Die räumliche Saitenspannung in der Hochtemperaturphase der SU(3)-Eichtheorie

Diplomarbeit
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Martin Lütgemeier

17. November 1994

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

In der Physik kennt man vier fundamentale Wechselwirkungen – die Gravitation, die schwache, die starke und die elektromagnetische Wechselwirkung, wobei die drei letztgenannten sehr erfolgreich durch quantisierte Eichfeldtheorien beschrieben werden und zusammen das sogenannte *Standardmodell* bilden.

Das Interesse dieser Arbeit gilt der starken Wechselwirkung und damit den Quarks, aus denen die hadronische Materie zusammengesetzt ist. Aus experimentellen Beobachtungen ist bekannt, daß Quarks in drei Ausführungen vorkommen, die sich nur in einem inneren Freiheitsgrad – *Farbe* genannt – unterscheiden.

Man beschreibt ein Quark also durch drei *Quantenfelder*, die in einem Vektor angeordnet werden. Die damit formulierte Theorie ist nun invariant unter der Transformation dieses Vektors im Farbraum mit Elementen der Gruppe $SU(3)$. Dieses bezeichnet man als *Eichinvarianz*.

Das Prinzip der *lokalen* Eichinvarianz besagt, daß die Art der mathematischen Beschreibung eines physikalischen Sachverhaltes eines Beobachters an einem Ort nicht von der eines anderen Beobachters an einem anderen Ort abhängen darf. Mit anderen Worten, man fordert, daß die Theorie auch dann invariant bleibt, wenn die Quantenfelder an jedem Raum-Zeit-Punkt mit *verschiedenen* Gruppenelementen transformiert werden. Dieses Prinzip ist gerade so angelegt, daß eine Erweiterung der ursprünglich freien Theorie zu einer wechselwirkenden notwendig wird, in der es Eichbosonen gibt, die die Wechselwirkung zwischen den Quarks vermitteln. Diese neuen Teilchen heißen in der starken Wechselwirkung Gluonen und kommen in acht verschiedenen Ausführungen vor, da die SU(3) acht Generatoren besitzt. Im Gegensatz zum elektrisch neutralen Photon in der Quantenelektrodynamik tragen die Gluonen wie die Quarks eine Farbladung und können darum auch miteinander wechselwirken.

Die Einführung der Farbfreiheitsgrade ist also dafür verantwortlich, daß die Theorie über die Einführung der lokalen Eichinvarianz dynamisch wird. Daher bezeichnet man sie auch als **Q***uanten* **C***hromo* **D***ynamik*.

Die QCD hat sich als Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung etabliert, da bei großen Impulsüberträgen die störungstheoretisch erhaltenen Vorhersagen durch Experimente eindeutig bestätigt wurden. Allerdings hat die Störungsentwicklung in der starken Kopplungskonstanten α_s auch Hinweise geliefert, daß α_s für kleine Impulsüberträge, d.h. große Abstände, so ansteigt, daß dieser Zugang für Distanzen größer als 1 *fermi* versagt.

Es werden also andere Methoden gebraucht, um die Theorie auch bei großen Abständen untersuchen und damit zum Beispiel die *Confinement-Hypothese* überprüfen zu können. Diese besagt, daß Quarks in der Natur nicht frei vorkommen, sondern immer Bindungszustände, also Hadronen, bilden. Da die Ausdehnung eines Hadrons in der Größenordnung von 1 *fermi* liegt, kann man nicht erwarten, daß die Störungstheorie Confinement beschreibt. Ein anderes, herausragendes Phänomen nichtperturbativer Natur ist die Vorhersage eines thermodynamischen Phasenübergangs zwischen einem System von Hadronen bei niedrigen Temperaturen (*Confinementphase*) und einem *Quark-Gluon-Plasma* bei hohen Temperaturen (*Deconfinementphase*).

Für Untersuchungen dieser Art gibt es seit den siebziger Jahren einen Zugang zur QCD von Kenneth Wilson [26], der im Prinzip ohne Approximation auskommt. Dabei wird das Raum-Zeit-Volumen durch Einführung eines vierdimensionalen Gitters diskretisiert. Die für Berechnungen physikalischer Größen wichtigen Pfadintegrale werden dann zu hoch-, aber endlichdimensionalen Integralen, die mit einem leistungsfähigen Computer numerisch bestimmt werden können. Dieser Zugang wird **G***itter*-**E***ich*-**T***heorie* genannt und seit den ersten numerischen Untersuchungen von Michael Creutz [11] intensiv verfolgt.

In der vorliegenden Arbeit wird die sogenannte *Valenzquarkapproximation* (auch *Quenched approximation*) benutzt, durch die die QCD zu einer *reinen Eichtheorie* wird. Darunter versteht man eine Theorie, in der nur die Gluonen dynamisch sind, während die Quarks statisch sind, in der Art, daß die Bildung spontaner Quark-Antiquark-Paare vernachlässigt wird. In Feynman-Diagrammen ausgedrückt bedeutet dies, daß keine virtuellen geschlossenen Quark-Linien (*Loops*) berücksichtigt werden.

Diese Näherung liefert für viele Berechnungen sehr gute Ergebnisse, da wesentliche Phänomene der starken Wechselwirkung wie Confinement oder chirale Symmetriebrechung erhalten bleiben. Das liegt daran, daß es in einer nichtabelschen Eichtheorie wie der SU(3) Selbstwechselwirkungen von drei oder vier Gluonen gibt. Dadurch besitzt die Vakuumpolarisation nicht nur einen Beitrag von Quarkloops, sondern auch einen – wesentlich größeren – von Gluonloops.

Im folgenden sollen Phänomene untersucht werden, die in einem System bei endlicher Temperatur entstehen. Der Feynman'sche Pfadintegralformalismus erlaubt es, auf einfache Weise eine Temperatur in die Theorie einzuführen. Sie ist proportional der inversen Zeitausdehnung des betrachteten Raum-Zeit-Volumens.

Betrachtet man nun immer höhere Temperaturen, so wird die Zeitausdehnung im Pfadintegral immer geringer. Die Freiheitsgrade in Zeitrichtung werden dadurch eingefroren, bis man effektiv nur noch eine dreidimensionale Theorie hat. Diese ist also eine Art Hochtemperaturgrenzwert der (3+1)-dimensionalen Theorie. Bei dieser *dimensionalen Reduzierung* ist es interessant, physikalische Größen aus beiden Theorien miteinander zu vergleichen, um etwa festzustellen, ab welcher Temperatur die Reduktion vernünftig ist. Dazu betrachtet man Observablen, die von den Feldern der effektiven Theorie abhängen, wie zum Beispiel die Polyakov-loop-Korrelationen. Geeignet sind auch raumartige Observablen, das heißt solche, die nur auf Abstände in Raumrichtung sensitiv sind. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt dabei auf der *räumlichen Saitenspannung*.

Quarks werden in der Natur nie als freie Teilchen beobachtet, sondern kommen nur in Bindungszuständen vor, zum Beispiel in Mesonen als Quark-Antiquark-Paar. Untersucht man ein schweres Quark-Antiquark-Paar wie etwa Charmonium oder Bottomium, so kann man in einer nichtrelativistischen Näherung das Potential zwischen den beiden Teilchen bestimmen. Dieses geht für große Abstände nicht Coulomb-artig gegen Null, sondern wächst linear an. Das heißt, man braucht unendlich viel Energie, um ein Quark-Antiquark-Paar vollständig zu trennen, wodurch das Confinementverhalten in natürlicher Weise erklärt werden kann. Der lineare Anstieg des Potentials ist proportional zur sogenannten *Saitenspannung*. In der QCD bei hohen Temperaturen stellt man dagegen fest, daß die Saitenspannung oberhalb einer kritischen Temperatur Null wird. Diese Tatsache bestätigt die Existenz eines Phasenübergangs in die Deconfinementphase, in der die Quarks im Quark-Gluon-Plasma praktisch frei sind.

Um das Potential zu messen, betrachtet man einen Operator, der zur Zeit $t = 0$ ein $q\bar{q}$-Paar im Abstand R erzeugt und es zur Zeit t wieder vernichtet. Für statische Quarks führt das auf eine Observable, die nur von Gluonfeldern abhängt, den sogenannten *Wilson loop*. Dieser ist das Produkt von Feldvariablen entlang einer Contour, auf dem Gitter typischerweise eines Rechtecks, das in Raumrichtung die Länge R und in Zeitrichtung die Länge t hat.

Auch eine Theorie in drei Dimensionen zeigt bei niedrigen Temperaturen ein Confinementverhalten, nur hat das Potential natürlich keine praktische physikalische Bedeutung für die (3+1)-dimensionale Theorie. Sieht man die dreidimensionale Theorie als effektive Theorie einer vierdimensionalen bei hohen Temperaturen, so muß man die drei Dimensionen mit den Raumdimensionen der (3+1)-d Theorie identifizieren. Folglich sind die 3-d Wilson loops mit den Loops in Raum-Raum-Ebenen in der (3+1)-d Theorie zu vergleichen. Also erhält man ein räumliches Pseudopotential ohne direkte physikalische Bedeutung und eine **räumliche** Saitenspannung. Diese hat nichts mit der physikalischen Saitenspannung zu tun, ist jedoch zur Betrachtung der dimensionalen Reduktion geeignet, da sie auch für Temperaturen $T > T_c$ nicht verschwindet.

In dieser Arbeit werden sowohl Simulationen in drei als auch in vier Dimensionen durchgeführt. In drei Dimensionen wird die Saitenspannung auf einem symmetrischen Gitter mit 32^3 Punkten – also bei Temperatur $T = 0$ – untersucht. In (3+1) Dimensionen werden Gitter der Größe $32^3 \times N_\tau$ mit $N_\tau = 2, 3, 4$ benutzt, um die räumliche Saitenspannung bei verschiedenen Temperaturen oberhalb von T_c zu messen. Mit diesen Ergebnissen wird dann überprüft, inwieweit die effektive dreidimensionale Theorie die (3+1)-dimensionale bei hohen Temperaturen beschreibt.

Im folgenden Kapitel werden die SU(3)-Eichtheorie im Kontinuum und auf dem Gitter formuliert und spezielle Rechenmethoden für die letztere erläutert. Außerdem wird auf die Physik eingegangen, die durch eine solche Theorie simuliert wird, unter Berücksichtigung des bereits erwähnten Potentials zwischen zwei Quarks und der Aspekte der dimensionalen Reduzierung.

Kapitel 2 behandelt die verwendeten numerischen Algorithmen und deren Implementierung auf paralleler Hardware, die für die Berechnungen in drei Dimensionen benutzt wurde.

Die numerischen Resultate werden in Kapitel 3 aufgeführt und anschließend in der Zusammenfassung diskutiert und mit bisherigen Ergebnissen, zum Beispiel aus $SU(2)$, verglichen.

Im Anhang sind die Ergebnistabellen und Graphiken zusammengefaßt.

Kapitel 1

SU(3) - Eichtheorie

1.1 Kontinuumstheorie

Die Lagrangedichte der QCD. Im Standardmodell wird die starke Wechselwirkung durch eine Quantenfeldtheorie, genauer durch eine SU(3)-Eichtheorie beschrieben. Das bedeutet, daß die Quarks in drei verschiedenen Ausführungen vorkommen, die sich nur durch einen inneren Freiheitsgrad, der sogenannten Farbe, unterscheiden. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad ist notwendig, um zum Beispiel die Existenz des Δ^{++} zu erklären, das aus drei up-Quarks besteht und ohne eine antisymmetrische Wellenfunktion im Farbraum das Pauliprinzip für Fermionen verletzen würde.

Die Quarkfelder, die in die *Dirac Gleichung* eingehen, tragen nun zusätzlich zum Diracindex $l = 1, 2, 3, 4$ auch einen Farbindex $a = 1, 2, 3$. Die Diracgleichung für ein freies Quark mit der Masse m lautet also

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi(x) = 0, \tag{1.1}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\sum_{l=1}^{4}\sum_{b=1}^{3} \left(i\,\delta_{ab}\,\gamma^{\mu}_{kl}\partial_{\mu} - \delta_{ab}\delta_{kl}\,m\right)\,\Psi^{b}_{l}(x) = 0 \qquad \forall k = 1,2,3,4 \;\; \forall a = 1,2,3. \tag{1.2}$$

Ψ ist also ein 3-elementiger Vektor im Farbraum, wobei jeder Eintrag ein 4-komponentiger Dirac-Spinor ist. Demnach muß m in Gleichung 1.1 genaugenommen noch mit der 12×12-Einheitsmatrix multipliziert werden. $\partial\!\!\!/$ steht für $\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}$, also das Viererprodukt mit den Gammamatrizen, und x für den Viererortsvektor x^{μ}. Am Auftreten des Kronecker-Deltas δ_{ab} ist zu erkennen, daß die 3 Farben noch völlig unabhängig voneinander sind.

Die Antiteilchen werden wie üblich durch $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ beschrieben. Die *Lagrangedichte*, aus der man durch Funktionalableitung nach den Feldern wieder die Diracgleichungen für Teilchen und Antiteilchen erhält, lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \bar{\Psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi(x) &(1.3)\\ &= \bar{\Psi}(x)i\partial\!\!\!/\Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x). &(1.4) \end{aligned}$$

Diese Lagrangedichte ist nun SU(3)-invariant, d.h. durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\longrightarrow G\Psi(x) \\ \text{und}\quad \bar{\Psi}(x) &\longrightarrow \bar{\Psi}(x)G^\dagger \end{aligned} \qquad (1.5)$$

mit $G \in SU(3)$ **und G unabhängig von x** bleibt $\mathcal{L}$ unverändert.

Die globale Eichung in 1.5 soll aber in eine lokale überführt werden, damit die spezielle Wahl der Felder nicht von der eines anderen Beobachters an einem anderen Ort abhängt.
Man fordert also, daß $\mathcal{L}$ auch unter **lokalen SU(3)-Transformationen invariant bleiben muß**.
Da dies wegen des Ableitungsterms in 1.4 offensichtlich nicht erfüllt ist, muß man die Lagrangedichte erweitern.

Dazu führt man acht reelle Eichfelder $A^a_\mu(x)$ ein entsprechend der acht Erzeugenden der SU(3). Diese acht Gluon-Viererpotentiale faßt man mit den Erzeugenden λ_a zu einer 3×3-Matrix zusammen

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)\,\frac{\lambda_a}{2}, \qquad (1.6)$$

und ersetzt die Ableitung ∂_μ durch die *kovariante Ableitung*

$$D_\mu = \partial_\mu + i\,g_s A_\mu. \qquad (1.7)$$

Wenn sich nun die neuen Felder unter $G \in SU(3)$ wie

$$A^\mu(x) \longrightarrow G(x)A^\mu(x)G^\dagger(x) - \frac{i}{g_s}G(x)\partial^\mu G^\dagger(x) \qquad (1.8)$$

transformieren, so ist die neue Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}(x)\,iD\!\!\!\!/\,\Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \qquad (1.9)$$

auch lokal eichinvariant. Die Kopplung der Gluonen an die Quarks in Gleichung 1.7 heißt *minimale Substitution*. Dabei ist g_s eine dimensionslose Kopplungskonstante analog zur elektrischen Ladung in der QED. Damit nun die Gluonfelder nicht einfach ein äußeres Potential beschreiben, sondern selbst zu dynamischen Variablen werden, muß der Lagrangedichte ein weiterer Term hinzugefügt werden:

$$\mathcal{L}_{Gluon}(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right). \tag{1.10}$$

Der Gluon-Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ist dabei in folgender Weise definiert:

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + ig_s[A^\mu(x), A^\nu(x)]. \tag{1.11}$$

Der Kommutator darin bewirkt eine Selbstwechselwirkung zwischen 3 oder 4 Gluonen und hat kein Analogon in der Elektrodynamik. Er ist aber nötig, weil dadurch ein einfaches Transformationsverhalten des Feldstärketensors erreicht wird:

$$F^{\mu\nu}(x) \longrightarrow G(x)F^{\mu\nu}(x)G^\dagger(x). \tag{1.12}$$

Somit lautet die eichinvariante Lagrangedichte der QCD mit Gluonen und einem Quark der Masse m

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \bar\Psi(x)\, i\not{D}\Psi(x) - m\bar\Psi(x)\Psi(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right). \tag{1.13}$$

Temperatur in der Pfadintegralformulierung. Die Greensche Funktion eines eindimensionalen quantenmechanischen Systems mit Hamiltonoperator H

$$\begin{aligned} G(y,t'',x,t') &= \langle y|U(t',t'')|x\rangle \\ &= \langle y|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}|x\rangle \end{aligned} \tag{1.14}$$

läßt sich in der Pfadintegralformulierung schreiben als

$$G(y,t'',x,t') = \int\limits_{z(t')=x}^{z(t'')=y} [dz(t)]\; e^{-\frac{i}{\hbar}S(z)} \tag{1.15}$$

mit der Wirkung

$$S(z) = \int_{t'}^{t''} dt\, \left\{\frac{m}{2}\dot z^2(t) - V(z)\right\} = \int dt\,(T-V) = \int dt\, L. \tag{1.16}$$

Integriert man (1.15) über alle periodischen Pfade mit der Periode t, so erhält man

$$\begin{aligned} \tilde Z(t) &= \int\limits_{z(0)=x}^{z(t)=x} [dz(t')]\; e^{-\frac{i}{\hbar}S(z)} \\ &= \int dx\; G(x,t,x,0) \end{aligned}$$

und durch Einsetzen von Energieeigenfunktionen in (1.14)

$$\begin{aligned} &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \\ &= \mathrm{Sp}\ e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ein Vergleich mit der großkanonischen Zustandssumme der statistischen Mechanik

$$Z(T) = \mathrm{Sp}\ e^{-\frac{1}{T}H} \tag{1.18}$$

zeigt, daß $\tilde{Z}$ als Zustandssumme interpretiert werden kann, falls gilt:

$$t = -i\hbar\frac{1}{T}. \tag{1.19}$$

Dabei muß man offenbar zu rein imaginären Zeiten übergehen, damit die Temperatur reell bleibt. Die Ersetzung

$$t \to -i\tau, \quad \tau \in \mathcal{R}$$

führt dann auf den *imaginären Zeit-Formalismus* (*Imaginary-Time-Formalism, ITF*) und die *euklidische Formulierung der Pfadintegrale* und man erhält

$$G(y,t'',x,t') = \int\limits_{z(t')=x}^{z(t'')=y} [dz(t)]\ e^{-\frac{1}{\hbar}S_E(z)} \tag{1.20}$$

mit der euklidischen Wirkung

$$S_E = \int dt\ T + V \tag{1.21}$$

und der Temperatur

$$T = \frac{1}{\tau}, \quad \tau \in \mathcal{R},\ \hbar \equiv 1. \tag{1.22}$$

Das Pfadintegral $\tilde{Z}$, daß man mit dem Propagator G aus (1.20) erhält, wird im folgenden auch als Zustandssumme Z bezeichnet. Der Integrand in der neuen Zustandssumme hat die Form eines Boltzmann-Gewichtes und ermöglicht deshalb die numerische Berechnung des Integrals mit Monte-Carlo-Methoden, auf die im Abschnitt 1.2.1 eingegangen wird.

Die Zustandssumme der QCD. In einer Feldtheorie gibt es nun statt des einen Freiheitsgrades x unendlich viele Freiheitsgrade für jedes Feld: $\phi(x)$. Die Wirkung bekommt man auch hier durch Integration der Lagrangefunktion bzw. -dichte

$$S_E = \int\limits_0^\tau dt \int d^3x\ \mathcal{L}_E \tag{1.23}$$

$$\mathcal{L}_E = \bar{\Psi}(x)\ (\gamma_E^\mu D_\mu + m)\ \Psi(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right), \tag{1.24}$$

nur handelt es sich jetzt bei den γ_E um Matrizen, die die Bedingung

$$\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$$

erfüllen, da im ITF eine euklidische Metrik vorliegt.
Im folgenden wird der Index E weggelassen, da ich ausschließlich den ITF verwende.

Mit der oben genannten Wirkung werden Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten von Feldern einfach als normierte Ensemblemittelwerte bestimmt, wobei das Ensemble aus allen periodischen Pfaden im Konfigurationsraum besteht:

$$\langle \mathcal{O}(\phi) \rangle = \frac{1}{Z} \int [d\phi]\, \mathcal{O}(\phi) e^{-S[\phi]} \quad (\hbar \equiv 1) \tag{1.25}$$

$$\text{mit} \qquad Z = \int [d\phi]\, e^{-S[\phi]}, \tag{1.26}$$

wobei ϕ für die vorkommenden Felder und $[d\phi]$ symbolisch für das Maß des Pfadintegrals steht, dem in Abschnitt 1.2 eine exakte Bedeutung gegeben wird.

Fermionen. Bisher wurde noch nicht berücksichtigt, daß die Felder Ψ und $\bar{\Psi}$ Fermionen beschreiben und daher antikommutieren müssen. Diese Forderung führt zur Einführung von *Grassmannvariablen*, auf die hier allerdings nicht ausführlich eingegangen werden soll. Es sei lediglich festgestellt, daß die Fermionfelder in der Zustandssumme nur quadratisch vorkommen und daher analytisch ausintegriert werden können. Das Ergebnis ist eine effektive Wirkung

$$\mathcal{S}_{eff} = ln\ det\ K(A) + S_{Gluon}(A), \tag{1.27}$$

in der die Determinante der Fermion-Matrix K vorkommt, die *nicht lokal* von den Eichfeldern A abhängt. Da diese Nichtlokalität den Zeitaufwand bei den später vorgestellten numerischen Methoden immens erhöht, wird in dieser Arbeit die sogenannte *Quenched approximation* verwendet, bei der man einfach die Determinante auf 1 setzt. Aus der Störungstheorie weiß man, daß in $ln\ det\ K$ alle Feynman-Diagramme stehen, in denen ein Fermionloop mit einer beliebigen Anzahl daran befindlicher Eichfelder vorkommt. Also beschreibt dieser Term Vakuum-Polarisations-Effekte, die in der Quenched approximation vernachlässigt werden.

1.2 Gittertheorie

Um die Dimension des Konfigurationsraums unserer Theorie endlich zu machen und dem Maß des Pfadintegrals eine mathematische Bedeutung zu geben, führt man ein

Raum-Zeit-Gitter ein. Das heißt, der Viererverktor x^μ kann nur noch die Werte $n^\mu a$ annehmen mit $n^\mu \in \mathcal{Z}^4$ und einem festen Gitterabstand a. Wenn man nun auch noch das Raum-Zeit-Volumen endlich hält, so gibt es nur endlich viele Freiheitsgrade $\phi(n^\mu)$ und folglich nur endlich viele Integrale im Pfadintegral. Periodische Randbedingungen in der Zeitrichtung bewirken, daß nur periodische Pfade erzeugt werden, wie es in (1.17) gefordert wird. Die Randbedingungen in den Raumdimensionen des Gitters können beliebig gewählt werden, üblicherweise benutzt man auch periodische, da so Rand- und Oberflächeneffekte recht gut unterdrückt werden. Für ein Gitter mit N_τ Punkten in der Zeitrichtung und N_σ Punkten in den drei Raumrichtungen beträgt das Raum-Zeit-Volumen also

$$(N_\sigma a)^3 \times N_\tau a.$$

Da es mit dem Gitterabstand a bereits eine dimensionsbehaftete Größe in der Theorie gibt, lassen sich alle anderen durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von a in dimensionslose Größen überführen:

$$\hat{\Psi}(n) = a^{3/2} \cdot \Psi(na) \tag{1.28}$$
$$\hat{m} = a \cdot m. \tag{1.29}$$

Das Integral $\int dx$ wird durch die Summe $a^4 \sum$ ersetzt und aus Ableitungen werden endliche Differenzenquotienten. Bei der Diskretisierung der Eichfelder ist eine genauere Betrachtung nötig. Sie waren in der Kontinuumstheorie eingeführt worden, um eine lokale Eichinvarianz der Lagrangedichte zu gewährleisten. Wegen der oben erwähnten Differenzenquotienten entstehen in $\mathcal{L}$ Terme von der Form

$$\bar{\Psi}(n)\Psi(n+\hat{\mu}), \qquad \text{also} \quad \bar{\Psi}(x)\Psi(y).$$

Da solche bilinearen Ausdrücke für $x \neq y$ offenbar nicht **lokal** eichinvariant sind, müssen die Eichfelder die Punkte x und y in gewisser Weise verbinden. Das wird durch das *Schwingersche Linienintegral* erreicht:

$$U(x,y) = e^{ig_s \int_x^y dz_\mu A^\mu(z)}. \tag{1.30}$$

Dabei wird das Integral entlang eines beliebigen Weges ausgeführt, der die Punkte x und y miteinander verbindet. U ist ein Gruppenelement von SU(3), da die Matrizen $A^\mu(z)$ aus der Lieschen Algebra sind (vgl. (1.6)). Für $y - x = \epsilon$ und kleine $|\epsilon|$ vereinfacht sich (1.30) zu

$$U(x, x+\epsilon) = e^{ig_s \, \epsilon_\mu \cdot A^\mu(x)}. \tag{1.31}$$

Unter $G \in SU(3)$ transformiert sich diese Matrix wie

$$U(x, x+\epsilon) \longrightarrow G(x) U(x, x+\epsilon) G^\dagger(x+\epsilon) \tag{1.32}$$

und damit sind die bilinearen Ausdrücke

$$\bar{\Psi}(x)U(x, x+\epsilon)\Psi(x+\epsilon)$$

SU(3)-invariant. Da der kleinstmögliche Abstand auf dem Gitter a ist und Wege immer nur entlang der Gitterachsen laufen können, lautet der einfachste diskrete Ausdruck für die Eichfelder also

$$U_\mu(x) = e^{ig_s a A_\mu(x)}. \tag{1.33}$$

Das bedeutet, die Eichfelder werden auf dem Gitter in natürlicher Weise durch Elemente der zugehörigen Eichgruppe dargestellt, die auf den Verbindungskanten definiert sind. Daher nennt man sie *Linkvariablen* oder einfach *Links*.

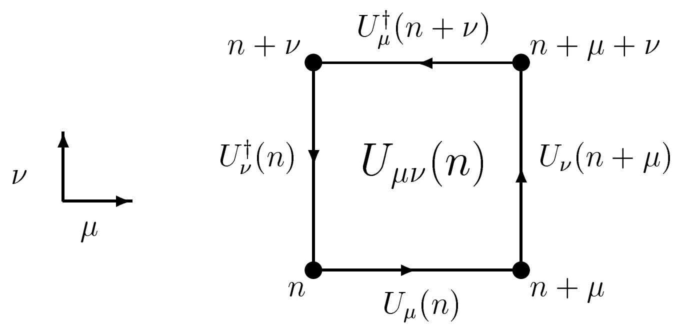
Bei der diskreten Version der Wirkung beschränke ich mich im folgenden auf den rein gluonischen Teil, der in der Quenched approximation vorkommt

$$S_{Gluon}^{Kont} = \int d^4x \, \frac{1}{2} \,\mathrm{Sp}\,(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)). \tag{1.34}$$

Es muß sich dabei um einen eichinvarianten Ausdruck handeln, der nur von den Linkvariablen U abhängt. Das wird durch die Spur eines Weg-geordneten Produktes von Links entlang einer **geschlossenen** Kurve erreicht. Wegen der lokalen Struktur des Kontinuumterms $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ bietet es sich an, den kleinstmöglichen Weg zu nehmen, also den um eine elementare Plaquette des Gitters. In der $\mu-\nu$-Ebene ergibt das

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n). \tag{1.35}$$

Die SU(3)-Matrix $U_{\mu\nu}(n)$ bezeichnet man häufig selbst als Plaquette, bei der man eine gegebene Orientierung des Umlaufsinns annimmt.



Die Wirkung mit dem richtigen Kontinuumslimes für $a \to 0$ ist nun

$$S_{Gluon}(\{U\}) = \frac{2N}{g_s^2} \sum_P \left[1 - \frac{1}{2N}\mathrm{Sp}(U_P + U_P^\dagger)\right], \tag{1.36}$$

wobei die Summe über alle elementaren Plaquetten U_P in allen möglichen Ebenen geht und die Orientierung fest gewählt ist. N steht für die Dimension der Matrizen aus der Gruppe SU(N), also ist hier $N = 3$ zu setzen, die Formel (1.36) gilt jedoch auch für alle anderen speziellen unitären Gruppen mit $N > 1$. Der Ausdruck $\frac{2N}{g_s^2}$ wird häufig mit β abgekürzt und schlicht *Kopplung* genannt.

Für die Zustandssumme der SU(3)-Eichtheorie in der Quenched approximation erhält man

$$Z = \int \prod_{n,\mu} dU_\mu(n) \;\; e^{-S_{gluon}}, \tag{1.37}$$

und Vakuumerwartungswerte werden durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{n,\mu} dU_\mu(n) \;\; \mathcal{O}(U) \; e^{-S_{gluon}} \tag{1.38}$$

bestimmt. Dabei sind die Integrale jeweils über die gesamte Gruppe SU(3) auszuführen.

In Abschnitt 1.1 wurde gezeigt, daß die Temperatur im Pfadintegralformalismus der inversen zeitlichen Ausdehnung des betrachteten Raum-Zeit-Volumens entspricht (siehe Gl. 1.22). Bei N_τ Gitterpunkten in der Zeitrichtung ist die Temperatur des simulierten Systems also

$$T = \frac{1}{a \cdot N_\tau}. \tag{1.39}$$

1.2.1 Monte-Carlo-Integration

Durch die Diskretisierung der Raum-Zeit wurde bisher nur erreicht, daß das Maß des Pfadintegrals eine mathematische Bedeutung hat. Tatsächlich sind bei einem 16^4-Gitter mehr als 2 Millionen Integrale zu lösen, womit eine analytische Berechnung praktisch ausgeschlossen ist. Dieser Abschnitt soll nun Methoden erläutern, mit denen dieses hochdimensionale Integral durch numerische Näherungsverfahren bestimmt werden kann. Allerdings scheiden herkömmliche Verfahren wie etwa die Trapezregel oder die Simpson-Regel aus, da deren Rechenaufwand exponentiell mit der Dimension des Integrals ansteigt.

Die sogenannten *Monte-Carlo-Methoden* basieren alle auf der simplen Beobachtung, daß für das Integral

$$\int_0^1 f(x)dx$$

schon

$$f(x_i)$$

eine unabhängige Schätzung ist, wenn x_i zufällig und gleichverteilt aus dem Intervall $[0;1]$ gewählt wird. Bei n Versuchen erhält man

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{1.40}$$

Der Fehler dieser Schätzung verhält sich wie $\frac{1}{\sqrt{n}}$ und ist unabhängig von der Dimension des Integrals.

Mit dem **Importance sampling** möchte man nun erreichen, daß möglichst viele Stützstellen in das Gebiet fallen, in dem $f(x)$ groß ist, um die Varianz der einzelnen Schätzung zu verringern.

Dazu nimmt man eine Funktion $g(x)$, deren Integral berechenbar ist und die $f(x)$ möglichst gut annähert, und schreibt

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x)dx. \tag{1.41}$$

Durch die Erzeugung von Zufallszahlen x_i, die mit $g(x)dx$ verteilt sind, ergibt sich bei n Schätzungen

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g(x_i)}, \tag{1.42}$$

und dabei variieren die Summanden jetzt nicht mehr so stark. Allerdings muß das Integral von g bekannt sein, um aus gleichverteilten Zufallszahlen solche zu erhalten, die mit g verteilt sind.

Bei der Berechnung von Erwartungswerten nach Formel 1.38 gilt auch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \prod_{n,\mu} dU_\mu(x) \;\; \mathcal{O}(U)\, \frac{e^{-S_{gluon}(U)}}{Z}, \tag{1.43}$$

so daß es wünschenswert wäre, den normierten Boltzmann-Faktor als Funktion g zu benutzen, weil dann nur noch über $\mathcal{O}(U)$ gemittelt werden müßte. Passend verteilte Zufallszahlen sind aber nicht ohne weiteres zu erzeugen und zudem kommt im Nenner der Verteilungsfunktion das Integral selbst noch einmal vor.

Einen Ausweg liefert die **Metropolis-Methode**, bei der mit Hilfe einer **Markovkette** sukzessive Konfigurationen $U = \{U_\mu(n)\}$ erzeugt werden, die im Limes großer Schrittanzahl mit der richtigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(U) = \frac{e^{-S_{gluon}(U)}}{Z} \tag{1.44}$$

verteilt sind.

Beginnend mit einer beliebigen Startkonfiguration U_0 werden in der Markovkette die nächsten Konfigurationen $U_1, U_2, \ldots$ aus ihrem jeweiligen Vorgänger mit Hilfe einer Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(U \to U')$$

gebildet. Das „Zeitmittel“ über N Elemente der Kette

$$\langle \mathcal{O} \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{O}(U_i) \tag{1.45}$$

strebt dann mit der statistischen Unsicherheit $1/\sqrt{N}$ gegen das Ensemblemittel aus (1.43), wenn die Bedingung der **Detailed balance** erfüllt ist:

$$p(U)P(U \to U') = p(U')P(U' \to U). \tag{1.46}$$

Diese Bedingung läßt sich nun erfüllen, ohne die Zustandssumme zu kennen, die in p auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt. Es muß also

$$e^{-S(U)}P(U \to U') = e^{-S(U')}P(U' \to U) \tag{1.47}$$

gelten. Der Beweis und die weiteren Voraussetzungen können z.B. in [15] nachgelesen werden.

Es bleibt nun noch übrig, eine Vorschrift $U \to U'$ zu finden, die (1.47) erfüllt. Die erste Methode dafür stammt von Metropolis et al. (1953). Dabei wird immer nur ein Element der Konfiguration U auf einmal verändert, wobei natürlich alle Elemente an die Reihe kommen müssen. Für die ausgewählte Variable wird nun ein neuer Wert vorgeschlagen und damit die Wirkung S berechnet. Ist diese kleiner als die alte Wirkung, so wird der neue Wert akzeptiert. Vergrößert sich jedoch die Wirkung, akzeptiert man ihn mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_{akzept} = e^{S(U_{alt})-S(U_{vorschlag})}. \tag{1.48}$$

Durch diese Möglichkeit unterscheidet sich das System von einem klassischen, bei dem die Wirkung dem Minimum ohne Schwankungen zustrebt, und es werden die Quantenfluktuationen berücksichtigt.

In der reinen SU(3)-Eichtheorie, die in meinen Programmen ausschließlich simuliert wird, gibt es allerdings die Möglichkeit, den neuen Wert für die ausgewählte Variable gleich mit der richtigen Wahrscheinlichkeitsverteilung zu bestimmen, so daß die oben genannte Akzeptanzentscheidung nicht mehr nötig ist. In Abschnitt 2.1.1 wird diese Methode genauer erläutert.

1.2.2 Kontinuumslimes

In den vorangegangenen Abschnitten wurde beschrieben, wie man eine SU(3)-Eichtheorie auf einem Raum-Zeit-Gitter formuliert und darin Erwartungswerte von Observablen bestimmt. Diese Prozedur ist eine Möglichkeit (von vielen), die Theorie zu **regularisieren**, d.h. die unphysikalischen, divergenten Terme zu beseitigen.
Nun soll der Frage nachgegangen werden, ob und auf welche Weise man die Ergebnisse der Gittertheorie auf die Kontinuumstheorie, an der man ja eigentlich interessiert ist, übertragen kann. Dazu muß ein Verfahren angewendet werden, bei dem die eingeführte Regularisierung entfernt wird, ohne daß dabei in den physikalischen Größen wieder die ursprünglichen Divergenzen auftreten. Diese Prozedur wird als **Kontinuumslimes** bezeichnet und soll nun genauer untersucht werden.

Bei der Gitterregularisierung wird das Raum-Zeit-Volumen durch Einführung eines Gitterabstandes a diskretisiert, wodurch keine divergenten Integrale mehr auftreten können. Zum Kontinuum gelangt man folglich durch den Grenzwert $a \to 0$. In der Wirkung der Gittertheorie (1.36) kommt der Gitterabstand aber gar nicht mehr vor. Statt dessen gibt es die dimensionslose Kopplung g^2, die zunächst einfach ein freier Parameter der Theorie ist.

Damit eine physikalische Größe wie etwa eine Hadronmasse m nun einen endlichen Wert annimmt, muß die zugehörige Masse in Gittereinheiten $\hat{m} = ma$ im Kontinuumslimes $a \to 0$ gegen 0 gehen. Da man die Gittermasse aus einer Korrelationsfunktion

$$\langle \mathcal{O}_h(0)\mathcal{O}_h(\tau)\rangle \sim e^{-\hat{m}\,\tau} \sim e^{-\frac{\tau}{\xi}} \tag{1.49}$$

zum Beispiel mit $\mathcal{O}_h = \bar{\Psi}\Psi$ erhält, bedeutet das, daß die Korrelationslänge $\xi = \frac{1}{\hat{m}}$ im Kontinuumslimes divergieren muß. Betrachtet man die Gittertheorie also als ein statistisches System mit Parameter g, so findet man die Kontinuumstheorie bei dem Parameter $g = g^*$, bei dem das statistische System einen kritischen Punkt (gleich Phasenübergang mit divergenter Korrelationslänge) hat.

Es muß nun ein Zusammenhang zwischen a und g hergestellt werden, so daß

$$a(g) \to 0 \quad \text{für} \quad g \to g^* \tag{1.50}$$

gilt. Dazu betrachtet man eine Observable $\mathcal{O}$ mit der Massendimension d. Im Rahmen der Gittertheorie wird nun die dimensionslose Größe $\hat{\mathcal{O}}$ bei einer beliebigen Kopplung g bestimmt. Dann gilt

$$\mathcal{O}(a, g(a)) = \left(\frac{1}{a}\right)^d \hat{\mathcal{O}}(g). \tag{1.51}$$

Dieser Ausdruck muß nun für kleine Gitterabstände a gegen einen endlichen Wert $\mathcal{O}_{phys.}$ gehen, der nicht mehr von a abhängt, also wird gefordert:

$$a\frac{d}{da}\mathcal{O}(a,g(a)) = 0 \tag{1.52}$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O}(a,g(a)) = 0 \tag{1.53}$$

$$\Leftrightarrow \left(a\frac{\partial}{\partial a}-\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O}(a,g(a)) = 0, \tag{1.54}$$

$$\text{wobei} \qquad \beta(g) = -a\frac{\partial g}{\partial a} \quad \text{ist.} \tag{1.55}$$

Die Gleichung 1.54 heißt **Renormierungsgruppengleichung** und β steht für die **Callan-Symanzik β-Funktion** (nicht zu verwechseln mit der Kopplung $\beta = \frac{6}{g^2}$). Ist diese Funktion bekannt, so kann $g(a)$ durch Integration von (1.55) berechnet werden.

Es wird allgemein angenommen, daß die QCD eine asymptotisch freie Theorie ist, d.h. der kritische Punkt bei $g^* = 0$ liegt. Daher kann man einen störungstheoretischen Ausdruck für $\mathcal{O}$ benutzen, um die β-Funktion zu berechnen, denn kleine a bedeuten dann auch kleine g. Entwickelt man etwa das Potential zwischen zwei Quarks $V(R,g,a)$ in g bis zur Ordnung g^6, so bekommt man schließlich

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 \tag{1.56}$$

mit $b_0 = \frac{11}{16\pi^2}$ und $b_1 = \frac{102}{(16\pi^2)^2}$ [24]. Daraus folgt dann

$$a = \frac{1}{\Lambda_L}(b_0 g^2)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}}\, e^{-\frac{1}{2b_0 g^2}}, \tag{1.57}$$

wobei Λ_L ein freier Parameter der Kontinuumstheorie ist, der bei der Integration der β-Funktion entsteht und an experimentelle Ergebnisse angepaßt werden muß. Dieser sogenannte Lambda-Parameter legt dann die gesamte SU(3)-Eichtheorie fest.

In Gleichung 1.57 erkennt man nun, daß tatsächlich a gegen 0 geht für $g \to 0$, weil b_0 positiv ist. Also handelt es sich um eine asymptotisch freie Theorie mit einem kritischen Punkt bei $g^* = 0$ (das ist natürlich kein Beweis, sondern nur eine Konsistenzbetrachtung).
Umgeschrieben auf die Kopplung $\beta = 6/g^2$, entspricht der Kontinuumslimes also dem Übergang $\beta \to \infty$.

Andererseits kann man die β-Funktion auch dazu benutzen, die Abhängigkeit der Kopplung vom Gitterabstand zu ermitteln:

$$g^{-2}(a) = 2b_0 \ln\left(\frac{1}{a\Lambda_L}\right) + \frac{b_1}{b_0}\ln\left(2\ln\left(\frac{1}{a\Lambda_L}\right)\right). \tag{1.58}$$

Die Kopplungs*konstante* g ist also nicht mehr konstant, sondern hängt ab vom Gitterabstand a, der in die Theorie eingeführt worden ist und die Meßskala für alle dimensionsbehafteten Größen festlegt. Daher wird g auch als *laufende Kopplungskonstante* bezeichnet.

Wenn nun Simulationen bei endlicher Temperatur durchgeführt werden, d.h. auf einem asymetrischen Gitter ($N_\tau \neq N_\sigma$), so ist mit der Temperatur schon eine dimensionsbehaftete Größe vorhanden, die die Skala festlegt. In der Störungstheorie können Observable in Potenzen von g^2 entwickelt werden. Die dabei in höheren Ordnungen auftretenden Divergenzen erfordern eine Renormierung, die ebenfalls zu einer laufenden Kopplung führt. Zum Beispiel treten diese (ultravioletten) Divergenzen bei der Berechnung der Energiedichte in Ordnung g^4 auf:

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon(T)}{T^4} &= c_1 + c_2 g^2 + c_3 g^3 + \text{höhere Ordnungen} \\ &= c_1 + \tilde{c}_2 g^2(T) + c_3 g^3 + \text{höhere Ordnungen.}\end{aligned} \tag{1.59}$$

(Bemerkung: Zusätzliche Probleme treten im Hochtemperaturlimes der QCD auch im Infrarotlimes auf, was zu dem g^3-Term in der Störungsreihe führt.)
Da im Rahmen der Renormierungsgruppentheorie gezeigt wurde, daß die ersten beiden Terme der β-Funktion universell sind (d.h. nicht von der betrachteten Observable oder vom Regularisierungsschema abhängen), gilt folglich auch für die renormierte Kopplung bei endlicher Temperatur

$$g^{-2}(T) = 2b_0 \ln\left(\frac{T}{\Lambda_T}\right) + \frac{b_1}{b_0} \ln\left(2\ln\left(\frac{T}{\Lambda_T}\right)\right). \tag{1.60}$$

Kontinuumslimes in 3 Dimensionen. Formuliert man eine SU(3)-Gittertheorie in 3 Dimensionen, so erhält man die Wirkung

$$S^{3-dim}_{Gluon}(\{U\}) = \frac{6}{a g_3^2} \sum_P \left[1 - \frac{1}{6}\mathrm{Sp}(U_P + U_P^\dagger)\right], \tag{1.61}$$

wobei die Summe über alle möglichen Plaquetten im 3-dimensionalen Gitter auszuführen ist. Im Unterschied zum vierdimensionalen Fall kommt nun der Gitterabstand a in der Wirkung vor. Da die Wirkung in den hier verwendeten natürlichen Einheiten ($\hbar \equiv 1$) dimensionslos ist, muß auch die Kopplung $\beta_3 = \frac{6}{a g_3^2}$ dimensionslos sein. Also hat g_3^2 die Dimension einer Masse und legt damit die Skala für alle physikalischen Observablen fest. Das hat zur Folge, daß der Zusammenhang zwischen der Gitter-Kopplung β_3 und dem Gitterabstand a, der im vierdimensionalen Fall auf komplizierte Weise ermittelt wurde, jetzt ganz einfach ist:

$$a(\beta_3) = \frac{6}{g_3^2} \cdot \frac{1}{\beta_3} + O(\beta_3^{-2}). \tag{1.62}$$

Der Kontinuumslimes entspricht also dem Übergang $\beta_3 \to \infty$.

Sei nun $\mathcal{O}$ eine physikalische Observable mit der Massendimension d, die zugehörige dimensionslose Gitterobservable $\mathcal{O}a^d$ wird mit $\hat{\mathcal{O}}$ bezeichnet. Dann muß allein aus dimensionalen Gründen gelten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= c \cdot \left(g_3^2\right)^d \\
&= c \cdot \left(\frac{6}{a\beta_3}\right)^d \\
\Leftrightarrow \quad a^d\mathcal{O} &= c' \cdot \frac{1}{\beta_3^d}\,, \quad c' = c\,6^d \\
\Leftrightarrow \quad \hat{\mathcal{O}} &= c' \cdot \frac{1}{\beta_3^d}\,, \quad \text{für } \beta_3 \gg 1 \qquad (1.63)
\end{aligned}$$

Gleichung 1.63 kann aber bei endlichen β_3 noch Korrekturen haben, die erst im Grenzwert $\beta_3 \to \infty$ verschwinden. Allgemein gilt daher

$$\beta_3^d\hat{\mathcal{O}} = c' + \frac{\tilde{c}}{\beta_3} + O(\beta_3^{-2}). \qquad (1.64)$$

Bei präzisen Messungen kann dieses Skalenverhalten tatsächlich beobachtet werden.

Das Skalenfenster. Die vorangegangenen Überlegungen haben gezeigt, daß die Gittertheorie zum Kontinuum führt, wenn die Kopplung β bzw. β_3 gegen Unendlich geht. In der Praxis bedeutet das, sie muß groß genug sein, damit die störungstheoretisch hergeleiteten Zusammenhänge (1.56 - 1.58) und das Skalenverhalten (1.64) auch gelten. Auf der anderen Seite schrumpft der Gitterabstand aber mit steigendem β bzw. β_3 gemäß den Gleichungen 1.57 und 1.62. Dadurch wird bei fester Anzahl der Gitterpunkte das simulierte Raum-Zeit-Volumen immer kleiner und es treten Endliche-Volumen-Effekte (*Finite size effects*) auf, die die Ergebnisse verfälschen. Da der numerische Aufwand der Simulation mindestens linear von der Anzahl der Gitterpunkte abhängt, ist die Gittergröße durch die verfügbaren Computerresourcen begrenzt.

Diese beiden gegenläufigen Einschränkungen legen daher das sogenannte Skalenfenster fest. Dies ist der Kopplungsbereich, in dem eine Simulation möglich ist, die Ergebnisse von physikalischer Bedeutung liefert und dabei in vertretbarer Zeit fertig wird. Für SU(3) reicht dieser Bereich bei einem Raumvolumen von 32^3 Punkten in vier Dimensionen von $\beta \approx 5.7$ bis $\beta \approx 7.0$ und in drei Dimensionen von $\beta_3 \approx 12.0$ bis $\beta_3 \approx 24.0$.

1.3 Die Physik der SU(3)

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels wurden die technischen Aspekte der Gittersimulation einer physikalischen Theorie erläutert. Im folgenden soll nun erklärt werden, wie die Physik, die durch eine SU(3)-Theorie beschrieben wird, tatsächlich aussieht. Das Interesse dieser Arbeit gilt den Bestandteilen der hadronischen Materie, also den Quarks und Gluonen, wobei die Quarks in der verwendeten *Quenched approximation* nur eingeschränkt dynamisch sind. So können zum Beispiel keine spontanen Quark-Antiquark-Paare entstehen. Durch geeignetes Wählen der Gittergröße und des Parameters β wird das System bei einer bestimmten physikalischen Temperatur simuliert.

Frühere Untersuchungen haben ergeben, daß die reine SU(3)-Theorie einen Phasenübergang 1. Ordnung bei einer kritischen Temperatur $T_c = 200$ MeV besitzt. Momentan befindet sich das Universum in der Tieftemperaturphase, aber kurz nach dem Urknall war für etwa 10^{-5} Sekunden die Hochtemperaturphase realisiert. Die Unterschiede der beiden Phasen zeigen sich sehr deutlich im Potential zwischen einem schweren Quark-Antiquark-Paar.

Für $T > T_c$ hat es einen Coulomb-artigen Verlauf multipliziert mit einem exponentiellen Abschirmungsfaktor. Folglich kann man das Paar mit endlich viel Energie vollständig voneinander trennen.
Für $T < T_c$ gibt es jedoch außer einem Coulomb-Term noch einen linearen Summanden:

$$V(r) = V_0 - \frac{\alpha}{r} + \sigma \cdot r. \tag{1.65}$$

Daher ist es **nicht möglich**, das $Q\bar{Q}$-Paar mit endlich viel Energie vollständig voneinander zu trennen. Diese Tatsache sieht man als Erklärung für die Bildung der uns bekannten hadronischen Materie nach der Abkühlung des Universums unter T_c. In der Realität wird das Potential jedoch nicht beliebig weit ansteigen, denn wenn die aufgewendete Energie größer als die Massen von zwei Quarks ist, wird sich daraus ein Quark-Antiquark-Paar bilden und mit den ursprünglichen Quarks zwei neue Mesonen bilden.

Dieser Vorgang kann aber nicht in der Quenched approximation auftreten, da spontane Paarbildung nicht mit statischen Quarks simuliert werden kann. Für Abstände bis zu 1 *fermi* bleibt die Aussage der approximierten Theorie aber trotzdem richtig. Den Koeffizienten des linearen Potentialterms nennt man **Saitenspannung** bzw. **String tension** und das gesamte Phänomen bezeichnet man als **Confinement**.

Die wichtigste Konsequenz des Confinements ist, daß Quarks für $T < T_c$ **nicht als freie Teilchen vorkommen können**! Das unterscheidet sie von anderen Elementarteilchen wie etwa den Leptonen.

In der Hochtemperatur- oder *Deconfinement*-Phase können freie Quarks jedoch vorkommen und zusammen mit den Gluonen das sogenannte *Quark-Gluon-Plasma* bilden.

In den folgenden beiden Abschnitten wird zunächst gezeigt, wie man das $Q\bar{Q}$-Potential aus geeignet gewählten Operatoren bei $T = 0$ bestimmen kann. Das Verhalten dieser Operatoren wird dann bei endlicher Temperatur untersucht und es wird dikutiert, wie deren Verhalten in der Hochtemperatur-Phase Aufschluß über nicht-störungstheoretische Effekte geben kann.

1.3.1 Das Potential zwischen schweren Quarks

Wenn ein System schwerer Quarks wie etwa *Charmonium* oder *Bottomium* untersucht wird, kann man aufgrund der großen Massen zu einer nichtrelativistischen Beschreibung übergehen. Daher soll auch zunächst ein einfaches quantenmechanisches Beispiel betrachtet werden, um zu verstehen, wie man ein Potential im Pfadintegralformalismus extrahieren kann. Die Propagation eines Teilchens der Masse m im Potential V wird (eindimensional) beschrieben durch

$$G(x', t; x, 0) = \langle x'|e^{-iHt}|x\rangle \tag{1.66}$$

mit dem Hamiltonoperator $H = p^2/2m + V(x)$. Für $m \to \infty$ wird das Teilchen statisch, d.h. $H_\infty = V(x)$, und es gilt

$$G(x', t; x, 0) \to \delta(x - x')e^{-iV(x)t}. \tag{1.67}$$

Also ist das Potential $V(x)$ im ITF einfach durch den exponentiellen Abfall in (1.67) bestimmt. In diesem Beispiel ist der Zustand $|x\rangle$ ein Eigenzustand von H_∞. Wenn dem nicht so ist, z.B. bei endlicher Masse m, entwickelt man die Zustände nach den Energieeigenzuständen und bekommt statt (1.67) nun

$$G(x', t; x, 0) = \sum_n \langle x'|n\rangle\langle n|x\rangle e^{-iE_n t}. \tag{1.68}$$

Man erhält den Beitrag des Zustandes mit der geringsten Energie, wenn man (1.68) für große Zeiten t betrachtet entsprechend der *Feynman - Kac Formel*.

In einer Eichfeld-Theorie geht man nun ganz analog vor. Zuerst müssen eichinvariante Zustände konstruiert werden, die das Quark-Antiquark-Paar beschreiben. Dazu benutzt man wieder das *Schwingersche Linienintegral* aus (1.30):

$$|\Phi_{\alpha\beta}(\vec{x}, 0; \vec{y}, 0)\rangle = \bar{\Psi}_\alpha(\vec{x}, 0)U(\vec{x}, 0; \vec{y}, 0)\Psi_\beta(\vec{y}, 0)|0\rangle. \tag{1.69}$$

Ein Endzustand zur Zeit t wird genauso konstruiert, und damit kann man nun die relevante Greensche Funktion aufschreiben:

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\vec{x'},\vec{y'};\vec{x},\vec{y};t) = \\ \langle 0|T(\bar{\Psi}_{\beta'}(\vec{y'},t)U(\vec{y'},t;\vec{x'},t)\Psi_{\alpha'}(\vec{x'},t)\bar{\Psi}_{\alpha}(\vec{x},0)U(\vec{x},0;\vec{y},0)\Psi_{\beta}(\vec{y},0))|0\rangle . \quad (1.70)$$

Dabei steht T für den Zeitordnungsoperator und $|0\rangle$ für das Vakuum, also den Grundzustand. Aufgrund der oben gemachten Überlegungen erwartet man für $m_{Quark} \to \infty$ und $T = it \ \to \infty$

$$G_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\vec{x'},\vec{y'};\vec{x},\vec{y};-iT) \to \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x'})\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{y'})C_{\alpha'\beta',\alpha\beta}(\vec{x},\vec{y})e^{-V(R)T}, \quad (1.71)$$

wobei die Funktion C den Überlapp des konstruierten Zustandes mit dem Grundzustand beschreibt und $V(R)$ die Grundzustandsenergie des $Q\bar{Q}$-Paares im Abstand $R = |\vec{x}-\vec{y}|$ ist.

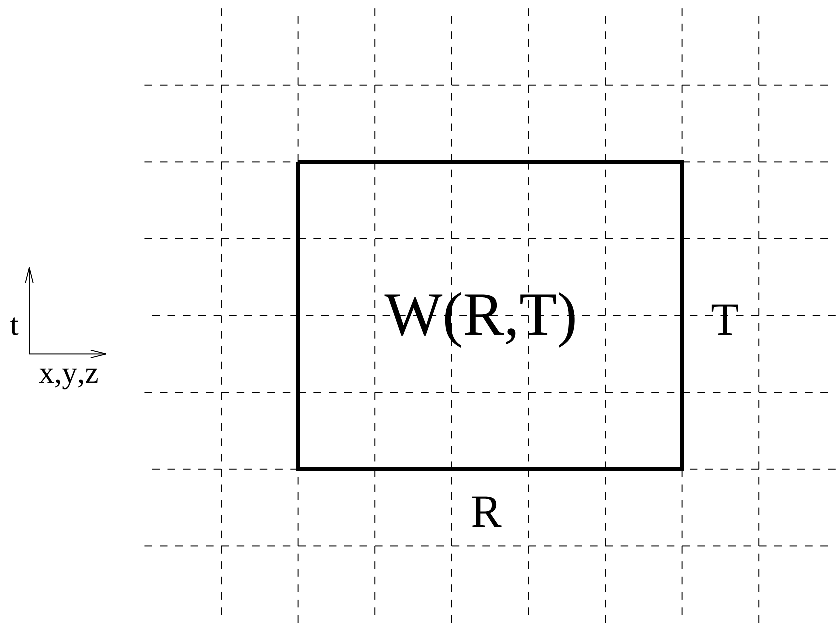
Eine genauere Analyse (siehe z.B. [24]) liefert

$$W(R,T) \equiv \langle W_C[A]\rangle \longrightarrow F(R)e^{-V(R)T} \qquad \text{für } T \to \infty. \quad (1.72)$$

$W_C[A]$ steht für den **Wilson loop**, also das Linienintegral

$$e^{ig_s \oint dz_\mu A^\mu(z)},$$

das entlang des Rechteckes ausgeführt wird, welches $(\vec{x},0)$, $(\vec{y},0)$, $(\vec{y},T)$ und $(\vec{x},T)$ als Ecken hat. In der Gitter-Theorie besteht der Wilson loop folglich aus dem Weg-geordneten Produkt der Linkvariablen, die auf dem oben beschriebenen Rechteck liegen.



Man erhält dann das Potential aus

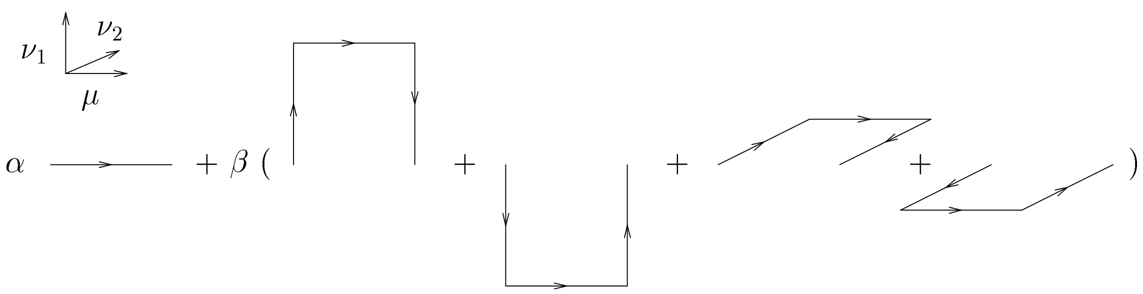
$$V(R) = \lim_{T \to \infty} -\frac{1}{T} \ln W(R,T). \tag{1.73}$$

Die Kanten des Wilson loops in Zeitrichtung stammen von der Propagation des Quark-Antiquark-Paares in der Zeit, während die in Raumrichtung von dem Linienintegral kommen, das eingeführt wurde, um die Eichinvarinanz der Quarkzustände zu gewährleisten. Die Form dieser Verbindung ist nicht notwendigerweise eine Gerade, sondern sie kann so variiert werden, daß der Grundzustandsüberlapp der verwendeten Zustände maximal wird.

Beim sogenannten **Smearing**-Verfahren verändert man deshalb iterativ den Operator, den man zur Messung benutzt. In jedem Schritt ersetzt man dabei jeden Link in Raumrichtung μ durch eine Linearkombination zwischen dem alten Link und der Summe von einem Produkt von je drei Links, die den Weg von x nach $x + \hat{\mu}$ in der $\mu - \nu$-Ebene beschreiben, wobei ν eine zu μ orthogonale Raumrichtung ist. Diese Umwege werden aufgrund ihrer Form häufig *Staples* (engl. *Heftklammer*) genannt. Staples liegen wieder in der SU(3), aber die Summe von SU(3)-Matrizen, die man bei dem Smearing erhält, ist nicht mehr in der Gruppe, kann aber dorthin zurückprojeziert werden, z.B. mit dem Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt. In symbolischer Schreibweise bedeutet das

$$U_\mu(n) \;\longrightarrow\; \left\{ \alpha \cdot U_\mu(n) + \beta \cdot \sum_{\nu \perp \mu} (\mu - \nu - \text{staples}) \right\}_{\to SU(3)} \tag{1.74}$$

mit α und β aus $\mathcal{R}$.



Nachdem man die beschriebene Ersetzung mehrere Male auf alle räumlichen Linkvariablen angewendet hat, repräsentiert der direkte Weg zwischen $(\vec{x}, t)$ und $(\vec{y}, t)$ auf der „geschmierten“ Konfiguration nun eine Linearkombination von vielen möglichen Wegen auf der ursprünglichen Konfiguration.

Bei geeigneter Wahl der Vorfaktoren α und β erreicht man einen deutlich besseren Überlapp und braucht somit in Gleichung 1.73 nicht zu so großen Zeiten T zu gehen, um ein stabiles Resultat für $V(R)$ zu erhalten. Dies ist insofern sehr wichtig, als auf einem endlichen Gitter der Grenzwert $T \to \infty$ nicht ausgeführt werden kann. Durch das Schmieren wird die rechte Seite in (1.73) jedoch schon für kleine T (typischerweise 4 oder 5 Gittereinheiten) konstant.

Wenn nun das Potential einen Term linear in R enthält, so folgt damit für den Wilson loop bei großen Zeitausdehnungen T

$$\begin{aligned} W(R,T) &\sim e^{-V(R)T} \\ &= e^{-(V_0 + \alpha/R + \sigma R)T}, \end{aligned}$$

und für große Abstände R

$$\sim e^{-\sigma RT}. \tag{1.75}$$

Dieses bezeichnet man als *Flächenverhalten* des Wilson loops.

1.3.2 Die Wilson loops in der Plasma-Phase

Betrachtet man ein System bei hohen Temperaturen, so ist die Zeitausdehnung des Raum-Zeitvolumens entsprechend Gleichung 1.39 klein. Daher sind die Wilson loops ungeeignet, um das Potential zwischen schweren Quarks zu bestimmen, weil man nicht mehr zu genügend großen Zeiten T gehen kann.

Wendet man das in Abschnitt 1.3.1 beschriebene Verfahren bei endlicher Temperatur an und betrachtet man Zeitausdehnungen, die gerade einmal um das Gitter in Zeitrichtung herumführen, so erhält man neue Operatoren, die sogenannten *Polyakov-loop-Korrelationen*. Deren Analyse liefert für Temperaturen $T > T_c$ folgendes Potential [21][1]

$$V(R) = V_0 - \frac{\alpha}{R} e^{-m_D R}. \tag{1.76}$$

Oberhalb des thermodynamischen Phasenüberganges ist das Potential also ein Coulombpotential, das durch die *Debye-Masse* m_D abgeschirmt wird.

Untersucht man trotzdem die Wilson loops bei Temperaturen oberhalb T_c, so stellt man fest, daß diese nun ein *Umfangsverhalten* zeigen [2]

$$W(R,T) \sim e^{-c(R+T)}, \tag{1.77}$$

[1] Genau genommen fällt die Korrelation $\langle L(0)L^\dagger(R)\rangle$ wie das Quadrat des Potentials ab.

[2] Der Buchstabe T bezeichnet sowohl die Temperatur als auch die Zeitausdehnung der Wilson loops. Die jeweilige Bedeutung wird aus dem Zusammenhang klar.

wie es auch von der Störungstheorie für die Wilson loops vorhergesagt wird.

Das heißt für $T < T_c$ haben die Wilson loops ein Flächenverhalten, welches also ein nicht-störungstheoretisches Phänomen ist und dem Auftreten einer Saitenspannung gleichkommt. Bei $T > T_c$ zeigen sie dagegen Umfangverhalten und sind damit störungstheoretisch zugänglich. Allerdings wären Rechnungen in sehr hoher Ordnung nötig, um eine quantitative Aussage für Temperaturen knapp oberhalb von T_c zu machen.

Um aus Wilson loops das Potential zwischen schweren Quarks bestimmen zu können, müssen sie in einer Raum-**Zeit**-Ebene liegen. Manousakis und Polonyi haben als erste auch solche Loops numerisch untersucht, die in Raum-Raum-Ebenen liegen [20]. Sie fanden, daß die sogenannten *räumlichen* Wilson loops sowohl bei Temperaturen oberhalb als auch unterhalb von T_c ein Flächenverhalten besitzen. Ein formaler Beweis für diese Tatsache wurde zuvor bereits von Borgs erbracht [7].

Es handelt sich also bei allen Temperaturen um eine nicht-störungstheoretische Observable, aus der man nun ein Pseudo-Potential bestimmen kann. Aufgrund des Flächenverhaltens kommt darin auch ein linearer Term vor. Dessen Vorfaktor ist die sogenannte *räumliche Saitenspannung* σ_s, die – ebenso wie das Pseudo-Potential – nichts mit den entsprechenden physikalischen Größen zu tun hat. Das Vorhandensein einer nichtverschwindenden räumlichen Saitenspannung auch in der Plasma-Phase der SU(3)-Theorie zeigt auch, daß das Confinement-Verhalten der Theorie nicht vollständig verloren gegangen ist.

Ein weiterer Grund, die räumliche Saitenspannung zu untersuchen, hängt mit dem Auftreten einer magnetischen Masse in der Gluon-Selbstenergie bei hohen Temperaturen zusammen. Bestimmt man zum Beispiel die Energiedichte in vierter Ordnung Störungstheorie in $g^2(T)$, so erhält man durch Resummationstechniken in Ordnung g^3 einen Beitrag, der von einer nicht-verschwindenden elektrischen (Debye-) Masse $m_D \sim gT$ im Gluonpropagator herrührt. Die magnetische Masse bleibt in dieser Ordnung noch Null.

Rechnungen bis zur Ordnung g^6 zeigen jedoch, daß eine nichtverschwindende magnetische Masse notwendig ist, um die Energiedichte und auch andere thermodynamischen Größen endlich zu halten. Dabei ist $m_M \sim g^2T$. Da es aber in allen höheren Ordnungen einen Beitrag zur magnetischen Masse gibt, ist deren genauer Wert eine prinzipiell nicht-störungstheoretische Größe [18].

Genauere numerische Untersuchungen der räumlichen Wilson loops in SU(2) haben nun interessanterweise gezeigt, daß σ_s sich gemäß

$$\sqrt{\sigma_s} \sim g^2(T)T \tag{1.78}$$

verhält. Es scheint also einen engen Zusammenhang zwischen der (nichtverschwindenden) räumlichen Saitenspannung und dem Auftreten einer magnetischen Masse zu geben, der allerdings noch nicht richtig verstanden ist.

Eine mögliche Erklärung für Gleichung 1.78 findet man im Rahmen der dimensionalen Reduzierung.

Dimensionale Reduzierung. Betrachtet man ein System bei sehr hohen Temperaturen, so ist dessen zeitliche Ausdehnung entsprechend gering, da $t \sim 1/T$ ist:

$$S = \frac{1}{2g^2} \int_0^{\mathbf{1/T}} dx_0 \int_V d^3x \; \mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)). \tag{1.79}$$

Die Freiheitsgrade in Zeitrichtung (x_0) sind also bei großen T praktisch eingefroren und näherungsweise gilt:

$$S_{effektiv} \cong \frac{1}{2g_3^2} \int_V d^3x \; \mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}(\vec{x}) F^{\mu\nu}(\vec{x})) \tag{1.80}$$

$$= \frac{1}{2g_3^2} \int_V d^3x \; \mathrm{Sp}(F_{ij}(\vec{x}) F^{ij}(\vec{x})) + S_h(A_0, A_i) + S_v(A_0) \tag{1.81}$$

mit $g_3^2 = g^2 T$. Der erste Summand der Wirkung entspricht der einer reinen SU(3)-Eichtheorie in drei Dimensionen, S_h enthält eine Kopplung der Eichfelder an ein Higgsfeld und S_v lokale Higgs-Selbstwechselwirkungen. Das Higgsfeld entstammt dabei dem statischen Anteil der t-Komponenten der ursprünglichen Felder (siehe zum Beispiel [23]).

Genauere Analysen zeigen jedoch, daß der Teil der Wirkung, der von dem nichtstatischen Anteil der t-Komponenten kommt, nicht vom Rest entkoppelt, was eine sogenannte *vollständige dimensionale Reduzierung* bewirken würde. Dieses einfache Verhalten setzt nur bei wenigen Feldtheorien (z.B. QED) ein.

Die Beschreibung von physikalischen Observablen, die von den A_0-Komponenten der Eichfelder abhängen (wie z.B. das statische $Q\bar{Q}$-Potential), ist im Rahmen der effektiven 3-d Theorie gut verstanden [23]. Um den Zusammenhang zwischen (3+1)-d QCD für $T \neq 0$ und der 3-dimensionalen effektiven Theorie herzustellen, spielt dabei der Higgs-Sektor der effektiven Theorie eine zentrale Rolle, da nur hier die A_0-Komponenten explizit auftreten.

Der magnetische Sektor der QCD wird durch die A_i-Komponenten der Eichfelder ($i = 1, 2, 3$) beschrieben. Diese tauchen sowohl im reinen Eich-Teil als auch in S_h

auf. Welcher Anteil der effektiven Theorie zur Charakterisierung des magnetischen Sektors der vollen QCD wichtig wird, ist a priori nicht klar.

Es gibt aber Hinweise, daß das Verhalten vieler Observablen schon allein durch den dreidimensionalen reinen Eich-Teil der effektiven Wirkung sehr gut beschrieben wird. Für den Fall von SU(2) gibt es dazu eine analytische Arbeit von Caselle [10] und numerische Untersuchungen von Bali et al. [5] und Teper [25], die eine bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen den (3+1)-d und den 3-d Ergebnissen zeigen.

Um die Ausagekraft der dimensionalen Reduzierung für raumartige Observablen besser verstehen zu können, betrachtet man etwa die räumliche Saitenspannung, die auf einem asymetrischen vierdimensionalen Gitter $N_\sigma^3 \times N_\tau$ und einem symmetrischen dreidimensionalen N_σ^3 gemessen werden.

Zur quantitativen Analyse der dimensionalen Reduzierung sind folgende Überlegungen anzustellen:
In der vierdimensionalen Theorie wird die Skala für physikalische Observablen durch die Temperatur gesetzt.
Inwieweit die Größen in der effektiven Theorie von der dimensionsbehafteten Kopplung $g_3^2 = g^2(T)T$ abhängen, ist a priori nicht klar.
Falls die effektive Theorie jedoch von der reinen SU(3)-Eichtheorie dominiert wird, sollten die Observablen proportional zu einer geeigneten Potenz von g_3^2 sein, so wie es in der dreidimensionalen Theorie der Fall ist. Also

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= c \cdot \left(g_3^2\right)^d && (1.82) \\ &= c \cdot \left(g^2(T)T\right)^d, && (1.83) \end{aligned}$$

wenn $\mathcal{O}$ die Massendimension d hat. Für die räumliche Saitenspannung erhält man demnach (mit $d = 2$)

$$\sqrt{\sigma_s} = c \cdot g^2(T)T, \tag{1.84}$$

also genau die funktionale Temperaturabhängigkeit, die auch die oben erwähnte magnetische Masse besitzt.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit sind also durch folgende Fragen motiviert:

- Gilt auch in der (3+1)-dimensionalen SU(3)-Theorie $\sqrt{\sigma_s} \sim g^2T$ oder ist dieses Verhalten vielleicht nur SU(2)-spezifisch?
- Ab welcher Temperatur setzt diese einfache Form der Temperaturabhängigkeit ein?

- Welche Bedeutung hat der Higgs-Sektor der effektiven Theorie für das quantitative Ergebnis?

Darüberhinaus möchte man in der Zukunft die Bedeutung des Auftretens einer magnetischen Masse z.B. für die Thermodynamik der Plasma-Phase verstehen.

Neuere Arbeiten zu der in diesem Abschnitt diskutierten Problematik gibt es von Arnold [3] und Braaten [8].

Kapitel 2

Algorithmen und deren Implementierung

2.1 Monte-Carlo-Algorithmen

In Kapitel 1.2.1 wurde darauf hingewiesen, daß es Algorithmen gibt, die Konfigurationen so verändern, daß die Bedingung der *Detailed balance* bereits ohne Akzeptanzentscheidung erfüllt ist. Den beiden Methoden, die im folgenden erläutert werden, ist zudem gemeinsam, daß bei einem Schritt jeweils nur eine Linkvariable der Konfiguration verändert wird und daß dies in den drei SU(2)-Untergruppen der SU(3)-Link-Matrix geschieht.

2.1.1 Heatbath-Algorithmus

Seien K und K' zwei Konfigurationen, die sich nur in einem Link unterscheiden: K enthält U und K' enthält U'.
Von der Wirkung der SU(N)-Gittereichtheorie kann man nun den Teil, der von diesem Link abhängt, abspalten:

$$\begin{aligned} S(K) &= -\frac{\beta}{N}\left(\mathrm{Re\ Sp}(U \cdot V) + \sum_P \mathrm{Re\ Sp}\ (U_P)\right) \\ &= -\frac{\beta}{N}\ \mathrm{Re\ Sp}(U \cdot V) \ - \ C. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei bezeichnet V die Summe aller Staples, die mit U zusammen eine Plaquette bilden, und die Summe $\sum\limits_P$ geht über alle restlichen Plaquetten.

Angenommen, die Wahrscheinlichkeit für den Übergang $K \to K'$ beträgt

$$P(K \to K') = \frac{1}{\mathcal{N}}\, e^{\frac{\beta}{N}\, Re\, Sp\,(U' \cdot V)} \tag{2.2}$$

und die für die Rückrichtung entsprechend

$$P(K' \to K) = \frac{1}{\mathcal{N}}\, e^{\frac{\beta}{N}\, Re\, Sp\,(U \cdot V)} \tag{2.3}$$

mit einer geeigneten Normierung $\mathcal{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & e^{-S(K)} \cdot P(K \to K') = e^{-S(K')} \cdot P(K' \to K) \\ \Longleftrightarrow\quad & e^{\frac{\beta}{N}\, Re\, Sp\,(U \cdot V) + C} \cdot e^{\frac{\beta}{N}\, Re\, Sp\,(U' \cdot V)} = e^{\frac{\beta}{N}\, Re\, Sp\,(U' \cdot V) + C} \cdot e^{\frac{\beta}{N}\, Re\, Sp\,(U \cdot V)} \end{aligned}$$

und Detailed balance ist erfüllt.

Ein Algorithmus, der Matrizen mit der gewünschten Verteilung

$$dP(\alpha) \sim e^{\frac{\beta}{2}\, Re\, Sp\,(\alpha \cdot V)}\, d\alpha \tag{2.4}$$

erzeugt, wurde zuerst von Creutz für SU(2) gefunden [11]. Darin reduziert sich das Problem auf das Bestimmen von einem Vektor $\vec{a}$ mit zufälliger Orientierung und das Ziehen einer Zufallszahl a_0 mit der Verteilung

$$P(a_0) \sim \sqrt{(1 - a_0^2)}\, e^{k a_0}, \quad \text{mit } k = \beta \sqrt{\mathrm{Det}(V)}. \tag{2.5}$$

Um a_0 zu erzeugen, benutzte Creutz Zufallszahlen mit der Verteilung $e^{k a_0}$ und berücksichtigte den Wurzelausdruck in (2.5) mit Hilfe einer Akzeptanzentscheidung. Das bedeutet, a_0 wurde nur genommen, wenn für eine gleichverteilte Zufallszahl z die Bedingung

$$z^2 \leq 1 - a_0^2$$

galt. Für große β und damit auch große Staples V geht die Akzeptanzrate allerdings gegen Null.

Fabricius und Haan [13] und unabhängig davon Kennedy und Pendleton [16] fanden jedoch heraus, daß es möglich ist, a_0 mit der Verteilung

$$P(a_0) \sim \sqrt{1 - a_0}\, \theta(1 - a_0)\, e^{k a_0} \tag{2.6}$$

zu bestimmen. Die Akzeptanzrate der übrigbleibenden Entscheidung

$$2 z^2 \leq 1 + a_0$$

geht dann für große β und V gegen Eins.

Der Name **Wärmebad**-Algorithmus kommt von der thermodynamischen Vorstellung, daß die Nachbarn eines Links ein lokales Wärmebad (engl. *heatbath*) bereiten, in dem der Link dann mit der korrekten Verteilung des kanonischen Ensembles ins Gleichgewicht überführt wird.

Für die SU(3) gibt es einen Pseudo-Heatbath Algorithmus [9], bei dem die oben beschriebenen Routinen in den SU(2)-Untergruppen angewendet werden.

Es gibt drei einfache Möglichkeiten, eine SU(2)-Matrix in die Gruppe SU(3) einzubetten:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Nun bestimmt man eine SU(2)-Matrix α mit der Verteilung aus (2.4), erweitert sie auf SU(3) gemäß einer der drei o.g. Möglichkeiten und bildet

$$\tilde{U} = A \cdot U. \tag{2.8}$$

Diese Prozedur wiederholt man danach iterativ noch mindestens einmal mit einer neuen SU(2)-Matrix α und einem anderen Typ für die Erweiterung zu A. Dann hat

$$U' = \ldots A_2 \cdot A_1 \cdot U$$

die gewünschte Boltzmann-Verteilung der SU(3)-Theorie [9].

2.1.2 Overrelaxation-Algorithmus

Um zu verstehen, wozu dieser Algorithmus dient, muß man noch einmal das Prinzip der Monte-Carlo-Integration und der Metropolis-Methode betrachten:
Statt das Integral $\langle\mathcal{O}\rangle = \int dU \mathcal{O}(U) e^{-S(U)}$ direkt zu berechnen, erzeugt man sukzessive Konfiguration, die mit $e^{-S(U)}$ verteilt sind, und mittelt $\mathcal{O}(U)$ darüber. Da man weiter diese Konfigurationen nicht vollständig mit der benötigten Verteilung bestimmen kann, verändert man schrittweise jeweils nur einen Link der Konfiguration, so daß dann im Grenzwert unendlich vieler Schritte die richtige Wahrscheinlichkeitsverteilung erreicht wird. Wenn jeder Link einer Konfiguration einmal an der Reihe gewesen ist, nennt man das einen *Update*.

Der offensichtliche Nachteil dieser Methode ist, daß durch das Ändern von immer nur einem einzigen der etwa 100000 Linkvariablen pro Schritt der Raum der Konfigurationen (Phasenraum) sehr langsam durchlaufen wird. Hinzu kommt noch, daß diese

Änderungen in der Regel nur gering sind. Außerdem sind die Messungen von Observablen auf diesen Konfigurationen im hohen Maße korreliert, selbst wenn zwischen zwei Messungen mehrere Updates liegen.

Diese sogenannten **Autokorrelationen** kann man aber durch die Verwendung des **Overrelaxation-Algorithmus** reduzieren, denn mit diesem sind auch große Schritte durch den Phasenraum möglich.

Die Idee zu diesem Verfahren stammt aus einer Methode zur Minimalisierung eines Funktionals $S(\{\phi\})$ von Adler [1]. Dabei wird, mit einer zufälligen Konfiguration $\{\phi\}$ beginnend, jedes Element $\phi(k)$ durch

$$\phi(k)' = \omega C_k + (1-\omega)\phi(k) \ , \quad 0 < \omega < 2 \tag{2.9}$$

ersetzt, wobei C_k der Wert ist, der S minimiert. Bei geeigneter Wahl des Relaxationsparameters ω kann das Minimum schneller erreicht werden. Wählt man jedoch $\omega = 2$, so liegt der neue Wert ϕ' gerade gegenüber dem alten Wert ϕ in Bezug auf C_k.

Creutz hat nun gezeigt, daß man ein solches Verhalten für $\omega = 2$ auch bei Gittereichtheorien erreichen kann [12]. Man betrachte dazu die Wirkung für SU(N) in der Form aus (2.1)

$$S = -\frac{\beta}{N} \,\mathrm{Re\ Sp}(U \cdot V) \,-\, C. \tag{2.10}$$

Wenn U_0 die SU(N)-Matrix ist, die S minimiert, so wähle man als neuen Wert für U

$$U' = U_0\, U^{-1}\, U_0. \tag{2.11}$$

Durch eine Akzeptanzentscheidung, wie sie im Abschnitt 1.2.1 beschrieben wurde, läßt sich dann die Detailed balance erfüllen.

Im Fall von SU(2) ist die Summe der Staples V proportional einer SU(2)-Matrix:

$$V = \sqrt{\det(V)} \cdot W \ , \quad \text{mit } W \in SU(2). \tag{2.12}$$

U_0 ist dann gleich $\sqrt{\det(V)} \cdot V^{-1}$ und die Wirkung bleibt bei diesem Schritt konstant, wodurch der neue Link immer akzeptiert wird. Dieser *mikrokanonische* Update muß mit anderen kombiniert werden (etwa Heatbath), damit der gesamte Phasenraum erreicht werden kann und nicht nur Konfigurationen mit konstantem S.

Für eine SU(3)-Theorie läßt sich das beschriebene Verfahren auch in den SU(2)-Untergruppen so implementieren, daß die Wirkung invariant bleibt und daher jeder neue Link akzeptiert wird. Auf die technischen Details soll hier allerdings nicht eingegangen werden.

2.2 Der Parallelrechner QUADRICS Q1

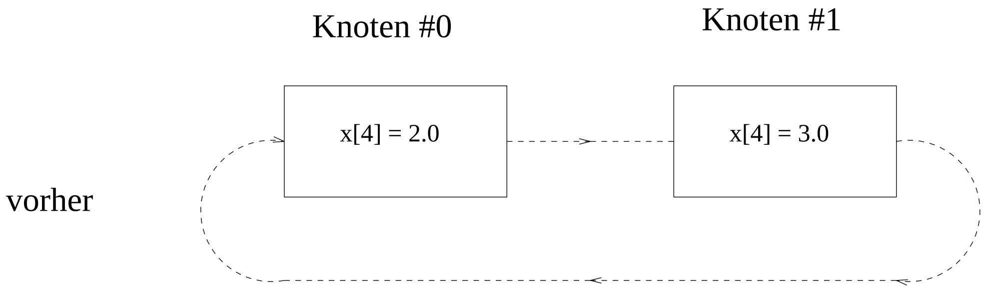
Die QUADRICS-Computer sind Parallelrechner, die ursprünglich speziell für QCD Gitter-Simulationen entworfen und gebaut wurden. Der Q1 besitzt 8 Prozessoren, darüber hinaus gibt es zum Beispiel noch den Q16 (128 Prozessoren) und den QH2 (256 Prozessoren).

Das Prinzip der Maschinen ist **S***ingle* **I***nstruction* **S***ingle* **A***ddress* **M***ultiple* **D***ata* (kurz SISAMD). Das bedeutet, daß alle Prozessoren gleichzeitig das gleiche Programm abarbeiten und nicht getrennt behandelt werden können (Ausnahmen siehe unten). Auch die Adressen werden zentral berechnet und an alle Prozessoren gleich weitergegeben. Aber jeder Prozessor besitzt einen eigenen Speicher für reelle Zahlen und alle weiteren Datentypen, die daraus zusammengesetzt sind.

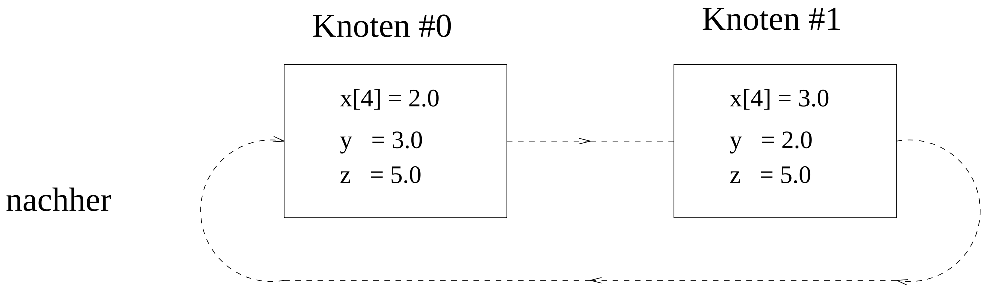
Der Q1 besteht also aus einer CPU, der sogenannten Z-CPU, die mit dem Programmspeicher und 256 KByte Integer-Speicher verbunden ist, und acht sogenannten Knoten. Die Aufgabe der Z-CPU ist, den Programmablauf zu steuern und die Integer-Berechnungen durchzuführen. Jeder Knoten enthält eine FPU (*Floating Point Unit*) inklusive 128 Registern und 4 MByte Speicher für reelle Zahlen. Da es sich um einen *Single Precision*-Rechner handelt, kann man auf jedem Knoten demnach 2^{20} (= 1 Mega) reelle Zahlen speichern.

Die FPU kann in einem Zyklus eine Normaloperation – Multiplikation mit anschließender Addition – durchführen, die Taktfrequenz beträgt 25 MHz. Die Peak-Performance des Q1 ist folglich $8 \cdot 25 \cdot 2$ MFlops = 0.4 GFlops, die in einem SU(3)-Programm teilweise zu 75% erreicht wird.

Im Q1 sind die Knoten in einer $2 \times 2 \times 2$-Würfel-Geometrie mit periodischen Randbedingungen angeordnet. Das heißt, die Prozessoren bilden selbst schon genau so ein Gitter, wie es in der physikalischen Anwendung benutzt wird. Somit hat jeder Knoten 6 nächste Nachbarn, die mit *right*, *left*, *up*, *down*, *front* und *rear* bezeichnet werden. Nun kann jede FPU nicht nur auf den eigenen Speicher, sondern auch auf den seiner 6 (nächsten) Nachbarn direkt zugreifen, wodurch Information zwischen den Knoten in folgender Weise ausgetauscht werden kann:




```
y = x[4+right]
z = x[4] + x[4+right]
```

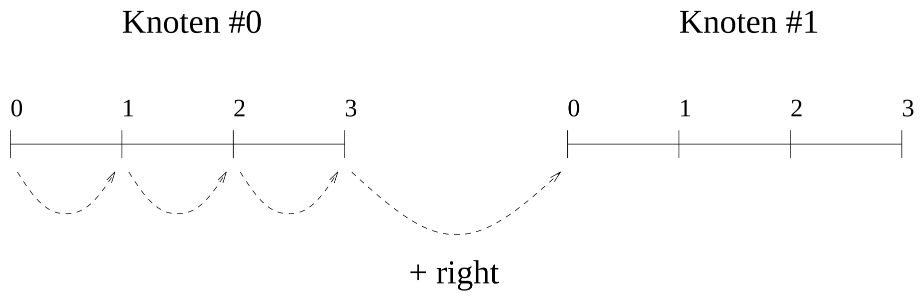


Die Wörter right, left, usw. sind Systemkonstanten und enthalten Adressen. Jede Adresse einer reellen Zahl setzt sich aus den sogenannten *Lowbits* und den *Highbits* zusammen. Dabei reichen die Lowbits aus, um ein Element des Speichers einer FPU eindeutig anzusprechen. Um auf den Wert x[4] zuzugreifen, können die Highbits also leer bleiben. Die Wörter right, left, usw. sind dagegen konstante Adressen, bei denen nur die Highbits gesetzt sind und die Lowbits Nullen enthalten.

Wird so eine Zahl der lokalen Adresse (4) des Feldes x hinzuaddiert, greift die FPU auf das vierte Element von x auf dem benachbarten Speicher zu, der durch die Highbits charakterisiert wird. Dafür ist es allerdings notwendig, daß x als Feld deklariert worden ist, auch wenn es dann nur ein Element enthält.

Die prinzipielle Idee der QUADRICS-Rechner ist es nun, ein großes Gitter auf die Knoten zu verteilen, so daß jeder Prozessor nur ein verhältnismäßig kleines Gitter bearbeiten muß. Diese 8 Untergitter verhalten sich wie ein großes, wenn man dafür sorgt, daß die nächste-Nachbarn-Beziehungen auch über die Knotengrenzen hinweg gültig sind.

Auf einem seriellen Computer ist der rechte Nachbar des äußersten rechten Punktes wegen der üblichen periodischen Randbedingungen der äußerste linke Punkt. Auf dem Q1 geht das Gitter jedoch auf dem nächsten Knoten weiter, so daß der gesuchte Nachbar der äußerste linke Punkt auf dem **rechten Nachbarknoten** ist.



Praktisch bedeutet das, daß – bis auf kleine Ausnahmen – nur bei der Definition der nächsten Nachbarn die Parallelität berücksichtigt werden muß, ansonsten arbeitet man nur auf dem kleineren lokalen Gitter. Wenn man aber eine Observable über das gesamte Gitter aufsummieren möchte, so wird zunächst jeder Knoten eine eigene Gittersumme bilden. Anschließend muß der Programmierer dafür sorgen, daß entweder alle Teilsummen ausgegeben werden oder daß noch global summiert wird.

Als kurzes Beispiel soll auf einem 32^3-Gitter der Betrag einer komplexen Zahl aufsummiert werden. Aufgrund der $2\times2\times2$-Geometrie des Q1 bearbeitet das Programm folglich ein 16^3-Gitter. Die Programmiersprache ist **TAO**.

```
!! Deklarationen
!! -------------

constant nx = 16
constant ny = 16
constant nz = 16
constant anzahl_gitterpunkte = nx*ny*nz

complex zahl[anzahl_gitterpunkte]
real    lokale_summe
real    globale_summe
real    hilfs_feld[1]
integer punkt


!! Hauptprogramm
!! -------------

call berechne_zahlen()  !! Soll das Feld 'zahl' mit
                        !! irgendwelchen Werten belegen.
```

```
lokale_summe = 0.0

do punkt = 0, anzahl_gitterpunkte - 1
   lokale_summe = lokale_summe ...
                + sqrt(   zahl[punkt].re * zahl[punkt].re ...
                        + zahl[punkt].im * zahl[punkt].im     )
enddo

!! 'lokale_summe' enthaelt jetzt auf jedem der 8 Knoten
!!  eine andere reelle Zahl,
!!  eben die Teilsumme jeweils ueber 16*16*16 Gitter-Punkte.


!! Moeglichkeit 1
!! --------------

open for writing ''ausgabe1.datei'' as 6
   write on 6 [0,0,0][1,1,1] multidata lokale_summe
close 6

!! Moeglichkeit 2
!! --------------

hilfs_feld[0] = lokale_summe

hilfs_feld[0] = hilfs_feld[0] + hilfs_feld[right]
hilfs_feld[0] = hilfs_feld[0] + hilfs_feld[up]
hilfs_feld[0] = hilfs_feld[0] + hilfs_feld[front]

globale_summe = hilfs_feld[0]

!! Nun hat 'globale_summe' auf allen 8 Knoten
!! den selben Wert. Also reicht eine Ausgabe

open for writing ''ausgabe2.datei'' as 8
   write on 8 globale_summe
close 8
```

Wie bereits oben erwähnt, ist es möglich – manchmal sogar nötig –, die einzelnen Knoten verschieden zu behandeln. Denn nur so kann verhindert werden, daß alle Knoten **exakt das gleiche** ausrechnen. In einem SU(3)-Programm wird dazu ein Zufallszahlengenerator benutzt, der auf den Knoten verschieden initialisiert werden kann.

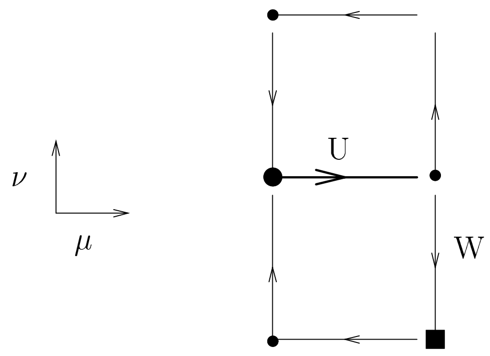
Ein anderes Beispiel zeigt der folgende Programmteil:

```
!! Definition der Funktion  sin(x) / x
!! ----------------------  **********

/real_fun -> "sin_x_durch_x(" real_expr^_a ")" {
   temporary real _result

   where ( _a == 0.0 )          !! lokale Bedingung
      _result = 0.0             !! 'where' - Block
   elsewhere
      _result = sin(_a) / _a    !! 'elsewhere' - Block
   endwhere

   rreturn _result
}
```

Bei einer *where/elsewhere/endwhere*-Anweisung werden zunächst alle Anweisungen des 'where'-Blocks auf **allen** Knoten ausgeführt. Allerdings werden die Ergebnisse der FPU auf den Knoten, wo die lokale Bedingung falsch ist, nicht abgespeichert! Danach verfährt der Rechner mit dem 'elsewhere'-Block analog. Das bedeutet, daß alle Knoten auf jeden Fall beide Blöcke bearbeiten, der Unterschied entsteht lediglich durch das Speichern bzw. Nicht-Speichern der berechneten Zahlen.

Dies kann in Verbindung mit Zufallszahlengeneratoren zu Korrelationen führen, die nur sehr schwer aufzuspüren sind. Im obigen Beispiel berechnen eine oder mehrere FPUs gegebenenfalls durchaus sin(0)/0, nur speichern sie das Ergebnis nicht ab, wodurch die Variable '_result' den Wert 0.0 behält und ein Absturz vermieden wird.

Zum Schluß dieses Abschnittes soll noch die Frage diskutiert werden, wie man auf einen Knoten zugreifen kann, der **kein direkter Nachbar** ist. Dieses Problem tritt in jedem SU(N)-Programm auf, das mit der *Wilson-Plaquette-Wirkung* arbeitet. Dabei muß bei einem Update (z.B. Heatbath oder Overrelaxation) für jeden Link U die Summe seiner Staples berechnet werden (vgl. 2.1). In der $\mu - \nu$-Ebene sieht das dann folgendermaßen aus:



Dabei ist der Link U an dem durch einen Kreis gekennzeichneten Punkt gespeichert, während sich der Link W beim Quadrat befindet, also an einem Punkt, der **kein nächster Nachbar** vom "Kreis" ist. Im ungünstigsten Fall liegen zwischen U und W folglich **zwei** Knotengrenzen. Da ein Befehl wie

```
S[site] = U[site] * W[site + right + down]      !! Dies ist
                             ^^^^^^^^^^^^       !! FALSCH
```

aber nicht möglich ist, muß man die Information in zwei Schritten transportieren. Gegeben sei beispielsweise ein Programm, in dem die nächste-Nachbarn-Beziehungen durch Indexfelder definiert sind:

```
integer x_local_up[number_of_sites]   !! Analog
integer y_local_up[number_of_sites]   !! fuer
integer z_local_up[number_of_sites]   !! 'down'

integer x_node_up[number_of_sites]    !! Analog
integer y_node_up[number_of_sites]    !! fuer
integer z_node_up[number_of_sites]    !! 'down'
```

Dabei erfüllen die ersten drei Felder die üblichen periodischen Randbedingungen, wie sie auch in einem skalaren Programm benutzt werden. Die drei letztgenannten Felder enthalten Nullen für alle inneren Punkte und right, left, usw. für die Punkte am Rand, deren Nachbarn sich auf dem nächsten Knoten befinden. Das Feld

```
mat3 U[3][number_of_sites]
```

enthalte die Links, also die SU(3)-Matrizen. Um eine Matrix mit ihrem Nachbarn in positive x-Richtung zu multiplizieren, kann man also schreiben:

```
mat3    S
integer site = 5   !!   Zum
integer mu   = 0   !! Beispiel
integer nu   = 1   !!

S = U[mu][site] * U[nu][ x_local_up[site] + x_node_up[site] ]
```

Für einen Zugriff zum übernächsten Nachbarn, etwa in positiver x- und negativer y-Richtung, berechnet man zuerst die lokale Adresse des gesuchten Punktes und addiert einen der beiden Ausdrücke für den eventuellen Sprung über eine Knotengrenze:

```
integer new_site

new_site =   y_local_down[ x_local_up[site] ] ...
           +  y_node_down[ site ]
```

Jetzt muß man unterscheiden, ob noch eine weitere Knotengrenze passiert wird. Ist das der Fall, so muß der Link auf "new_site" erst zwischengespeichert werden.

```
mat3    hilfsfeld[1]

if ( x_node_up[ site ] != 0 )

   hilfsfeld[0] = U[nu][new_site]
   S = U[mu][site] * hilfsfeld[ x_node_up[ site ] ]

else

   S = U[mu][site] * U[nu][new_site]

endif
```

Auf diese Weise kann man das Problem der übernächsten Nachbarn zwar beheben, aber durch die Fallunterscheidung und den zusätzlichen Speicherzugriff verliert das Programm an Geschwindigkeit.

Ähnliche Probleme treten auch bei der Berechnung von Wilson loops und Polyakov-loop-Korrelationen bei großen Abständen auf. Auf einem QH2 (Geometrie: $8 \times 8 \times 4$) ist es dabei zum Teil notwendig, drei und mehr Knotengrenzen zu überschreiten. Diese Programmteile sollten daher sehr sorgfältig optimiert werden.

Kapitel 3

Numerische Resultate

3.1 3-dimensionale SU(3)-Eichtheorie

Die Simulationen der 3-d SU(3)-Eichtheorie wurden auf dem Parallelrechner QUADRICS Q1 in Bielefeld durchgeführt. Um das asymptotische Verhalten der Saitenspannung für $\beta_3 \to \infty$ zu ermitteln, habe ich die Werte $\beta_3 = 18, 19, 20, 21, 22$ und 24 auf einem Gitter der Größe 32^3 untersucht.

Ausgehend von einer geordneten Startkonfiguration wurde das System zuerst mit 500 Heatbath-Schritten thermalisiert. Dann folgten 37500 Overrelaxation- bzw. Heatbath-Updates im Verhältnis 4 zu 1 mit Messungen nach je 25 Iterationen, d.h. nach 5 mal (4 OR und 1 HB).

In diesen 1500 Messungen wurden der Plaquettewert P, der Polyakov loop L und die Wilson loops $W(R, Z)$ bestimmt. R nimmt Werte von 1 bis 12 entlang der x- und y-Achsen und von $\sqrt{2}$ bis $8\sqrt{2}$ entlang der x/y - und $x/(-y)$ -Diagonalen an, Z läuft von 1 bis 12. Die Raumrichtung $\hat{z}$ fungiert in der 3-dimensionalen Simulation als (euklidische) Zeitrichtung und ist daher ausgezeichnet.

Um bei den Wilson loops einen besseren Überlapp des erzeugten Quark-Antiquark-Zustandes mit dem Grundzustand zu bekommen, sind die Linkvariablen in der xy-Ebene vor jeder Messung mit dem in Abschnitt 1.3.1 beschriebenen Standardverfahren ($\alpha = 1.0$ und $\beta = 0.5$) 60 mal geschmiert und dann in die Gruppe SU(3) zurückprojeziert worden.

Aus den so gemessenen Wilson loops lassen sich dann die folgenden Quotienten (auch *lokale Potentiale*) bilden:

$$\hat{V}_{\hat{Z}}(\hat{R}) = \log \frac{\hat{W}(\hat{R},\hat{Z})}{\hat{W}(\hat{R},\hat{Z}+1)}. \tag{3.1}$$

Der *Hut* über einem Variablennamen kennzeichnet, daß es sich um eine Größe in *Gittereinheiten* handelt, wird aber im folgenden weggelassen, wenn die Bedeutung klar ist.

Um für die lokalen Potentiale aus (3.1) einen sinnvollen Fehler angeben zu können, habe ich die *Jackknife-Methode* verwendet. Dazu teilt man den gesamten Datensatz der Länge n, auf dem eine Observable $\mathcal{O}$ geschätzt werden soll, in N Blöcke der Länge M ein, also $n = N \cdot M$. Dann wird die Schätzfunktion T auf den N Teilsätzen ausgerechnet, die entstehen, wenn man jeweils einen Block wegläßt. Die so erhaltenen Werte T_i, $i = 1, \ldots, N$, kombiniert man dann mit der Schätzung T von allen Daten zu den sogenannten Pseudowerten des Jackknife:

$$J_i = N \cdot T \; - \; (N-1) \cdot T_i. \tag{3.2}$$

Diese betrachtet man nun als unabhängige Schätzungen der gesuchten Größe, aus denen der Mittelwert und der Fehler des Mittelwertes berechnet werden können:

$$\mathcal{O} \;\approx\; \overline{J} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_i \tag{3.3}$$

$$\Delta\mathcal{O} \;\approx\; \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(J_i - \overline{J})^2}{N(N-1)}} \tag{3.4}$$

Bei der Wahl der Blocklänge muß man zwei Dinge beachten: Ist sie zu klein gewählt, unterscheiden sich die betrachteten N Datensätze zu wenig und der Fehler wird unterschätzt. Ist sie dagegen zu groß, gibt es nur sehr wenige Werte für J_i, und die Fehlerberechnung aus 3.4 ist nicht sinnvoll. Bei den vorliegenden Daten hat sich eine Einteilung in 20 Blöcke a 75 Daten bewährt.

Einer graphische Darstellung der so erhaltenen Ergebnisse befindet sich im Anhang, Abbildungen A.1 bis A.6. Abstände entlang der x- bzw. y-Achse sind mit $01, 02, \ldots, 12$ bezeichnet, $d01, d02, \ldots, d08$ steht für die Diagonalen in Einheiten von $\sqrt{2}$.

Für große Z gilt nach Gleichung 1.72 (mit Z statt T)

$$V_Z(R) \longrightarrow \ln \frac{F(R)e^{-V(R)Z}}{F(R)e^{-V(R)(Z+1)}} = V(R). \tag{3.5}$$

Um das Potential V(R) zu bekommen, muß man also das Verhalten der lokalen Potentiale für große Z untersuchen. Dabei stellt man fest, daß $V_Z(R)$ bei kleinen Abständen R praktisch konstant ist, während es bei größeren Distanzen erst ab $Z = 3, 4$ oder 5 mit den folgenden Werten innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt.

Dies liegt daran, daß auch die Energien der angeregten Zustände zum Wilson loop beitragen. Berücksichtigt man bei $V_Z(R)$ auch den ersten angeregten Zustand, so sieht man, daß der Grenzwert $V(R)$ über einen exponentiellen Abfall mit Z erreicht wird. Da ein Fit mit diesem Ansatz aber sehr instabil ist, werden die lokalen Potentiale einfach für $Z \geq Z_{min}$ mit einer Konstanten gefittet.

Bei der Wahl von Z_{min} muß man aber sehr vorsichtig sein, damit keine systematischen Fehler entstehen. Da der Fehler von V_Z mit wachsendem Z stark ansteigt, wird der Fit vom Wert $V_{Z_{min}}$ dominiert. Folglich liegen alle Potentiale systematisch zu hoch, wenn man Z_{min} zu klein wählt. Andererseits wird bei zu großen Z_{min} Information verschenkt, da dann nur die lokalen Potentiale mit großem Fehler berücksichtigt werden.

Bei den vorliegenden Daten liefern die Werte $Z_{min} = 4, 5, 6$ Potentiale, deren Abweichungen voneinander im Promille-Bereich liegen (siehe Abbildung 3.1).

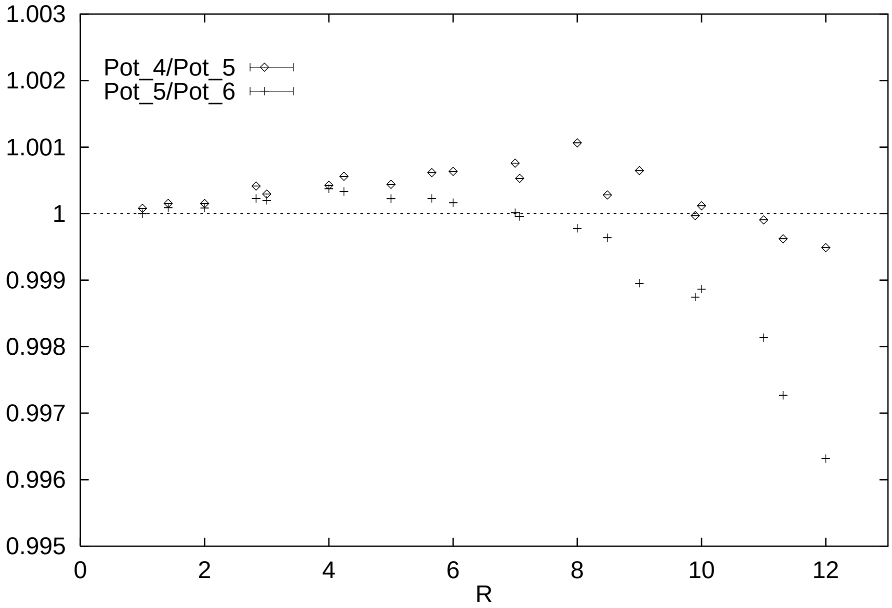


Abbildung 3.1: Verhältnisse der Potentiale, die mit $Z_{min} = 4, 5$ und 6 ermittelt wurden.

Wegen der beiden oben genannten Einschränkungen wird daher im folgenden stets

$Z_{min} = 5$ benutzt. Die vollständige Formel für das Potential lautet also

$$V(R) = \frac{\sum\limits_{Z \geq Z_{min}} \frac{V_Z(R)}{(\Delta V_Z(R))^2}}{\sum\limits_{Z \geq Z_{min}} \frac{1}{(\Delta V_Z(R))^2}} \tag{3.6}$$

$$\Delta(V(R)) = \left(\sum_{Z \geq Z_{min}} \frac{1}{(\Delta V_Z(R))^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

Die Potentiale, die man mit dieser Vorgehensweise erhält, sind in den Tabellen A.1 und A.2 im Anhang zusammengefaßt und in Abbildung 3.2 graphisch dargestellt.

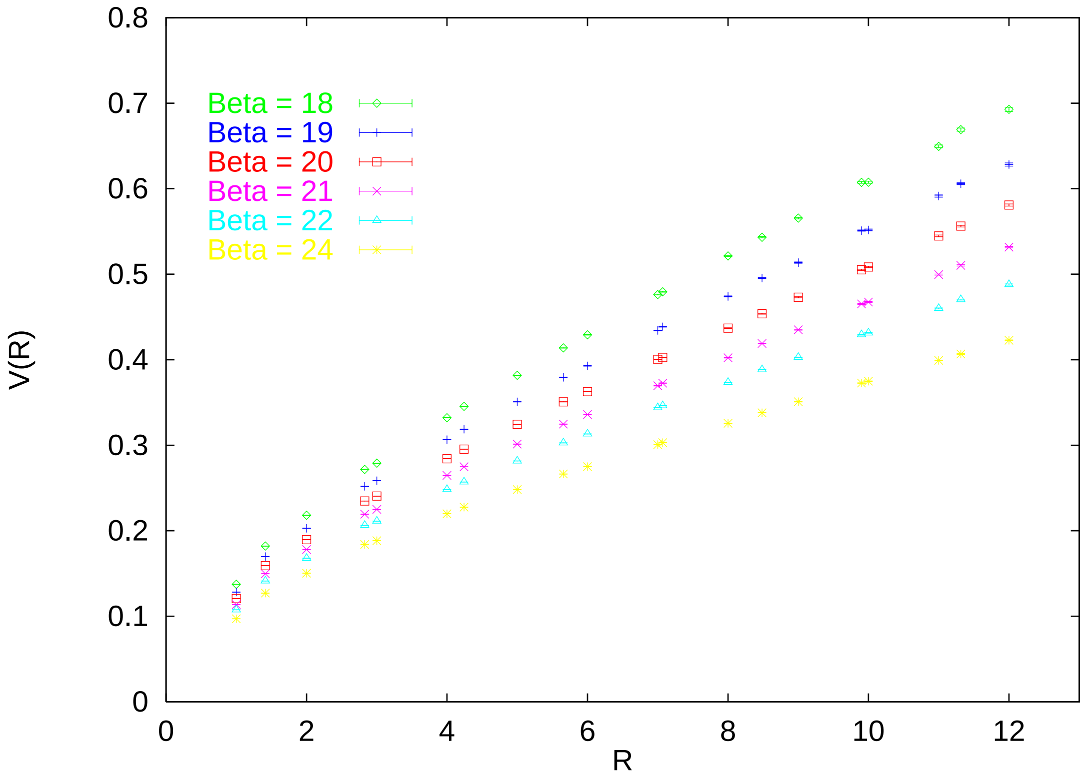


Abbildung 3.2: 3-dimensionale Potentiale für $\beta_3 = 18, 19, 20, 21, 22$ und 24

Wie erwartet zeigen die Potentiale bei mittleren und großen Distanzen einen linearen Anstieg. Die beobachtete Krümmung bei diesen Abständen stammt von Fluktuationen des Strings zwischen den beiden Quarks. Diese sind im allgemeinen von der Form $1/R$. Ein sinnvoller Ansatz, um die Potentialfunktion zu beschreiben, ist daher:

$$V_{3p}(R) = V_0 + \frac{\alpha}{R} + \sigma R. \tag{3.8}$$

Ein eventuell beobachtbarer Coulomb-Term im Potential kann das $1/R$-Verhalten nicht beeinflussen, da das Coulomb-Potential in 3 Dimensionen logarithmisch ist.

Um zu überprüfen, inwieweit die Daten durch einen gegebenen Ansatz beschrieben werden, habe ich beim χ^2-Fit das Fit-Intervall variiert und dann die Abhängigkeit der ermittelten Fitparameter vom Fitbereich untersucht. Da die Potentiale bei großen Abständen deutlich größere Fehler haben als bei kleinen, beeinflussen diese Werte den Fit kaum.

Daher habe ich die obere Grenze des Fitbereiches konstant auf $R = 12$ gesetzt und nur die untere von $R = 1$ bis $R = 7\sqrt{2}$ variiert. Wenn man dann einen Fitparameter gegen die untere Grenze aufträgt, erkennt man an einem eventuell auftretenden Plateau, in welchem Bereich der Parameter von der Wahl des Fitbereiches unabhängig ist.

Abbildung 3.3 zeigt das Ergebnis dieser Methode für den Parameter α bei $\beta_3 = 21$, die eingezeichneten Fehler stammen aus dem χ^2-Fit.

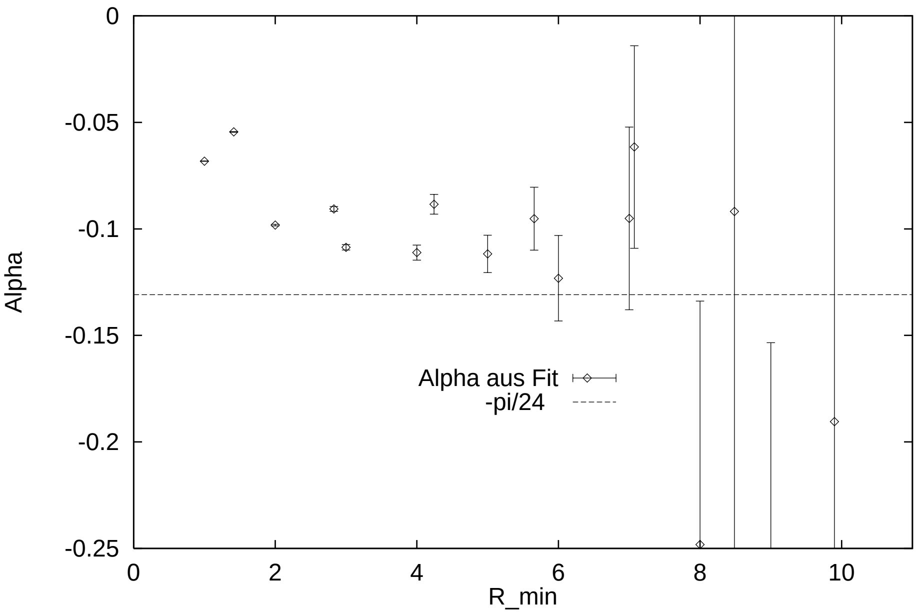


Abbildung 3.3: Fitparameter α in Abhängigkeit von R_{min} bei $\beta_3 = 21$

Es ist zu erkennen, daß α ab $R_{min} = 2$ um einen Wert von ungefähr -0.1 fluktuiert, wobei die Fehler mit wachsendem R_{min} stark ansteigen. Dieser Wert liegt nahe an dem, der vom *String-Modell* [2, 19] vorhergesagt wird:

$$V_{string\ flukt}(R) \ = \ -\frac{c}{R} \tag{3.9}$$

$$\text{mit} \qquad c \ = \ \frac{\pi(d-2)}{24} \ = \ \frac{\pi}{24} \ \cong \ 0.1309 \quad \text{für} \quad d = 3. \tag{3.10}$$

Daher ist es sinnvoll, auch eine Fitfunktion zu benutzen, in der α auf $\pi/24$ fixiert ist:

$$V_{2p} = V_0 - \frac{\pi}{24R} + \sigma R. \tag{3.11}$$

In Abbildung 3.4 ist nun für beide Ansätze die gefittete Saitenspannung σ gegen R_{min} aufgetragen.

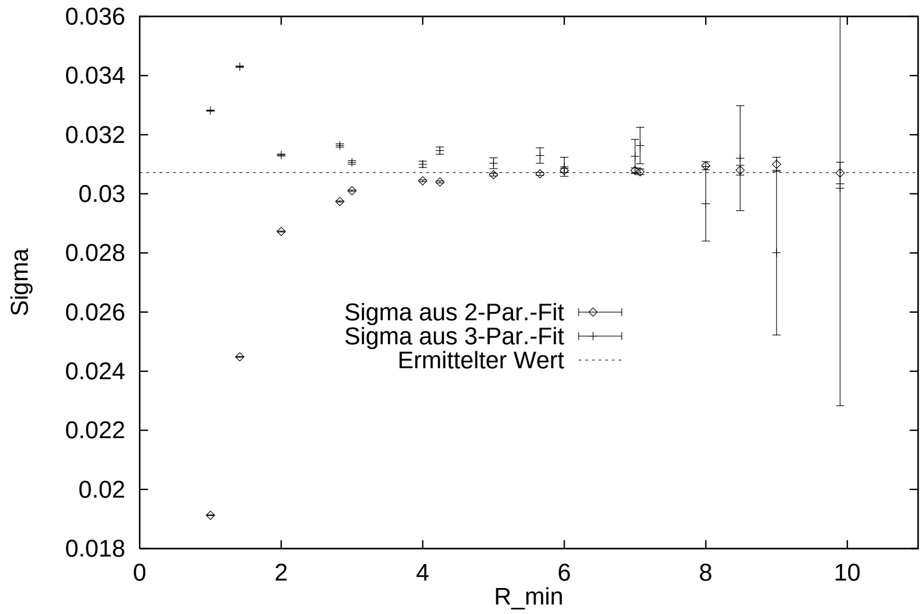


Abbildung 3.4: Fitparameter σ in Abhängigkeit von R_{min} bei $\beta_3 = 21$

Der Wert für σ zeigt demnach im Rahmen der Fehler keine signifikante Abhängigkeit von der verwendeten Fitfunktion. Allerdings ist es ein großer Vorteil der 2-parametrigen Funktion, daß σ ab $R_{min} = R^*_{min} = 5$ vom Fitbereich unabhängig ist. Die Abbildungen A.8 bis A.13 im Anhang zeigen, daß dies bei allen β_3-Werten der Fall ist.

Also erscheint es sinnvoll, den endgültigen Wert für σ durch Mittelung der Ergebnisse des 2-Parameter-Fits für alle $R_{min} > R^*_{min}$ zu berechnen. Dabei habe ich

$$\begin{array}{rrclcl}
 & R^*_{min} & = & 3 & \text{für} & \beta_3 = 18, \\
 & R^*_{min} & = & 4 & \text{für} & \beta_3 = 19, \\
 & R^*_{min} & = & 3\sqrt{2} & \text{für} & \beta_3 = 20, \\
 & R^*_{min} & = & 5 & \text{für} & \beta_3 = 21, \\
 & R^*_{min} & = & 4\sqrt{2} & \text{für} & \beta_3 = 22 \\
\text{und} & R^*_{min} & = & 6 & \text{für} & \beta_3 = 24
\end{array}$$

gewählt. Die Variation von R^*_{min} ist verständlich, da R ja in Gittereinheiten gemessen ist und der Gitterabstand mit steigendem β_3 abnimmt.

Bei der Mittelung über die $\sigma(R_{min})$ sind die einzelnen Werte natürlich sehr stark korreliert, da jeweils nur ein weiterer Punkt der Daten beim Fit weggelassen wurde. Darum ist es angebracht, bei der Berechnung des Fehlers des Mittelwertes einen Faktor $\sqrt{N}$ hinzuzufügen. Somit gilt:

$$\sigma = \frac{\sum_{R_{min} \geq R^*_{min}} \frac{\sigma(R_{min})}{(\Delta\sigma(R_{min}))^2}}{\sum_{R_{min} \geq R^*_{min}} \frac{1}{(\Delta\sigma(R_{min}))^2}} \tag{3.12}$$

$$\Delta\sigma = \left(\frac{1}{N} \sum_{R_{min} \geq R^*_{min}} \frac{1}{(\Delta\sigma(R_{min}))^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.13}$$

Auf diese Art ergeben sich folgende Werte für $\hat{\sigma}_3$ in Gittereinheiten (jetzt wird wieder die korrekte Bezeichnung benutzt):

β_3	$\hat{\sigma}_3$
18.0	0.042895 (97)
19.0	0.037818 (94)
20.0	0.034100 (90)
21.0	0.030716 (78)
22.0	0.027406 (75)
24.0	0.022835 (71)

In Abschnitt 1.2.2 wurde allgemein das Skalenverhalten einer Observable $\mathcal{O}$ der Massendimension d für die 3-dimensionale SU(3)-Eichtheorie hergeleitet. Für die Wurzel der Saitenspannung $\sqrt{\hat{\sigma}_3}$ $(d = 1)$ muß demnach in Ordnung β_3^{-2} gelten:

$$\beta_3 \sqrt{\hat{\sigma}_3} = c' + \frac{\tilde{c}}{\beta_3}. \tag{3.14}$$

In Abbildung 3.5 ist nun $\beta_3 \sqrt{\hat{\sigma}_3}$ gegen $1/\beta_3$ aufgetragen. Die eingezeichnete Gerade stammt aus einem χ^2-Fit der 6 Punkte zu endlichem β_3, und der Punkt bei 0 zeigt den gefitteten y-Achsenabschnitt mit Fehler.

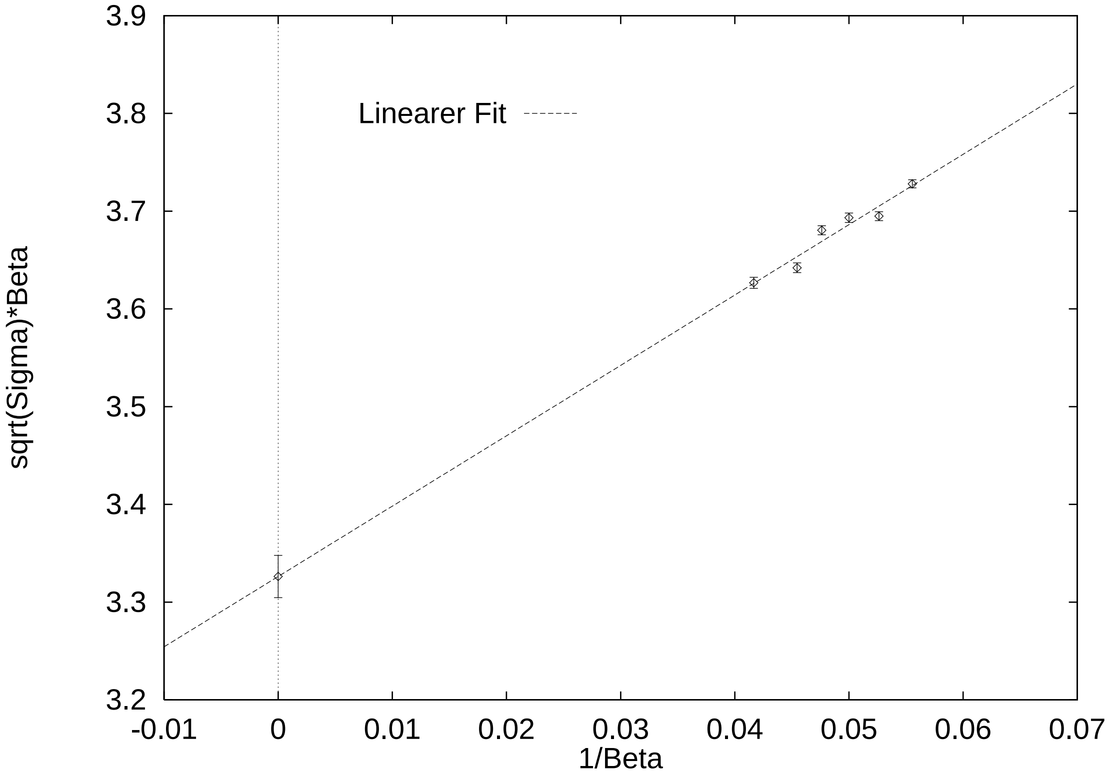


Abbildung 3.5: Skalenverhalten von $\hat{\sigma}_3$ für 6 β_3-Werte

Aus dem Fit erhält man für die beiden Konstanten c' und $\tilde{c}$

$$\begin{aligned} c' &= 3.326 \pm 0.022 \qquad (3.15) \\ \tilde{c} &= 7.199 \pm 0.435, \qquad (3.16) \end{aligned}$$

und somit lautet die Funktionsvorschrift der Geraden

$$\beta_3 \sqrt{\hat{\sigma}_3} = 3.326 + \frac{7.199}{\beta_3}. \qquad (3.17)$$

Mit $\sqrt{\hat{\sigma}_3} = a\sqrt{\sigma_3}$ und $\beta_3 = \frac{6}{ag_3^2}$ folgt dann im Kontinuumslimes ($\beta_3 \to \infty$)

$$\sqrt{\sigma_3} = 0.554\,(4)\; g_3^2. \qquad (3.18)$$

3.2 (3+1)-dimensionale SU(3) bei $T \neq 0$

In (3+1) Dimensionen sollen Systeme bei drei verschiedenen Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur T_c des thermodynamischen Phasenüberganges simuliert werden. Auf einem Gitter mit 8 Punkten in der Zeitrichtung ($N_\tau = 8$) ist die kritische Kopplung ungefähr bei 6.0 (z.B. $\beta_c = 6.001(25)$ in [14]), also $T_c = \frac{1}{8 \cdot a(\beta=6.0)}$.

Betrachtet man nun bei $\beta = 6.0$ andere N_τ-Werte, so gilt

$$T/T_c = \frac{1}{N_\tau \cdot a(\beta = 6.0)} \Bigg/ \frac{1}{8 \cdot a(\beta = 6.0)} = \frac{8}{N_\tau}. \tag{3.19}$$

Auf der CRAY-YMP des HLRZ-JÜLICH wurde nun auf Gittern der Größe $32^3 \times N_\tau$ mit $N_\tau = 2, 3, 4$ bei den Temperaturen $T/T_c = 4, 8/3, 2$ die SU(3)-Eichtheorie simuliert.

Die Thermalisierung bestand aus ca. 200 Heatbath-updates ausgehend von einem geordneten – also heißen – Start. Danach wurden 200 ($N_\tau = 4$), 240 ($N_\tau = 3$) bzw. 425 ($N_\tau = 2$) Messungen durchgeführt, die jeweils durch 50 mal {7 Overrelaxation- und 1 Heatbath-update} getrennt waren.

Vor jeder Messung wurde die Konfiguration 40 mal geschmiert ($\alpha = 1.0$ und $\beta = 0.5$) und jedesmal wieder in die SU(3) zurückprojeziert. Die danach gemessenen räumlichen Wilson loops $W(R, Z)$ liegen vollständig in den Raumebenen, wobei die $\hat{z}$-Achse als Pseudozeitrichtung ausgezeichnet ist.

In der xy-Ebene werden Abstände entlang der Gitterachsen, (1/1)-diagonal (d.h. je 1 link in $\hat{x}$ und $\hat{y}$-Richtung) und (2/1)-diagonal (d.h. 1 link in $\hat{x}$ und 2 in $\hat{y}$-Richtung und umgekehrt) betrachtet. Die maximalen Ausdehnungen der Wilson loops sind:

$$\begin{aligned} Z &= 1, \ldots, 10 \\ R &= 1, \ldots, 16 \quad \text{axial} \\ R' &= 1, \ldots, 11 \quad \text{(1/1)-diagonal, Einheit } \sqrt{2} \\ R'' &= 1, \ldots, 8 \quad \text{(2/1)-diagonal, Einheit } \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Die Distanzen R' und R'' werden im folgenden mit $d01, \ldots$ bzw. $s01, \ldots$ bezeichnet.

Die lokalen Potentiale lassen sich nun, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, aus den Verhältnissen der Wilson loops mit der Jackknife-Methode berechnen (vgl. Gleichung 3.1). Geeignete Blocklängen sind 20 bzw. 25 für $N_\tau = 2$.

Aufgrund der vergleichsweise geringen Statistik unterliegen die lokalen Potentiale jedoch starken Schwankungen oder sind zum Teil gar nicht zu berechnen, da das Argument des Logarithmus in (3.1) nicht notwendigerweise positiv ist. Abbildung 3.6 zeigt die Resultate bei $N_\tau = 4$ für $R = \sqrt{5}, 4, 6, 8$ und 13, wobei auch nur die Punkte eingetragen sind, die von ihrem Vorgänger (d.h. linker Nachbar) um nicht mehr als 15% abweichen.

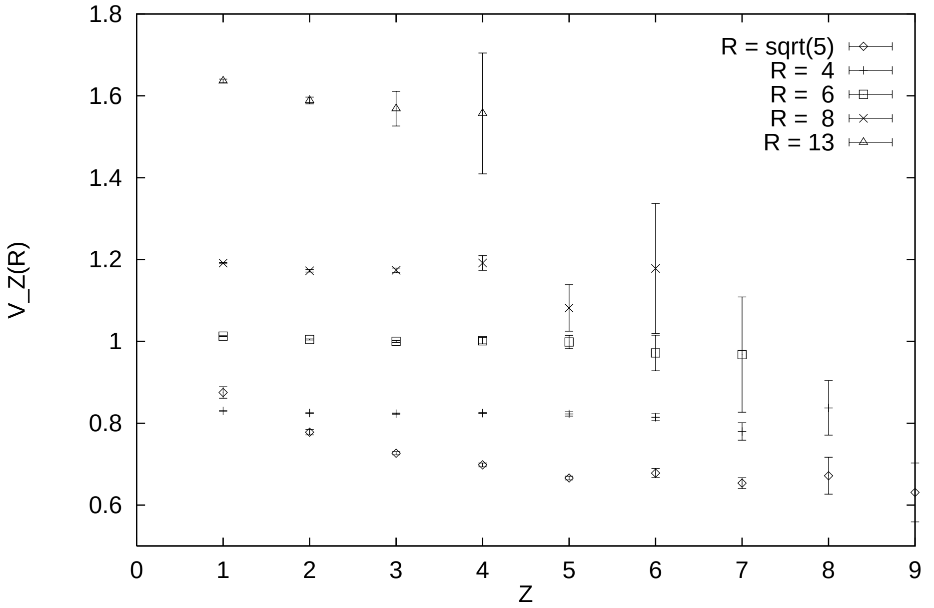


Abbildung 3.6: Lokale Potentiale für $T/T_c = 2$ mit Jackknife-Fehlern

Offensichtlich ist es nicht möglich, so einfach wie im 3-dimensionalen Fall ein einheitliches Z_{min} festzulegen, ab dem die lokalen Potentiale im Rahmen der Fehler konstant bleiben. Um bei großen Abständen noch einen Potentialwert zu bekommen, muß Z_{min} dort entsprechend klein (2 oder 3) gewählt werden. Immerhin erhält man bis $R = 15$ ($N_\tau = 4$), $R = 6\sqrt{2}$ ($N_\tau = 3$) und $R = 8$ ($N_\tau = 2$) verläßliche Potentiale, was in Einheiten der Temperatur Abständen $R \lesssim 4/T$ entspricht. Wie aus Abbildung 3.7 zu sehen ist, setzt das nicht-störungstheoretische lineare Verhalten bereits für $R \gtrsim 1/T$ ein. Dabei ist

$N_\tau = 4$		$N_\tau = 3$		$N_\tau = 2$	
R	Z_{min}	R	Z_{min}	R	Z_{min}
$1 - 2\sqrt{5}$	4	$1 - 2\sqrt{5}$	4	$1 - 2\sqrt{2}$	4
$5 - 15$	3	$5 - 6\sqrt{2}$	3	$3 - 2\sqrt{5}$	3
				$5 - 8$	2

Die so ermittelten Werte sind in Tabelle B.1 zusammengefaßt und in Abbildung 3.7 graphisch dargestellt.

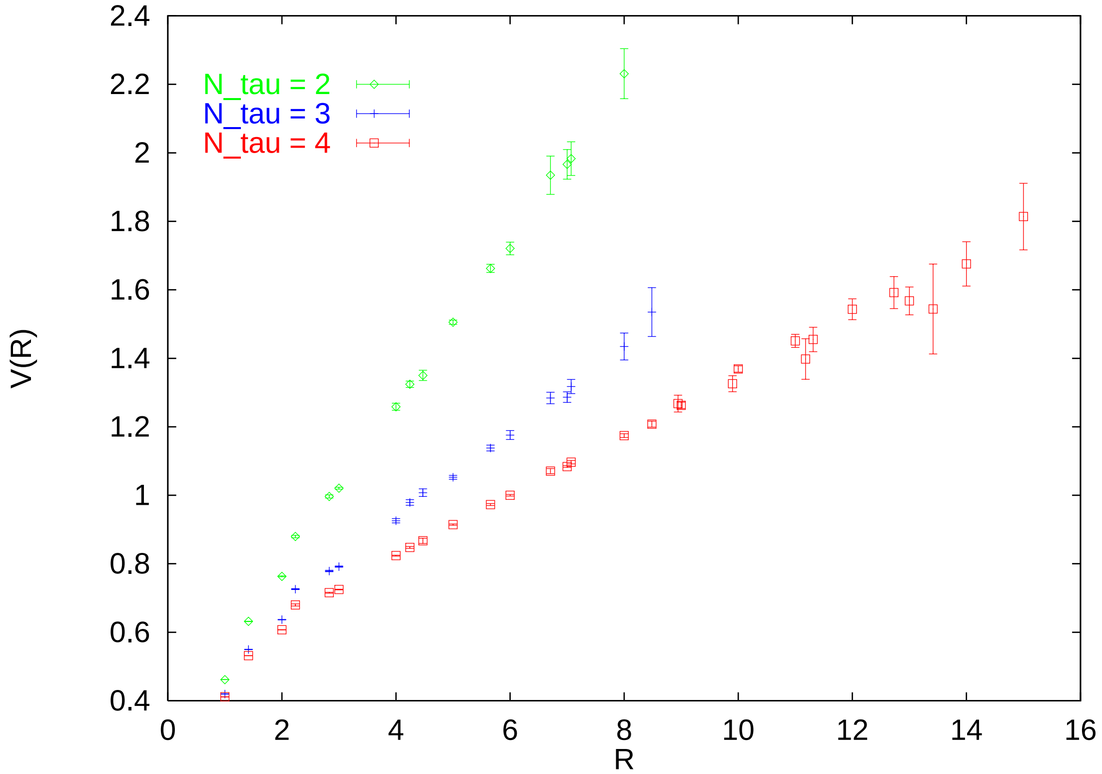


Abbildung 3.7: 4-dimensionale Potentiale

Wie schon bei der Analyse in drei Dimensionen betrachte ich zunächst eine Fitfunktion mit drei Parametern

$$V_{3p}(R) = V_0 + \frac{\alpha}{R} + \sigma R, \tag{3.20}$$

wobei der $1/R$-Term sowohl von String-Fluktuationen als auch vom Coulombpotential herkommen kann. Es gibt aber auch die Möglichkeit, eine Gitter-Version des $\frac{1}{R}$-Potentialterms zu benutzen, für die gilt:

$$\left(\frac{1}{|\vec{R}|}\right)_L = \frac{4\pi}{N_\sigma^3} \sum_{\vec{k}^j} \frac{\cos(\vec{k}^j \vec{R})}{4\sum_{i=1}^3 \sin^2((k^j)_i/2)} \quad \text{mit } (k^j)_i = \frac{2\pi}{N_\sigma} j_i \quad \text{für } i = 1,2,3 \tag{3.21}$$

Damit können die *Finite-a*-Effekte, die besonders bei kurzen Abständen auftreten, reduziert werden. Daher ist der folgende Ansatz der oben genannten Funktion vorzuziehen:

$$V_{3pL}(R) = V_0 + \alpha \left(\frac{1}{|\vec{R}|}\right)_L + \sigma R. \tag{3.22}$$

Damit soll zuerst die Größe und Bedeutung des Parameters α untersucht werden. Die Abbildungen 3.8, B.1 und B.2 zeigen die Werte von α, die man bei Fits mit verschiedenen unteren Grenzen R_{min} erhält.

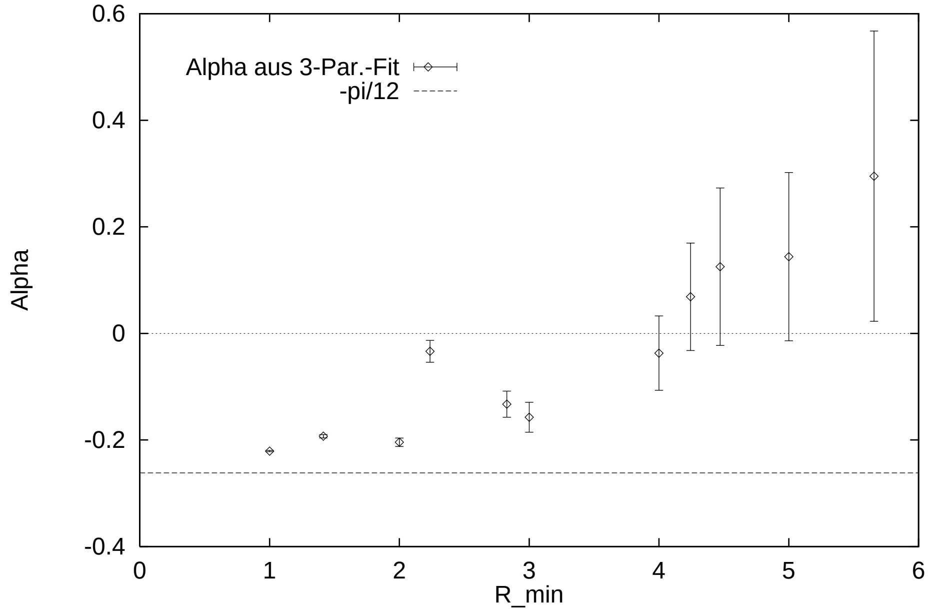


Abbildung 3.8: Fitparameter α in Abhängigkeit von R_{min} bei $N_\tau = 4$

Die Graphiken zeigen, daß α sehr stark fluktuiert und zum Teil sogar positive Werte annimmt. Ein Wert von $-\pi/12$, wie er aus der String-Theorie in 4 Dimensionen vorhergesagt wird, scheint nicht favorisiert zu sein. Vielmehr schwanken die Daten bei größeren Abständen zu sehr, als daß noch eine eindeutige Krümmung zu erkennen ist.

Daher untersuche ich nun den Parameter σ mit der Funktion V_{3pL} und den beiden weiteren Ansätzen

$$V_{2pL}(R) = V_0 - \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{|\vec{R}|}\right)_L + \sigma R \tag{3.23}$$

$$\text{und} \quad V_{lin}(R) = V_0 + \sigma R. \tag{3.24}$$

Die Abbildungen 3.9 bis 3.11 zeigen die Resultate für den Fitparameter σ, jeweils aufgetragen gegen die untere Grenze R_{min} des Fitbereiches. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Punkte, die mit der Funktion V_{lin} erhalten wurden, um 0.02 auf der x-Achse nach links verschoben, und die aus V_{3pL} um 0.02 nach rechts. Für die letztgenannten fehlen teilweise auch die (sehr großen) Fehlerbalken.

Wie bereits oben vermutet, sind die Ergebnisse der 3-Parameter-Fits zur weiteren quantitativen Analyse nicht geeignet. Die Ergebnisse unter Verwendung von V_{2pL} zeigen – besonders bei $N_\tau = 4$ – eine systematische Abhängigkeit vom Fitbereich.

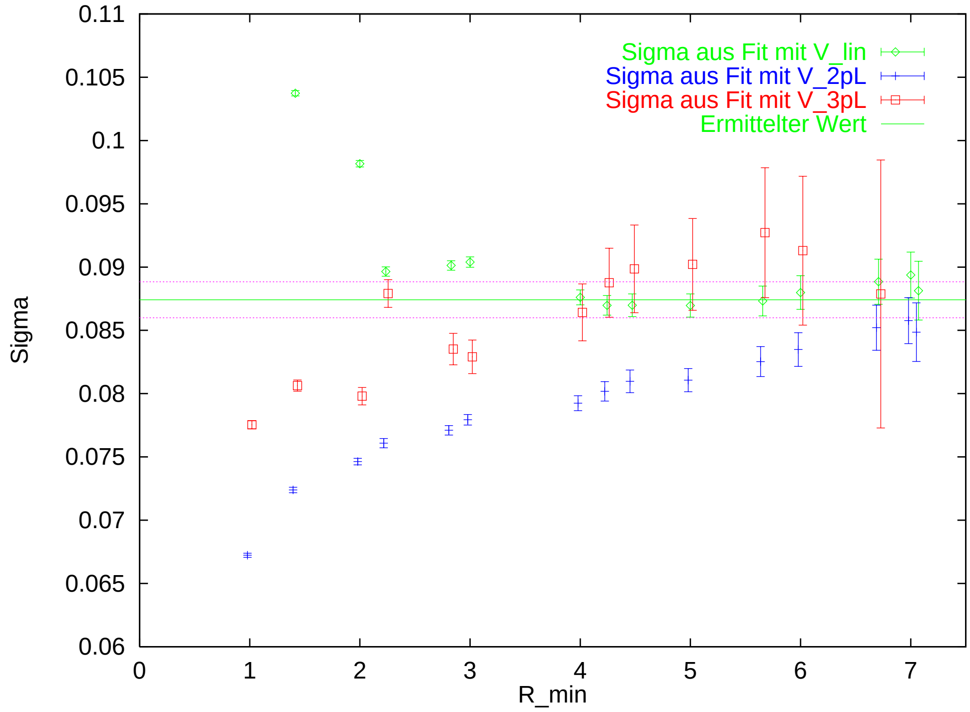


Abbildung 3.9: Fitparameter σ in Abhängigkeit von R_{min} bei $N_\tau = 4$

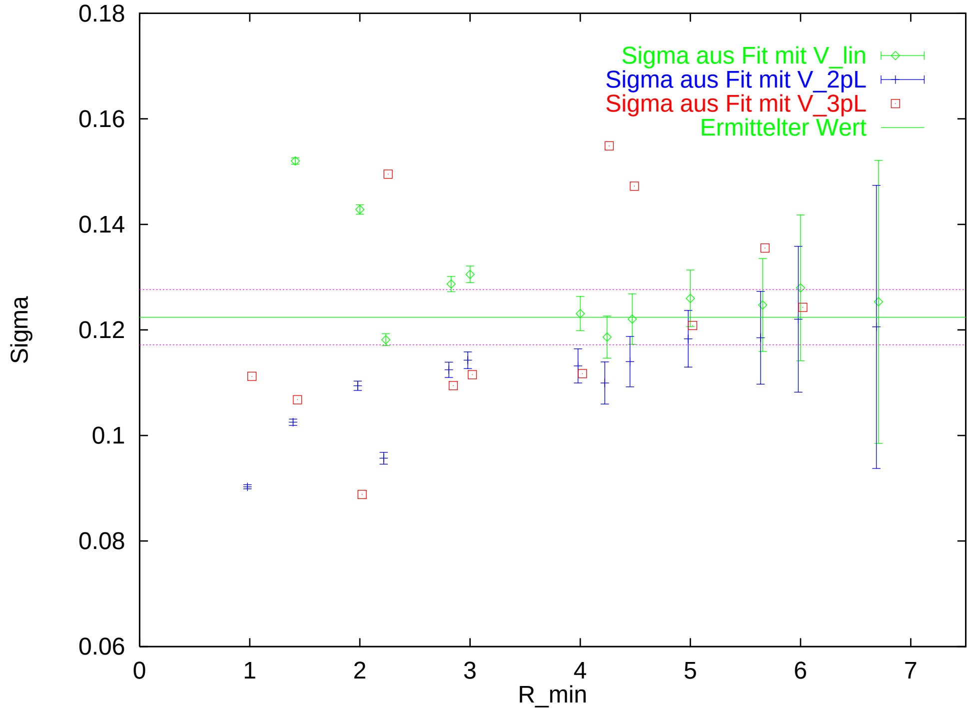


Abbildung 3.10: Fitparameter σ in Abhängigkeit von R_{min} bei $N_\tau = 3$

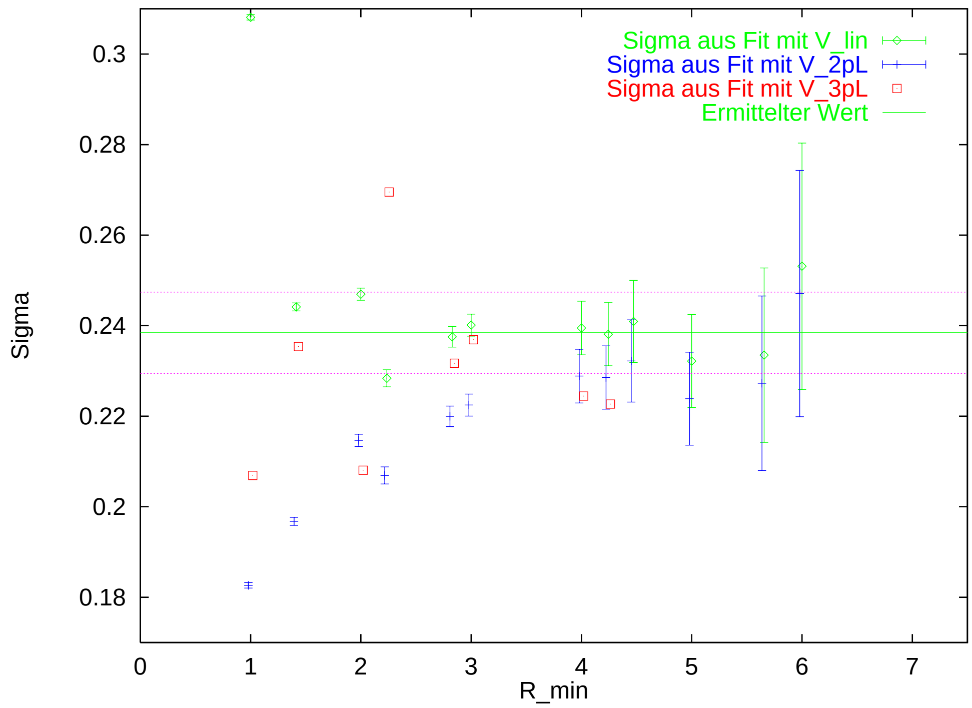


Abbildung 3.11: Fitparameter σ in Abhängigkeit von R_{min} bei $N_\tau = 2$

Folglich kann diese Funktion keine geeignete Beschreibung der Daten sein. Die σ-Werte aus V_{lin} sind dagegen für alle $R_{min} > 4$ miteinander konsistent, und auch die Werte aus V_{2pL} liegen bei großen R_{min} im selben Bereich.

Daher ist es nun sinnvoll, σ durch Mittelung der Ergebnisse der Fits mit V_{lin} für alle $R_{min} > 4$ zu berechnen. Wegen der Korrelationen der Einzelresultate benutze ich dazu wieder die Formeln 3.12 und 3.13. Die eingezeichneten Linien zeigen die so gewonnenen Werte mit ihren Fehlern.

Die folgende Tabelle zeigt eine Übersicht der ermittelten räumlichen Saitenspannung. Zum Vergleich ist dort auch der auf einem 32^4-Gitter berechnete $(T = 0)$-Wert (genauer $T = 0.25T_c$) der Saitenspannung angegeben [4].

N_τ	T/T_c	$\hat{\sigma}_s$
32	0.25	0.0513 $\pm$ 0.0025
4	2	0.0874 $\pm$ 0.0014
3	8/3	0.1224 $\pm$ 0.0052
2	4	0.2384 $\pm$ 0.0090

Wenn nun bei hohen Temperaturen die effektive 3-dimensionale Theorie vom reinen SU(3)-Eichsektor dominiert wird, so sollte nach Gleichung 1.83 gelten:

$$\sqrt{\sigma_s} = c \cdot g^2(T)T. \tag{3.25}$$

In der 1-Loop-Näherung gilt $g^{-2}(T) = 2b_0 \ln(T/\Lambda_T)$ und somit

$$\frac{T}{\sqrt{\sigma_s}} = 2b_0 \ln(T/\Lambda_T) \quad \text{mit } b_0 = \frac{11}{16\pi^2}. \tag{3.26}$$

Aus $T = \frac{1}{N_\tau a}$ und $a\sqrt{\sigma_s} = \sqrt{\hat{\sigma}_s}$ folgt dann

$$\frac{T}{\sqrt{\sigma_s}} = \frac{1}{N_\tau \sqrt{\hat{\sigma}_s}} = \frac{1}{c}\left(2b_0 \ln(T/T_c) + 2b_0 \ln(T_c/\Lambda_T)\right). \tag{3.27}$$

Um dieses Verhalten zu überprüfen, ist in Abbildung 3.12 $\frac{1}{N_\tau \sqrt{\hat{\sigma}_s}}$ gegen $\ln(T/T_c)$ aufgetragen (man beachte die logarithmische x-Achse).

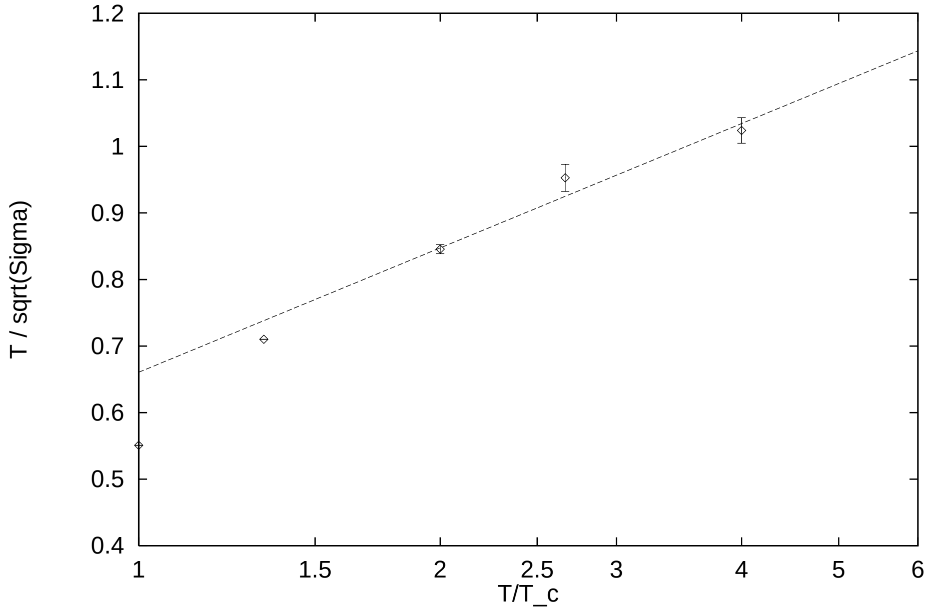


Abbildung 3.12: Skalenplot für $T/\ \sigma_s$. Der Punkt bei $T/T_c = 4/3$ stammt von Rechnungen der Bielefelder QUADRICS-Gruppe auf einem $32^3 \times 6$-Gitter, der bei $T/T_c = 1$ von Bali und Schilling.

Zum Vergleich sind noch zwei weitere Punkte bei $T/T_c = 1$ bzw. $T/T_c = 4/3$ angegeben. Der erste stammt aus ($T = 0$)-Rechnungen von Bali und Schilling [4] Genau genommen sollte dieser Punkt bei $T = 0.25T_c$ eingezeichnet werden. Hier wird allerdings angenommen, daß auch in der SU(3), wie im Falle der SU(2) explizit verifiziert, die Saitenspannung σ unterhalb von T_c temperaturunabhängig ist. Der zweite Punkt wurde in Bielefeld auf dem QUADRICS Q16 bei $N_\tau = 6$ gerechnet und ist Teil einer umfangreicheren, gegenwärtig noch nicht abgeschlossenen Analyse der Saitenspannung [6].

Die eingezeichnete Gerade erhält man durch einen Fit der drei Punkte mit $T \geq 2T_c$. Ihre Parameter sind

$$\begin{aligned} \text{Achsenabschnitt} &= 0.661 \ \pm \ 0.023 \\ \text{Steigung} &= 0.270 \ \pm \ 0.028. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit Gleichung 3.27

$$c = 0.517\,(54) \tag{3.28}$$

$$\Lambda_T/T_c = 0.086\,(30). \tag{3.29}$$

Benutzt man statt dessen die 2-Loop-Formel

$$g^{-2}(T) = 2b_0 \ln(T/\Lambda_T) + \frac{b_1}{b_0} \ln(2\ln(T/\Lambda_T)) \tag{3.30}$$

mit $b_1 = \frac{102}{(16\pi^2)^2}$, so bekommt man

$$c = 0.586\,(55) \tag{3.31}$$

$$\Lambda_T/T_c = 0.118\,(36). \tag{3.32}$$

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die SU(3)-Eichtheorie in 3 und (3+1) Dimensionen untersucht. Dabei galt das Interesse der Saitenspannung bzw. räumlichen Saitenspannung, die aus dem Potential zwischen zwei schweren Quarks gewonnen werden kann.

Monte-Carlo-Simulationen auf einem Gitter der Größe 32^3 haben gezeigt, daß $\sqrt{\sigma_3}$ mit der dreidimensionalen Kopplung β_3 skaliert. Im Kontinuumslimes gilt

$$\sqrt{\sigma_3} = 0.554\,(4)\ g_3^2.$$

Die gemessenen Potentiale lassen sich sehr gut mit einem Ansatz fitten, der neben dem linearen Term auch den String-Term $-\frac{\pi}{24R}$ enthält. Systematische Fehler treten durch die Wahl der Fitfunktion also nicht oder nur in geringem Maße auf.

Es bleibt noch zu überprüfen, inwieweit die von Olesen [22] getroffene Vorhersage $\sqrt{\sigma_3}/T_c = \sqrt{\pi/3}$ zutrifft. Die dazu benötigte kritische Kopplung wird momentan von Christian Legeland (Bielefeld) mit Simulationen in (2+1) Dimensionen bestimmt [17].

Die Analyse der Daten in (3+1) Dimensionen, die auf Gittern der Größe $32^3 \times N_\tau$ berechnet wurden, erwies sich als schwieriger. Das liegt vornehmlich an der geringen Statistik von 200, 240 bzw. 425 Messungen. Allerdings sind die Werte der zu ermittelnden Saitenspannung in Gittereinheiten auch so groß, daß das Signal bei wachsenden Distanzen recht schnell im Rauschen untergeht. Somit ist das Hauptproblem, die lokalen Potentiale für genügend große Abstände in z-Richtung zu bekommen, um damit das Potential mit geringen Unsicherheiten zu bestimmen. Ist das nicht möglich, so bekommt man systematische Fehler, die die Saitenspannung beeinflussen.

Eine Erhöhung der Statistik ist allerdings nicht geplant, da die Bielefelder QUADRICS-Gruppe bei $N_\tau = 6$ umfangreiche Messungen der räumlichen Saitenspannung in einem großen β-Bereich durchgeführt hat [6].

Trotz der beschriebenen Schwierigkeiten zeigen die Daten Hinweise, daß in der SU(3) wie schon in der SU(2) die effektive Theorie bei hohen Temperaturen vom reinen Eichsektor dominiert wird. Mit der 2-Loop-Formel für $g^2(T)$ ergibt sich

$$\sqrt{\sigma_s} = 0.586(55) \cdot g^2(T)T,$$

was man direkt mit der 3-dimensionalen Saitenspannung

$$\sqrt{\sigma_3} = 0.554\,(4)\; g_3^2$$

vergleichen sollte. Wie schon bei den SU(2)-Rechnungen liegt die räumliche Saitenspannung nur ca. 10% über dem entsprechneden Wert der 3-d SU(3)-Eichtheorie.

Es ist allerdings nicht ganz sicher, ob dieses Verhalten wirklich schon ab $T = 2T_c$ einsetzt, wie es bei dem benutzten Fit angenommen wurde. Die renormierte Kopplung bei $T = T_c$ beträgt

$$g^2(2T_c) = 2.02(21)$$

für SU(3). In der SU(2) liegt dieser Wert bei 2.651 [5].

Die beiden oben genannten Formeln für die räumliche Saitenspannung bzw. dreidimensionale Saitenspannung zeigen also im Rahmen der angegebenen Fehler auch in der SU(3) eine quantitative Übereinstimmung. Dies läßt darauf schließen, daß die effektive Theorie, die man aus einer (3+1)-dimensionalen SU(3)-Eichtheorie bei hohen Temperaturen erhält, durch den reinen dreidimensionalen Eichsektor dominiert wird.

Eine genauere Analyse, besonders der räumlichen Saitenspannung, wäre allerdings wünschenswert, um diese Aussage zu bekräftigen.

Anhang A

Tabellen und Graphiken in 3 Dimensionen

	$\beta_3 = 18.0$		$\beta_3 = 19.0$		$\beta_3 = 20.0$	
R	$V(R)$	$\Delta V(R)$	$V(R)$	$\Delta V(R)$	$V(R)$	$\Delta V(R)$
1.00	0.137365	0.000016	0.128462	0.000013	0.120713	0.000012
1.41	0.182126	0.000028	0.169863	0.000027	0.159288	0.000024
2.00	0.218109	0.000040	0.202897	0.000036	0.189690	0.000033
2.83	0.271833	0.000088	0.251937	0.000060	0.234804	0.000053
3.00	0.279056	0.000083	0.258532	0.000080	0.240600	0.000058
4.00	0.332239	0.000148	0.306506	0.000123	0.284295	0.000091
4.24	0.345520	0.000173	0.318809	0.000129	0.295508	0.000095
5.00	0.381726	0.000212	0.350802	0.000173	0.324406	0.000144
5.66	0.413847	0.000235	0.379508	0.000214	0.350719	0.000180
6.00	0.429162	0.000352	0.392811	0.000273	0.362746	0.000212
7.00	0.476199	0.000444	0.434297	0.000363	0.400264	0.000306
7.07	0.479496	0.000464	0.438463	0.000349	0.402640	0.000309
8.00	0.521316	0.000660	0.474075	0.000503	0.436926	0.000450
8.49	0.543255	0.000725	0.495494	0.000553	0.453761	0.000422
9.00	0.565576	0.000893	0.513574	0.000736	0.473077	0.000638
9.90	0.607398	0.001095	0.551050	0.000755	0.505166	0.000714
10.00	0.607523	0.001236	0.551793	0.001003	0.508424	0.000787
11.00	0.649512	0.001665	0.591475	0.001335	0.544805	0.001012
11.31	0.669107	0.001849	0.605849	0.001162	0.556220	0.001032
12.00	0.692859	0.002500	0.628295	0.001885	0.580856	0.001265

Tabelle A.1: 3-dimensionale Potentiale für $\beta_3 = 18, 19$ und 20.

	$\beta_3 = 21.0$		$\beta_3 = 22.0$		$\beta_3 = 24.0$	
R	$V(R)$	$\Delta V(R)$	$V(R)$	$\Delta V(R)$	$V(R)$	$\Delta V(R)$
1.00	0.113773	0.000013	0.107592	0.000010	0.097113	0.000012
1.41	0.149709	0.000020	0.141371	0.000019	0.127204	0.000017
2.00	0.178036	0.000026	0.167781	0.000027	0.150429	0.000022
2.83	0.219462	0.000050	0.206289	0.000053	0.184095	0.000037
3.00	0.224938	0.000047	0.211373	0.000063	0.188386	0.000042
4.00	0.264690	0.000079	0.248164	0.000096	0.219915	0.000069
4.24	0.274825	0.000101	0.257072	0.000091	0.227709	0.000074
5.00	0.301352	0.000121	0.281650	0.000133	0.248286	0.000097
5.66	0.324693	0.000147	0.302816	0.000152	0.266397	0.000115
6.00	0.335905	0.000180	0.313263	0.000145	0.275009	0.000137
7.00	0.369610	0.000242	0.343879	0.000185	0.300682	0.000168
7.07	0.372603	0.000235	0.346274	0.000186	0.303091	0.000173
8.00	0.402303	0.000321	0.373580	0.000227	0.325696	0.000205
8.49	0.419078	0.000310	0.388374	0.000283	0.338047	0.000253
9.00	0.435020	0.000439	0.402857	0.000316	0.350847	0.000268
9.90	0.465233	0.000513	0.429262	0.000403	0.372757	0.000350
10.00	0.467537	0.000547	0.431388	0.000376	0.374924	0.000317
11.00	0.499587	0.000590	0.460065	0.000526	0.399148	0.000403
11.31	0.510321	0.000725	0.470316	0.000574	0.406738	0.000429
12.00	0.531624	0.000800	0.487959	0.000725	0.422781	0.000474

Tabelle A.2: 3-dimensionale Potentiale für $\beta_3 = 21, 22$ und 24.

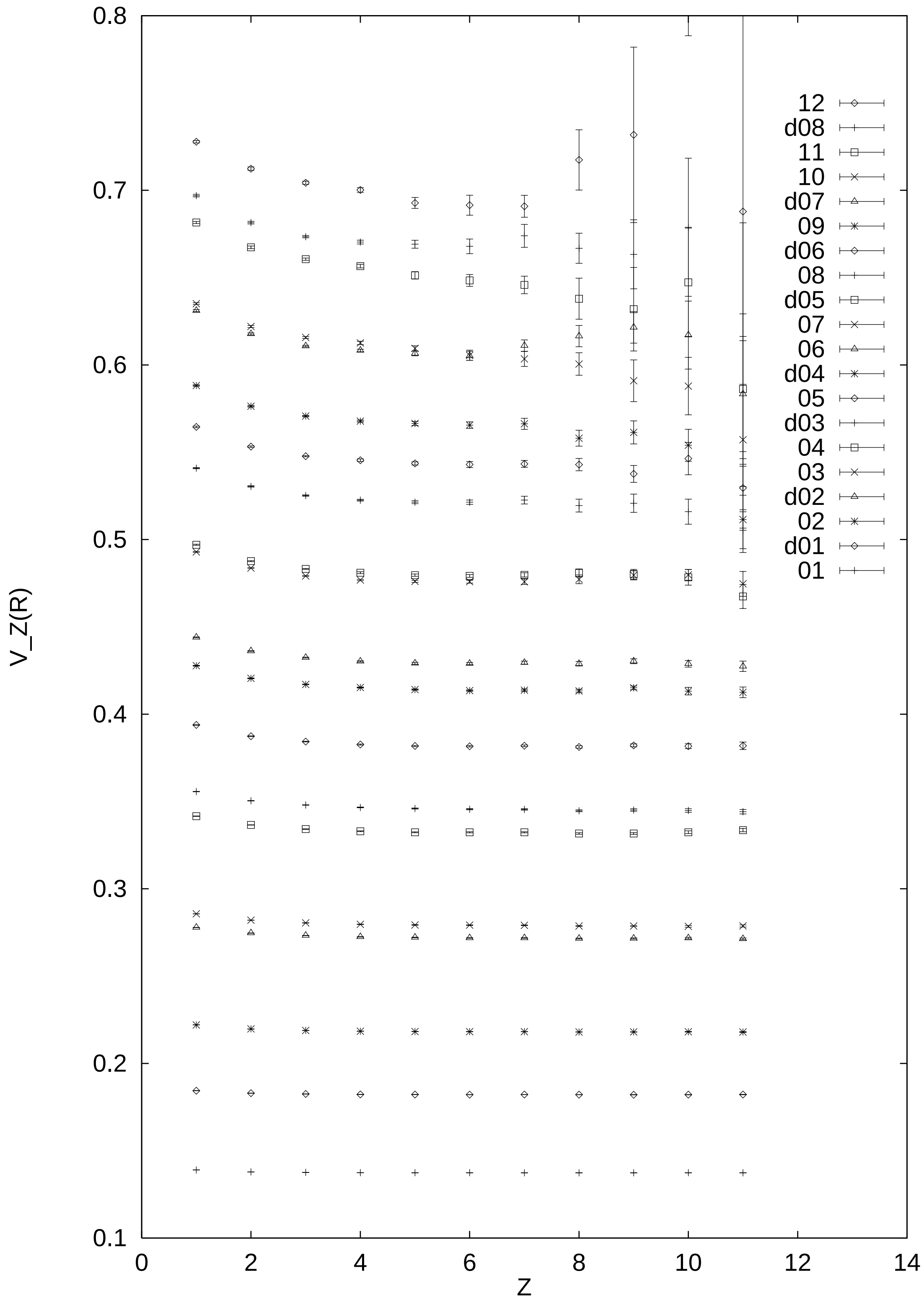


Abbildung A.1: Lokale Potentiale für $\beta_3 = 18$

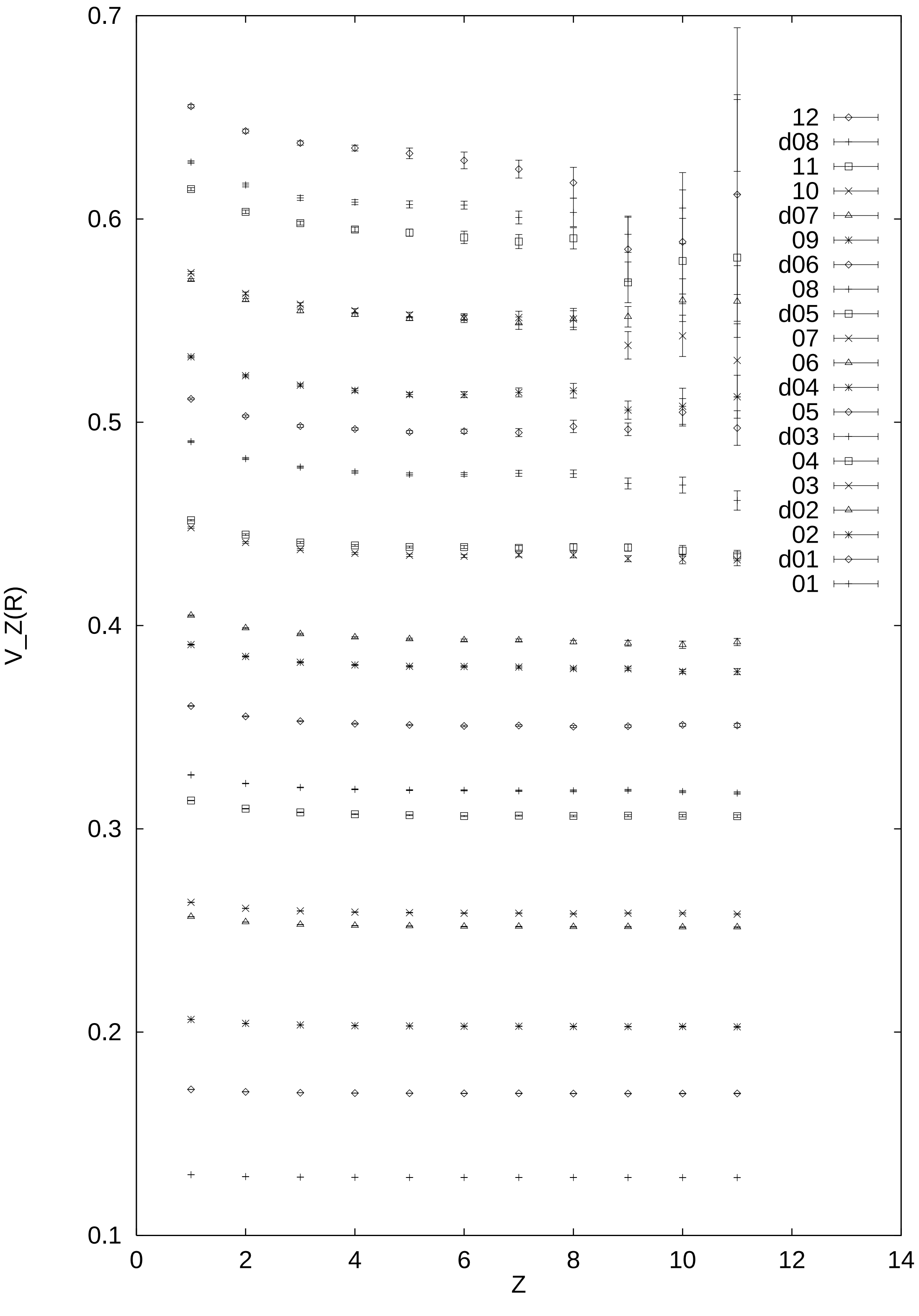


Abbildung A.2: Lokale Potentiale für $\beta_3 = 19$

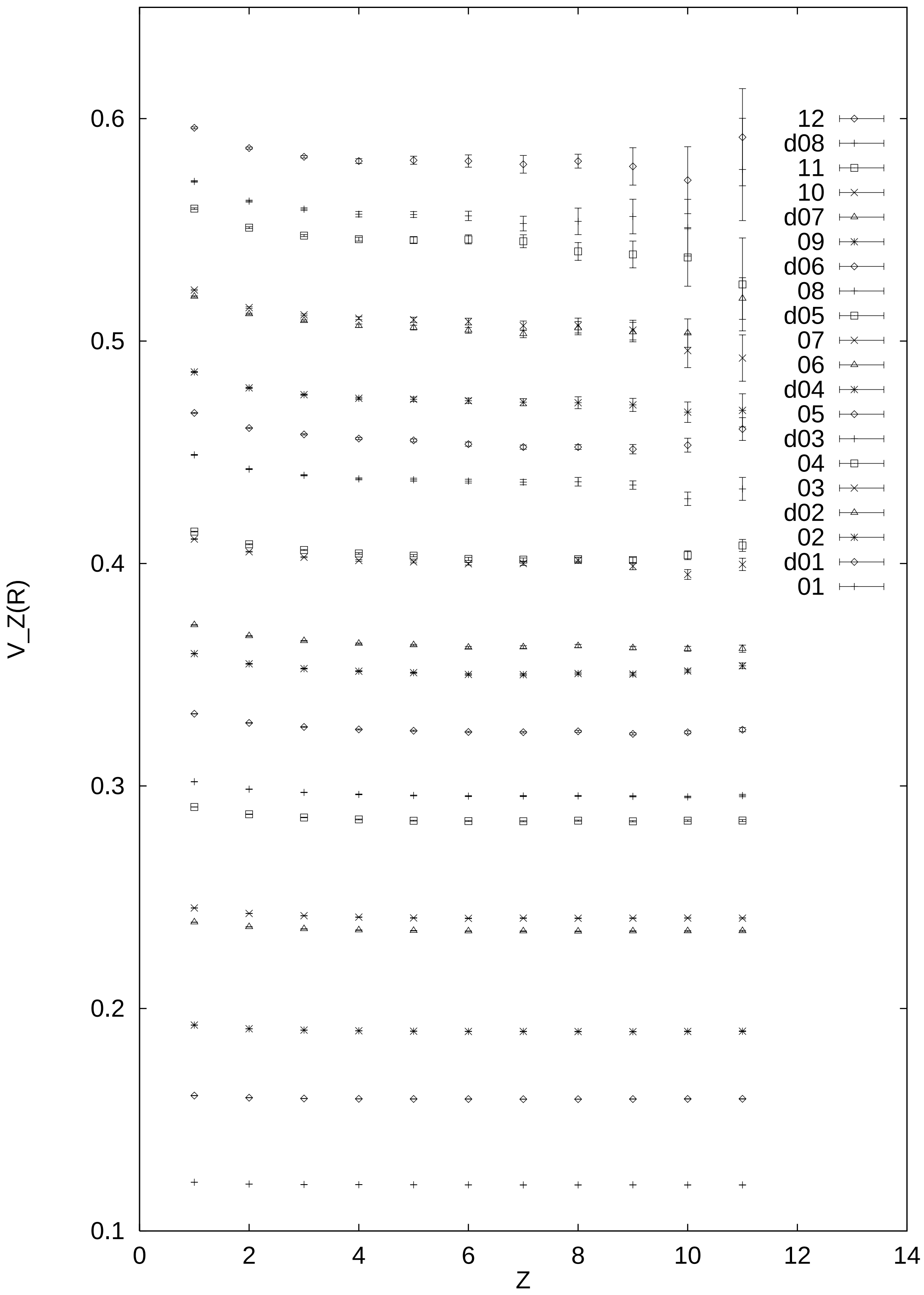


Abbildung A.3: Lokale Potentiale für $\beta_3 = 20$

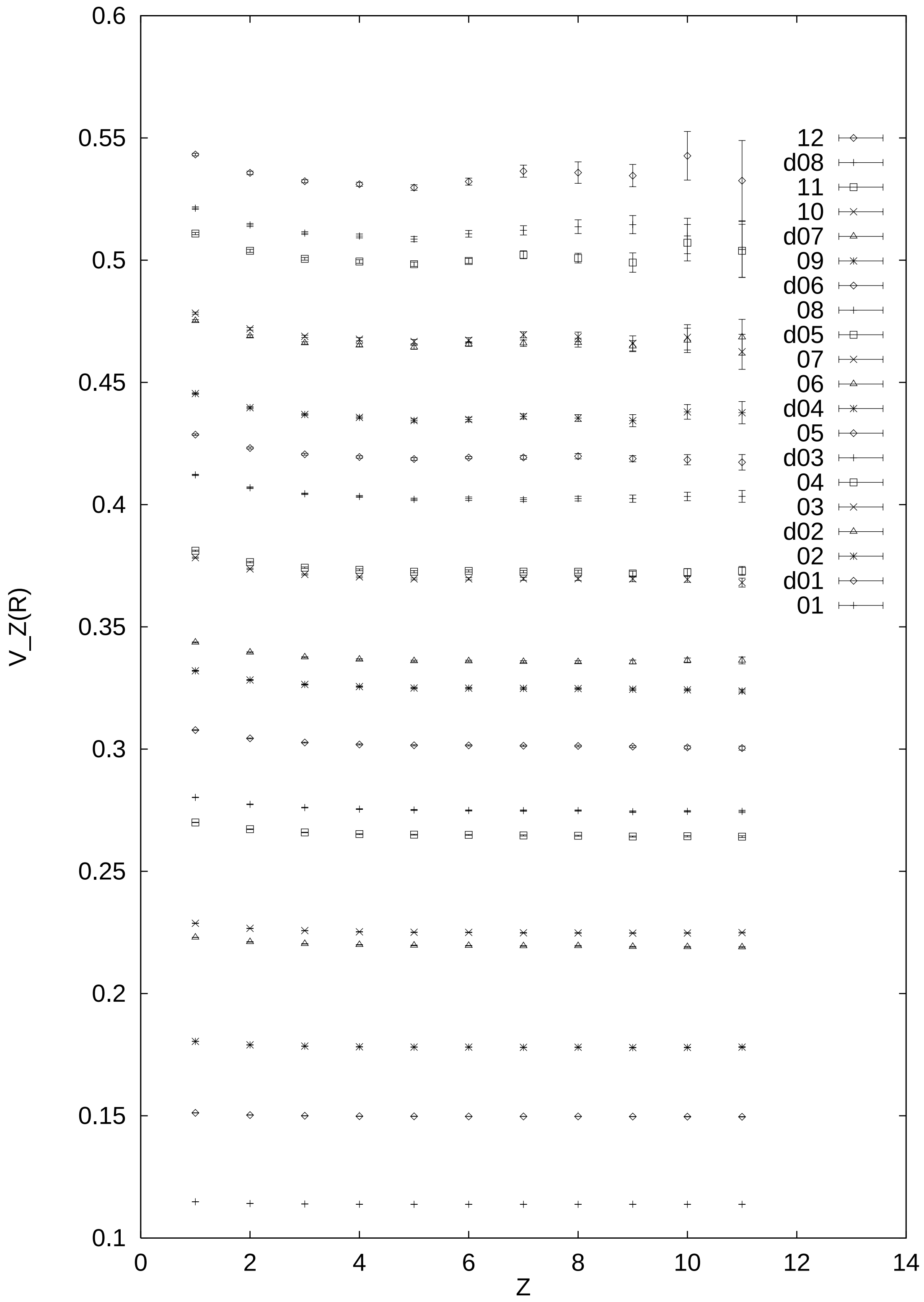


Abbildung A.4: Lokale Potentiale für $\beta_3 = 21$

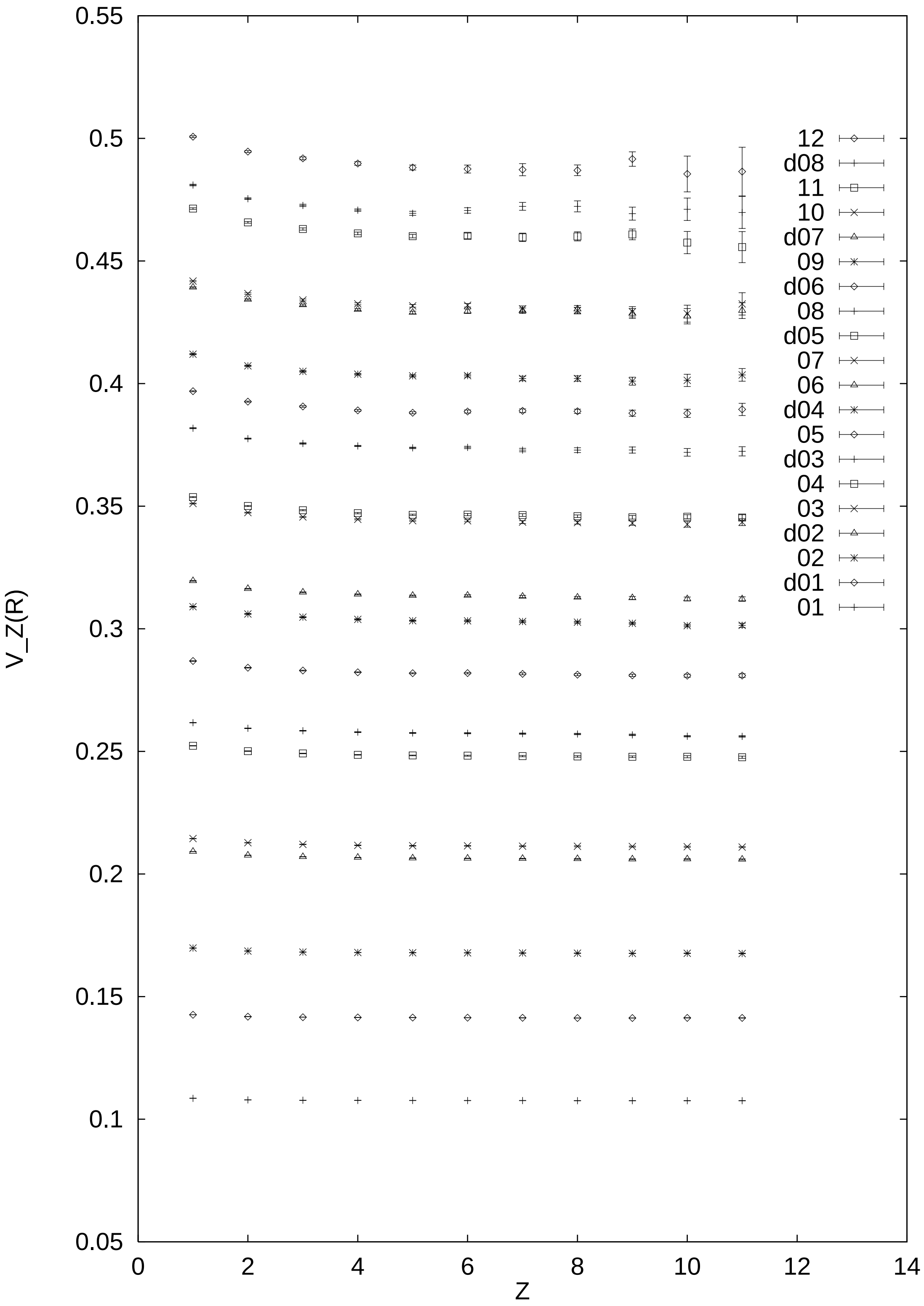


Abbildung A.5: Lokale Potentiale für $\beta_3 = 22$

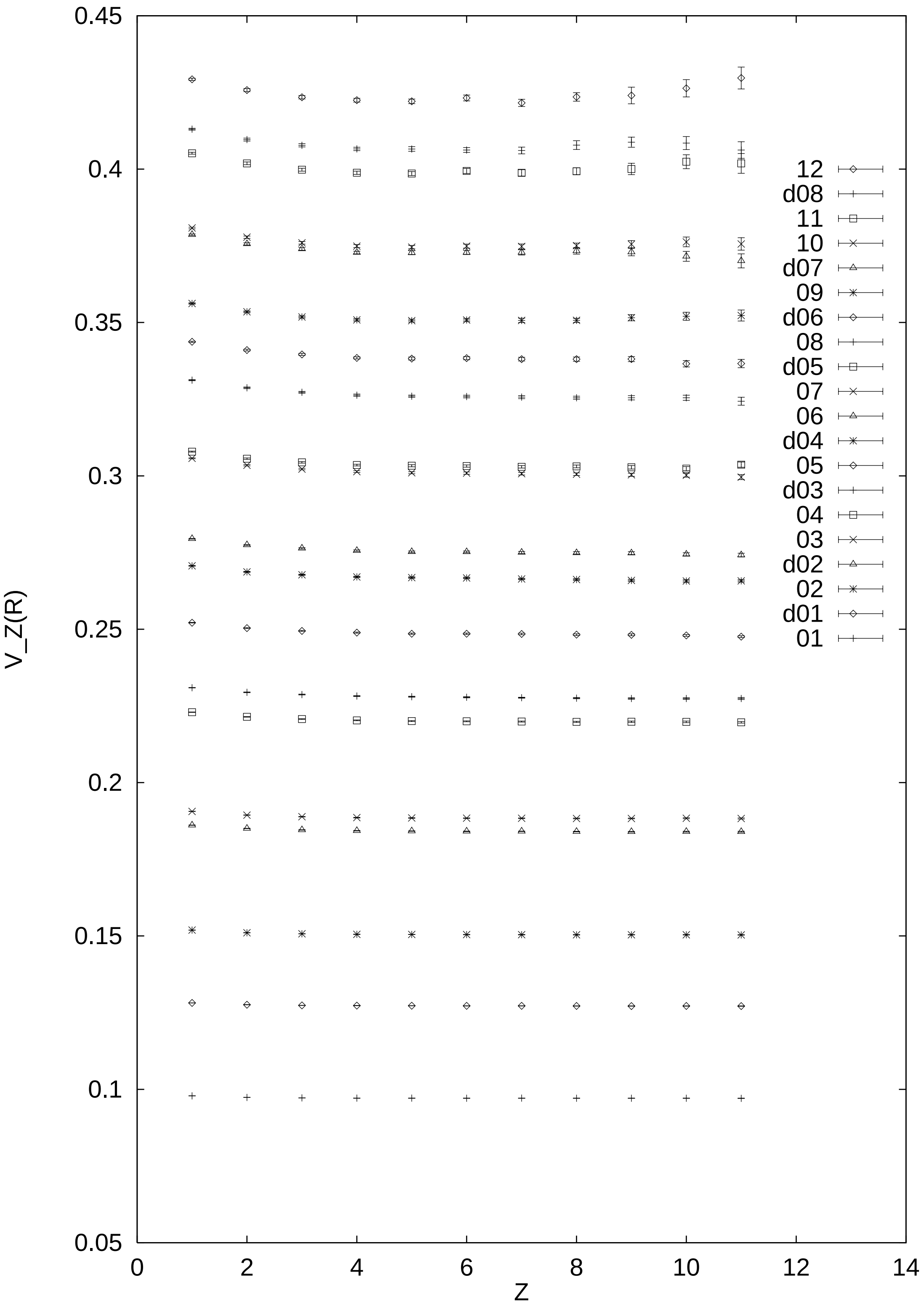


Abbildung A.6: Lokale Potentiale für $\beta_3 = 24$

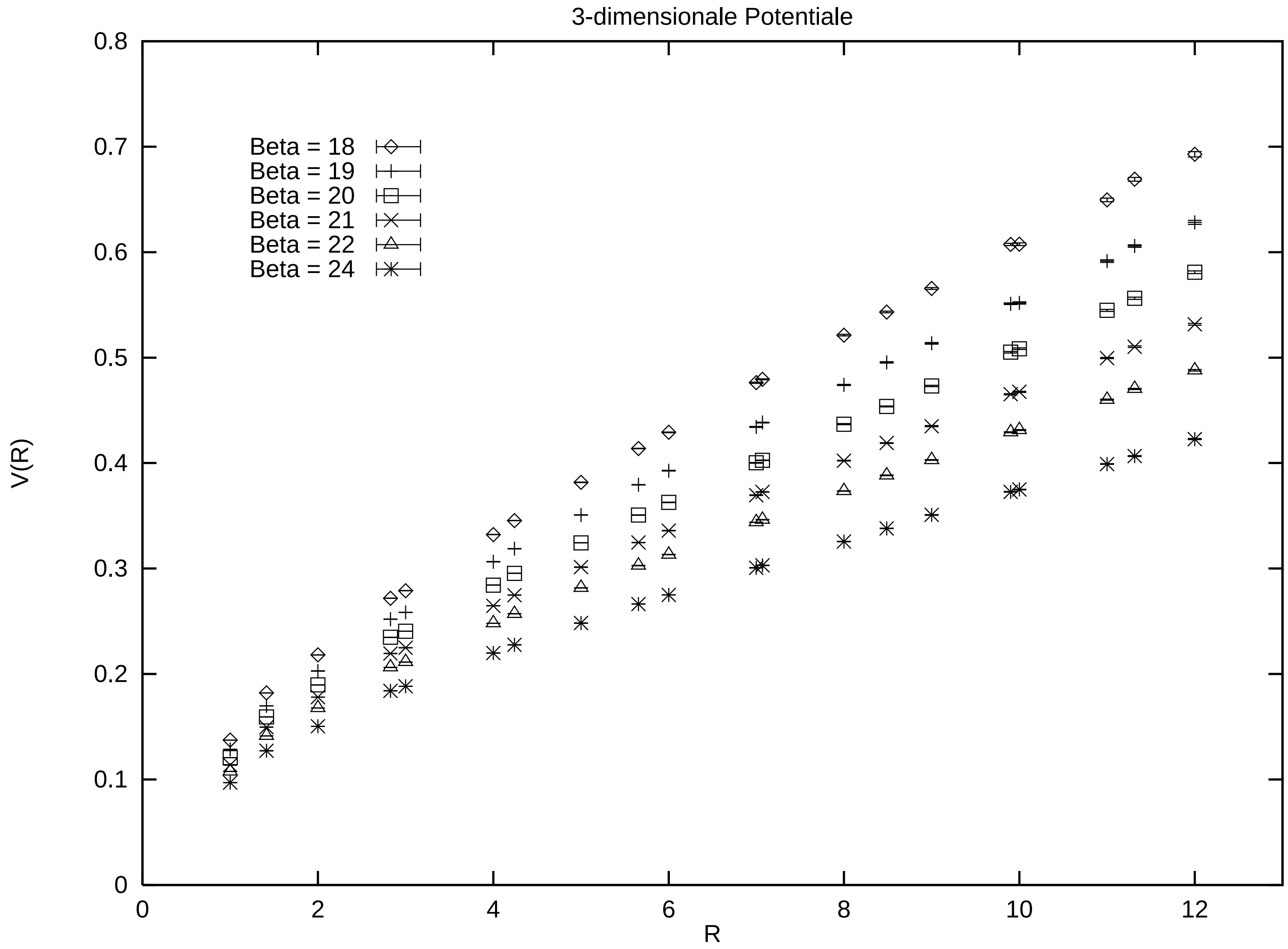


Abbildung A.7: 3-dimensionale Potentiale

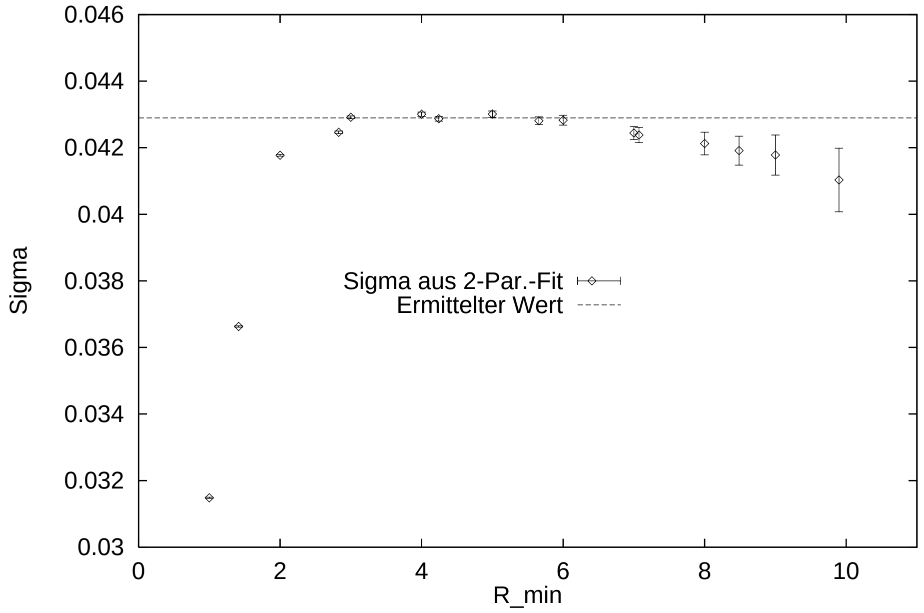


Abbildung A.8: σ abhängig vom Fitbereich für $\beta_3 = 18$

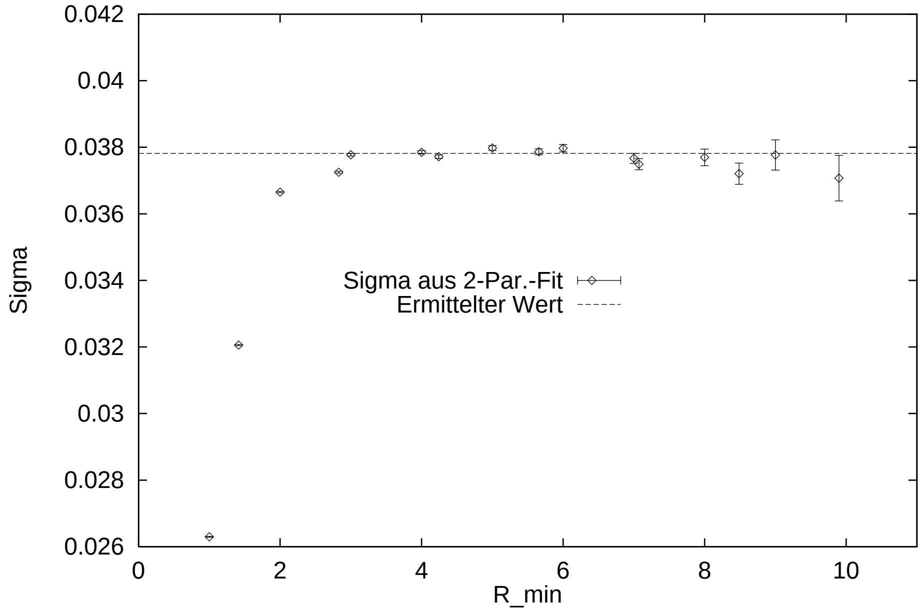


Abbildung A.9: σ abhängig vom Fitbereich für $\beta_3 = 19$

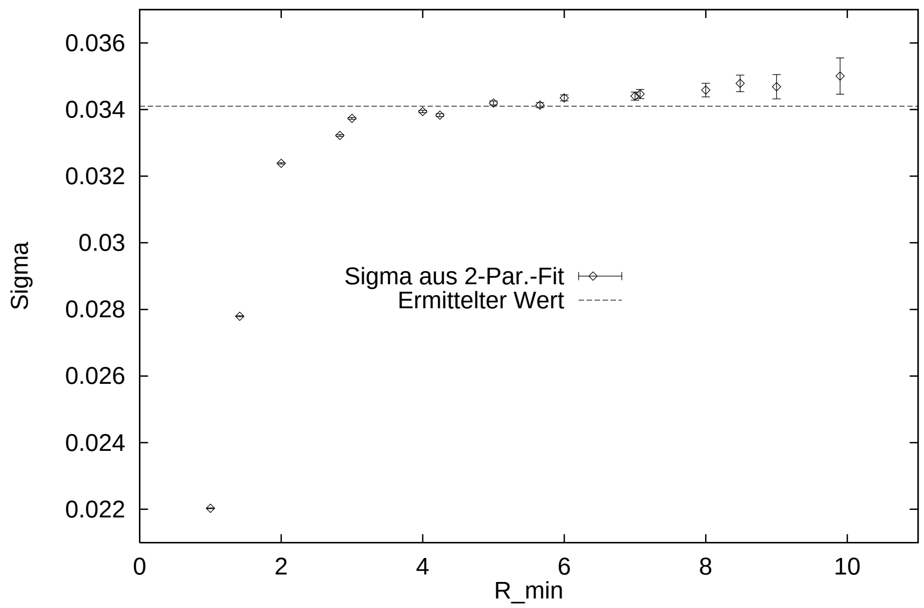


Abbildung A.10: σ abhängig vom Fitbereich für $\beta_3 = 20$

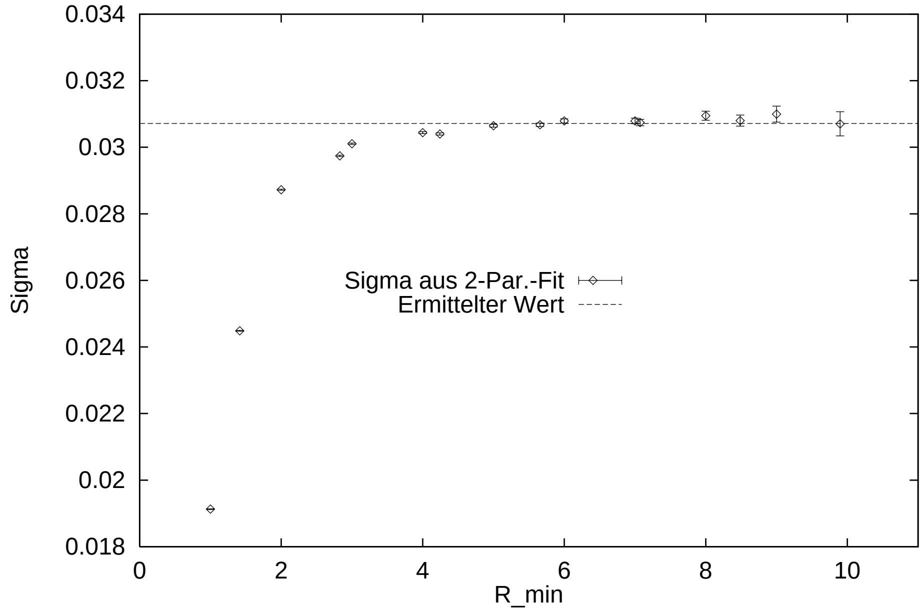


Abbildung A.11: σ abhängig vom Fitbereich für $\beta_3 = 21$

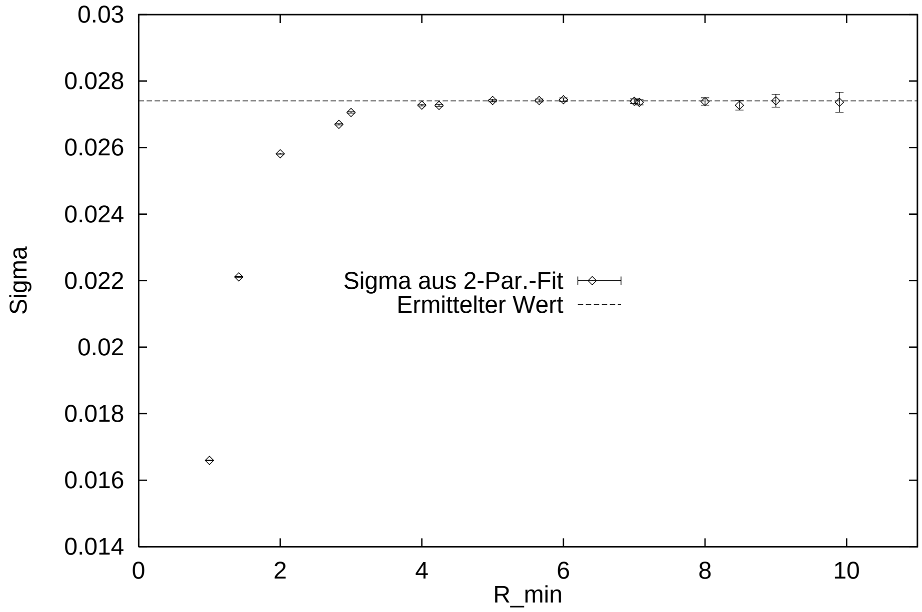


Abbildung A.12: σ abhängig vom Fitbereich für $\beta_3 = 22$

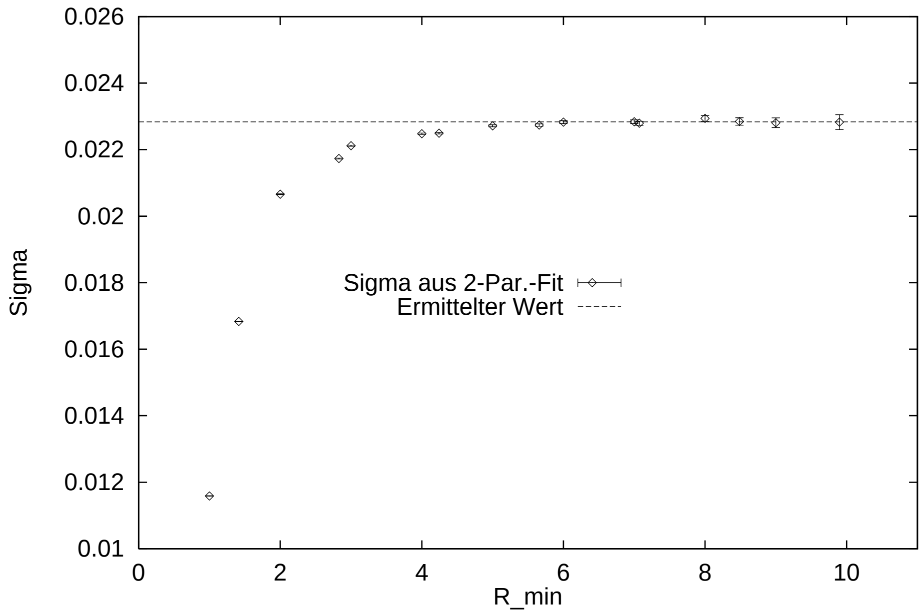


Abbildung A.13: σ abhängig vom Fitbereich für $\beta_3 = 24$

Anhang B

Tabellen und Graphiken in 4 Dimensionen

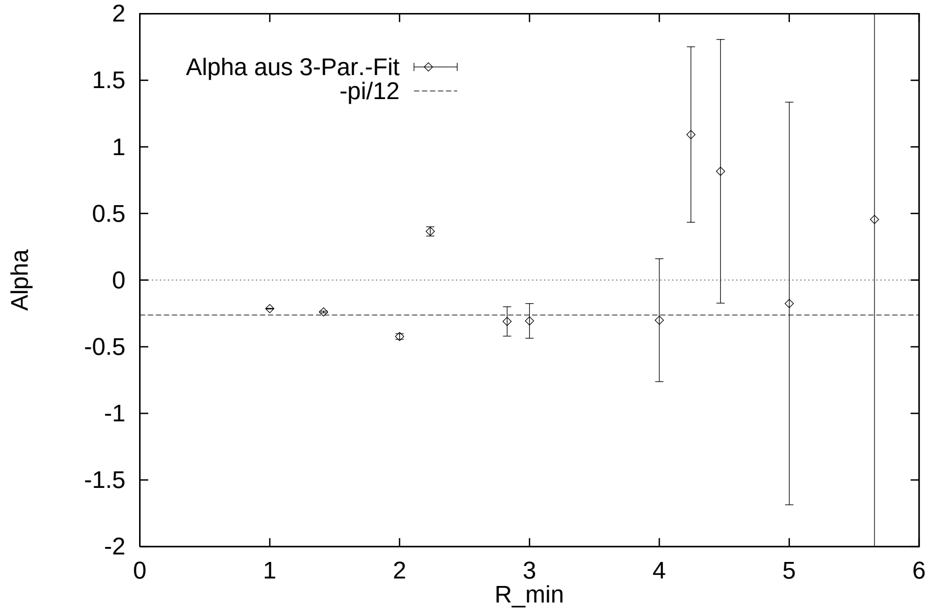


Abbildung B.1: Fitparameter α in Abhängigkeit von R_{min} bei $N_\tau = 3$

	$N_\tau = 4$		$N_\tau = 3$		$N_\tau = 2$	
R	$V(R)$	$\Delta V(R)$	$V(R)$	$\Delta V(R)$	$V(R)$	$\Delta V(R)$
1.00	0.411594	0.000158	0.419625	0.000159	0.461675	0.000210
1.41	0.531715	0.000386	0.549777	0.000449	0.631657	0.000460
2.00	0.607162	0.000454	0.636766	0.000693	0.763265	0.001341
2.24	0.679672	0.003070	0.725761	0.001379	0.879458	0.003557
2.83	0.715434	0.001240	0.778838	0.002046	0.996441	0.004629
3.00	0.724865	0.001035	0.791726	0.001825	1.020652	0.002822
4.00	0.823826	0.001446	0.925606	0.006060	1.258543	0.010240
4.24	0.847877	0.002722	0.979031	0.008188	1.324238	0.009205
4.47	0.867033	0.007667	1.007592	0.011110	1.349998	0.015019
5.00	0.914386	0.002071	1.052460	0.005806	1.505538	0.006258
5.66	0.972816	0.002941	1.137992	0.008428	1.662518	0.011863
6.00	0.999970	0.002333	1.175832	0.013111	1.720678	0.018485
6.71	1.070528	0.007329	1.284137	0.016834	1.934694	0.055869
7.00	1.083988	0.002416	1.286477	0.015403	1.966330	0.043355
7.07	1.096779	0.005141	1.317645	0.020589	1.983039	0.049040
8.00	1.174311	0.005496	1.434539	0.039411	2.231071	0.073078
8.49	1.207872	0.008553	1.535176	0.071325		
8.94	1.267605	0.024528				
9.00	1.262739	0.009413				
9.90	1.325690	0.023272				
10.00	1.368861	0.009238				
11.00	1.450792	0.019206				
11.18	1.397923	0.059272				
11.31	1.454958	0.035757				
12.00	1.543359	0.030405				
12.73	1.591793	0.046770				
13.00	1.567606	0.040708				
13.42	1.544131	0.131291				
14.00	1.675690	0.064642				
15.00	1.813827	0.097253				

Tabelle B.1: 4-dimensionale Potentiale für $N_\tau = 4, 3$ und 2.

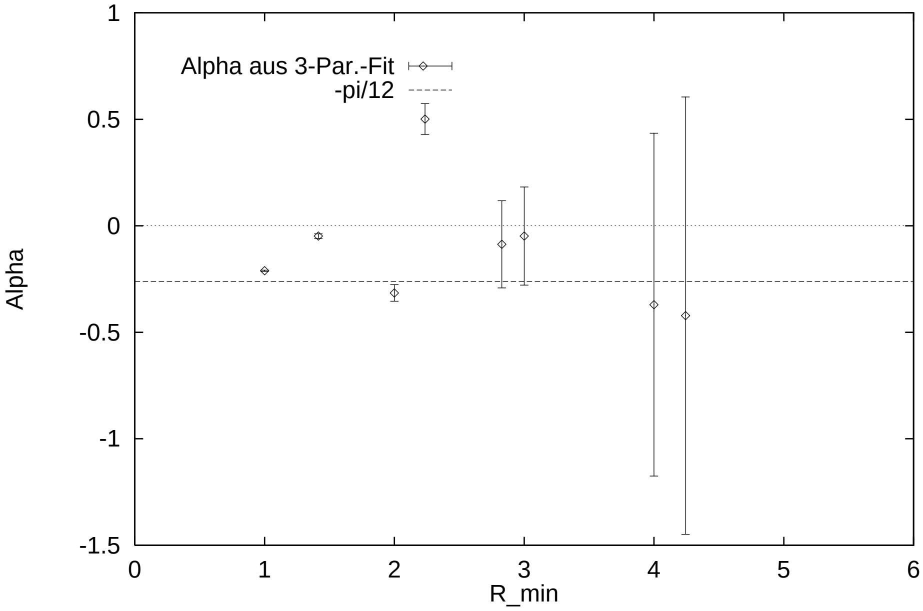


Abbildung B.2: Fitparameter α in Abhängigkeit von R_{min} bei $N_\tau = 2$

Literaturverzeichnis

[1] S.L. Adler, *Over-relaxation Method for the Monte Carlo Evaluation of the Partition Function for multiquadratic Actions*, Phys. Rev. **D23** (1981) 2901.

[2] O. Alvarez, *Static potential in string models*, Phys. Rev. **D24** (1981) 440.

[3] P. Arnold, C. Zhai, *The three-loop free energy for pure gauge QCD*, Preprint, UW/PT-94-03 (1994).

[4] G. Bali, K. Schilling, *Static quark-antiquark potential: Scaling behavior and finite-size effects in SU(3) lattice gauge theory*, Phys. Rev. **D46** (1992) 2636.

[5] G. Bali, J. Fingberg, U.M. Heller, F. Karsch, K. Schilling, *The Spatial String Tension in the Deconfined Phase of the (3+1)-Dimensional SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3059.

[6] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lütgemeier, B. Petersson, *in Arbeit*.

[7] C. Borgs, *Area law for spatial Wilson loops in high-temperature lattice gauge theories*, Nucl. Phys. **B261** (1985) 455.

[8] E. Braaten, *Solution to the Pertubative Infrared Catastrophe of Hot Gauge Theories*, Preprint, NUHEP-TH-94-24 (Sept. 1994).

[9] N. Cabibbo, E. Marinari, *A New Method for Updating SU(N) Matrices in Computer Simulations of Gauge Theories*, Phys. Lett. **B119** (1982) 387.

[10] M. Caselle, A. D'Adda, *The spatial string tension in high-temperature lattice gauge theories*, Nucl. Phys. **B427** (1994) 273.

[11] M. Creutz, *Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. **D21** (1980) 2308.

[12] M. Creutz, *Overrelaxation and Monte Carlo Simulation*, Phys. Rev. **D36** (1987) 515.

[13] K. Fabricius, O. Haan, *Heat bath method for the twisted Eguchi-Kawai model*, Phys. Lett. **B143** (1984) 459.

[14] J. Fingberg, U. Heller, F. Karsch, *Scaling and asymptotic scaling in the SU(2) gauge theory*, Nucl. Phys. **B392** (1993) 493.

[15] J.M. Hammersley, D.C. Handscomb, *Monte Carlo Methods*, Methuen's Monographs, London (1975).

[16] A.D. Kennedy, B.J. Pendleton, *Improved Heatbath Method for Monte Carlo Calculations in Lattice Gauge Theories*, Phys. Lett. **B156** (1985) 393.

[17] C. Legeland, (Diplomarbeit) *in Arbeit*.

[18] A.D. Linde, *Infrared problem in the thermodynamics of the Yang-Mills gas*, Phys. Lett. **B96** (1980) 289.

[19] M. Lüscher, K. Symanzik and P. Weisz, *Anomalies of the free loop wave equation in the WKB approximation*, Nucl. Phys. **B173** (1980) 365.

[20] E. Manousakis, J. Polonyi, *Nonperturbative Length Scale in High-Temperature QCD*, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 847.

[21] L.D. McLerran, B. Svetitski, *Quark liberation at high temperature: A Monte Carlo study of SU(2) gauge theory*, Phys. Rev. **D24** (1981) 450.

[22] P. Olesen, *Strings, tachyons and deconfinement*, Phys. Lett. **B160** (1985) 408.

[23] T. Reisz, *Realization of dimensional reduction at high temperature*, Z. Phys. **C53** (1992) 169.

[24] H.J. Rothe, *Lattice gauge theories – an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1992).

[25] M. Teper, *The confining string and its tension for SU(2) gauge fields in 2+1 dimensions*, Phys. Lett. **B311** (1993) 223.

[26] K. G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445.

Danksagung

Diese Arbeit wurde unter Anleitung von Prof. Dr. Frithjof Karsch durchgeführt. Ich danke Herrn Karsch für die hervorragende Betreuung meiner Diplomarbeit und inbesondere für seine Bereitschaft, sich jederzeit mit meinen Fragen und Problemen zu beschäftigen. Desweiteren gilt mein Dank Dr. Edwin Laermann für sehr hilfreiche Diskussionen und Anregungen und die Unterstützung bei der Programmierung des QUADRICS.

Besonders möchte ich mich bei Christian Legeland bedanken, ohne dessen Mitarbeit die TAO-Programme nie so schnell fertig geworden wären, und bei meinen Eltern, Hans und Maria Lütgemeier, für ihre Unterstützung während meines gesamten Studiums.