und Referenzen) dar während die roten Punkte den Werten aus Tabelle 3.2 entsprechen. Die zwei Zustände 0^{++*} und 2^{++*} sind hierbei nicht mehr die Grundzustände sondern die ersten Anregungszustände. Die energetisch niedrigsten Zustände erscheinen in diesem Bild auf der linken Bildhälfte, z.B. 0^{++}, 0^{-+} bis 0^{++*}, die massiveren Zustände sind der Massenfolge entsprechend weiter rechts angeordnet. Diese Abbildung zeigt, dass unsere Massen verglichen mit ihren $T = 0$ Gegenstücken zwar einen deutlichen Trend in Richtung größerer Massen anzeigen, jedoch innerhalb der Fehlergrenzen mit den Werten bei $T = 0$ vereinbar sind. Zum Beispiel liegen die Werte der niedrigsten beiden Polmassen bei $T = 0.75T_c$ (0^{++} und

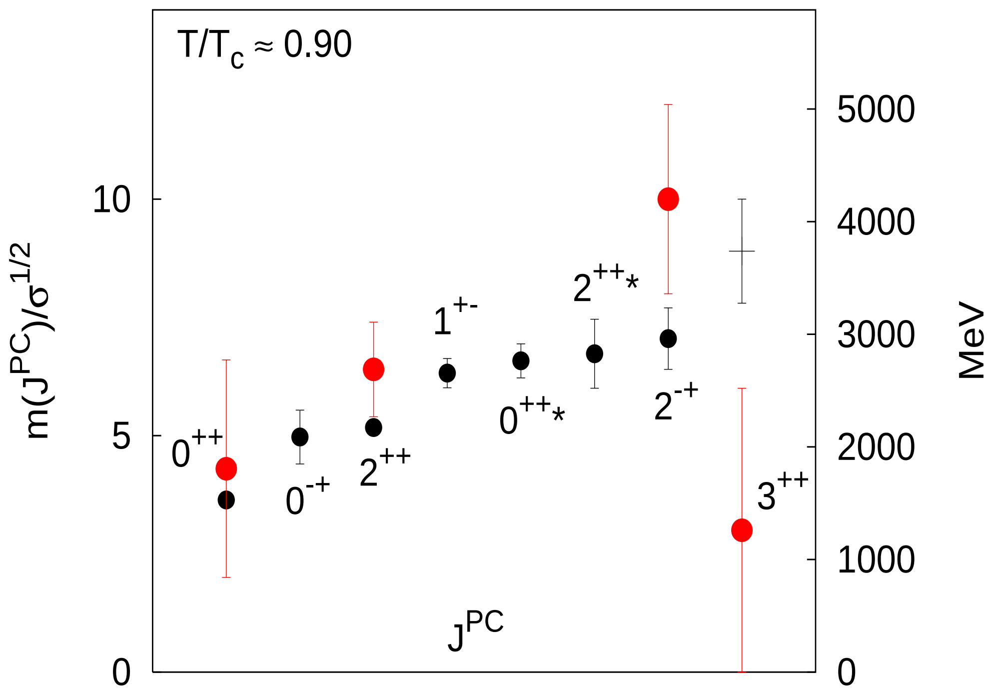

Abbildung 3.2: Das Polmassenspektrum der 'quenched' QCD-Gitter-Eichtheorie nahe unterhalb der Confinement-Deconfinement-Phasengrenze ($T = 0.90T_c$). Die Massen der Zustände sind von links nach rechts nach aufsteigender Masse sortiert. Die roten Kreise, einschließlich der angezeigten Fehler, symbolisieren die Polmassen aus der MEM-Analyse. Zum Vergleich haben wir erneut die ($T = 0$)-Daten [60] als schwarze Kreise mit Fehlern eingezeichnet. Wir erwarten, dass die in diesem Bild dargestellten Resultate stark von den Vakuum-Fluktuationen (siehe auch Abbildung 2.22 und zugehörige Diskussion der Fehler) beeinflusst sind.

2^{++}) leicht über den $T = 0$ Massen, die Fehlerbereiche beider Rechnungen überlappen sich jedoch. Die Polmasse des 2^{-+}-Glueballs erscheint bei $T = 0.75T_c$ dagegen etwas niedriger als der identische Zustand bei $T = 0$ (Massendifferenz $\simeq 100MeV$). Betrachten wir die Massen der Zustände der 3^{++}-Gluebälle, so fällt zunächst auf, dass ein deutlicher Massensprung zwischen diesem Wert und den Massen mit $J \leq 2$ entsteht, zum anderen aber auch der Fehlerbereich einige 1000 MeV umfasst. Im Rahmen dieser Ungenauigkeit ist der Massenwert auf ein Energie-Intervall von etwa 800MeV bis 6600MeV festgelegt. Lässt man den Fehler außer Acht, so besteht jedoch eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit dem $T = 0$ Wert [1] (angezeigt durch ein schwarzes Kreuz).

Auch für den 1^{-+}-Zustand bei $T = 0.75T_c$ stellen wir einen auffälligen Massensprung im Spektrum der Glueball-Massen fest. Obwohl der Fehler auf diesem Wert ebenfalls einige Größenordnungen der Energieskala umfasst, ist dieser Massenunterschied in dem Sinne signifikant, dass auch unter Berücksichtigung der Fehlerbreite keine Überlappung mit den Zuständen 0^{++}, 0^{-+}, 2^{++}, 1^{+-} und 2^{-+} zustande kommt. Dieses trifft auch auf die angeregten Zustände 0^{++*} und 2^{++*} zu. Dieser Massensprung kann dadurch erklärt werden, dass ein 1^{-+}-Glueball aus mehr als zwei Gluonen besteht. Wir bemerken aber auch, dass die Masse des 1^{+-}-Glueballs bei $T = 0$ eine deutlich kleinere Masse als der 1^{-+}-Glueball besitzt, obwohl sich auch dieser Zustand nicht als gg-Glueball verstehen lässt.

Gehen wir nun kurz auf Abbildung 3.2 ein. Dargestellt sind die Polmassen bei $T = 0.90T_c$ wie in Abbildung 3.1 (dort bei $T = 0.75T_c$). Auffällig sind besonders zwei Effekte: Zum einen zeigen unsere Ergebnisse teilweise deutlich höhere Massen als das $T = 0$ Spektrum an (siehe z.B. 2^{++} und 2^{-+}). Zum anderen ist der Massenwert des 3^{++}-Zustands mit einer verschwindenden Masse vereinbar. Lediglich der 0^{++}-Zustand lässt im Rahmen der Fehlergrenzen eine kleinere Masse zu.

Zum Abschluss dieser Diskussion stellen wir fest, dass sich die Massenfolge auch bei $T = 0.75T_c$ und $T = 0.90T_c$ im Bild der gg- und ggg-Gluebälle (zumindest grob) verstehen lässt. Betrachten wir zum Beispiel den einfachsten Fall, also gg-Gluebälle, so ergibt sich die Abfolge des Massenspektrums aus dem Aufbau der Gluebälle durch Gluonen mit aufsteigendem Bahndrehimpuls (vergleiche auch Tabelle 3.1). Der energetisch niedrigste Zustand gehört in diesem naiven Bild zu $L = 0$ und umfasst 0^{++} und 2^{++} als Zustände. Der Zustand 2^{-+} ist ein gg-System mit $L = 1$, was die etwas höhere Masse erklärt. Auffällig ist die relativ große Massendifferenz zwischen dem 3^{++}- und dem 1^{-+}-Zustand. Dieser Massensprung erklärt sich dadurch, dass ein 1^{-+}-Glueball nicht aus einem gg-System aufgebaut wird. Obwohl dieses Modell im Sinne masseloser Gluonen sicherlich naiv ist, halten wir doch fest, dass unsere Daten andeuten, dass thermale Effekte die gewohnte Massenfolge *nicht* zerstören. Dieses kann bedeuten, dass die thermalen Effekte unterhalb T_c, energetisch verglichen mit den Polmassen, nur eine untergeordnete Rolle spielen.

3.1.3 Polmassen oberhalb T_c $(T > T_c)$

In diesem Abschnitt diskutieren wir kurz die Ergebnisse der Polmassen für Temperaturen oberhalb des Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs. Zunächst einmal ist zu bemerken, dass in dieser Phase die Bindungen gewöhnlicher hadronischer Materie aufbrechen und die Quark-Materie in einen neuen Zustand, das sogenannte Quark-Gluon-Plasma übergeht. Obwohl dieser Phasenzustand experimentell noch nicht, oder zumindest noch nicht zweifelsfrei, nachgewiesen worden ist [11], so gilt seine Existenz in der QCD als Theorie der Quark-Materie zumindest im Sinne der asymptotischen Freiheit als unumstritten (siehe auch Ausführungen im ersten Kapitel). Man erwartet, dass auch die Gluonen in der Deconfinement-Phase keine gebundenen Zustände bilden. Erste theoretische Aspekte der Gluebälle oberhalb der kritischen Temperatur wurden in [2] untersucht. Diesen Arbeiten folgend sind gebundene Zustände kurz oberhalb von T_c zumindest nicht völlig ausgeschlossen. Es ist daher sicherlich interessant, ihre Eigenschaften mit der MEM-Analyse zu studieren.

Unsere Resultate der Polmassenbestimmung in Tabelle 3.3 sind aus dem Anhang D entnommen. Abbildung 3.3 zeigt exemplarisch die Spektralfunktion der Operatorkorrelation $\mathcal{S}_{F1}$ und $\mathcal{S}_{F3}$ bei $T = 1.5T_c$. Diese beschreiben die Korrelationen der 0^{++}- und 2^{++}-

Glueblälle im Sinne einer Spektralfunktion[2]. Die entsprechenden Resultate der MEM-Analyse der höheren Zustände sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst. Betrachtet man

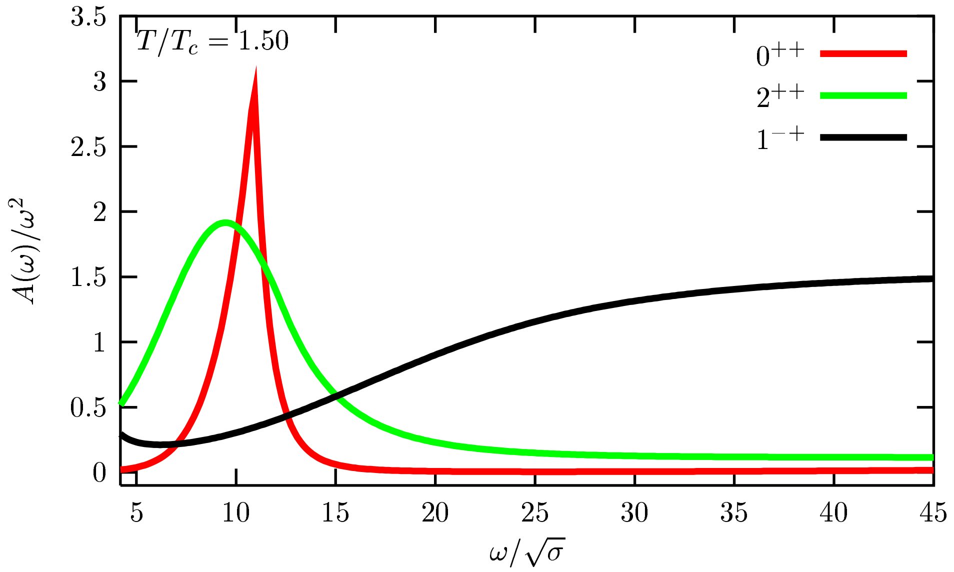

Abbildung 3.3: Spektralfunktionen der Zustände $0^{++}, 2^{++}$ und 1^{-+} bei $T = 1.50T_c$ ($\beta \equiv 5.4261$, $N_\sigma^3 \times N_\tau = 32^3 \times 16$).

	$T = 1.50T_c$
Zustand $(1/N \sum_i x_i)$	$m(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$
0^{++}	10.4(7)
2^{++}	10(3)
2^{-+}	13(7)
3^{++}	17(4)
1^{-+}	–

Tabelle 3.3: Die Resultate der Polmassen $m(J^{PC})$ in Einheiten der Stringtension $\sqrt{\sigma} = 420\text{MeV}$ für Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur.

zunächst die Spektraldarstellung des 0^{++}-Operators in Termen von $\mathcal{S}_{F1}$, so ist ein deutliches Maximum in der Spektralfunktion bei $\omega/\sqrt{\sigma} \simeq 10.4(7)$ zu erkennen. Dies deutet im Sinne der Spektralfunktion auf einen gebundenen massiven Zustand mit $m(0^{++}) \simeq 10.4(7)$ hin. Das Verhalten der Korrelation des 2^{++}-Zustands zeigt dagegen bereits deutliche 'Verunreinigungen' des Grundzustandes. Das Massenspektrum wird aber noch deutlich von einem Hauptmaximum bei $\omega/\sqrt{\sigma} = 10(3)$ dominiert. Wir halten fest, dass die Untersuchung der Glueball-Polmassen bei $T = 1.5T_c$ mit der MEM die Existenz von ge-

[2]Beide Korrelationen sind bereits in [2] untersucht worden. In diesen Arbeiten wird die Spektralfunktion allerdings auf Basis der Breit-Wigner-Amplitude studiert. Daher eignen sich diese beiden Korrelationsfunktionen besonders für eine vergleichende Diskussion mit der MEM-Methode.

bundenen Zuständen nicht ausschließen kann. Lediglich die Spektraldarstellung der 1^{-+}-Zustandskorrelation deutet an, dass keine gebundenen Glueballe mit dieser Konfiguration auftreten.

3.2 Räumliche Korrelationslängen

3.2.1 Raumartige Korrelationen unterhalb T_c $(T < T_c)$

Die folgende Diskussion der räumlichen Korrelationen stützt sich auf die Resultate der MEM-Analyse. Unsere Ergebnisse für die beiden Temperaturen $0.75T_c$ und $0.90T_c$ sind in Tabelle 3.4 zusammengefasst. Um eventuelle Schwierigkeiten mit der Begrifflichkeit der Spektraldarstellung von räumlichen Korrelationen zu klären, haben wir in der Tabelle die inversen Korrelationslängen in Einheiten der Stringtension eingetragen. Sie sind unmittelbar als Massen zu verstehen: $\gamma^{-1}(J^{PC}) \simeq m(J^{PC})$ (für eine umfassendere Erklärung der Begrifflichkeiten verweisen wir an dieser Stelle auf unsere Erläuterungen in Kapitel 2.3.2). Um die Diskussion übersichtlicher zu gestalten, haben wir in Abbildung

	$0.75T_c$	$0.90T_c$
Zustand $(1/N \sum_i x_i)$	$\gamma^{-1}(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$	$\gamma^{-1}(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$
0^{++}	3.9 ± 0.2	1.9 ± 1.4
2^{++}	5.1 ± 1.7	5.4 ± 2.4
2^{-+}	6.3 ± 1.5	–
3^{++}	9.0 ± 5.0	8.0 ± 1.0
1^{-+}	5.6 ± 0.6	7.0 ± 3.3

Tabelle 3.4: Zusammenstellung der Ergebnisse aus der MEM-Analyse der räumlichen Korrelationen zu den Zuständen J^{PC} mit $J = 0, 1, 2, 3$. Wir bezeichnen die räumlichen Korrelationslängen mit $\gamma(J^{PC})$. Die inversen Korrelationslängen sind mit Massen vergleichbar. Daher haben wir in dieser Tabelle die *inversen Korrelationslängen* angegeben. Die Anordnung der Zustände in einer Massenfolge erfolgt nach den Erwartungen der Polmassen bei $T = 0$ (wie bei Tabelle 3.2).

3.4 zusätzlich zu Tabelle 3.4 beispielhaft die spektrale Darstellung der Korrelationen für eine 0^{++}- (rote Linie), 2^{++}- (grüne Linie) und für eine 3^{++}-Zustands-Korrelation (blaue Linie) abgebildet. Die entsprechenden Glueballe lassen sich in dem eingangs eingeführten Bild als gg-Glueballe verstehen. Um Unterschiede der spektralen Darstellung der Operatorkorrelationen zu den ggg-Glueballen erfassen zu können, haben wir in Abbildung 3.4 zusätzlich auch die spektrale Zerlegung der 1^{-+}-Korrelation angezeigt. Sie wird durch die schwarze Linie repräsentiert. Alle Darstellungen der Korrelation im Frequenzraum beziehen sich auf $T = 0.75T_c$. Ihre Temperaturabhängigkeit wird in diesem Bild durch die rote gepunkteten Linie angedeutet. Sie bezieht sich auf eine Darstellung der gleichen Operatorkorrelation des 0^{++}-Zustandes bei $T = 0.90T_c$. Die Temperaturabhängigkeit der inversen Korrelationslängen ist in Tabelle 3.4 aufgelistet. Betrachten wir zunächst die tabellierten Ergebnisse: Die Abfolge der inversen Korrelationslängen bei $T = 0.75T_c$ entspricht den Erwartungen für die *Polmassen-Abfolge* bei $T = 0$ in dem Sinne, dass die Korrelationslängen

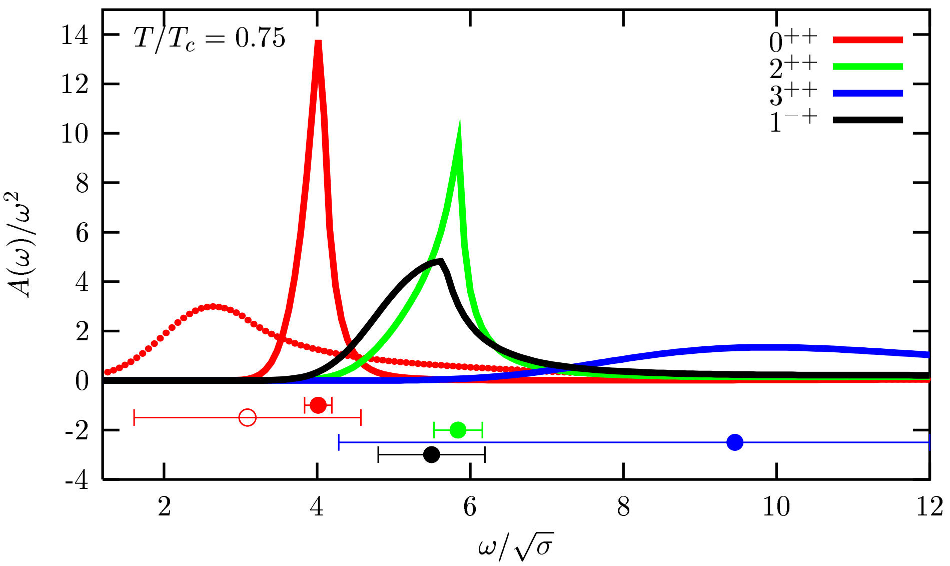

Abbildung 3.4: Spektrale Zerlegung raumartiger Korrelationsfunktionen unterhalb von T_c. Eingezeichnet sind die Zustände $0^{++}, 2^{++}, 3^{++}$ und 1^{-+} bei $T = 0.75T_c$ ($\beta \equiv 4.8393$, $N_\sigma^2 \times N_\tau \times N_z = 32^2 \times 16 \times 32$). Gepunktet ist zudem ein entsprechender 0^{++}-Zustand bei $T = 0.90T_c$ eingezeichnet. Unterhalb der Abszisse sind die Fehler dargestellt, die wir mit Hilfe der Jackknife-Methode berechnet haben.

$\gamma(J^{PC})$ in der Reihe 0^{++}, 2^{++}, 2^{-+} und 3^{++} abnehmen. Sie gehören zu Glueballen, die sich im einfachsten Fall als gg-Glueballe verstehen lassen. Eine Ausnahme in dieser Abfolge bildet die räumliche Korrelation des 1^{-+}-Zustandes: Seine inverse Korrelationslänge $\gamma^{-1}(1^{-+})$ ordnet sich bei $T = 0.75T_c$ zwischen die Zustände 2^{++} und 2^{-+} ein. Allerdings lassen die Fehlerbereiche auch andere Anordnungen zu. Es ist z.B. durchaus möglich, dass die inverse Korrelationslänge des 1^{-+}-Zustandes größer als die aller übrigen tabellierten Zustände ist. Eine detailliertere Diskussion der Größenverhältnisse der Korrelationen lässt der Fehlerbereich der Daten nicht zu.

Betrachtet man die Temperaturabhängigkeit der Korrelationslängen, so wird deutlich, dass die inversen Korrelationen bei steigender Temperatur abfallen. Wir bemerken, dass das Verhältnis der Korrelationslängen des 0^{++}-Zustandes um ca. 50% reduziert wird, im Rahmen der Fehlergrenzen aber eine Reduktion zwischen 12% und maximal 82% möglich ist. Darüber hinaus zeigen die Verhältnisse der anderen inversen Korrelationslängen keinen vergleichbar drastischen Abfall bei einer Temperaturerhöhung. In der Tat ist ein Anwachsen der inversen Korrelationslängen für die Korrelationen der 2^{++}-, 3^{++}- und 1^{-+}-Zustände mit steigender Temperatur nicht ausgeschlossen. In groben Zügen ist das Temperaturverhalten der inversen Korrelationslängen mit dem der Polmassen vergleichbar.

Zum Abschluss dieser Diskussion wenden wir uns nun den spektralen Zerlegungen der räumlichen Korrelationen unterhalb von T_c zu. In Abbildung 3.4 sind beispielhaft die Ergebnisse für die Zustände 0^{++}, 2^{++} und 3^{++} (in der angegebenen Reihenfolge: rot, grün, blau) sowie für die Operatorkorrelation des 1^{-+}-Zustandes (schwarze Linie) dargestellt.

Zusätzlich ist die Frequenzraumzerlegung des 0^{++}-Zustands bei $0.90T_c$ in die Abbildung mit aufgenommen. Die Korrelationsfunktionen führen zu spektralen Darstellungen mit sehr ausgeprägten Peaks. Dieses bedeutet, dass die Operatoren hauptsächlich auf den jeweiligen Grundzustand der Korrelation projizieren. Eine Ausnahme bildet lediglich die Darstellung der 3^{++}-Korrelation. Hier ist der Peak sehr breit, wodurch sich die 'wahrscheinlichste' Frequenz ω nur sehr ungenau bestimmen lässt. Eine Analyse-Möglichkeit für die Extraktion der räumlichen Korrelationslängen ist die MEM-Analyse. Es bleibt zu erwähnen, dass die spektrale Darstellung der räumlichen Korrelationen für Energien in der Größenordnung von ω den störungstheoretischen Erwartungen von Polmassenspektren entspricht: $A(\omega) \simeq \omega^2$ (siehe rechter Bildrand).

3.2.2 Raumartige Korrelationen oberhalb T_c $(T > T_c)$

Unsere Ergebnisse für die inversen Korrelationslängen oberhalb von T_c haben wir in Tabelle 3.5 aus Anhang D zusammengefasst. Die Resultate sind bis auf den 0^{++}-Zustand allesamt mit sehr großen Fehlern behaftet. In Abbildung 3.5 haben wir exemplarisch die spektrale Zerlegung der vier Zustände $0^{++}, 2^{++}, 3^{++}$ und 1^{-+} geplottet. Nur für den 0^{++}-Zustand ist ein einigermaßen gepeakter Verlauf erkennbar, aber auch hier ergibt sich ein flacher Abfall bei steigendem $\omega/\sqrt{\sigma}$ zu verzeichnen. Die anderen drei Funktionen weisen wesentlich kompliziertere Verläufe auf, die alle noch zusätzliche Nebenmaxima beinhalten. Der 1^{-+}-Zustand (schwarze Linie) zeigt erneut ein unterschiedliches Verhalten oberhalb von T_c. Hier sieht man deutlich ein Ansteigen vom ersten zum zweiten lokalen Maximum, wobei für große ω die Spektralfunktion $A(\omega)/\omega^2$ wieder abfällt (im Gegensatz zum Verhalten der schwarzen Linie im Bild 3.3).

	$T = 1.50T_c$
Zustand $(1/N \sum_i x_i)$	$\gamma^{-1}(J^{PC})/\sqrt{\sigma}$
0^{++}	7(1)
2^{++}	8(7)
2^{-+}	11(10)
3^{++}	7(3)
1^{-+}	–

Tabelle 3.5: Die Resultate der Screeningmassen $\gamma^{-1}(J^{PC})$ in Einheiten der Stringtension $\sqrt{\sigma} =$ 420MeV für Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur.

3.3 Weitere Diskussion: Ergebnisse im Vergleich

3.3.1 Gitterrechnungen zu Polmassen

Die ersten Resultate aus MC-Simulationen der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie stammen von B. Berg und A. Billoire [37]. Ihre Studien sind im Laufe der Zeit in vielerlei Hinsicht verbessert worden [61, 62], wir geben hier die Werte von C. J. Morningstar und M.

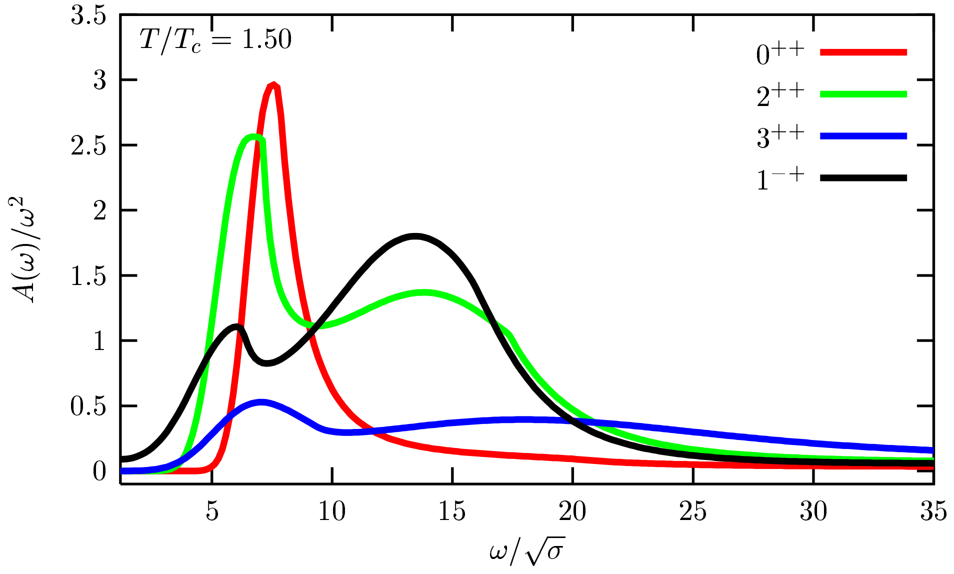

Abbildung 3.5: Spektrale Zerlegung raumartiger Korrelationsfunktionen oberhalb von T_c.

PEARDON [62] an:

$$\frac{m(E^{++})}{m(A_1^{++})} = \frac{m(T_2^{++})}{m(A_1^{++})} \sim 1.39 \pm 0.13 \tag{3.1}$$

In Tabelle 3.6 haben wir unsere Ergebnisse in der Form von (3.1) aufgelistet. Für die Massenverhältnisse $m(E^{++})/m(A_1^{++})$ und $m(T_2^{++})/m(A_1^{++})$ erhalten wir für beide Temperaturen in den Fehlergrenzen eine gute Übereinstimmung mit dem Wert in (3.1). Bei $0.90T_c$ sind die Fehlerbereiche erneut sehr groß. Abbildung 3.6 zeigt unsere Verhältnisse zusammen mit denen von [2] und [62] geplottet.

Polmassenverhältnis	$T = 0$ (aus [62])	$T = 0.75T_c$	$T = 0.90T_c$
$\frac{m(E^{++})}{m(A_1^{++})}$	1.39 ± 0.13	1.38 ± 0.27	1.58 ± 0.99
$\frac{m(T_2^{++})}{m(A_1^{++})}$		1.40 ± 0.27	1.49 ± 1.03
$\frac{m(T_1^{-+})}{m(A_1^{++})}$	–	3.57 ± 1.68	–
$\frac{m(T_2^{-+})}{m(A_1^{++})}$	1.79 ± 0.19	1.60 ± 0.42	2.33 ± 1.71
$\frac{m(A_2^{++})}{m(A_1^{++})}$	2.13 ± 0.20	2.14 ± 1.82	0.70 ± 1.07

Tabelle 3.6: Die Temperaturabhängigkeit der Polmassen $m(E^{++})$, $m(T_2^{++})$, $m(T_1^{-+})$, $m(T_2^{-+})$ und $m(A_2^{++})$ im Verhältnis zu $m(A_1^{++})$. Der Berechnung der $T = 0$ Verhältnisse haben wir (soweit vorhanden die Daten aus Tabelle VII in [62] zugrunde gelegt.

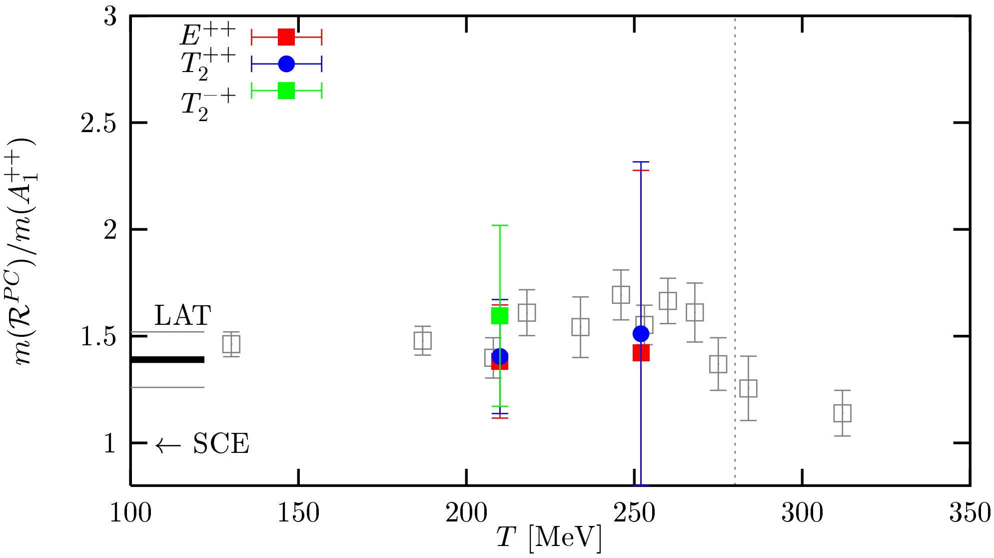

Abbildung 3.6: Die Temperaturabhängigkeit der $\mathcal{R}^{PC}$-Darstellungen E^{++}, T_2^{++} und T_2^{-+} im Verhältnis zu A_1^{++}. Die grauen Quadrate zeigen die Werte von [2] als Analogon zu $m(E^{++})/m(A_1^{++})$ (siehe auch Tabelle 3.6). Die senkrechte gestrichelte Linie zeigt die kritische Temperatur $T_c \simeq 280$MeV an. Am linken Bildrand sind die Erwartungen der starken Kopplungsentwicklung (SCE) und die Resultate von [62] (LAT) angezeigt.

3.3.2 Gitterrechnungen zu Glueball-Screening

Auch räumliche Glueball-Korrelationen sind vielfach Gegenstand von Untersuchungen auf dem Gitter. Wir folgen hier den Arbeiten [3], da diese sich unmittelbar mit unseren Resultaten vergleichen lassen. So werden in [3] auch räumliche Korrelationen bei $T = 0.75T_c$ und $T = 1.5T_c$ in der $SU(3)$-Gitter-Eichtheorie untersucht. Die Autoren verwenden Gitter der Größe $16^3 \times N_\tau$ mit $N_\tau = 4, 6, 8$ und Wilson-Loops der Länge 4 und 6 mit sogenannten 'fuzzy-links' [46]. Resultate sind in Form der effektiven Masse angegeben.

Damit wir die Screeningmassenverhältnisse mit unseren Daten vergleichen können, müssen wir auf die Resultate in den Tabellen 2.13, 2.14, 2.15, zurückgreifen und mit Hilfe der Tabelle 9 aus [3] die Massenverhältnisse berechnen. Bis auf die Resultate aus der B_2++-Darstellung stimmen unsere Ergebnisse in den Fehlergrenzen mit denen von [3] überein.

Darstellung des 2^{++}-Zustand	$\frac{\gamma^{-1}(\mathcal{R}^{PC};T=0.75T_c)}{\gamma^{-1}(A_1^{++};T=0.75T_c)}$	$\frac{\gamma^{-1}(\mathcal{R}^{PC};T=0.75T_c)}{\gamma^{-1}(A_1^{++};T=0.75T_c)}$ aus [3]
$A_1^{++} \to E^{++}$	1.38 ± 0.28	2.17 ± 0.81
$B_1^{++} \to E^{++}$	0.90 ± 1.28	2.17 ± 0.60
$B_2^{++} \to T_2^{++}$	1.41 ± 0.25	2.61 ± 0.67

Tabelle 3.7: Zusammenstellung der Ergebnisse aus der MEM-Analyse der räumlichen Korrelationen zu den Zuständen $2^{++}/A_1^{++}$ im Vergleich zu den Daten aus [3]. Die Darstellungen entsprechen den Konventionen aus Anhang C. So tragen z.B. zur B_1^{++}-Darstellung $\mathcal{V}_{F3}$, $\mathcal{V}_{B3}$, $\mathcal{V}_{S4}$ und $\mathcal{V}_{S5}$ bei.

3.3.3 Bemerkungen zu alternativen Zugängen

Neben dem Zugang über Gitterrechnungen existiert eine Reihe weiterer Möglichkeiten das Glueball-Massenspektrum zu analysieren und gegebenenfalls auf eine Temperaturabhängigkeit der Massen zu schließen. In diesem Abschnitt gehen wir auf die Erwartungen des *MIT-Bag-Modells* ein und diskutieren die Glueball-Massen im Bild der *Potentialmodelle*.

Wir behandeln zunächst das Massenspektrum des MIT-Bag-Modells. In diesem Modell, welches ursprünglich den Einschluss von Quarks zu Hadronen (Confinement) erklären sollte, bewegen sich die Gluonen frei in einer kugelförmigen Zone vom Radius R, welche als Blase ("bag") im Vakuum sitzt und die Gluonen einschließt. Die Randbedingung, dass die Gluebälle farblose Kombinationen sind, überträgt sich auf das Bag-Modell in Form der Bedingung, dass kein Farbladungsstrom durch die Oberfläche nach außen fließt, und führt zu einer Diskretisierung des Bahndrehimpulses der Gluonen. Die Masse eines solchen Systems lässt sich aus thermodynamischen Gleichgewichtsbedingungen für den Druck der im Bag eingeschlossenen Teilchen gegen das äußere Vakuum ableiten. Dieser 'Bag-Druck' ist in diesem Modell der einzige freie Parameter, kann aber durch Stabilitätsbedingungen abgeschätzt werden. Da der Drehimpuls der eingeschlossenen Gluonen diskret ist, richtet sich das Massen- bzw. Drehimpulsspektrum des Bag-Modells nach der Anzahl der

eingeschlossenen Gluonen. Wir folgen hier einem Bag-Modell mit zwei Gluonen: Der Gesamtdrehimpuls J des Bags, setzt sich aus den Spins der Gluonen ($S = 1$) sowie dem relativen Bahndrehimpuls L zusammen. Das Massenspektrum eines gg-Glueballs ist demnach für die niedrigsten beiden Bahndrehimpulse L:
$J^{PC} = 0^{++}, 2^{++}$ für $L = 0$ und $J^{PC} = 0^{-+}, 2^{-+}$ für $L = 1$. Für einen ggg-Bag dagegen, ergeben analoge Überlegungen zu $L = 0$ das Massenspektrum der Zustände $J^{PC} = 0^{-+}, 1^{--}$ und 3^{--}. Im Fall von (masselosen) Gluonen entartet das Massenspektrum entsprechend den Randbedingungen der Farbfelder an der Oberfläche der Kugel in farbelektrische[3] und farbmagnetische Glueballe.
Ein weiterer Zugang zu Glueball-Massen ist die Betrachtung von Potentialmodellen [57, 58]. Hierbei wird für die gg-Glueballe ein Potential als Summe von Yukawa-, Spin-Bahn-, Spin-Spin- und Tensorkraft-Potentialen angesetzt. Die beiden Zustände 0^{++} und 2^{++} in Tabelle 3.8 haben wir in geschweifte Klammern gesetzt, da sie als Inputparameter bei festem Verhältnis ($\simeq 1.39$) dienen. Unsere Massen der exotischen Zustände weisen zwar sehr große Fehler auf, sind aber verträglich mit den Resultaten aus den Potentialmodellen [58].

n	L	S	J^{PC}	$m_{\text{Pot.}}$(MeV)	m_{mem} (MeV)
1	0	0	0^{++}	$\{1730\}$	1638 ± 126
		2	2^{++}	$\{2400\}$	2478 ± 294
2	0	0	$0^{++}\star$	2710	–
		2	$2^{++}\star$	2730	–
	1	1	0^{-+}	2570	–
			1^{-+}	2605	6300 ± 2940
			2^{-+}	2615	2814 ± 546
3	2	2	3^{++}	2694	3780 ± 2940

Tabelle 3.8: Zusammenstellung der Ergebnisse $m_{\text{Pot.}}$ aus [58] im Vergleich mit unseren MEM-Resultaten aus Tabelle 3.2 für Korrelationsfunktionen zu den Zuständen J^{PC} mit $J = 0, 1, 2, 3$ (n bezeichnet hier die Hauptquantenzahl). Die beiden in geschweiften Klammern gesetzten Werte dienen dem Potentialmodell als Inputparameter. Die beiden angeregeten Zustände $0^{++}\star$ und $2^{++}\star$ und den 0^{-+}-Zustand haben wir nicht berechnet, sondern geben sie hier nur der Vollständigkeit halber mit an.

3.3.4 Physikalische Relevanz

In diesem letzten Abschnitt wollen wir kurz unsere Ergebnisse mit den experimentellen Daten vergleichen. Als mögliche Kandidaten für die Zustände 0^{++} und 2^{++} werden in [14] $f_0(1500)$ bzw. $f_2(1980)$ angegeben. Sie haben exotische Eigenschaften, die diese Zustände zu idealen Kandidaten für mögliche Glueballe machen. Sie weisen noch einmal explizit dar-

[3] Die Einteilung der Gluonen nach farbelektrischen und farbmagnetischen Eigenschaften kann in völliger Analogie zur Quantenelektrodynamik verstanden werden: Auch hier werden die Feldkomponenten der Gluonen dem Feldstärke-Tensor entsprechend in farbelektrische und -magnetische Komponenten zerlegt.

auf hin, dass die aktuellen Gitterdaten mit einem systematischen Fehler von 10% behaftet sind.

Polmassenverhältnis	$T = 0.75T_c$	$T = 0.90T_c$	Experimentelle Kandidaten
$\frac{m(2^{++})}{m(0^{++})}$	1.39 ± 0.27	1.54 ± 1.01	1.32 ± 0.03

Tabelle 3.9: Zusammenstellung der Glueball-Massenverhältnisse für den Quotienten $m(2^{++})/m(0^{++})$. Wir listen hier unsere Daten im Vergleich mit aktuellen experimentellen Anwärtern [14] für die Glueballzustände 0^{++} und 2^{++} auf.

Zusammenfassung und Ausblick

Im ersten Kapitel dieser Arbeit haben wir die wesentlichen Grundbegriffe der Theorie der starken Wechselwirkung, der QCD, eingeführt und die Notwendigkeit nicht-störungstheoretischer Methoden diskutiert. Im Kontext der Massenberechnungen von Glueballen haben wir die Gitterregularisierung der $SU(3)$-Eichtheorie erläutert und die Klassifizierung der Glueball-Zustände durch kubische Gruppen auf dem Gitter erörtert.

Nach einer kurzen Einführung in die Prinzipien der Monte-Carlo-Simulationstechnik auf dem Gitter haben wir im zweiten Kapitel die Glueball-Operatoren für unsere Rechnungen zusammengestellt. Da es Ziel dieser Arbeit ist, Grundzustände aus dem Exponentialverhalten der Operatorkorrelationen zu extrahieren, haben wir die Smearing-Methode für unsere Operatoren sowohl für zeitliche als auch für räumliche Korrelationsmessungen implementiert. Dieses Vorgehen ermöglichte es uns schließlich Operatoren anzugeben, die sowohl in räumlichen als auch in zeitlichen Korrelationen die Grundzustände ausreichend hervorheben. Daraufhin haben wir verschiedene Auswertungstechniken zur Extraktion der Korrelationsmassen entwickelt. Wir verwendeten die Best-Fit-Analyse, die Formulierung effektiver Massen und erstmals auch die Maximum-Entropie-Methode. Dabei haben wir besonderen Wert darauf gelegt, dass die Auswertungstechniken sich gegenseitig kompensieren, mit dem Ziel, systematische Fehler aufzudecken und zu kontrollieren. Zum Beispiel haben wir gezeigt, dass die Best-Fit-Methode die Massenwerte systematisch überschätzt, da immer höhere Spin-Beiträge die Korrelation überlagern. Nach einer groben Abschätzung der Operatorgröße auf dem Gitter mittels der Smearing-Methode haben wir begonnen die einzelnen Korrelationsfunktionen zu analysieren. Wir haben hierbei festgestellt, dass die MEM-Analyse für unsere Zwecke am besten geeignet ist.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit haben wir Ergebnisse für die Glueball-Massen präsentiert und anhand vergleichbarer früherer Arbeiten analysiert. Aufbauend auf die Untersuchungen im zweiten Kapitel haben wir die Maximum-Entropie-Methode als Grundlage der Diskussion gewählt. Durch dieses Vorgehen grenzt sich unsere Arbeit von früheren und zeitgleichen Untersuchungen ab: Zum einen ist diese Methode erstmals in Bezug auf Glueball-Polmassen angewendet worden und zum anderen eröffnet sie die Möglichkeit, das Spektrum der raumartigen Korrelationen 'from first principles' an zu analysieren. Dieses bedeutet aber auch, dass die Validierung der MEM-Resultate in diesem Kapitel einen hohen Stellenwert einnimmt. Wir haben hierbei zunächst ausführlich unsere MEM-Ergebnisse dargelegt und mit früheren Studien verglichen. Dabei haben wir darauf hingewiesen, dass unsere Daten mit recht großen Fehlern behaftet sind, wodurch eine 'filigranere' Diskussion unserer Ergebnisse erschwert wurde. Im Wesentlichen konnten wir aber zeigen, dass unsere Resultate - zumindest die der Polmassen - mit den gängigen Vorstellungen vereinbar und darüber hinaus ihre Größenordnung mit früheren Arbeiten vergleichbar sind. Die Analyse der Polmassen mit MEM oberhalb der kritischen Temperatur zeigte, dass Bindungszustände der Gluonen bis $T = 1.5T_c$ nicht ausgeschlossen werden können.

Die Analyse der raumartigen Korrelationen in der Confinement-Phase mittels MEM zeigte, dass die Anordnung der inversen Korrelationslängen nach ihrer Größe mit der Rangfolge der Polmassen übereinstimmt und sogar vergleichbare Werte liefert, wenn man die inverse Korrelationslänge als Masse wertet. Dagegen zeigen die spektralen Darstellungen der räumlichen Korrelationen ein völlig gegensätzliches Bild. Wir haben gezeigt, dass im Rahmen der MEM-Analyse zum Teil mehrere Maxima über dem Frequenzbereich erscheinen. Die Extraktion einer 'Masse' ist in diesem Fall nicht möglich, da erstens die 'Peaks' stark verbreitert sind und zweitens Vielfachheiten auftreten, das heißt mehrere Maxima ausgebildet sind. Diese spektrale Struktur zeigt an, dass die Operatoren nur noch verschmierte Zustände erfassen oder dass die Korrelationen stark durch kollektive Anregungen der Gluonen im Plasma beeinflusst werden.
Wir haben unsere Arbeit schließlich mit einer Diskussion der physikalischen Relevanz der Ergebnisse beendet.
Offensichtlich wäre eine höhere Statistik wünschenswert, um die Fehler zu minimieren. Bei $0.90T_c$ hat die Betrachtung der Polyakov-Loops gezeigt, dass ein größeres räumliches Gitter vorteilhaft wäre. Außerdem könnte man in kleineren Temperaturschritten oberhalb und unterhalb von T_c die Glueball-Massen und ihre Verhältnisse betrachten. Ein besserer Angleich der Operatorgröße (siehe Tabelle) wäre erstrebenswert. Eine weitere Möglichkeit wäre die berechneten Massen bei $0.75T_c$ für die Zustände 0^{++} und 2^{++} als Input-Parameter für eine Betrachtung im Potentialmodell zu verwenden. Bisher wurden die Imaginärteile der Korrelationen aus Speicherplatzgründen noch nicht mit ausgewertet. Zusätzlich könnte der Übergang zu anisotropen Gittern unsere Daten besser vergleichbar mit denen von [2] machen.

Anhang A

Fehlerrechnung

Da wir im Wesentlichen in dieser Arbeit Korrelationsfunktionen berechnen, bietet sich eine Fehleranalyse mit Hilfe der Jackknife-Methode an. Die Fehler funktionaler Zusammenhänge korrelierter Daten, z.B. Quotienten, werden mittels Fehlerfortpflanzung berechnet. Beide Methoden werden im Folgenden kurz skizziert.

Für die Jackknife-Analyse der Daten wird die gesamte Datenmenge in N (bei uns immer $N = 10$) gleichlange Blöcke eingeteilt. Wir bilden nun N reduzierte Datensätze, bei denen jeweils ein Block bei der Analyse nicht berücksichtigt wird. $\bar{T}$ bezeichnet den üblicherweise berechneten Erwartungswert der gesamten Daten und $\bar{T}_i$ den Erwartungswert der Observablen auf dem jeweiligen reduzierten Datensatz. Die statistisch unabhängigen Pseudowerte des Jackknife lassen sich mit der Relation $J_i = N\bar{T} - (N-1)\,\bar{T}_i$ berechnen. Das statistische Mittel über diese Werte gibt

$$\bar{\mathcal{O}} \simeq \bar{J} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_i \tag{A.1}$$

den Fehler berechnet man dann so:

$$\Delta\mathcal{O} \simeq \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(J_i - \bar{J})^2}{N(N-1)}}\,. \tag{A.2}$$

Dies gibt eine verbesserte Schätzung des Erwartungswertes und des zugehörigen Fehlers.

Wir führen die Fehlerfortpflanzung am Beispiel x/y vor:

$$\begin{aligned} \Delta f(x,y) &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y && \text{(A.3)} \\ \Longrightarrow \frac{x}{y} &= \left|\frac{1}{y}\right|\Delta x + \left|\frac{x}{y^2}\right|\Delta y && \text{(A.4)} \end{aligned}$$

Anhang B

Ergebnisse der hyperbolischen Fits

B.1 Resultate des hyperbolischen Fits für zeitliche Korrelationen

In den folgenden Tabellen haben unsere Ergebnisse für den hyperbolischen Fit aufgelistet. Diese Methode dient uns weniger als quantitatives Instrument der Massenbestimmung sondern mehr dazu die Massen qualitativ abzuschätzen. Wir haben die Werte **fett** gedruckt, die in unseren weiteren Betrachtungen einfließen. Bei der Auswahl der geeigneten Operatoren sind wir den Kriterien von Kapitel 2.3.1. Bei einem Overlap $\lesssim$1 und gleichzeitig $\chi^2/N_{\mathrm{DF}} \cong 1$ haben wir die Daten durch Fettdruck als passend markiert. An den Stellen wo innerhalb der Tabellen $- - --$ steht, bedeutet dies, dass die Werte entweder negativ sind oder dass der Fehler um Größenordnung über denen der Ergebnisse liegt.

$\mathcal{S}_{B1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 23850$		
$R_{\min}$	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	4.71(6)	0.829(15)	1.13	**4.2(2)**	0.671(40)	1.40
2	**4.48(4)**	0.743(14)	0.27	3.4(1)	0.491(29)	0.38
3	**4.41(7)**	0.715(27)	0.25	3.00(9)	0.376(18)	0.07
4	**4.49(10)**	0.757(48)	0.24	2.69(6)	0.303(12)	0.01
$1/N\sum_i x_i$	4.45(7)			4.2(2)		
$\mathcal{S}_{F1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 28800$		
$R_{\min}$	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	4.73(6)	0.712(12)	0.95	**4.3(2)**	0.559(31)	1.41
2	**4.52(5)**	0.646(14)	0.34	3.6(1)	0.412(22)	0.35
3	**4.48(9)**	0.633(32)	0.40	3.15(9)	0.321(15)	0.07
4	**4.6(1)**	0.690(57)	0.37	2.86(7)	0.262(12)	0.02
$1/N\sum_i x_i$	4.53(9)			4.3(2)		
$\mathcal{S}_{S1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 29700$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	4.69(7)	0.875(18)	1.38	**4.2(2)**	0.722(42)	1.37
2	**4.43(4)**	0.774(14)	0.25	3.5(1)	0.537(29)	0.34
3	**4.32(5)**	0.727(21)	0.15	3.12(7)	0.422(17)	0.05
4	**4.36(8)**	0.747(38)	0.16	2.87(3)	0.352(1)	0.00
$1/N\sum_i x_i$	4.37(6)			4.2(2)		
$\mathcal{S}_{T1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 28800$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	4.70(7)	0.873(18)	1.45	**4.2(2)**	0.725(41)	1.35
2	**4.43(4)**	0.769(14)	0.27	3.5(1)	0.536(29)	0.33
3	**4.32(5)**	0.720(21)	0.14	3.13(7)	0.420(17)	0.05
4	**4.35(8)**	0.737(37)	0.16	2.87(4)	0.350(1)	0.00
$1/N\sum_i x_i$	4.36(6)			4.2(2)		

Tabelle B.1: Hyperbolischer Fit für die zeitlichen 0^{++}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{S}_{B4}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 23850$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**13.2(7)**	0.450(44)	1.12	15.5(5)	0.404(26)	0.59
2	18(10)	1.7(42)	1.23	9.2(9)	0.1(0)	0.22
3	36(610)	−−−−	1.44	9(2)	0.1(0)	0.27
4	3(2)	−0.01(0)	0.66	32.7(617)	−−−−	0.15
$1/N\sum_i x_i$	13.2(7)			–		
$\mathcal{S}_{B5}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 23850$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**13.6(7)**	0.475(43)	0.95	**16.0(5)**	0.423(29)	0.88
2	**14(4)**	0.58(1)	1.12	**15(4)**	0.36(31)	1.03
3	37(485)	−−−−	1.39	1.0(31)	0.0016(3643)	0.85
4	0(4122)	−−−−	0.99	−−−−	−−−−	0.98
$1/N\sum_i x_i$	14(3)			16(2)		
$\mathcal{S}_{B6}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 23850$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	13.0(9)	0.45(6)	1.57	16.1(7)	0.435(39)	1.44
2	23(13)	7(25)	1.39	12(2)	0.16(1)	1.43
3	30(821)	80.7(2585)	1.90	3(2)	0.0078(8530)	1.83
4	−−−−	−−−−	1.29	−−−−	−−−−	1.29
$1/N\sum_i x_i$	–			–		

Tabelle B.2: Hyperbolischer Fit für die zeitlichen 1^{-+}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{S}_{F2}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 28800$		
$R_{\rm j}$	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}
1	**7.13(4)**	0.681(6)	0.42	8.0(1)	0.590(17)	2.81
2	**6.98(9)**	0.646(19)	0.38	**7.2(1)**	0.467(17)	0.69
3	6.4(1)	0.509(25)	0.10	**6.7(1)**	0.384(19)	0.28
4	7.1(2)	0.73(9)	0.05	**6.7(4)**	0.39(1)	0.36
$1/N\sum_i x_i$	7.05(7)			6.9(2)		

$\mathcal{S}_{F3}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 28800$		
$R_{\rm j}$	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}
1	**7.06(7)**	0.666(9)	0.74	7.90(5)	0.601(5)	0.16
2	**6.9(2)**	0.633(32)	0.79	7.72(5)	0.566(9)	0.07
3	**7.7(4)**	0.94(16)	0.54	7.8(1)	0.592(24)	0.07
4	10.2(3)	3.9(5)	0.03	8.1(2)	0.701(51)	0.05
$1/N\sum_i x_i$	7.2(2)			–		

$\mathcal{S}_{B2}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 23850$		
$R_{\rm j}$	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}
1	6.96(8)	0.674(11)	1.37	8.12(5)	0.629(6)	0.23
2	**6.6(1)**	0.594(24)	0.85	7.92(8)	0.593(12)	0.14
3	**6.2(4)**	0.51(1)	1.01	8.3(1)	0.699(33)	0.07
4	**6.6(9)**	0.62(30)	1.11	8.2(3)	0.67(9)	0.09
$1/N\sum_i x_i$	6.4(4)			–		

$\mathcal{S}_{B3}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 23850$		
$R_{\rm j}$	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}
1	6.7(1)	0.652(16)	1.95	7.7(1)	0.593(11)	3.45
2	**5.9(1)**	0.508(23)	0.66	**6.8(1)**	0.459(15)	0.61
3	**5.5(2)**	0.399(39)	0.41	6.3(1)	0.381(16)	0.22
4	**5.5(3)**	0.41(1)	0.46	5.7(1)	0.285(21)	0.08
$1/N\sum_i x_i$	5.6(2)			6.8(1)		

$\mathcal{S}_{S2}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 29700$		
$R_{\rm j}$	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}	$m_{\rm hyp}$	C	χ^2/N_{DF}
1	6.76(8)	0.923(17)	2.61	7.8(1)	0.895(27)	3.89
2	**6.29(7)**	0.783(18)	0.54	**7.1(1)**	0.729(30)	1.36
3	**5.9(1)**	0.654(34)	0.22	6.5(1)	0.571(28)	0.42
4	6.2(3)	0.78(11)	0.20	5.9(1)	0.419(32)	0.15
$1/N\sum_i x_i$	6.08(8)			7.1(1)		

$\mathcal{S}_{S3}$	$T : 0.75T_c$ # : 19650			$T : 0.90T_c$ # : 29700		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**10.8(1)**	0.827(18)	0.34	**12.4(2)**	0.799(17)	0.74
2	**11.2(6)**	0.92(15)	0.39	**10.7(3)**	0.537(36)	0.25
3	5.7(3)	0.1(0)	0.04	9.1(6)	0.30(1)	0.19
4	4.7(3)	0.05(0)	0.01	6.2(8)	0.1(0)	0.10
$1/N\sum_i x_i$	11.0(4)			11.6(2)		
$\mathcal{S}_{S4}$	$T : 0.75T_c$ # : 19650			$T : 0.90T_c$ # : 29700		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**6.91(7)**	0.950(124)	0.90	**7.85(9)**	0.927(142)	0.77
2	**6.54(9)**	0.848(22)	0.38	**7.6(1)**	0.861(35)	0.67
3	**6.6(2)**	0.87(9)	0.50	**7.8(3)**	0.93(105)	0.76
4	7.4(3)	1.5(3)	0.22	8.9(5)	1.7(4)	0.41
$1/N\sum_i x_i$	6.7(1)			7.8(2)		
$\mathcal{S}_{S5}$	$T : 0.75T_c$ # : 19650			$T : 0.90T_c$ # : 29700		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**10.8(1)**	0.831(16)	0.39	**12.5(2)**	0.810(17)	0.65
2	**10.1(5)**	0.68(9)	0.38	**12.7(6)**	0.85(113)	0.76
3	**11(2)**	0.97(86)	0.52	**13(3)**	1.0(10)	0.93
4	12(9)	1.7(84)	0.59	2.3(26)	0.0046(8781)	0.88
$1/N\sum_i x_i$	10.6(9)			13(1)		

Tabelle B.3: Hyperbolischer Fit für die zeitlichen 2^{++}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{S}_{B10}$	$T : 0.75T_c$ # : 20250			$T : 0.90T_c$ # : 24900		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**6.99(5)**	0.953(103)	0.42	7.2(2)	0.843(30)	4.68
2	**6.71(7)**	0.863(19)	0.17	6.6(1)	0.671(29)	1.43
3	**6.8(2)**	0.904(68)	0.22	**6.2(2)**	0.543(39)	0.82
4	**7.1(3)**	1.1(2)	0.22	**5.8(2)**	0.43(6)	0.70
$1/N\sum_i x_i$	7.0(1)			6.0(2)		
$\mathcal{S}_{B11}$	$T : 0.75T_c$ # : 20250			$T : 0.90T_c$ # : 24900		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	6.44(10)	0.881(19)	2.13	7.8(1)	0.912(17)	1.79
2	**5.90(5)**	0.720(114)	0.15	**7.23(8)**	0.773(16)	0.30
3	**5.72(7)**	0.661(21)	0.09	**7.0(1)**	0.710(38)	0.28
4	**5.7(1)**	0.658(53)	0.10	**6.3(2)**	0.486(48)	0.12
$1/N\sum_i x_i$	5.78(8)			6.8(1)		

$\mathcal{S}_{B12}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 20250$			$T: 0.90T_c$ $\#: 24900$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	6.74(8)	0.932(151)	1.83	7.5(2)	0.882(24)	3.67
2	**6.22(6)**	0.779(14)	0.22	**6.77(9)**	0.692(18)	0.47
3	**6.1(1)**	0.734(49)	0.24	**6.40(7)**	0.587(16)	0.10
4	**6.5(3)**	0.94(14)	0.18	**6.5(1)**	0.622(38)	0.11
$1/N\sum_i x_i$	6.3(2)			6.56(9)		
$\mathcal{S}_{T2}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 28800$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**7.00(5)**	0.954(9)	0.40	7.7(1)	0.897(23)	2.67
2	**6.74(7)**	0.871(20)	0.18	**6.9(1)**	0.729(23)	0.64
3	**6.9(2)**	0.934(72)	0.22	**6.5(1)**	0.601(27)	0.25
4	**7.2(3)**	1.1(2)	0.22	**6.2(2)**	0.50(5)	0.21
$1/N\sum_i x_i$	6.9(2)			6.5(1)		
$\mathcal{S}_{T3}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 28800$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	6.48(9)	0.885(18)	2.62	7.72(10)	0.900(17)	2.10
2	**5.93(4)**	0.722(111)	0.17	**7.23(8)**	0.766(18)	0.41
3	**5.73(6)**	0.658(19)	0.08	**7.1(1)**	0.716(36)	0.41
4	**5.7(1)**	0.630(46)	0.09	**6.5(2)**	0.53(6)	0.26
$1/N\sum_i x_i$	5.77(7)			6.9(1)		
$\mathcal{S}_{T4}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 28800$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	6.72(9)	0.930(16)	1.87	7.8(1)	0.916(18)	5.27
2	**6.21(7)**	0.775(19)	0.36	**7.0(1)**	0.730(19)	0.84
3	**6.0(2)**	0.704(55)	0.39	**6.43(8)**	0.590(19)	0.16
4	**6.0(3)**	0.71(13)	0.44	**6.6(2)**	0.627(56)	0.19
$1/N\sum_i x_i$	6.1(2)			6.7(1)		

Tabelle B.4: Hyperbolischer Fit für die zeitlichen 2^{++}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{S}_{B7}$	$T : 0.75T_c$ # : 20250			$T : 0.90T_c$ # : 24900		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**9.6(1)**	0.702(115)	0.37	**10.5(1)**	0.599(11)	0.69
2	**9.5(3)**	0.686(58)	0.44	**10.3(4)**	0.561(50)	0.77
3	**10(1)**	0.75(35)	0.60	12.9(1)	1.4(6)	0.53
4	20(14)	177(12940)	0.47	6(2)	0.1(0)	0.59
$1/N\sum_i x_i$	9.6(5)			10.4(2)		

$\mathcal{S}_{B8}$	$T : 0.75T_c$ # : 20250			$T : 0.90T_c$ # : 24900		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**9.66(8)**	0.695(8)	0.67	**11.2(2)**	0.636(17)	1.09
2	**9.0(5)**	0.59(8)	0.69	**11.4(7)**	0.66(11)	1.28
3	**8(1)**	0.35(21)	0.81	8(1)	0.21(11)	1.31
4	11(4)	2.7(62)	0.70	3.3(7)	0.02(0)	0.30
$1/N\sum_i x_i$	8.8(6)			11.3(5)		

$\mathcal{S}_{B9}$	$T : 0.75T_c$ # : 20250			$T : 0.90T_c$ # : 24900		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	9.2(2)	0.658(21)	1.98	**10.85(10)**	0.610(8)	0.50
2	**7.7(3)**	0.435(43)	1.04	**9.65(10)**	0.462(10)	0.05
3	**6.3(8)**	0.23(1)	1.00	**9.3(2)**	0.403(36)	0.05
4	6(2)	0.16(16)	1.10	**9.2(7)**	0.39(12)	0.06
$1/N\sum_i x_i$	7.0(5)			9.8(3)		

Tabelle B.5: Hyperbolischer Fit für die zeitlichen 2^{-+}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{S}_{S6}$	$T : 0.75T_c$ # : 19650			$T : 0.90T_c$ # : 29700		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**11.3(2)**	0.887(20)	0.62	12.5(3)	0.809(28)	2.23
2	**11.6(5)**	0.97(14)	0.71	11.9(8)	0.69(13)	2.50
3	8(2)	0.20(13)	0.72	7(1)	0.13(1)	1.96
4	5(3)	0.1(1)	0.74	4(1)	0.0(0)	1.77
$1/N\sum_i x_i$	11.5(3)			–		

Tabelle B.6: Hyperbolischer Fit für die zeitlichen 3^{++}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

B.2 Resultate des hyperbolischen Fits für räumliche Korrelationen

$\mathcal{V}_{B1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	4.54(7)	0.805(15)	2.58	3.8(3)	0.624(50)	4.23
2	**4.16(6)**	0.685(15)	0.83	2.4(2)	0.340(29)	2.05
3	**3.97(9)**	0.615(29)	0.65	**1.77(10)**	0.218(16)	0.70
4	**4.0(1)**	0.623(48)	0.68	1.50(6)	0.163(10)	0.24
5	**4.2(2)**	0.74(11)	0.67	1.32(5)	0.130(1)	0.09
$1/N \sum_i x_i$	4.1(1)			1.77(10)		
$\mathcal{V}_{F1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	4.58(7)	0.691(12)	2.53	3.9(3)	0.518(41)	4.30
2	**4.20(6)**	0.590(14)	0.93	2.4(2)	0.282(24)	2.08
3	**4.0(1)**	0.537(30)	0.84	**1.78(10)**	0.179(13)	0.71
4	**4.1(2)**	0.554(52)	0.87	1.50(7)	0.134(1)	0.25
5	**4.3(3)**	0.67(13)	0.87	1.32(5)	0.106(1)	0.10
$1/N \sum_i x_i$	4.1(1)			1.78(10)		
$\mathcal{V}_{S1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	4.51(7)	0.849(16)	2.54	3.8(3)	0.669(54)	4.29
2	**4.13(6)**	0.724(15)	0.77	2.3(2)	0.364(31)	2.06
3	**3.94(8)**	0.649(28)	0.57	**1.76(10)**	0.235(17)	0.70
4	**3.9(1)**	0.650(45)	0.59	1.49(6)	0.176(11)	0.23
5	**4.1(2)**	0.76(10)	0.58	1.31(4)	0.141(1)	0.07
$1/N \sum_i x_i$	4.0(1)			1.76(10)		
$\mathcal{V}_{T1}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 25200$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	4.52(7)	0.848(17)	2.57	3.8(3)	0.676(53)	3.96
2	**4.14(6)**	0.722(16)	0.78	2.4(2)	0.374(32)	1.94
3	**3.95(8)**	0.646(28)	0.57	**1.81(10)**	0.239(17)	0.66
4	**4.0(1)**	0.648(45)	0.60	1.52(6)	0.178(10)	0.21
5	**4.1(2)**	0.76(102)	0.59	1.34(4)	0.142(1)	0.07
$1/N \sum_i x_i$	4.0(1)			1.81(10)		

Tabelle B.7: Hyperbolischer Fit für die räumlichen 0^{++}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{V}_{B10}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 20250$			$T: 0.90T_c \quad \#: 25800$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	12.4(5)	0.401(29)	1.49	18.3(1)	0.53(6)	1.14
2	− − − −	− − − −	1.49	− − − −	− − − −	1.14
3	5(5)	0.02(0)	1.72	30.4(728)	54.1(128)	1.26
4	6.2(91)	0.0(2)	1.79	− − − −	− − − −	1.37
5	12.9(473)	4.0(12)	1.94	− − − −	− − − −	1.49
$1/N \sum_i x_i$	–			–		
$\mathcal{V}_{B11}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 20250$			$T: 0.90T_c \quad \#: 25800$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**13.2(5)**	0.412(30)	1.16	**14.1(4)**	0.338(16)	0.88
2	9(2)	0.14(1)	1.14	16(2)	0.48(26)	0.93
3	7(4)	0.1(1)	1.25	−0.73(46)	− − − −	0.62
4	11.0(147)	0.6(47)	1.26	24(835)	4.1(148)	1.08
5	14(114)	3.8(28)	1.38	− − − −	− − − −	0.41
$1/N \sum_i x_i$	13.2(5)			14.1(4)		
$\mathcal{V}_{B12}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 20250$			$T: 0.90T_c \quad \#: 25800$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	14.1(9)	0.51(6)	1.61	**14.4(5)**	0.347(19)	0.70
2	− − − −	− − − −	1.61	− − − −	− − − −	0.70
3	8(4)	0.1(2)	1.73	19.8(215)	1(10)	0.72
4	11.4(122)	0.8(52)	1.80	24(528)	6.6(152)	0.78
5	8(32)	0.07(1423)	1.97	16(102)	−2.9(16)	0.85
$1/N \sum_i x_i$	–			14.4(5)		

Tabelle B.8: Hyperbolischer Fit für die räumlichen 1^{-+}-Zustände. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{V}_{F2}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 26100$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**6.77(7)**	0.642(8)	1.65	7.8(2)	0.592(18)	5.76
2	**6.27(9)**	0.537(16)	0.74	6.9(2)	0.454(30)	3.97
3	**6.1(2)**	0.496(42)	0.77	5.0(3)	0.21(3)	2.24
4	**6.5(5)**	0.64(18)	0.77	4.0(2)	0.12(1)	2.24
5	9(1)	3(2)	0.61	3.1(2)	0.06(0)	0.52
$1/N\sum_i x_i$	6.4(2)			–		

$\mathcal{V}_{F3}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 26100$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**6.89(6)**	0.657(7)	1.07	8.05(8)	0.600(9)	1.11
2	**6.4(1)**	0.557(18)	0.58	**7.55(8)**	0.515(12)	0.44
3	**6.0(2)**	0.47(5)	0.60	**7.1(2)**	0.430(27)	0.35
4	5.2(4)	0.29(1)	0.52	**6.6(3)**	0.34(1)	0.35
5	6(1)	0.43(30)	0.56	6.0(7)	0.23(1)	0.37
$1/N\sum_i x_i$	6.4(1)			7.1(2)		

$\mathcal{V}_{B2}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 26100$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	7.05(6)	0.686(8)	1.38	7.7(1)	0.601(12)	4.39
2	**6.6(1)**	0.603(25)	1.10	7.0(2)	0.476(30)	3.17
3	**5.9(3)**	0.44(6)	1.01	6.2(4)	0.35(1)	3.05
4	**5.7(7)**	0.40(15)	1.05	4.2(4)	0.13(0)	2.11
5	7(1)	0.69(1)	1.13	2.3(2)	0.03(0)	0.91
$1/N\sum_i x_i$	6.1(4)			–		

$\mathcal{V}_{B3}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 26100$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**6.81(7)**	0.665(8)	2.50	8.14(8)	0.627(11)	1.91
2	**6.3(1)**	0.554(18)	1.26	**7.7(1)**	0.550(21)	1.36
3	**6.3(3)**	0.55(8)	1.42	**7.4(3)**	0.494(49)	1.40
4	**6.7(8)**	0.73(31)	1.46	**7.2(7)**	0.44(14)	1.51
5	4(1)	0.15(14)	1.51	9(2)	1.2(14)	1.57
$1/N\sum_i x_i$	6.5(3)			7.4(4)		

$\mathcal{V}_{S2}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	6.87(6)	0.946(116)	1.72	7.7(2)	0.905(24)	6.94
2	**6.35(9)**	0.801(21)	0.76	6.8(2)	0.687(46)	4.82
3	**6.0(2)**	0.693(58)	0.72	5.5(3)	0.42(5)	3.48
4	**6.0(3)**	0.70(14)	0.72	3.9(3)	0.17(0)	3.48
5	**6.8(8)**	1.2(6)	0.78	2.6(1)	0.07(0)	0.48
$1/N\sum_i x_i$	6.3(3)			–		
$\mathcal{V}_{S3}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	10.3(1)	0.789(17)	1.31	12.2(1)	0.776(13)	1.20
2	8.8(4)	0.52(5)	0.95	**11.4(4)**	0.635(63)	1.13
3	7.0(9)	0.23(1)	0.96	**10(1)**	0.45(19)	1.19
4	4(1)	0.0(0)	0.88	**11(4)**	0.56(1)	1.30
5	4(2)	0.05(0)	0.96	13.6(223)	3(32)	1.42
$1/N\sum_i x_i$	–			11(2)		
$\mathcal{V}_{S4}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**6.79(5)**	0.940(8)	1.14	7.89(8)	0.916(16)	1.78
2	**6.30(7)**	0.802(17)	0.39	**7.5(1)**	0.809(24)	1.08
3	**6.2(2)**	0.772(61)	0.43	**7.2(2)**	0.713(51)	1.02
4	**5.9(4)**	0.64(13)	0.44	**6.9(4)**	0.62(11)	1.08
5	**5.2(8)**	0.40(21)	0.46	**8(1)**	1.00(58)	1.15
$1/N\sum_i x_i$	13.0(1)			23(3)		
$\mathcal{V}_{S5}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	**11.2(1)**	0.875(17)	0.61	12.5(1)	0.802(15)	1.47
2	**11.7(7)**	1.0(2)	0.64	**10.7(3)**	0.535(34)	0.72
3	15(4)	4.1(65)	0.67	**9.5(7)**	0.33(1)	0.68
4	18.6(445)	26(599)	0.69	10(2)	0.42(0)	0.73
5	– – – –	– – – –	0.75	16(13)	14(101)	0.75
$1/N\sum_i x_i$	11.5(4)			10.1(5)		

Tabelle B.9: Hyperbolischer Fit für die räumlichen 2^{++}-Zustände, die aus den irreduziblen Darstellungen E erstellt werden. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{V}_{B4}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	7.03(5)	0.959(106)	2.32	7.6(1)	0.875(23)	3.68
2	**6.33(6)**	0.787(13)	0.45	6.9(1)	0.698(27)	1.67
3	**5.9(1)**	0.650(41)	0.32	**6.1(1)**	0.503(29)	0.77
4	**6.2(3)**	0.76(13)	0.32	5.2(1)	0.311(22)	0.28
5	8.5(8)	4(2)	0.21	4.8(2)	0.24(3)	0.23
$1/N \sum_i x_i$	6.1(2)			6.1(1)		

$\mathcal{V}_{B5}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	6.82(6)	0.934(117)	1.53	**8.10(7)**	0.941(121)	0.65
2	**6.35(9)**	0.803(21)	0.72	**7.8(1)**	0.871(23)	0.52
3	**6.2(2)**	0.756(69)	0.78	**7.8(2)**	0.849(63)	0.55
4	**6.7(4)**	1.0(3)	0.74	**7.5(4)**	0.75(15)	0.59
5	8(1)	3(3)	0.70	**7.4(9)**	0.69(34)	0.65
$1/N \sum_i x_i$	6.4(2)			7.7(3)		

$\mathcal{V}_{B6}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**6.74(5)**	0.922(108)	1.19	7.9(1)	0.914(19)	4.22
2	**6.44(6)**	0.824(16)	0.52	7.4(1)	0.785(28)	2.57
3	**6.2(1)**	0.727(44)	0.44	6.8(3)	0.631(62)	2.31
4	**6.5(3)**	0.85(16)	0.44	6.0(5)	0.42(1)	2.17
5	7(1)	1.1(9)	0.44	4.8(9)	0.20(12)	2.17
$1/N \sum_i x_i$	6.5(1)			–		

$\mathcal{V}_{T2}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 25200$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	7.03(5)	0.959(106)	2.33	7.5(1)	0.874(24)	3.77
2	**6.32(6)**	0.787(13)	0.45	6.7(1)	0.672(31)	1.80
3	**5.9(1)**	0.651(41)	0.32	**5.9(2)**	0.468(30)	0.84
4	**6.2(3)**	0.76(13)	0.32	5.0(1)	0.286(18)	0.25
5	8.5(8)	4(2)	0.21	4.6(2)	0.22(2)	0.20
$1/N\sum_i x_i$	6.1(2)			5.9(2)		
$\mathcal{V}_{T3}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 25200$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	6.83(6)	0.927(128)	1.20	7.87(9)	0.910(17)	1.46
2	**6.46(8)**	0.814(22)	0.67	**7.3(1)**	0.771(23)	0.69
3	**6.2(2)**	0.710(57)	0.59	**6.8(2)**	0.622(40)	0.51
4	**6.6(3)**	0.93(16)	0.54	**6.4(3)**	0.51(7)	0.50
5	7.1(8)	1.3(7)	0.57	**7.0(6)**	0.76(27)	0.51
$1/N\sum_i x_i$	6.4(2)			6.9(3)		
$\mathcal{V}_{T4}$	$T: 0.75T_c \quad \#: 19650$			$T: 0.90T_c \quad \#: 25200$		
R_{j}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}	m_{hyp}	C	χ^2/N_{DF}
1	6.67(6)	0.919(118)	1.10	8.1(1)	0.941(19)	2.18
2	**6.30(8)**	0.808(21)	0.58	7.8(2)	0.861(40)	2.04
3	**6.3(2)**	0.798(63)	0.64	7.7(4)	0.83(110)	2.19
4	**6.5(4)**	0.93(19)	0.65	7.2(7)	0.64(21)	2.32
5	−−−−	−−−−	0.65	−−−−	−−−−	2.32
$1/N\sum_i x_i$	6.4(2)			–		

Tabelle B.10: Hyperbolischer Fit für die räumlichen 2^{++}-Zustände, die aus den irreduziblen Darstellungen T_2 erstellt werden. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{V}_{B7}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 20250$			$T: 0.90T_c$ $\#: 25800$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**9.1(1)**	0.648(12)	1.24	**11.07(11)**	0.627(9)	0.81
2	**7.9(2)**	0.465(30)	0.75	**10.3(3)**	0.519(31)	0.66
3	6.4(5)	0.23(1)	0.56	8.4(5)	0.25(0)	0.45
4	7(1)	0.36(23)	0.57	6.2(8)	0.1(0)	0.39
5	18(10)	655(40960)	0.39	5(1)	0.0(0)	0.38
$1/N\sum_i x_i$	8.5(2)			10.7(2)		

$\mathcal{V}_{B8}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 20250$			$T: 0.90T_c$ $\#: 25800$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**9.3(1)**	0.673(15)	1.50	**11.1(1)**	0.624(12)	0.78
2	**8.2(3)**	0.477(42)	1.10	**10.5(4)**	0.541(48)	0.77
3	5.9(5)	0.18(0)	0.79	8.1(6)	0.22(0)	0.53
4	4.5(7)	0.1(0)	0.67	7(1)	0.11(1)	0.54
5	5(1)	0.15(13)	0.70	11(5)	1.2(31)	0.55
$1/N\sum_i x_i$	8.8(2)			10.8(3)		

$\mathcal{V}_{B9}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 20250$			$T: 0.90T_c$ $\#: 25800$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	9.0(1)	0.648(11)	0.73	10.3(2)	0.574(14)	2.22
2	**7.9(2)**	0.467(30)	0.44	**8.5(2)**	0.369(19)	0.72
3	**7.2(6)**	0.35(10)	0.47	**7.8(4)**	0.28(0)	0.69
4	**7(1)**	0.29(24)	0.48	**6.9(9)**	0.18(1)	0.71
5	7(4)	0.23(1)	0.53	10(2)	1.7(20)	0.57
$1/N\sum_i x_i$	7.3(8)			7.7(5)		

Tabelle B.11: Hyperbolischer Fit für die räumlichen 2^{-+}-Zustände, die aus den irreduziblen Darstellungen T_2 erstellt werden. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

$\mathcal{V}_{S6}$	$T: 0.75T_c$ $\#: 19650$			$T: 0.90T_c$ $\#: 26100$		
R_j	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}	m_hyp	C	χ^2/N_{DF}
1	**11.1(1)**	0.869(18)	1.68	**12.62(1)**	0.826(10)	1.04
2	**11.0(6)**	0.85(13)	1.81	**12.3(4)**	0.769(66)	1.09
3	**9(2)**	0.42(38)	1.99	10(1)	0.33(12)	0.98
4	6(4)	0.1(1)	2.03	19(6)	25.5(672)	0.72
5	6.0(99)	0.1(5)	2.23	11.3(353)	0(5)	0.78
$1/N\sum_i x_i$	10.5(9)			12.5(2)		

Tabelle B.12: Hyperbolischer Fit für die räumlichen 3^{++}-Zustände, die aus den irreduziblen Darstellungen A_2 erstellt werden. Durch Fettdruck hervorgehoben sind die Werte, die uns nach den Konventionen aus Abschnitt 2.5.2 sinnvoll erscheinen.

Anhang C

Tabellen

Die Linearkombination zur Darstellung der kubischen Gruppe sind geringfügig verändert, wenn man an Stelle von zeitlichen Korrelationen räumliche Korrelationen betrachtet [3]. Um den Zugriff auf die Tabellen zu erleichtern, haben wir jeweils in der zweiten Spalte der Tabellen eine abkürzende Notation eingeführt: Der Buchstabe bezeichnet den Anfangsbuchstaben der bildlich dargestellten Wilson-Loops, z.B F für four, B für bent usw. und die Indexzahl bezieht sich auf die in der Tabelle angezeigte Linearkombination.

$\mathcal{O}_h$	Bez.	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4
A_1^{++}	$\mathcal{S}_{T1}$	1	1	1	1
T_2^{++}	$\mathcal{S}_{T2}$	1	-1	1	-1
	$\mathcal{S}_{T3}$	-1	1	1	-1
	$\mathcal{S}_{T3}$	1	1	-1	-1

Tabelle C.1: Wellenfunktion der irreduziblen Operatoren, die sich aus den *verdrehten 6-*Plaquetten bilden lässt. Anwendungsvorschrift für die zeitlichen Korrelationen.

$\mathcal{O}_h$	Bez.	$\mathcal{D}_4^h$	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4
A_1^{++}	$\mathcal{V}_{T1}$	A_1^{++}	1	1	1	1
T_2^{++}	$\mathcal{V}_{T2}$	B_2^{++}	1	1	-1	-1
	$\mathcal{V}_{T3}$	E^{-+}	1	-1	0	0
	$\mathcal{V}_{T4}$	E^{-+}	0	0	1	-1

Tabelle C.2: Wellenfunktion der irreduziblen Operatoren, die sich aus den *verdrehten 6-*Plaquetten bilden lässt. Anwendungsvorschrift für die räumlichen Korrelationen.

$\mathcal{O}_h$	Bez.	$\mathcal{D}_4^h$	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
A_1^{++}	$\mathcal{V}_{F1}$	A_1^{++}	1	1	1
E^{++}	$\mathcal{V}_{F2}$	A_1^{++}	−2	1	1
	$\mathcal{V}_{F3}$	B_1^{++}	0	1	−1

$\mathcal{O}_h$	Bez.	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
A_1^{++}	$\mathcal{S}_{F1}$	1	1	1
E^{++}	$\mathcal{S}_{F2}$	−2	1	1
	$\mathcal{S}_{F3}$	0	1	−1

Tabelle C.3: Wellenfunktion der irreduziblen Operatoren, die sich aus den *4*-Plaquetten bilden lässt. Anwendungsvorschrift für die räumlichen (links) und die zeitlichen (rechts) Korrelationen.

$\mathcal{O}_h$	Bez.	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}
A_1^{++}	$\mathcal{S}_{B1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
E^{++}	$\mathcal{S}_{B2}$	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0	−1	1	0
	$\mathcal{S}_{B3}$	−1	−1	2	−1	−1	2	−1	−1	2	−1	−1	2
T_1^{-+}	$\mathcal{S}_{B4}$	−1	1	0	1	1	0	−1	−1	0	1	−1	0
	$\mathcal{S}_{B5}$	0	−1	1	0	1	1	0	−1	−1	0	1	−1
	$\mathcal{S}_{B6}$	1	0	−1	1	0	1	−1	0	−1	−1	0	1
T_2^{-+}	$\mathcal{S}_{B7}$	1	1	0	−1	1	0	1	−1	0	−1	−1	0
	$\mathcal{S}_{B8}$	0	1	1	0	−1	1	0	1	−1	0	−1	−1
	$\mathcal{S}_{B9}$	1	0	1	1	0	−1	−1	0	1	−1	0	−1
T_2^{++}	$\mathcal{S}_{B10}$	0	0	1	0	0	−1	0	0	−1	0	0	1
	$\mathcal{S}_{B11}$	1	0	0	−1	0	0	−1	0	0	1	0	0
	$\mathcal{S}_{B12}$	0	1	0	0	−1	0	0	−1	0	0	1	0

Tabelle C.4: Wellenfunktion der irreduziblen Operatoren, die sich aus den *gebogenen 6*-Plaquetten bilden lässt. Anwendungsvorschrift für die zeitlichen Korrelationen.

$\mathcal{O}_h$	Bez.	$\mathcal{D}_4^h$	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}
A_1^{++}	$\mathcal{V}_{B1}$	A_1^{++}	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
E^{++}	$\mathcal{V}_{B2}$	A_1^{++}	−4	−4	−4	−4	2	0	2	0	2	0	2	0
	$\mathcal{V}_{B3}$	B_1^{++}	0	0	0	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0
T_2^{++}	$\mathcal{V}_{B4}$	B_2^{++}	1	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\mathcal{V}_{B5}$	E^{-+}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0
	$\mathcal{V}_{B6}$		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
T_2^{-+}	$\mathcal{V}_{B7}$	B_1^{-+}	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	1	0	-1
	$\mathcal{V}_{B8}$	E^{++}	1	-1	-1	1	0	0	1	0	0	0	-1	0
	$\mathcal{V}_{B9}$		1	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0
T_1^{-+}	$\mathcal{V}_{B10}$	A_1^{-+}	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
	$\mathcal{V}_{B11}$	E^{++}	-1	1	1	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0
	$\mathcal{V}_{B12}$		1	1	-1	-1	1	0	0	0	-1	0	0	0

Tabelle C.5: Wellenfunktion der irreduziblen Operatoren, die sich aus den *gebogenen 6*-Plaquetten bilden lässt. Anwendungsvorschrift für die räumlichen Korrelationen.

$\mathcal{O}_h$	Bez.	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
A_1^{++}	$\mathcal{S}_{S1}$	1	1	1	1	1	1
E^{++}	$\mathcal{S}_{S2}$	-2	1	-2	1	1	1
	$\mathcal{S}_{S3}$	0	-1	0	-1	1	1
	$\mathcal{S}_{S4}$	0	1	0	-1	1	-1
E^{++}	$\mathcal{S}_{S5}$	2	1	-2	-1	-1	1
A_2^{++}	$\mathcal{S}_{S6}$	-1	1	1	-1	-1	1

Tabelle C.6: Wellenfunktion der irreduziblen Operatoren, die sich aus den *ebenen 6*-Plaquetten bilden lässt. Anwendungsvorschrift für die zeitlichen Korrelationen.

$\mathcal{O}_h$	Bez.	$\mathcal{D}_4^h$	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
A_1^{++}	$\mathcal{V}_{S1}$	A_1^{++}	1	1	1	1	1	1
E^{++}	$\mathcal{V}_{S2}$	A_1^{++}	-2	1	-2	1	1	1
	$\mathcal{V}_{S3}$		0	-1	0	-1	1	1
	$\mathcal{V}_{S4}$	B_1^{++}	0	1	0	-1	1	-1
	$\mathcal{V}_{S5}$		2	1	-2	-1	-1	1
A_2^{++}	$\mathcal{V}_{S6}$	B_1^{++}	-1	1	1	-1	-1	1

Tabelle C.7: Wellenfunktion der irreduziblen Operatoren, die sich aus den *ebenen 6*-Plaquetten bilden lässt. Anwendungsvorschrift für die räumlichen Korrelationen.

Anhang D

Ergebnisse oberhalb T_c

In den folgenden Tabellen haben wir die MEM-Ergebnisse oberhalb von T_c aufgelistet.

A_1^{++}-Zustand

zeitlich		räumlich	
Operator	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$	Operator	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{B1}$	10.7(4)	$\mathcal{V}_{B1}$	5(2)
$\mathcal{S}_{F1}$	10.9(5)	$\mathcal{V}_{F1}$	8(1)
$\mathcal{S}_{S1}$	10(1)	$\mathcal{V}_{S1}$	7(1)
$\mathcal{S}_{T1}$	10(1)	$\mathcal{V}_{T1}$	7(1)
$1/N\sum_i x_i$	10.4(7)	$1/N\sum_i x_i$	7(1)

T_1^{-+}-Zustand

zeitlich		räumlich	
Operator	$m_{\text{mem}}/\sqrt{\sigma}$	Operator	$\gamma_{\text{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{B4}$	$--$	$\mathcal{V}_{B10}$	$--$
$\mathcal{S}_{B5}$	$--$	$\mathcal{V}_{B11}$	$--$
$\mathcal{S}_{B6}$	$--$	$\mathcal{V}_{B12}$	$--$

E^{++}- und T_2^{++}-Zustände

zeitlich		räumlich	
Operator	$m_{\mathrm{mem}}/\sqrt{\sigma}$	Operator	$\gamma_{\mathrm{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{F2}$	9(4)	$\mathcal{V}_{F2}$	11(4)
$\mathcal{S}_{F3}$	11(5)	$\mathcal{V}_{F3}$	11(6)
$\mathcal{S}_{B2}$	12(10)	$\mathcal{V}_{B2}$	5(13)
$\mathcal{S}_{B3}$	9(3)	$\mathcal{V}_{B3}$	6(15)
$\mathcal{S}_{S2}$	12(2)	$\mathcal{V}_{S2}$	8(16)
$\mathcal{S}_{S3}$	$--$	$\mathcal{V}_{S3}$	$--$
$\mathcal{S}_{S4}$	11(2)	$\mathcal{V}_{S4}$	6(15)
$\mathcal{S}_{S5}$	$--$	$\mathcal{V}_{S5}$	$--$
$\mathcal{S}_{B10}$	$--$	$\mathcal{V}_{B4}$	7.0(95)
$\mathcal{S}_{B11}$	$--$	$\mathcal{V}_{B5}$	8(3)
$\mathcal{S}_{B12}$	$--$	$\mathcal{V}_{B6}$	10(9)
$\mathcal{S}_{T2}$	8(1)	$\mathcal{V}_{T2}$	7.3(87)
$\mathcal{S}_{T3}$	11(2)	$\mathcal{V}_{T3}$	7(3)
$\mathcal{S}_{T4}$	4(2)	$\mathcal{V}_{T4}$	11.5(10)
$1/N\sum_i x_i$	10(3)	$1/N\sum_i x_i$	8(7)

T_2^{-+}-Zustand

zeitlich		räumlich	
Operator	$m_{\mathrm{mem}}/\sqrt{\sigma}$	Operator	$\gamma_{\mathrm{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{B7}$	13(7)	$\mathcal{V}_{B7}$	10(14)
$\mathcal{S}_{B8}$	$--$	$\mathcal{V}_{B8}$	10(2)
$\mathcal{S}_{B9}$	$--$	$\mathcal{V}_{B9}$	13.3(154)
$1/N\sum_i x_i$	13(7)	$1/N\sum_i x_i$	11(10)

A_2^{++}-Zustand

zeitlich		räumlich	
Operator	$m_{\mathrm{mem}}/\sqrt{\sigma}$	Operator	$\gamma_{\mathrm{mem}}^{-1}/\sqrt{\sigma}$
$\mathcal{S}_{S6}$	17(4)	$\mathcal{V}_{S6}$	7(3)

Literaturverzeichnis

[1] G.S. Bali, K. Schilling, A. Hulsebos, A.C. Irving, C. Michael, P.W. Stephenson, *A Comprehensive Lattice Study of $SU(3)$ Glueballs*, Phys. Lett. **B 309**, 378 (1993).

[2] N. Ishii, H. Suganuma, H. Matsufuru, *Glueball Properties at Finite Temperature in $SU(3)$ Anisotropic Lattice QCD*, Phys. Rev. **D 66**, 094506 (2002).
Scalar Glueball Mass Reduction at Finite Temperature in $SU(3)$ Anisotropic Lattice QCD, Phys. Rev. **D 66**, 014507 (2002).

[3] B. Grossman, S. Gupta, U.M. Heller, F. Karsch, *Glueball-like Screening Masses in pure $SU(3)$ at Finite Temperatures*, Nucl. Phys. **B 417**, 289 (1994).

[4] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996).

[5] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).

[6] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics, An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific (1987).

[7] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer Verlag (1997).

[8] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press (2000).

[9] M.P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Braunschweig, (1998).

[10] G. 't Hooft, M.J. Veltman, *Regularization And Renormalization Of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B 44**, 189 (1972).

[11] R.D. Pisarksi, *Theory at Quark Matter 02*, arXiv:nucl-th/0212015, (2002).

[12] H. Satz, *Limits of Confinement: The First 15 Years of Ultra-relativistic Heavy Ion Studies*, arXiv:hep-ph/0209181, (2002).

[13] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, *Current algebra: Quarks and what else?*, Proceedings of the XVIth International Conference on High Energy Physics, Vol. 2, Chicago, (1972).

[14] D.V. Bugg, M.J. Peardon, B.S. Zou, *The Glueball Spectrum*, Phys. Lett. **B 486**, 49 (2000).

[15] R.P. Feynman, *Space-Time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).

[16] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, (1987).

[17] J.I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1988).

[18] K.G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. **D 10**, 2445 (1974).

[19] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press (1994).

[20] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories - an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1992).

[21] K.G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in New Phenomena in Subnuclear Physics, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, Part A, 69 (1977).

[22] K. Symanzik, *Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories*, Nucl. Phys. **B 226**, 187 (1983).

[23] S. Itoh, Y. Iwasaki, T. Yoshie, *Stability of Instantons on the Lattice and the Renormalized Trajectory*, Phys. Lett. **B 147**, 141 (1984).

[24] T. DeGrand, A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, F. Niedermayer, *The Classically Perfect Fixed Point Action for $SU(3)$ Gauge Theory*, Nucl. Phys. **B 454**, 587 (1995).

[25] P. Hasenfratz, F. Niedermayer, *Perfect Lattice Action for Asymptotically free Theories*, Nucl. Phys. **B 414**, 785 (1994).

[26] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann, *Improved Actions for QCD Thermodynamics on the Lattice*, Nucl. Phys. **B 462**, 415 (1996).

[27] B. Beinlich, F. Karsch, A. Peikert, *$SU(3)$ Latent Heat and Surface Tension from Tree Level and Tadpole Improved Actions*, Phys. Lett. **B 390**, 268 (1997).

[28] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, *String Tension and Thermodynamics with Tree Level and Tadpole Improved Actions*, Eur. Phys. J. C **6**, 133 (1999)

[29] O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, M.Lütgemeier, *Heavy quark potentials in quenched QCD at high temperature*, Phys. Rev. **D 62**, 034021 (2000).

[30] K. Osterwalder, E. Seiler, *Gauge Field Theories on a Lattice*, Ann. Phys. 110, 440 (1978).

[31] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, (1987).

[32] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, (1984).

[33] D.J. Amit, *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena*, World Scientific, (1978).

[34] C. Michael, *Exotics*, arXiv:hep-lat/0302001, (2003).

[35] K. Ishikawa, M. Teper, G. Schierholz, *The Glueball Mass Spectrum in QCD: First Results of a Lattice Monte Carlo Calculation*,DESY 81-089 (1981).

[36] H. Koch, *Die Suche nach den Glueballs*, Phys. Bl. 43, 152 (1987)

[37] B. Berg, A. Billoire, *Excited Glueball States in Four-Dimensional $SU(3)$ Lattice Gauge Theory*, Phys. Lett. **B 114**, 324 (1982).
B. Berg, A. Billoire, *Glueball Spectroscopy in Four-Dimensional $SU(3)$ Lattice Gauge Theory (I)*, Nucl. Phys. **B 221**, 109 (1983).

[38] S.L. Altmannm A.P. Cracknell, *Lattice Harmonics I. Cubic Groups*, Rev. Mod. Phys. **37**, 19 (1965).

[39] G. Münster, *Strong Coupling Expansions for the Mass Gap in Lattice Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B 190**, 439 (1981); Erratum-ibid. **B 200**, 536 (1982); Erratum-ibid. **B 205**, 648 (1982).

[40] K. Seo, *Glueball Mass Estimate by Strong Coupling Expansion in Lattice Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B 209**, 200 (1982).

[41] G. Münster, *Physical Strong Coupling Expansion Parameters and Glueball Ratios*, Phys. Lett. **B 121**, 53 (1983).

[42] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, E. Teller, *Equation of State Calculations by fast Computing Machines*, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953).

[43] M. Creutz, *Monte Carlo Study of Quantized $SU(2)$ Gauge Theory*, Phys.Rev. **D 21**, 2308 (1980).

[44] N. Cabibbo, E. Marinari, *A New Method for Updating $SU(N)$ Matrices in Computer Simulations of Gauge Theories*, Phys. Lett. **B 119**, 387 (1982).

[45] APE Collaboration, M. Albanese, *Glueball Masses and String Tension in Lattice QCD*, Phys. Lett. **B 192**, 163 (1987).

[46] M. Teper, *An Improved Method for Lattice Glueball Calculations*, Phys. Lett. **B 183**, 345 (1987).

[47] T. Hashimoto, A. Nakamura and I.O. Stamatescu, *Temperature-dependent Structure in the Mesonic Channels of QCD* Nucl. Phys. **B 400**, 267 (1993).

[48] M. Asakawa, T. Hatsuda, Y. Nakahara, *Maximum Entropy Analysis of the Spectral Functions in Lattice QCD*, Prog. Part. Nucl. Phys. **46**, 459 (2001).

[49] I. Wetzorke, F. Karsch, *Testing MEM with Diquark and Thermal Meson Correlation Functions*, arXiv:hep-lat/0008008, (2000).

[50] C.E. Shannon, W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, Univ. of Illinois Press, Urbana, (1949).

[51] E.T. Jaynes, *Information Theory and Statistical Mechanics*, Phys. Rev. **106**, 620 (1957), ibid. **108**, 171 (1957).

[52] T. Umeda, K. Nomura, H. Matsufuru, *Charmonium at Finite Temperature in Quenched Lattice QCD*, arXiv:hep-lat/0211003, (2002).

[53] R.K. Bryan, European Biophysics Journal **18**, 165 (1990).

[54] A. Peikert, *QCD Thermodynamics with* $2+1$ *Quark Flavours in Lattice Simulations*, Ph.D. thesis (2000).

[55] F. Zantow, Private Mitteilung im August 2002.

[56] R. Petronzio, E. Vicari, *An Overrelaxed Monte Carlo Algorithm for* $SU(3)$ *Lattice Gauge Theories.*, Phys. Lett. **B 248**, 159 (1990).

[57] J.M. Cornwall, A. Soni, *Glueballs as Bound States of Massive Gluons*, Phys. Lett. **120 B**, 431 (1983).

[58] W.-S. Hou, G.-G. Wong, *The Glueball Spectrum from a Potential Modell*, arXiv:hep-p/0207292 v1, (2002).

[59] C.N. Yang, *Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into two Photons*, Phys. Rev. **77**, 242 (1950).

[60] M.J. Teper, *Glueball Masses and Other Physical Properties of* $SU(N)$ *Gauge Theories in* $D = 3+1$*: a Review of Lattice Results for Theorists*, arXiv:hep-th/9812187, (1998).

[61] P. van Baal and A.S. Kronfeld, *Spectrum of the pure Glue Theory.*, in Lattice 88, Eds. A.S. Kronfeld and P.B. Mackenzie. Nucl. Phys. **B**(Proc. Supppl.) **9**, 227 (1989).

[62] C. J. Morningstar and M. Peardon, *The Glueball Spectrum from an Anisotropic Lattice Study.*, Phys. Rev. **D 60**, 034509 (1999).