Untersuchung der Eichunabhängigkeit von Abschirmmassen in der Hochtemperaturphase der reinen $SU(3)$-Gittereichtheorie

Diplomarbeit

an der

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von

Matthias Buse

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Hochtemperaturphase der Quantenchromodynamik (QCD). Diese ist charakterisiert durch das Auftreten eines Plasmas aus ungebundenen Quarks und Gluonen. Von Interesse ist dabei das *Abschirmverhalten*, daß Quarks durch die sie umgebenen Gluonen erfahren. Das Potential zwischen zwei (statischen) Quarks fällt aufgrund dieser *Debye-Abschirmung* exponentiell mit dem Abstand ab.

Das Abschirmverhalten läßt sich durch die sogenannten *elektrischen* und *magnetischen Screeningmassen* beschreiben, die man aus Infrarot-Verhalten der zeitlichen, bzw. räumlichen Komponenten des Gluonpropagators gewinnen kann. Simulationen zur Bestimmung dieser Screeningmassen wurden schon viele durchgeführt, so zB. von J. Rank [4] für die reine $SU(2)$-Eichtheorie und zuletzt von M. Heß [5] für die reine $SU(3)$-Eichtheorie. Da der Gluonpropagator eine eichabhängige Größe ist, wurden diese Untersuchungen meist in der *Landau*-Eichung durchgeführt.

Die Screeningmassen sind aber prinzipiell beobachtbare Größen und müssen somit unabhängig von der betrachteten Eichung sein. Diese Eichinvarianz der Screeningmassen zu zeigen, ist Ziel dieser Arbeit. Dabei werden die λ-Eichungen benutzt, eine Schar von Eichungen, die von einem reellen Parameter λ abhängen.

Diese Diplomarbeit hat folgenden Aufbau:
Zunächst werden in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen zum Verständnis der Gittereichtheorie zusammengefaßt. Dazu zählen die Kontinuumstheorie der QCD, ihre Diskretisierung auf einem vierdimensionalen Gitter, sowie die

Beschreibung des Potentials zwischen statischen Quarks und des Gluonpropagators. In Kapitel 3 werden die Grundlagen und die numerischen Algorithmen der λ-Eichfixierung erläutert.

Das vierte Kapitel beschreibt die Durchführung der Monte-Carlo-Simulation. Ihre Resultate werden schließlich in Kapitel 5 zusammengefaßt und mit den Ergebnissen anderer Simulationen verglichen. Sämtliche numerischen Ergebnisse sind im Anhang in tabellarischer Form aufgeführt.

Kapitel 2

QCD

2.1 Kontinuumstheorie

Die Quantenchromodynamik beschäftigt sich mit den Wechselwirkungen der elementaren Bausteine der Materie, den *Quarks.* Heutzutage geht man von der Existenz sechs verschiedener Quarks aus (*up, down, strange, charme, top* und *bottom*). Neben diesen sechs *Flavour*-Quantenzahlen tragen die Quarks eine *Farbladung*, die der Auslöser für ihre Wechselwirkung untereinander ist. Es existieren drei verschiedene Farbladungen, die i. A. mit rot, grün und blau bezeichnet werden.

Die Wechselwirkung zwischen den Quarks wird durch die *Gluonen* vermittelt. Im Gegensatz zu den Wechselwirkungsteilchen der Quantenelektrodynamik, den Photonen, tragen diese ebenfalls Farbladung. Das hat zur Folge, daß die Gluonen auch untereinander wechselwirken. Diese Wechselwirkung läßt sich mathematisch durch eine $SU(3)$-Eichsymmetrie beschreiben. Da die Selbstwechselwirkung der Gluonen hauptverantwortlich für das *Confinement*-Verhalten und die *asymptotische Freiheit* der Quarks ist, ist es legitim in der *reinen Eichtheorie* die Gluonen einzeln zu untersuchen.

Confinement: In der uns umgebenden Welt treten Quarks nur in farbneutralen (weißen) Verbindungen auf. So bestehen die Hadronen aus drei Quarks mit den Farbladungen *rot, grün* und *blau.* Die Mesonen bestehen jeweils aus einem Quark und einem Antiquark mit den Farbladungen *rot-antirot, grün-antigrün* bzw. *blau-antiblau* (siehe Abb. 2.1). Dieses Verhalten

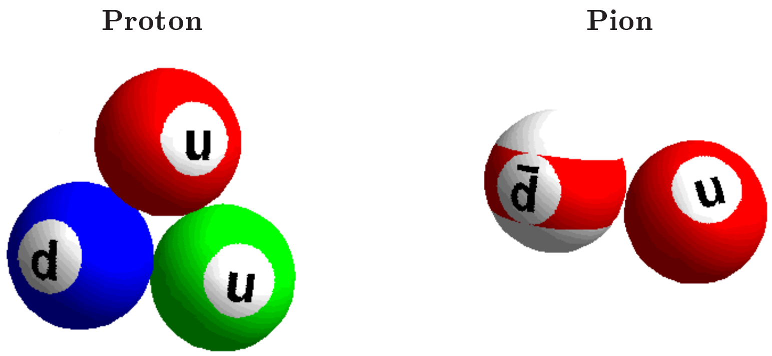


Abbildung 2.1: Hadronen (hier ein Proton) sind aus jeweils drei Quarks unterschiedlicher Farbe aufgebaut. Mesonen bestehen aus einem Quark und einem Antiquark. Die Summe der Farbladungen ergibt bei Hadron und Meson weiß.

der Quarks wird *Confinement* genannt. Oberhalb einer kritischen Temperatur T_c verschwindet das Confinementverhalten. Die Quarks und die Gluonen liegen dann in einem Plasma vor.

Asymptotische Freiheit: Ein weiteres Phänomen der Gluon-Selbstwechselwirkung ist die *Asymptotische Freiheit*. Ganz im Gegensatz zur QED spüren zwei Quarks (bzw. ein Quark-Antiquark-Paar) in genügend kleinem Abstand nichts voneinander und können als *quasi-freie* Teilchen betrachtet werden. Wenn sie aber räumlich getrennt werden, bildet sich ein Gluon-Schlauch (*String*) zwischen ihnen. Die Wechselwirkungsenergie nimmt mit wachsendem Abstand zu. Bei genügend großem Abstand reicht die Energie zur Bildung eines Quark-Antiquark-Paares aus und der *String* bricht.

2.1.1 Die Lagrangedichte

Mathematisch lassen sich die Quarks durch Felder vierkomponentiger Spinoren $\psi_\beta^f(x)$ im *Minkowski*-Raum beschreiben. Der Laufindex $f = 1, ..., N_f$ bezeichnet dabei die Flavour-Quantenzahl, $\beta = 1, ..., N_c$ kennzeichnet die Farbladung. Die Antiquarks werden durch $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ beschrieben, wobei γ_μ die sogenannten *Dirac-Matrizen* sind. Diese erfüllen die Antivertauschungsrelationen $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$.

Die Lagrangedichte für ein Feld von N_f freien Quarks mit den Massen m_f lautet

$$\mathcal{L}(\psi,\bar{\psi}) = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f_\alpha(x)\,(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_f)_{\alpha\beta}\,\psi^f_\beta(x)\ . \tag{2.1}$$

Aus der Lagrangedichte erhält man das Wirkungsfunktional wie folgt.

$$\begin{aligned} S[\psi,\bar{\psi}] &= \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(\psi,\bar{\psi}) \\ &= \int \mathrm{d}^4x \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f_\alpha(x)\,(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_f)_{\alpha\beta}\,\psi^f_\beta \end{aligned} \tag{2.2}$$

Durch unabhängige Variation von $S[\psi,\bar{\psi}]$ nach den Feldern ψ^f_β und $\bar{\psi}^f_\alpha$ erhält man die Bewegungsgleichungen, die sogenannten *freien Dirac-Gleichungen*.

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_f)_{\alpha\beta}\,\psi^f_\beta(x) = 0 \quad \forall f = 1,...,N_f \tag{2.3}$$

Im Folgenden wollen wir die Symmetrie der Wirkung Gl. (2.2) genauer untersuchen. Betrachten man die verschiedenen Farbkomponenten unserer Quarkfelder als Komponenten N_c-dimensionaler Vektoren

$$\psi^f(x) = \begin{pmatrix} \psi^f_1(x) \\ \vdots \\ \psi^f_{N_c}(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\psi}^f(x) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^f_1(x)\,, \cdots, \bar{\psi}^f_{N_c}(x) \end{pmatrix}\ ,$$

so ist $S[\psi,\bar{\psi}]$ invariant unter einer *globalen $SU(N_c)$-Eichtransformation*

$$\begin{aligned} \psi^f(x) &\rightarrow G\psi^f(x) \\ \text{und}\quad \bar{\psi}^f(x) &\rightarrow \bar{\psi}^f(x)G^{-1} \quad \text{mit } G \in SU(N_c)\ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Im nächsten Schritt werden wir nun unsere Eichbosonen, die Gluonen einfügen. Auf diese Weise erhalten wir eine Theorie, die invariant unter *lokalen $SU(3)$-Eichtransformationen* ist. Dies geschieht mit Hilfe der *minimalen Substitution*. Dazu ist es nötig, die Gruppe $SU(N_c)$ genauer zu untersuchen.

In der *Fundamentaldarstellung* läßt sich ein Element $G \in SU(N_c)$ wie folgt parameterisieren:

$$G = \exp\left(-i \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \theta^a T^a\right) \tag{2.5}$$

Die T^a sind die $(N_c^2 - 1)$ Generatoren der Gruppe $SU(N_c)$. Für $N_c = 3$ entsprechen sie den acht *Gell-Mann-Matrizen* $T^a = \lambda^a/2$.

Die *Strukturkonstanten* f^{abc} der Gruppe $SU(N_c)$ sind über die Vertauschungsrelationen der Generatoren T^a definiert:

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c \tag{2.6}$$

Betrachten wir nun wieder die Lagrangedichte Gl. (2.1), so bedeutet *minimale Substitution*, daß wir die gewöhnliche Viererableitung $\partial^\mu \delta_{\alpha\beta}$ durch die *kovariante Ableitung*

$$D^\mu_{\alpha\beta} = \partial^\mu \delta_{\alpha\beta} + i g_0 \left(T^a A^\mu_a(x)\right)_{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

ersetzen. Die $A^\mu_a(x)$ entsprechen dabei unseren bosonischen Eichfeldern, den Gluonen - g_0 ist dimensionslos und wird als *nackte Kopplungskonstante* bezeichnet. Wir erhalten somit den fermionischen Anteil der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_F(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f_\alpha(x) \left(i\gamma_\mu D^\mu - m_f\right)_{\alpha\beta} \psi^f_\beta(x)\ . \tag{2.8}$$

Neben dem fermionischen existiert noch ein gluonischer Anteil der Lagrangedichte. Dieser ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_G(A^a_\mu) = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}_a(x)\ , \tag{2.9}$$

wobei der *gluonische Feldstärketensor* $F^{\mu\nu}_a$ gegeben ist durch

$$F^{\mu\nu}_a = \partial^\mu A^\nu_a(x) - \partial^\nu A^\mu_a(x) - g_0 f_{abc} A^\mu_b(x) A^\mu_c(x)\ . \tag{2.10}$$

Unsere neue Lagrangedichte $\mathcal{L}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) = \mathcal{L}_F(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) + \mathcal{L}_G(A^a_\mu)$ und die daraus resultierende Wirkung

$$S[A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}\,] = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) \tag{2.11}$$

sind jetzt invariant unter *lokalen* $SU(N_c)$*-Eichtransformationen* der fermionischen Felder $\psi, \bar{\psi}$ und der bosonischen Felder $A_\mu = T^a A^a_\mu$:

$$\begin{aligned} \psi^f(x) &\rightarrow G(x)\psi^f(x)\ , \\ \bar{\psi}^f(x) &\rightarrow \bar{\psi}^f(x)G^{-1}(x)\ , \\ A_\mu(x) &\rightarrow G(x)A_\mu(x)G^{-1}(x) - \frac{i}{g_0}G(x)\partial_\mu G^{-1}(x)\ , \end{aligned} \tag{2.12}$$

mit $G(x) = \exp\{-i\sum_a \theta^a(x)T^a\} \ \in SU(N_c)$.

2.1.2 Die Pfadintegralformulierung der QCD

Der nächste Schritt zur QCD besteht nun darin, die Felder $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ und $A^a_\mu(x)$ zu quantisieren. Dazu werden wir die aus der Quantenmechanik bekannte *Feynman'sche Pfadintegralmethode* verwenden.

Die *Vakuum-Vakuum-Übergangsamplituden* sind definiert als

$$Z \equiv \langle\, \Omega \,|\, \Omega\rangle = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{iS[A^a_\mu,\psi,\bar{\psi}]}\ . \tag{2.13}$$

Die Integration wird dabei über alle Felder $A^a_\mu(x)$, $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ ausgeführt. Die Vakuum-Vakuum-Übergangsamplitude übernimmt in der Quantenfeldtheorie die Funktion der *großkanonischen Zustandssumme* in der *statistischen Mechanik*. Der Erwartungswert eines Operators, bestehend aus zeitgeordneten Produkten der Felder, ist demnach gegeben durch

$$\langle\Omega|\, \mathcal{O}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi})\,|\Omega\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{O}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi})\; e^{iS[A^a_\mu,\psi,\bar{\psi}]}\ . \tag{2.14}$$

Beim Auswerten dieser Ausdrücke stößt man auf zwei Probleme. Die Integration über die Felder $A^a_\mu(x)$, $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ ist aufgrund der überabzählbar vielen Feldfreiheitsgrade mathematisch nicht wohl definiert. Erst durch die Gitterregularisierung kann man die Gln. (2.13) und (2.14) auf den Fall mehrdimensionaler Riemann-Integrale zurückführen.

Für weitere Probleme sorgt der imaginäre Exponent im Integranden, der zu starken Oszillationen führt. Dieses Problem läßt sich durch eine sogenannte *Wick-Rotation* beheben. Dabei wird die Zeitrichtung $t = x^0$ analytisch in der komplexen Ebene fortgesetzt:

$$t \rightarrow |t| e^{-i\theta} \,. \tag{2.15}$$

Für $\theta = \pi/2$ geht die *Minkowski-Metrik* (x^0, x^1, x^2, x^3) in eine *euklidische Metrik* $(x_1^E, x_2^E, x_3^E, x_4^E)$ über:

$$x_\mu^E = \begin{cases} x^\mu & \text{für } \mu = 1,2,3 \\ ix^0 & \text{für } \mu = 4 \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\partial_\mu^E = \begin{cases} \partial^\mu & \text{für } \mu = 1,2,3 \\ -i\partial^0 & \text{für } \mu = 4 \end{cases} \tag{2.17}$$

Gleichzeitig ersetzt man

$$A^0 \rightarrow iA_4 \,. \tag{2.18}$$

Die *euklidische Lagrangedichte* $\mathcal{L}^E$ erhält man, wenn man die *Dirac-Matrizen* γ^μ durch ihre euklidischen Ensprechungen

$$\gamma_\mu^E = \begin{cases} -i\gamma^\mu & \text{für } \mu = 1,2,3 \\ \gamma^0 & \text{für } \mu = 4 \end{cases} \tag{2.19}$$

ersetzt, sodaß die Antivertauschungsrelationen $\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$ erfüllt sind.

Wir erhalten somit eine euklidische *Lagrange*-Dichte

$$\mathcal{L}^E(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_\alpha^f(x) (\gamma_\mu^E D^\mu + m_f)_{\alpha\beta} \psi_\beta^f(x) \tag{2.20}$$

und daraus resultierend eine reelle, euklidische Wirkung

$$S^E[A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}\,] = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\vec{x}\, \mathcal{L}^E(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}) \quad \text{mit } \tau = x_0^E \,. \tag{2.21}$$

Die euklidische Version unserer Zustandssumme in Gl. (2.13) lautet dann

$$Z^E = \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \, \exp\left\{ -S^E[A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}] \right\} \,. \tag{2.22}$$

Durch die *Wick-Rotation* wurde gleichzeitig die Temperatur in die Theorie eingeführt. Gl (2.22) ist nämlich formal mit der *großkanonischen Zustandssumme* der *statistische Mechanik* bei Temperatur $T = 0$ identisch. Will man die Zustandssumme Z^E bei einer endlichen Temperatur bestimmen, so muß man die Integration in Gl. (2.21) über ein endliches Zeitintervall $\tau \in [0, \beta]$ mit $\beta = 1/T$ durchführen.

$$S^E[A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}\,] = \int_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\vec{x}\, \mathcal{L}^E(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}) \tag{2.23}$$

Dabei sind die Randbedingungen der bosonischen Felder $A_\mu^a(\vec{x}, \tau)$ und der fermionischen Felder $\psi^f(\vec{x}, \tau)$, $\bar{\psi}^f(\vec{x}, \tau)$ zu beachten. Letztere sind aufgrund des *Pauli-Prinzips* antiperiodisch. Für jeden Raumpunkt $\vec{x}$ gilt

$$\begin{aligned} A_\mu^a(\vec{x}, 0) &= A_\mu^a(\vec{x}, \beta)\ , \\ \psi^f(\vec{x}, 0) &= -\psi^f(\vec{x}, \beta)\ , \\ \bar{\psi}^f(\vec{x}, 0) &= -\bar{\psi}^f(\vec{x}, \beta)\ . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Analog zu Gl. (2.14) erhält man somit für den Erwartungswert der Observablen $\mathcal{O}(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi})$ bei Temperatur T den Ausdruck

$$\left\langle \mathcal{O}(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}) \right\rangle_T = \frac{1}{Z^E} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{O}(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi})\, e^{-S^E[A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}]}\ . \tag{2.25}$$

Für die folgenden Betrachtungen wird nur noch die euklidische Formulierung der Quantenchromodynamik benutzt. Aus diesem Grund entfällt von nun an der Index E.

2.1.3 Eichfixierung und Geistfelder

Bei der Berechnung des Erwartungswertes eines Operators $\mathcal{O}(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi})$

$$\left\langle \mathcal{O}(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}) \right\rangle_T = \frac{\int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\, \mathcal{O}(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi})\, e^{-S[A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}]}}{\int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\, e^{-S[A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}]}} \tag{2.26}$$

treten Divergenzen auf, die durch die Invarianz der Wirkung unter lokalen Eichtransformationen verursacht werden. Von Faddeev und Popov wurde 1967 ein Verfahren entwickelt, mit dem in Zähler und Nenner von Gl. (2.26) ein unendlicher, eichinvarianter Faktor abgespalten werden kann, der dann bei der Quotientenbildung herausfällt [6].

Dazu betrachtet man $C^a[A_\mu^\theta(x)]$, ein Funktional der Eichfelder, das folgende Bedingung erfüllt.

$$C^a[A_\mu^\theta(x)] = C^a[A_\mu^{\theta'}(x)] \quad \Rightarrow \quad \theta(x) = \theta'(x)\,, \tag{2.27}$$

wobei $\theta(x)$ die lokalen Eichfreiheitsgrade, und A_μ^θ das, gemäß Gl. (2.12) mit $G(x) = \exp\{-i\sum_a \theta^a(x)T^a\}$ transformierte Eichfeld bezeichnet. Das Funktional C^a hat also die Eigenschaft, die Eichung vollständig festzulegen. Sehr häufig verwendet man folgenden eichfixierenden Term:

$$C^a[A_\mu(x)] = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial^\mu A_\mu^a(x)\,. \tag{2.28}$$

Eine, auf diese Weise eingührte Eichung heißt *kovariant*. Beispiele für kovariante Eichungen sind die *Landau-Eichung* ($\xi = 0$) und die *Feynman-Eichung* mit dem Eichparameter $\xi = 1$.

Definiert man nun den Faktor K als *Gaußsches Integral* über das Funktional C^a, wobei man C^a durch die Eichfreiheitsgrade θ^a parametrisiert, so erhält man

$$K = \int\limits_{SU(N_c)} \mathcal{D}\theta^a \,\det\left(\frac{\delta C^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^b(y)}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \left(C^a[A_\mu^\theta(x)]\right)^2\right\}\,. \tag{2.29}$$

Zähler und Nenner aus Gl. (2.26) werden nun mit dem Faktor K multipliziert. Da die Wirkung eichinvariant ist, erhält man schließlich für den Zähler aus Gl. (2.26)

$$\begin{aligned}\int\limits_{SU(N_c)} \mathcal{D}\theta^a \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi \,\det\left(\frac{\delta C^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^b(y)}\right) \mathcal{O}(A_\mu^a,\psi,\bar\psi)\,\cdot \\ \cdot\exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}-\frac{1}{2}\left(C^a[A_\mu^\theta(x)]\right)^2\right)\right\}\,.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Da $\mathcal{O}(A_\mu^a,\psi,\bar\psi)$ als prinzipiell beobachtbare Größe unabhängig von der jeweiligen Eichung ist, liefert die Integration über die Eichfreiheitsgrade θ^a bei Zähler und Nenner von Gl. (2.26) jeweils den gleichen konstanten Faktor, der sich letztendlich herauskürzt.

Die *Faddeev-Popov-Determinante* in Gl. (2.30) läßt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\delta C^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^b(y)}\right) &\simeq \det K^{ab}(x-y,A) \\ \text{mit}\quad K^{ab}(x-y,A) &\equiv \partial^\mu\left(\delta^{ab}\partial_\mu - g_0 f^{abc}A_\mu^c(x)\right)\delta^{(4)}(x-y)\,.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Durch Integration über die *Grassmann-Felder* $u^a(x)$ und $\bar{u}^a(x)$ erhält man dann

$$\det K^{ab}(x-y,A) \sim \int \mathcal{D}u\mathcal{D}\bar{u} \exp\left\{-\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y \left(\bar{u}^a(x) K^{ab}(x-y,A) u^b(y)\right)\right\} . \tag{2.32}$$

Die sogenannten *Geistfelder* $u^a(x)$ und $\bar{u}^a(x)$ sind antivertauschend und besitzen periodische Randbedingung - sie entsprechen daher nicht fermionischen Feldern. In den Feynman-Diagrammen der Störungstheorie treten sie nur in Propagatoren virtueller Geist-Teilchen auf, und nicht als äußere Geist-Linien. Physikalisch haben sie keine Bedeutung.

Setzt man nun die Gln. (2.30) und (2.32) in Gl. (2.26) ein, so erhält man schliesslich für den Erwartungswert einer Observable

$$\left\langle \mathcal{O}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) \right\rangle_T = \frac{\int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}u \mathcal{D}\bar{u}\, \mathcal{O}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) \exp\left\{-\int_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\vec{x}\, \mathcal{L}_{ges}\right\}}{\int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}u \mathcal{D}\bar{u}\, \exp\left\{-\int_0^\beta \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\vec{x}\, \mathcal{L}_{ges}\right\}} . \tag{2.33}$$

Die volle Lagrangedichte $\mathcal{L}_{ges}$ läßt sich dabei als Summe der euklidischen Lagrangedichte aus Gl. (2.20), einem, die Eichung fixierenden Term $\mathcal{L}_{eich}$ und einem Geist-Term $\mathcal{L}_{Geist}$ schreiben:

$$\mathcal{L}_{ges} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{eich} + \mathcal{L}_{Geist} \tag{2.34}$$

$$\mathcal{L}_{eich} = -\frac{1}{2\xi} \left(\partial^\mu A_\mu(x)\right)^2 \tag{2.35}$$

$$\mathcal{L}_{Geist} = \bar{u}^a(x)\, \partial^\mu \left(\delta^{ab}\partial_\mu - g_0 f^{abc} A^c_\mu(x)\right) u^b(x) \tag{2.36}$$

2.1.4 Die reine Eichtheorie

Wenn in Gl. (2.25) nur Observablen betrachtet werden, die von den fermionischen Feldern unabhängig sind, so läßt sich die Integration über diese Felder ausführen. Der fermionische Beitrag zur Wirkung

$$S_F[A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y \sum_{f,g=1}^{N_f} \bar{\psi}^f_\alpha(x)\, K^{f,g}_{\alpha,\beta}[A^a_\mu](x,y)\, \psi^g_\beta(y) \tag{2.37}$$

$$\text{mit } K^{f,g}_{\alpha,\beta}[A^a_\mu](x,y) = \left(\gamma_\mu(\partial_\mu + ig_0 T^a A^a_\mu(x)) + m_f\right)_{\alpha\beta} \delta_{fg}\, \delta^{(4)}(x-y)$$

ist bilinear in den Felder $\psi, \bar{\psi}$. Daraus folgt aufgrund der *Grassmann-Algebra* der Fermionfelder aus Gl. (2.22) für die Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}A^a_\mu \det\left(K[A^a_\mu]\right) \exp\{-S_G[A^a_\mu]\} . \tag{2.38}$$

Führt man nun eine *effektive Wirkung*

$$S_{eff}[A_\mu^a] \equiv S_G[A_\mu^a] - \ln\det K[A_\mu^a] \tag{2.39}$$

ein, so erhält man für den Erwartungswert der Observablen $\mathcal{O}(A_\mu^a)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Big\langle \mathcal{O}(A_\mu^a) \Big\rangle_T &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A_\mu^a \, \mathcal{O}(A_\mu^a) \, \exp\{-S_{eff}[A_\mu^a]\} && (2.40) \\ \text{mit } Z &= \int \mathcal{D}A_\mu^a \, \exp\{-S_{eff}[A_\mu^a]\} \, . && (2.41) \end{aligned}$$

Der Term $\ln\det K[A_\mu^a]$ beschreibt in der Störungstheorie Feynmandiagramme mit geschlossenen Fermionloops, an denen beliebig viele äußere Gluonfelder hängen. In der *quenched approximation* werden diese Vakuum-Polarisationseffekte vernachlässigt, indem man

$$\det K[A_\mu^a] = 1 \tag{2.42}$$

setzt. Dies ist z.B. für unendlich schwere (statische) Quarks der Fall. Da die Gl (2.40) und (2.41) dann nur von den Gluonfeldern, nicht aber von den Fermionfeldern abhängen spricht man auch von *reiner Eichtheorie*.

2.2 Gittereichtheorie

Bei der Pfadintegralformulierung der QCD in Abschnitt 2.1.2 trat das Problem auf, daß die Integration über die Felder ψ, $\bar{\psi}$ und A_μ^a nur formal zu verstehen ist. Wohl definiert im mathematischen Sinne ist ein solches Pfadintegral nur für abzählbar viele Freiheitsgrade. Dies erreicht man dadurch, daß man ein euklidisches Raum-Zeit-Gitter einführt. Die fermionischen Felder sind dann nur auf den Gitterpunkten, die Eichfelder hingegen auf den Verbindungslinien des Gitters, den sogenannten *Links* definiert.

Eine entscheidene Rolle bei der *Gitterregularisierung* spielt der Gitterabstand a. Im folgenden wollen wir ausschließlich isotrope Gitter betrachten, d.h. der Gitterabstand soll für alle vier Raum- bzw. Zeitrichtungen der gleiche sein. Natürlich erwartet man, daß die Feldtheorie auf dem Gitter für den Grenzübergang $a \to 0$ gegen die Kontinuumsfeldtheorie strebt. Dies wird aber nur dann der Fall sein, wenn die, bei der *minimalen Substitution* in Gl. (2.7) eingeführte *nackte Kopplungskonstante* g_0 selbst eine Funktion vom Gitterabstand a ist. Die auf dem Gitter untersuchten Observablen $\mathcal{O}_{Gitter}$ werden somit außer vom Gitterabstand a auch noch von der Kopplungskonstante abhängig sein. Somit gilt

$$\lim_{a\to 0} \mathcal{O}_{Gitter}(a, g_0(a)) \stackrel{!}{=} \mathcal{O}_{Kontinuum} \,. \tag{2.43}$$

Die Einführung eines endlichen Gitterabstands entspricht dem Regularisieren mittels *Impuls-Cut-Off* in der Störungstheorie. Entsprechend der *Heisenberg'schen Unschärferelation* ist der maximale Impuls auf dem Gitter gegeben durch

$$p_{max} \sim \frac{1}{a} \,. \tag{2.44}$$

Somit werden die im Impulsraum auftretenden *ultravioletten Divergenzen* der Störungstheorie abgeschnitten und die *Feynman-Integrale* werden endlich.

2.2.1 Diskretisierung der Kontinuumstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir unsere Kontinuumstheorie auf ein 4-dimensionales isotropes, euklidisches Raum-Zeit-Gitter übertragen. Das Gitter Γ soll einen Gitterabstand a besitzen. Die Anzahl der Gitterpunkte ist durch N_σ in räumlicher Richtung und N_τ in euklidischer Zeitrichtung gegeben.

Das durch dieses Gitter beschriebene physikalische System hat somit das Volumen

$$V = (aN_\sigma)^3 \; . \tag{2.45}$$

Seine Temperatur ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{aN_\tau} \; . \tag{2.46}$$

Ein Gitterpunkt $n_\mu \in \Gamma$ wird durch das Vierertupel (n_1, n_2, n_3, n_4) repräsentiert mit

$$\begin{aligned} n_i &\in [0, N_\sigma - 1] \quad \forall\, i = 1,2,3 \\ \text{und} \quad n_4 &\in [0, N_\tau - 1] \; . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Um unsere Kontinuumsfeldtheorie auf das Gitter Γ zu übertragen, benötigen wir außerdem folgende Ersetzungen:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Kontinuum} & & \textbf{Gitter} \\ x_\mu & \to & an_\mu \\ \int \mathrm{d}^4x & \to & a^4 \sum_n \\ \psi^f(x) & \to & \psi^f(na) \\ \partial_\mu \psi^f & \to & \frac{1}{2a}\Big(\psi^f(na + e_\mu a) - \psi^f(na - e_\mu a)\Big) \\ \mathcal{D}\psi^f & \to & \prod_{\alpha,n} \mathrm{d}\psi^f_\alpha(na) \end{array} \tag{2.48}$$

Für die Anti-Quark-Felder $\bar\psi^f$ gelten analoge Beziehungen. Die in Gl. (2.48) definierten Größen sind alle dimensionsbehaftet. Für unsere späteren Betrachtungen ist es allerdings sinnvoll, dimensionslose Größen zu haben. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat\psi^f(n) &= a^{3/2}\,\psi^f(na) \quad \text{ebenso } \bar\psi^f \; , \\ \hat A_\mu(n) &= a\, A_\mu(na) \; , \\ \hat m_f &= a\, m_f \; . \end{aligned} \tag{2.49}$$

Etwas komplizierter ist die Diskretisierung der Eichfelder A^a_μ. Diese übermitteln bekanntlich die Wechselwirkung zwischen den Fermionfeldern, die nun nur noch auf den Gitterpunkten definiert sind. Nach *Mandelstam* und

Yang entspricht die Wechselwirkung eines Teilchens mit dem Eichfeld einem Phasenfaktor U. Legt ein Teilchen nun eine Bahn P in der Raumzeit zurück, so gilt für seine Wellenfunktion

$$\begin{aligned} \psi^f &\rightarrow P.O.\exp\left\{ig_0 \int_P \mathrm{d}x^\mu A_\mu\right\}\psi^f \\ &= U(P)\psi^f \end{aligned} \tag{2.50}$$

wobei $A_\mu = T^a A_\mu^a$ ist. $P.O.$ bezeichnet die *Pfadordnung*, d.h. der Weg P wird in infinitesimale Wegstücke unterteilt, die Integration für jedes Wegstück ausgeführt und dann die Exponentialfunktion durch die ersten beiden Terme der *Taylorentwicklung* approximiert.

Diese sogenannten *Schwinger'schen Linienintegrale* wollen wir nun benutzen, um unsere Eichfelder auf den Verbindungen der Gitterpunkte, den Links, darzustellen. Sei e_μ der Einheitsvektor in Richtung μ, so ist die *Linkvariable* $U_\mu(n)$ gegeben durch

$$U_\mu(na) = P.O.\exp\left\{ig_0 \int_{na}^{(n+e_\mu)a} \mathrm{d}x^\mu A_\mu(x^\mu)\right\} . \tag{2.51}$$

Für genügend kleine Gitterabstände wird Gl. (2.51) zu

$$U_\mu(n) = \exp\left\{ig_0 \hat{A}_\mu(n)\right\} . \tag{2.52}$$

Da $A_\mu = T^a A_\mu^a$ ein Element der *Lie-Algebra* ist, sind unsere Linkvariablen Elemente der Eichgruppe $SU(N_c)$. Außerdem ist U_μ eine richtungsabhängige Größe. Aus Gl. (2.51) läßt sich sehr schnell die Beziehung

$$U_{-\mu}(n+e_\mu) = U_\mu^\dagger(n) \tag{2.53}$$

herleiten (siehe dazu auch Abb 2.2). Die Eichtransformationen in Gl. (2.12) transformieren sich für die Linkvariablen auf dem Gitter zu

$$\begin{aligned} U_\mu(n) &\rightarrow G(n)\,U_\mu(n)\,G^{-1}(n+e_\mu) , \\ U_\mu^\dagger(n) &\rightarrow G(n+e_\mu)\,U_\mu^\dagger(n)\,G^{-1}(n) . \end{aligned} \tag{2.54}$$

mit $G(n) \in SU(N_c)\ \forall n \in \Gamma$.

In Gl. (2.24) wurden für die Eichfelder A_μ in euklidischer Zeitrichtung periodische Randbedingungen eingeführt. Diese gelten natürlich auch weiterhin.

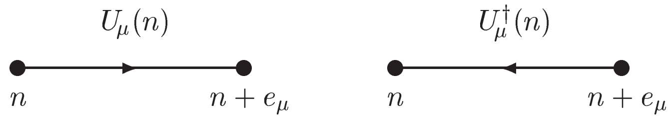


Abbildung 2.2: Die Linkvariablen $U_\mu(n)$.

Da wir nun ein endliches Volumen $V = (a\,N_\sigma)^3$ betrachten, macht es außerdem Sinn, periodische Randbedingungen für die Eichfelder in räumlicher Richtung einzuführen. Dadurch werden Oberflächeneffekte verringert.

$$
\begin{aligned}
U_\mu(n_1,n_2,n_3,0) &= U_\mu(n_1,n_2,n_3,N_\tau) \\
U_\mu(n_1,n_2,0,n_4) &= U_\mu(n_1,n_2,N_\sigma,n_4) \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Nachdem wir nun unsere fermionischen und Eichfelder diskretisiert und dimensionslos formuliert haben, wollen wir nun die kontinuierliche Wirkung auf unser Gitter übertragen. Dabei sollen auf dem Gitter nur noch dimensionslose Größen verwendet werden. Die besondere Kennzeichnung durch den kleinen*Hut* kann deshalb ab jetzt entfallen.

2.2.2 Die gluonische Wirkung auf dem Gitter

Da wir uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur mit der reinen Eichtheorie beschäftigen wollen, kann der fermionische Anteil der Wirkung vernachlässigt werden. Übrig bleibt die gluonische Wirkung $S_G[A_\mu]$. Dieser war im Kontinuum gegeben durch

$$
\begin{aligned}
S_G[A_\mu] &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{T}} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}\vec{x}\; F^a_{\mu\nu}(\vec{x},\tau)\, F^{\mu\nu}_a(\vec{x},\tau) \qquad (2.55)\\
\text{mit} \quad F^{\mu\nu}_a(x) &= \partial^\mu A^\nu_a(x) - \partial^\nu A^\mu_a(x) - g_0 f_{abc} A^\mu_b(x) A^\nu_c(x)\ .
\end{aligned}
$$

Im Verlauf dieses Abschnittes wird es nun darum gehen, dieses Wirkungsfunktional durch unsere Linkvariablen U_μ darzustellen. Da der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}_a$ als *verallgemeinerte Rotation* des Potentials A_μ betrachtet werden kann [1], empfiehlt es sich A_μ über kleine, geschlossene Kontouren zu integrieren. Die kleinste, geschlossene Kontour, die auf einem Gitter existiert,

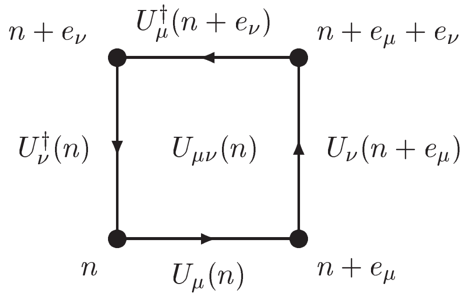


Abbildung 2.3: Die elementare Plaquette $U_{\mu\nu}$

ist die sogenannte *Plaquette* $U_{\mu\nu}$. Sie beschreibt ein, in der μ,ν-Ebene liegendes elementares Quadrat und ist wie folgt definiert (siehe auch Abb. 2.3).

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)\,U_\nu(n+e_\mu)\,U_\mu^\dagger(n+e_\nu)\,U_\nu^\dagger(n) \tag{2.56}$$

Nun läßt sich einfach zeigen, daß sich der Integrand aus Gl. (2.55) durch die Plaquette wie folgt darstellen läßt:

$$\frac{2N_c}{{g_0}^2}\left[1-\frac{1}{N_c}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}(n)\right] = \frac{1}{4}a^4 F^b_{\mu\nu}(na)\,F^b_{\mu\nu}(na) + O(a^6)\ . \tag{2.57}$$

Mit dieser Gleichung gelangt man zu der von Wilson [3] vorgeschlagenen *Plaquette-Wirkung.*

$$S_G^{Wilson}[U_\mu] = \beta\sum_n \sum_{1\le\mu<\nu\le 4}\left[1-\frac{1}{2N_c}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}\right] \tag{2.58}$$

Die Summation wird in Gl. (2.58) über alle elementaren Plaquetten des Gitters geführt. Die Konstante β darf an dieser Stelle nicht mit der inversen Temperatur $\beta_{therm} = 1/T$ verwechselt werden. Sie ist gegeben durch

$$\beta \equiv \frac{2N_c}{{g_0}^2}\ . \tag{2.59}$$

Wie Gl. (2.57) zeigt, unterscheidet sich die *Plaquette-Wirkung* von der kontinuierlichen Wirkung nur durch Terme der Ordnung a^2. Die Bedingungen für den Kontinuumsgrenzwert sind also erfüllt.

$$\lim_{a\to 0} S_G^{Wilson} = S_G^{kont.} \tag{2.60}$$

Nun bleibt noch zu überprüfen, ob die Plaquettewirkung auch invariant unter Eichtransformationen in Gl. (2.54) ist. Da die Wirkung S_G^{Wilson} aber nur von geschlossenen Loops der Linkvariablen $U_\mu(n)$ abhängt ist dieses auch der Fall.

2.2.3 $(2,1)$-Tree-level verbesserte Wirkung

Eine diskrete Wirkung ist nie eindeutig, d.h. es kann jeder beliebige, für $a \to 0$ verschwindende Term hinzugefügt werden, ohne daß sich der Kontinuumslimes verändert. Diese Eigenschaft kann ausgenutzt werden, um neue, *verbesserte Wirkungen* zu entwickeln, mit deren Hilfe man schon auf relativ kleinen Gittern physikalische Größen mit großer Genauigkeit bestimmen kann.

Eine dieser verbesserten Wirkungen ist die $(2,1)$-*tree-level Wirkung*. Hierbei wird ein Term, bestehend aus symmetrisierten 2×1-Loops, zu der Wilson-Wirkung addiert, wodurch im *Hochtemperatur-Limes* die $O(a^2)$-Korrekturen in niedrigster Ordnung g wegfallen. Für den gluonischen Anteil der Wirkung erhält man dann

$$\begin{aligned} S_G^{(2,1)} &= \beta \sum_{n,\nu>\mu} \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{N_c} \mathrm{Re\,Tr} \boxed{}_{\mu\nu}(n)\right) \\ &\quad - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2N_c} \mathrm{Re\,Tr}\left(\boxed{}_{\mu\nu}(n) + \boxed{\rule{0pt}{2.5em}}_{\mu\nu}(n)\right)\right). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Diese Wirkung zeigt im Vergleich zur Wilson-Wirkung eine drastische Reduzierung der *Cut-Off-Effekte* [7]. So liefern auf einem Gitter der zeitlichen Ausdehnung $N_\tau = 4$ mit *tree-level* verbesserter Wirkung durchgeführte Simulationen vergleichbare Resultate wie Simulationen mit Wilson-Wirkung bei $N_\tau = 8$. Ein weiterer Vorteil der $(2,1)$-*tree-level Wirkung* ist die Verbesserung der Rotationssymmetrie, die besonders für die Untersuchung von Potentialen von Bedeutung ist [8].

Die dieser Arbeit zugrunde liegenden Simulationen wurden alle mit der $(2,1)$-tree-level verbesserten Wirkung durchgeführt.

2.3 Das Potential zwischen statischen Quarks

2.3.1 Der Polyakovloop-Operator

Die freie Energie F_q eines statischen Quarks läßt sich durch den *Polyakovloop-Operator* beschreiben. Dieser ist in der Kontinuumstheorie definiert als

$$\Omega^{Kont.}(\vec{x}) = T.O.\,\exp\left(-ig\int_0^{1/T} \mathrm{d}\tau A_4(\vec{x},\tau)\right). \tag{2.62}$$

$T.O.$ bezeichnet dabei die Zeitordnung der Operatoren, bezogen auf die imaginäre Zeit τ. Der *Polyakovloop-Operator* entspricht auf dem Gitter dem Ausdruck

$$\Omega^{Gitter}(\vec{n}) = \prod_{n_\tau=0}^{N_\tau} U_4(\vec{n},n_\tau)\,. \tag{2.63}$$

Als *lokalen Polyakovloop* $L(\vec{n})$ bezeichnet man die Spur des *Polyakovloop-Operators.*

$$L(\vec{n}) \equiv \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}\,\Omega(\vec{n}) \tag{2.64}$$

$$L \equiv \lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\int_V \mathrm{d}^3x L(\vec{x}) \tag{2.65}$$

Nach [9] ist die freie Energie F_q eines statischen Quarks gegeben durch

$$\exp\left(-\frac{1}{T}F_q(T)\right) = \langle\, L\,\rangle \tag{2.66}$$

Ein verschwindender Erwartungswert des *Polyakovloops* bedeutet demnach eine unendlich hohe freie Energie F_q eines statischen Quarks. Ein solcher Zustand ist physikalisch nicht möglich, bei $\langle L\rangle = 0$ kann also kein einzelnes Quark existieren. Dieser Zustand entspricht also dem *Confinement.* Anderseits bedeutet ein nichtverschwindender Erwartungswert $\langle L\rangle \neq 0$, daß die Existenz einzelner Quarks durchaus möglich ist, was dem *Deconfinement* entspricht. Der Erwartungswert des *Polyakovloops* kann somit als Ordnungsparameter für den *Confinement-Deconfinement*-Phasenübergang angesehen werden.

Im allgemeinen sind Phasenübergänge mit der spontanen Brechung oder Restaurierung von globalen Symmetrien verbunden. Die mit dem *Confinement*-Phasenübergang verknüpfte Symmetrie ist die *globale $Z(N_c)$-Symmetrie.* dazu betrachten wir das Zentrum der Gruppe $SU(N_c)$.

$$\mathcal{C} = \{z \in SU(N_c)\mid zGz^{-1} = G \text{ für alle } G\in SU(N_c)\} \tag{2.67}$$

Für $N_c = 3$ sind die Elemente der Zentrumsgruppe gegeben durch

$$z = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\, l\right) \quad \text{mit } l = 0, 1, 2\,. \tag{2.68}$$

Die Wirkung ist invariant unter einer Transformation der zeitartigen Linkvariablen bei festem Zeitpunkt n_τ

$$U_4(\vec{n}, n_\tau) \rightarrow z\, U_4(\vec{n}, n_\tau) \quad \forall\, \vec{n} \in V \tag{2.69}$$

mit $z \in \mathcal{C}$. Der *lokale Polyakovloop* in Gl. (2.64) verändert sich aber unter einer solchen Transformation zu

$$L(\vec{n}) \rightarrow z\, L(\vec{n}) \tag{2.70}$$

In der, durch $\langle L \rangle = 0$ charakterisierten *Confinement*-Phase ist die *globale $Z(N_c)$-Symmetrie* erhalten, während sie in der, durch $\langle L \rangle \neq 0$ charakterisierten *Deconfinement*-Phase spontan gebrochen wird. Da das kritische Verhalten der $SU(3)$-Eichtheorie stark mit der $Z(3)$-Symmetrie verknüpft ist, erwartet man auch hier, ähnlich zum dreidimensionalen *Potts-Modell* einen Phasenübergang erster Ordnung.

2.3.2 Potential zwischen Quark und Antiquark

Es soll nun das Potential zwischen einem Quark-Antiquark-Paar im Abstand R genauer untersucht werden. Unterhalb der kritischen Temperatur T_c erwartet man folgendes Verhalten:

$$V_{q\bar{q}}(R, T) = V_0 + \frac{\alpha(T)}{R} + \sigma(T) R + T \log 2RT \qquad \text{für } T < T_c\,. \tag{2.71}$$

Das Potential $V_{q\bar{q}}$ soll proportional zum Abstand R anwachsen. Die Proportionalitätskonstante $\sigma(T)$ entspricht dabei der *string tension*. Für kleine Abstände erwartet man *Coulomb-Verhalten*, was durch den Term $\alpha(T)/R$ ausgedrückt wird.

Ein ganz anderes Verhalten erwartet man in der *Deconfinement*-Phase. In dem hier existierenden *Quark-Gluon-Plasma* werden die Farbladungen der Quarks durch Polarisationseffekte der sie umgebenden Gluonen abgeschirmt. Dieses *Debye-Screening* führt zu einem *Yukawa*-Potential

$$V_{q\bar{q}}(R, T) = \frac{\alpha(T)}{R^d}\, e^{-\mu(T) R} \qquad \text{für } T > T_c\,. \tag{2.72}$$

Das farbgemittelte Potential zwischen einem Quark und einem Antiquark im Abstand R voneinander ist in der *Deconfinement*-Phase gegeben durch [9]

$$e^{-V_{av}(R,T)/T} = \frac{\left\langle L(\vec{R})L^{\dagger}(\vec{0})\right\rangle}{|\langle L\rangle|^2} \tag{2.73}$$

Die Normierung auf $|\langle L\rangle|^2$ ist notwendig, um die divergenten Selbstenergie-Beiträge zu eleminieren. Aus störungstheoretischen Rechnungen in niedrigster Ordnung erhält man für große Abstände und hohe Temperaturen [13]

$$V_{av}(R,T) \sim \frac{1}{TR^2} e^{-2m_e(T)R} \qquad \text{für } T > T_c. \tag{2.74}$$

Hier ist m_e die elektrische *Screening-Masse*. Da V_{av} sehr schnell abfällt, verschwindet das numerische Signal für große R hinter dem statistischen Rauschen. Dies verbessert sich, wenn man anstelle des farbgemittelten Potentials das Singulett-Potential betrachtet.

Mathematisch wird ein Quark-Antiquark-Zustand durch ein Tensorprodukt $N_c \otimes \bar{N}_c$ dargestellt. Für $N_c = 3$ gilt $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$, sodaß sich das Quark-Antiquark-Paar entweder in einem Singulett- oder in einem Oktettzustand befindet. Diese Zustände unterscheiden sich im allgemeinen durch ihre Energie, sodaß man das Singulettpotential V_1 und das Oktettpotential V_8 getrennt betrachten muß. Entsprechend der Entartung dieser Zustände gilt:

$$e^{-V_{av}(R,T)/T} = \frac{1}{9}\left(e^{-V_1(R,T)/T} + 8e^{-V_8(R,T)/T}\right). \tag{2.75}$$

Ähnlich Gl. (2.73) erhält man das Singulettpotential aus den Korrelationsfunktionen der lokalen Polyakovloops

$$e^{-V_1(R,T)/T} = N_c \frac{\left\langle \mathrm{Tr}\left(\Omega(\vec{R})\Omega^{\dagger}(\vec{0})\right)\right\rangle}{|\langle L\rangle|^2}. \tag{2.76}$$

Das Singulettpotential ist eine eichabhängige Größe. Es ist deshalb erforderlich, vor seiner Bestimmung eine Eichung zu fixieren. In dieser Arbeit sind dies die *Lambda-Eichungen* (siehe Kapitel 3). Das Singulettpotential wird in führender Ordnung von einem *Ein-Gluon-Austausch* dominiert und hat die Form eines *Debye-abgeschirmten* Coulombpotentials [13]

$$V_1(R,T) = -g^2\,\frac{N_c^2 - 1}{8\pi N_c}\,\frac{e^{-m_e(T)R}}{R} \qquad \text{für } T > T_c. \tag{2.77}$$

Im Gegensatz zu Gl. (2.73) liefert das Singulett-Potential ein stärkeres numerisches Signal, und ist somit zur Bestimmung der elektrischen Screening-Masse m_e besser geeignet.

2.4 Der Gluonpropagator

2.4.1 Definitionen und Notation

Einen weiteren Zugang zum Screeningverhalten der Gluonen liefert die Untersuchung des Gluonpropagators $D^{ab}_{\mu\nu}(x,y)$. Dieser ist als Korrelationsfunktion der Eichfelder definiert:

$$D^{ab}_{\mu\nu}(x,y) \equiv \left\langle T.O.\; A^a_\mu(x)\, A^b_\nu(y) \right\rangle . \tag{2.78}$$

Aufgrund der Translationsinvarianz ist Gl (2.78) äquivalent zu

$$\begin{aligned} D^{ab}_{\mu\nu}(x) &\equiv D^{ab}_{\mu\nu}(x,0) \\ &= \left\langle T.O.\; A^a_\mu(x)\, A^b_\nu(0) \right\rangle . \end{aligned} \tag{2.79}$$

Hier bezeichnet $T.O.$ wieder das zeitgeordnete Produkt bezüglich der euklidischen Zeitrichtung x_4. Da sich der Farbinhalt der Gluonen durch den Propagator nicht ändert, ist dieser im Farbraum diagonal. Die Farbindizes a, b können somit weggelassen werden.

Nach Gl. (2.52) ist $U_\mu(x) = 1\!\!1 + igaA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2)$, so daß für kleine a für das Eichfeld $A_\mu(x)$ näherungsweise gilt

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2iga}\left(U_\mu(x) - U^\dagger_\mu(x)\right) - \frac{1}{2igaN_c}\mathrm{Tr}\left(U_\mu(x) - U^\dagger_\mu(x)\right) , \tag{2.80}$$

wobei der letzte Term das genäherte Eichfeld in die Algebra der Gruppe $SU(N_c)$ projeziert. Wir wollen nun den Gluonpropagator im Impulsraum betrachten. Da für endliche Temperatur die Eichfelder in euklidischer Zeitrichtung periodisch sind, erhält man für die entsprechende Komponente des euklidischen Vierer-Impulses q_4 ein Spektrum diskreter *Matsubara-Frequenzen*:

$$q_4 = \omega_n = 2\pi T n \qquad \text{mit } n = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{2.81}$$

Die Fourier-Transformierte des Eichfeldes lautet dann

$$A_\mu(q) = \int_x e^{-iqx} A_\mu(x) . \tag{2.82}$$

Der dimensionslose Gluonpropagator im Impulsraum ist dann nach [16] gegeben durch

$$\langle A_\mu(q)\; A_\nu(-q')\rangle \equiv V\,\delta(q-q')D_{\mu\nu}(q) . \tag{2.83}$$

Eine, für die Untersuchung des Screeningverhaltens wichtige Größe ist die *gemischte Form des Gluonpropagators* [13][17]. Diese ist definiert als

$$G_\mu(\,q_\perp, z, \omega_n) \equiv \Big\langle \mathrm{Tr}\,\tilde{A}_\mu(\,q_\perp, z, \omega_n)\,\tilde{A}_\mu(\,-q_\perp, 0, -\omega_n)\Big\rangle\;, \tag{2.84}$$

wobei $p_\perp \equiv (\,q_1, q_2)$ die Impulskomponenten senkrecht zur z-Richtung bezeichnet. Die gemischten Gluonfelder $\tilde{A}_\mu$ sind gegeben durch die Fouriertransformierte

$$\tilde{A}_\mu(\,q_\perp, z, \omega_n) \equiv \int\!\mathrm{d}\tau\!\int\!\mathrm{d}x_\perp\, e^{-i(\omega_n\tau + q_\perp x_\perp)} A_\mu(x_\perp, z, \tau)\,. \tag{2.85}$$

Für den Fall $q_\perp = (0,0)$ entspricht Gl. (2.85) einer Integration des Gluonfeldes über die zur z-Richtung senkrechte Hyperebene.

2.4.2 Tensorstruktur des Propagators

Der Gluonpropagator $D_{\mu\nu}(k)$ läßt sich durch den Selbstenergietensor $\Pi_{\mu\nu}$ ausdrücken. Für endliche Temperatur hängt dieser aber von der *Vierer-Geschwindigkeit* des Plasmas u^μ ab und kann folglich als Linearkombination der vier Tensoren $g^{\mu\nu}$, $k^\mu k^\nu$, $u^\mu u^\nu$ und $k^\mu u^\nu + u^\mu k^\nu$ dargestellt werden. Gewöhnlich wählt man aber eine andere Basis $A^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$, $C^{\mu\nu}$, $E^{\mu\nu}$. Diese Basistensoren sind im Euklidischen im Ruhesystem des Plasmas ($u \equiv (1,0,0,0)$) gegeben durch

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
B_{\mu\nu} &= \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} k_4^2 \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} & -k_4 k_i \\ -k_4 k_j & \mathbf{k}^2 \end{pmatrix}, \\
C_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|k^2}\begin{pmatrix} -2k_4 k_i k_j & (\mathbf{k}^2 - k_4^2)k_i \\ (\mathbf{k}^2 - k_4^2)k_j & 2\mathbf{k}^2 k_4 \end{pmatrix}, \\
E_{\mu\nu} &= \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} k_i k_j & k_i k_4 \\ k_j k_4 & k_4^2 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.86}$$

mit $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ und $i, j = 1, 2, 3$. Der Selbstenergie-Tensor und der Gluonpropagator haben in dieser Basis die Form

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi_A A_{\mu\nu} + \Pi_B B_{\mu\nu} + \Pi_C C_{\mu\nu} + \Pi_E E_{\mu\nu}\,, \tag{2.87}$$

$$D^{-1}_{\mu\nu}(k) = aA_{\mu\nu} + bB_{\mu\nu} + cC_{\mu\nu} + eE_{\mu\nu}\,. \tag{2.88}$$

Der Selbstenergie-Tensor und der Gluonpropagator sind keine eichinvarianten Größen und können daher nur abhängig von einer gewählten Eichung bestimmt werden. Kovariante Eichungen zeichnen sich durch einen eichfixierenden Term $\mathcal{L}_{eich} = -(\partial_\mu A^\mu)^2/2\xi$ aus (siehe Abschnitt 2.1.3). Mit Hilfe der *Slavnov-Taylor-Identitäten* $k_\mu k_\nu D^{\mu\nu}(k) = -\xi$ [14] erhält man für kovariante Eichungen

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{\Pi_A + k^2} A_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\Pi_B + k^2} + \frac{\xi\,\Pi_C^2}{2(\Pi_B + k)^2 k^2} \right) B_{\mu\nu} \\ & \quad - \frac{\xi\,\Pi_C}{(\Pi_B + k^2) k^2} C_{\mu\nu} + \frac{\xi}{k^2} E_{\mu\nu} \,. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Für den Fall der *Landau*-Eichung ($\xi = 0$)vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\Pi_A + k^2} A_{\mu\nu} + \frac{1}{\Pi_B + k^2} B_{\mu\nu} \,. \tag{2.90}$$

Der Propagator besitzt also Polstellen für $-k^2 \to \Pi_A$ und $-k^2 \to \Pi_B$. Nach [15] sind diese Polstellen eichinvariante Größen. Aus der Struktur der Basistensoren A und B ergibt sich außerdem, daß Π_A den transversalen (*farb-magnetischen*) und Π_B den longitudinalen (*farb-elektrischen*) Anteil des Propagators bestimmt. Für den statischen Fall ($k_4 = 0$) und im Limes $\mathbf{k} \to 0$ werden diese Polstellen für die Definition der elektrischen und magnetischen Polmassen verwendet:

$$m_m^2 = \Pi_A(\mathbf{k} \to 0, k_4 = 0) \tag{2.91}$$

$$m_e^2 = \Pi_B(\mathbf{k} \to 0, k_4 = 0) \tag{2.92}$$

Eine weitere nützliche Eigenschaft der Landaueichung ist, daß sich der Propagator vollständig durch die zwei Funktionen D_{44} und $D_T = \sum_i D_{ii}$ darstellen läßt. Diese lassen sich einfach aus Gl. (2.90) bestimmen:

$$D_{44} = \frac{1}{\Pi_B + k^2} \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + k_4} \,, \tag{2.93}$$

$$\sum_i D_{ii} = \frac{2}{\Pi_A + k^2} + \frac{k_4^2}{\mathbf{k}^2} D_{44} \,. \tag{2.94}$$

Für die Bestimmung der elektischen und magnetischen Polmassen ist wieder der statische Grenzfall mit kleinen Impulsen interessant. Hier gilt

$$\begin{aligned} D_{44}(\mathbf{k} \to 0, k_4 = 0) &= \frac{1}{\Pi_B} \,, \\ \sum_i D_{ii}(\mathbf{k} \to 0, k_4 = 0) &= \frac{2}{\Pi_A} \,. \end{aligned}$$

2.4.3 Das Screeningverhalten für große Abstände

Im vorherigen Abschnitt wurde der Gluonpropagator bei kleinen Impulsen betrachtet. In diesem Abschnitt werden wir das langreichweitige Verhalten des in Gl. (2.84) definierten gemischten Propagators in Landau-Eichung untersuchen. Dazu betrachten wir den statischen Propagator ($\omega_n = 0$) und definieren

$$G_\mu(p_\perp, z) \equiv G_\mu(p_\perp, z, \omega_n = 0) \tag{2.95}$$

In der Landau-Eichung mit der Eichbedingung $|\partial^\mu A_\mu|^2 = 0$ ist der Propagator in z-Richtung G_3 unabhängig von z. Das Verhalten von $G_3(z)$ ist daher als Indikator für die Güte der Eichfixierung interessant. Das Analogon zu D_T in Gl. (2.94) lautet dann in gemischter Darstellung

$$G_{av}(p_\perp, z) = \frac{1}{2}\left(G_1(p_\perp, z) + G_2(p_\perp, z)\right) . \tag{2.96}$$

Aus dem Verhalten von G_{av} und G_4 für große Abstände z erhält man die *elektrischen* und *magnetischen* Energien [13].

$$\begin{aligned} G_{av}(p_\perp, z) &\sim \exp\{-E_m(p_\perp)\, z\} , \\ G_4(p_\perp, z) &\sim \exp\{-E_e(p_\perp)\, z\} \qquad \text{für } z \gg 1 \end{aligned}$$

Die elektrischen und magnetischen Screeningmassen erhält man für $p_\perp = 0$. Mit $G_\mu(z) \equiv G_\mu(p_\perp = 0, z)$ gilt dann

$$G_{av}(z) \sim \exp\{-m_m\, z\} , \tag{2.97}$$

$$G_4(z) \sim \exp\{-m_e\, z\} \qquad \text{für } z \gg 1 , \tag{2.98}$$

$$\text{sowie} \quad G_3(z) = \textit{konst.} \qquad \forall z = 1, ..., N_z . \tag{2.99}$$

Für kleine Abstände z werden die sog. *lokalen Massen* noch explizit z-abhängig sein.

$$m_{e(m)}(z) = \ln \frac{G_{4(av)}(z)}{G_{4(av)}(z+1)} \tag{2.100}$$

Für große Abstände müssen außerdem die periodischen Randbedingungen des Gitters berücksichtigt werden. Dann lassen sich die lokalen Massen aus der Beziehung

$$\frac{G_{4(av)}(z)}{G_{4(av)}(z+1)} = \frac{\cosh\left(m_{e(m)}(z)\,(z - N_z/2)\right)}{\cosh\left(m_{e(m)}(z)\,(z - N_z/2 + 1)\right)} \tag{2.101}$$

bestimmen.

Kapitel 3

Die Lambda-Eichung

3.1 Grundlagen

Vor der Berechnung eichabängiger Größen, wie z.B. des Singulettpotentials eines Quark-Antiquark-Paares Gl. (2.76) oder des Gluonpropagators Gl. (2.84) muß eine Eichung festgelegt werden, in der man die Simulationen durchführen will. Wie dieses durch einen, die Eichung fixierenden Term in der Lagrangedichte geschieht, wurde in Abschnitt 2.1.3 beschrieben. Im selben Abschnitt wurde auch die *Landau*-Eichung eingeführt, die im Kontinuum folgende Bedingung erfüllt:

$$\sum_{\mu=1}^{4} \partial_\mu A_\mu(x) = 0 \tag{3.1}$$

Eine weitere, oft benutzte Eichung ist die *Coulomb*-Eichung. Sie wird definiert durch die Eichbedingungen

$$\begin{aligned} \nabla \vec{A}(\vec{x},t) &= 0 \\ \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\; A_4(\vec{x},t) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Um die Eichinvarianz der Quark-Masse zu untersuchen, wurde von C. Bernard *et al.*[19] eine neue Schar von Eichungen vorgeschlagen, die *Lambda*-Eichungen. Diese erfüllen im Kontinuum die Bedingung

$$\lambda \partial_4 A_4(x) + \sum_{\mu=1}^{3} \partial_\mu A_\mu(x) = 0\,, \tag{3.3}$$

wobei der reelle Parameter λ beliebig variiert werden kann. Für $\lambda = 1$ liefert Gl. (3.3) die *Landau*-Eichbedingung, für $\lambda \to 0$ erhält man die *Coulomb*-Eichung. In dieser Arbeit werden die *Lambda*-Eichungen im Bereich $0 < \lambda \leq 1$ benutzt, um die Eichinvarianz der elektrischen und magnetischen Screeningmassen zu untersuchen.

Auf dem Gitter lassen sich die Gluonfelder $A_\mu(x)$ für kleine Gitterabstände schreiben als

$$A_\mu(x) \approx \frac{1}{2ig}\left(U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x)\right)_{\text{spurlos}}. \tag{3.4}$$

Die Ableitung ist dann durch die Differenz der Gluonfelder wie folgt gegeben.

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\mu(x) &= A_\mu(x) - A_\mu(x - e_\mu) \\ &= \frac{1}{2ig}\left(U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) - U_\mu(x - e_\mu) + U_\mu^\dagger(x - e_\mu)\right)_{\text{spurlos}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dabei ist e_μ der Gitter-Einheitsvektor in μ-Richtung. Definiert man ausserdem $\lambda_\mu \equiv 1$ für $\mu = 1, 2, 3$ und $\lambda_4 \equiv \lambda$, so läßt sich die *Lambda*-Eichbedingung Gl. (3.3) unter Verwendung von Gl. (3.5) schreiben als

$$\Theta_\lambda(x) \equiv \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}\left(\sum_\mu \lambda_\mu \partial_\mu A_\mu(x)\right)\left(\sum_\mu \lambda_\mu \partial_\mu A_\mu(x)\right)^\dagger = 0 \tag{3.6}$$

bzw.

$$\Theta_\lambda = \frac{1}{{N_\sigma}^3\, N_\tau}\sum_x \Theta_\lambda(x) = 0 \tag{3.7}$$

Auf dem Gitter entspricht Gl. (3.7) der Bedingung für ein lokales Minimum des Funktionals

$$\mathcal{E}_U^\lambda[g] \equiv -\sum_{x,\mu} \mathrm{Tr}\left(\lambda_\mu g(x) U_\mu(x) g^\dagger(x + e_\mu)\right) \tag{3.8}$$

für eine feste Konfiguration $U_\mu(x)$ [17]. Dabei ist es möglich, daß mehrere lokale Minima von $\mathcal{E}_U^\lambda[g]$ existieren, sodaß die Bedingung Gl. (3.6) die Eichung nicht eindeutig festlegt. Dies führt zu den sogenannten *Gribov*-Kopien [20]. Eine Möglichkeit diese *Gribov*-Kopien zu eliminieren ist die *minimale Eichung* . Dabei sucht man nach dem globalen Minimum des Funktionals $\mathcal{E}_U^\lambda[g]$. Allerdings zeigen Untersuchungen für die minimale Landau-Eichung [21], daß *Gribov*-Kopien für die Untersuchung von Gluon-Propagatoren nicht relevant sind, da ihr Einfluß in der Größenordnung der numerischen Ungenauigkeit liegt.

Prinipiell lassen sich *Monte-Carlo*-Rechnungen in fester Eichung durchführen, indem man eine *Markov*-Kette von Eichfeldern erzeugt, die den Eichbedingungen genügen. Dies ist aber für nicht-abelsche Eichfelder aufgrund der Berechnung der *Faddeev-Popov*-Determinante Gl. (2.32) sehr aufwendig. Einfacher ist es, ungeeichte Konfigurationen zu erzeugen, und diese dann, unter Ausnutzung der Eichinvarianz der Wirkung, in die entsprechende Eichung zu transformieren. Im folgenden Abschnitt werden einige Eichfixierungsalgorithmen vorgestellt.

3.2 Algorithmen zur Eichfixierung

Grundsätzlich lassen sich zwei Arten von Eichfixierungsalgorithmen unterscheiden. Die lokalen Algorithmen bestimmen die Transformationsmatrizen $G(x)$ nur aus den lokalen Ableitungen der Eichfelder, sie lassen sich deshalb auch sehr leicht auf den Quadrics-Maschinen implementieren. Zu dieser Klasse von Algorithmen gehören der Cornell-Algorithmus sowie dessen Verbesserungen Cornell-Overrelaxation und Stochastisches Overrelaxation.

Die lokalen Algorithmen haben alle das Problem, daß sie immer uneffizienter werden, je weiter man sich der Eichung nähert. Dieses Verhalten wird *critical slowing down* genannt. Deshalb wurden nichtlokale Algorithmen entwickelt, wie die sogenannte *Fourier-Beschleunigung*, die das *critical slowing down* effektiv unterdrücken. Nichtlokale Algorithmen lassen sich aber nur mit großem Aufwand auf Maschinen mit lokaler Topologie implementieren. Besser eignen sich Maschinen, bei denen die einzelnen Rechnerknoten mittels Router untereinander verbunden sind. Eine solche Maschine ist die CC-48 in Paderborn, die ich für meine Eichungen benutzt habe.

Der *Multigrid-Algorithmus* stellt einen Sonderfall dar. Zum einen ist als Implementierung des Fourier-Alghorithmus zu den nichtlokalen Algorithmen zu zählen, anderseits läßt er sich aber auch relativ einfach auf lokalen Maschinen realisieren.

3.2.1 Der Cornell-Algorithmus

Beim *Cornell*-Algorithmus werden die Links in Richtung des negativen Gradient (*steepest descent*) verändert. Als Transformationsmatrix wählt man deshalb

$$\begin{aligned} G(x) &= \exp\left(-ig\alpha\sum_\mu \partial_\mu A_\mu(x)\right) && (3.9)\\ &\approx \mathbb{1} - ig\alpha\sum_\mu \partial_\mu A_\mu(x)\,. && (3.10)\end{aligned}$$

Der Parameter α ist ein Maß für die Schrittweite des *Cornell*-Algorithmus. Da er von der Größe des Gitters abhängt, muß er 'experimentell' optimiert werden. Ich habe meine Messungen auf dem kleinen $16^3 \times 8$-Gitter mit $\alpha = 0.13$, und auf dem großen $32^3 \times 4$-Gitter mit $\alpha = 0.03125$ durchgeführt.

Dieser Algorithmus läßt sich schnell auf die Klasse der *Lambda*-Eichung umschreiben. Entsprechend der Eichbedingung muß nur ein Faktor λ an der richtigen Stelle hinzugefügt werden. Man erhält somit für die Transformationsmatrizen folgenden Ausdruck.

$$G(x) = \exp\left(-ig\alpha\sum_{\mu=1}^{3} \partial_\mu A_\mu(x) - ig\alpha\lambda\partial_4 A_4(x)\right) \qquad (3.11)$$

Den Transformationsmatrizen sieht man leicht an, warum es zu den bereits erwähnten *slowing down*-Problemen kommt. Nähert sich das Gluonfeld $A_\mu(x)$ der Eichbedingung, konvergiert die Matrix $G(x)$ sehr schnell gegen die Einheitsmatrix. Die Transformationen werden also immer ineffizienter.

3.2.2 Overrelaxation

Ein Weg, die Konvergenz des *Cornell*-Algorithmus' zu verbessern, ist die *Overrelaxation*-Methode [22]. Diese Methode wurde ursprünglich entwickelt, um die Konvergenz von iterativen Methoden in der klassischen linearen Algebra zu verbessern. *Overrelaxation* funktioniert nach dem Prinzip, bei jedem Eichschritt ein wenig weiter zu gehen als nötig. Dadurch wird das angestrebte Minimum 'überschossen' und so die Gefahr, in einem lokales Minimum festzusitzen verringert.

Dazu ersetzt man die Transformationsmatrizen durch

$$\begin{aligned} G(x) &\to G^\omega(x) && (3.12)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\omega]_n}{n!}\,(G(x)-1)^n && (3.13)\end{aligned}$$

wobei $[\omega]_n$ wie folgt durch die *Gamma-Funktion* ausgedrückt werden kann.

$$[\omega]_n = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(\omega+1-n)} \tag{3.14}$$

In der Regel ist es ausreichend, die unendliche Reihe in Gl. (3.13) nach wenigen Termen abzubrechen und das Ergebnis zu unitarisieren.

Für den *Overrelaxing*-Parameter ω sind Werte zwischen 1 und 2 sinnvoll. Üblich sind Werte, die nur wenig kleiner als 2 sind. Der Zusammenhang zwischen ω und der Gittergröße L wird nach [23] durch die Gleichung

$$\omega = \frac{2}{1 + C_{opt}/L} \tag{3.15}$$

beschrieben. C_{opt} ist dabei eine problemabhängige Größe. Für die $SU(3)$-Eichfixierung gilt laut [25][26] näherungsweise $C_{opt} = 3$. Bei den Eichfixierungen auf den kleinen $16^3 \times 8$-Gittern habe ich für den *Overrelaxation*-Parameter den Wert $\omega = 1.4$ gewählt.

3.2.3 Stochastisches Overrelaxation

Ähnlich wie die *Overrelaxation*-Methode funktioniert auch das *Stochastische Overrelaxation* [26] [27]. Allerdings wird hier das Transformationsfeld G ersetzt durch

$$G(x) \rightarrow \begin{cases} G^2(x) & \text{mit einer Wahrscheinlichkeit } p \\ G(x) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.16}$$

Der Konvergenz dieser Methode hängt sehr stark von p ab. Für $p = 1$ ist der Algorithmus divergent, für $p = 0$ erhält man offensichtlich den *Cornell*-Algorithmus. Für meine Eichungen auf dem $16^3 \times 8$-Gitter habe ich eine Wahrscheinlichkeit $p = 0.7$ benutzt.

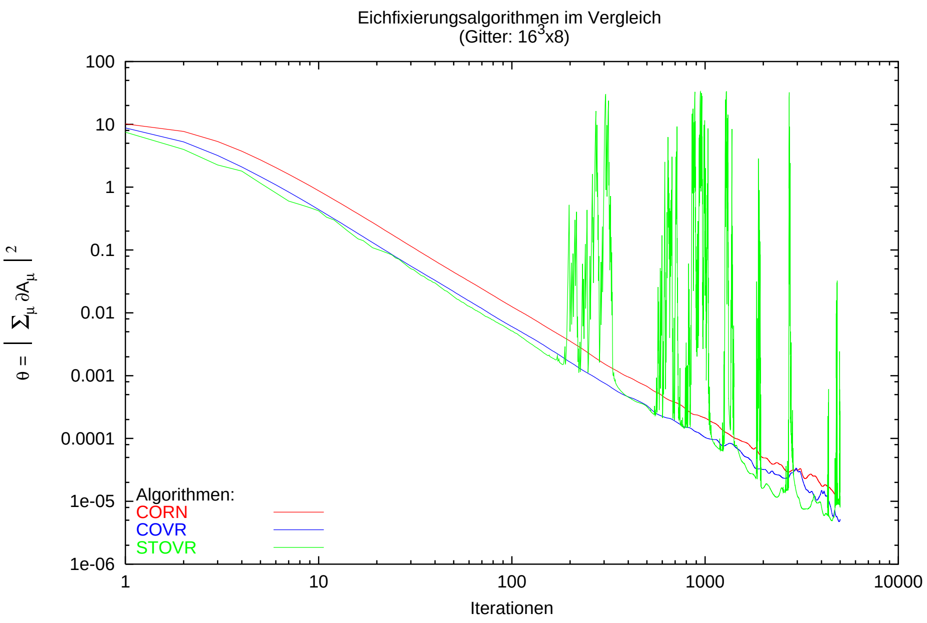


Abbildung 3.1: Dieser Plot zeigt den Verlauf des Eichfixierens mittels der Algorithmen Cornell (CORN), Cornell-Overrelaxation (COVR) und Stochastisches Overrelaxation (STOVR).

3.2.4 Vergleich der lokalen Algorithmen zur Eichfixierung

In Abbildung 3.1 ist der Verlauf der Eichfixierung mittels der drei zuvor beschriebenen lokalen Algorithmen aufgezeigt. Man erkennt, daß die beiden *Overrelaxation*-beschleunigten Methoden fast doppelt so schnell konvergieren wie der unbeschleunigte *Cornell*-Algorithmus. Die beste, wenn auch etwas unberechenbare Konvergenz zeigt der Algorithmus mit *Stochastischem Overrelaxation*. Dieser hat gegenüber dem *Overrelaxation*-Algorithmus den weiteren Vorteil, daß er für einen Fixierungsschritt weniger Zeit benötigt. Während beim *Overrelaxation*-Algorithmus für jede Iteration die Summe in Gleichung (3.13) bestimmt werden muß, benötigt man hier nur eine Zufallszahl und eventuell eine Matrixmultiplikation.

Trotzdem kann keiner der bislang dargestellten Algorithmen das Problem des *critical slowing down* unterdrücken. Dies wird ausschließlich durch die nun vorgestellten nicht-lokalen Algorithmen erreicht.

3.2.5 Der Fourier-Algorithmus

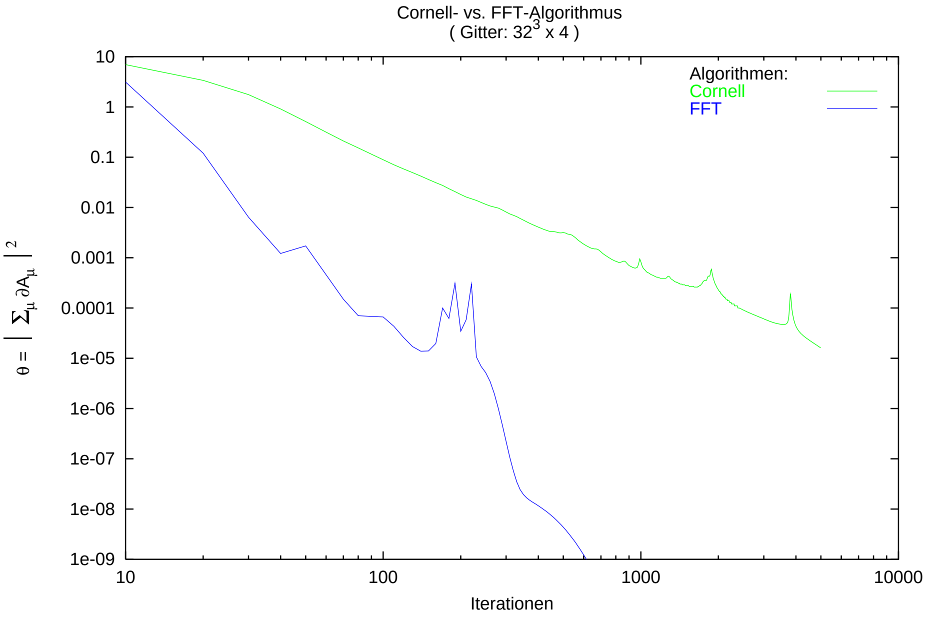


Abbildung 3.2: Eine deutliche Verbesserung im Vergleich zum Cornell-Algorithmus läßt sich durch die Fourierbeschleunigung (FFT) erzielen. Das hier dargestellte Ergebnis wurde auf der CC-48 in Paderborn erzielt.

Beim *Cornell*-Algorithmus in *Landau*-Eichung wird die Konvergenz durch die Matrix $\sum \partial_\mu A_\mu$ bestimmt. Nun läßt sich für abelsche Theorien im Kontinuum zeigen [28] [23], daß diese Matrix im Impulsraum wie folgt konvergiert.

$$\left(\sum \partial_\mu A_\mu\right)_t (\mathbf{k}) \approx \left(\sum \partial_\mu A_\mu\right)_0 (\mathbf{k}) \exp\left(-\alpha p^2(\mathbf{k}) t\right) \tag{3.17}$$

In dieser Gleichung ist t gleich der Anzahl der Iterationen, und $p^2(\mathbf{k})$ sind die Eigenwerte des *Laplace*-Operators, gegeben durch

$$p^2(\mathbf{k}) = \frac{4}{a^2} \sum_{\mu=1}^{4} \sin^2\left(\frac{k_\mu \pi}{N_\mu}\right). \tag{3.18}$$

Das Impulsquadrat $p^2(\mathbf{k})$ wird maximal für $k_\mu = N_\mu/2 \quad \forall\mu$, somit erhält man für den größten Impuls

$$p_{max}^2 = \frac{16}{a^2}. \tag{3.19}$$

Aus Gleichung (3.17) folgt, daß die verschiedenen Moden der Matrix $\sum \partial_\mu A_\mu$ mit einer *Relaxationszeit* $\tau \sim 1/(\alpha p^2(\mathbf{k}))$ konvergieren. Das Konvergenzverhalten des *Cornell*-Alghorithmus wird somit von den langsamsten Moden bestimmt.

Die Idee der *Fourier*-Beschleunigung ist nun sehr einfach. Die Transformationsmatrix $G(x)$ muß im Impulsraum so abgeändert werden, daß alle Moden mit der Relaxationszeit der schnellsten Mode $\tau \sim 1/(\alpha p_{max}^2)$ konvergieren. Dazu muß man die Matrix $\sum \partial_\mu A_\mu$ mittels *Fourier*-Transformation in den Impulsraum bringen, dort mit $p_{max}^2/p^2(\mathbf{k})$ multiplizieren und schließlich wieder zurück in den Ortsraum transformieren. Dies setzt man dann in Gleichung (3.9) ein. Man erhält dann für die Transformationsmatrix $G(x)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} G(x) &= \exp\left(ig\alpha\mathcal{F}^{-1}\frac{p_{max}^2}{p^2(\mathbf{k})}\mathcal{F}\sum\partial_\mu A_\mu(x)\right) && (3.20)\\ &\approx 1 - ig\alpha\mathcal{F}^{-1}\frac{p_{max}^2}{p^2(\mathbf{k})}\mathcal{F}\sum\partial_\mu A_\mu(x) && (3.21)\end{aligned}$$

Nach [23] gilt diese Gleichung auch für den nicht-abelschen Fall. Zu beachten ist außerdem, daß Gleichung (3.20) für den Fall $p^2(\mathbf{k}) = 0$ singulär ist. Da die Mode mit Impuls Null nicht zur Konvergenz beiträgt, kann man für diesen Fall $p_{max}^2/p^2(\mathbf{k})$ durch jeden beliebigen endlichen Wert ersetzen, ohne die Funktion des Algorithmus' zu beeinflussen.

Für den allgemeinen Fall der *Lambda*-Eichungen müssen natürlich noch die entsprechenden Änderungen vorgenommen werden. Für den Gradienten des Eichfeldes gilt

$$\sum_\mu \partial_\mu A_\mu(x) \to \lambda\partial_4 A_4(x) + \sum_{\mu=1}^{3}\partial_\mu A_\mu(x). \tag{3.22}$$

Laut [29] ist dies aber nicht die einzige Änderung. Die Matrix $\mathcal{F}^{-1}p^{-2}(\mathbf{k})\mathcal{F}$ enspricht nämlich dem inversen *Laplace*-Operator Δ^{-1}. Dieser muß durch das Inverse des λ-*Laplace*-Operators $\Delta_\lambda = \lambda\partial_4^2 + \sum \partial_i^2$ ersetzt werden. Folglich muß auch $p^2(\mathbf{k})$ durch die Eigenwerte von Δ_λ ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\frac{1}{p^2}\mathcal{F} \quad &\rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\frac{1}{\lambda {p_4}^2 + \sum_{i=1}^3 {p_i}^2}\mathcal{F} \\ \text{mit} \quad {p_\mu}^2 \quad &= \quad \frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{k_\mu \pi}{N_\mu}\right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Prinzipiell ist die λ-Eichung auch ohne die Änderung Gl. (3.23) zu erreichen. Allerdings werden dann die Moden in $\mu = 4$-Richtung nicht optimal beschleunigt. Da die Geschwindigkeit des *Fourier*-Algorithmus' aber von der Eichung der langsamsten Mode abhängt, wird bei kleinen Werten von λ der Algorithmus ausgebremst.

Die Effizienz der *Fourier*-Beschleunigung im Vergleich zum unbeschleunigten *Cornell*-Algorithmus ist für den Fall der *Landau*-Eichung in Abbildung 3.2 dargestellt. Die *critical slowing down*-Effekte verschwinden völlig, so daß man den höheren Rechenaufwand durch die *Fourier*-Transformation gern in Kauf nimmt.

Matthias Heß beschreibt im Rahmen seiner Diplomarbeit [5] die Implementierung des Eichfixierungs-Algorithmus' mit Fourier-Beschleunigung auf einem *Distributed Memory System* für die *Landau*-Eichung. Die Implementierung des *Fast-Fourier-Algorithmus'* auf APE-Parallelrechnern wird in [24] beschrieben.

3.2.6 Der Multigrid-Algorithmus

Ein weiteres Verfahren zur Beseitigung von *critical slowing down*-Effekten soll hier kurz dargestellt werden: der *Multigrid*-Algorithmus [30]. Diese Methode wurde 1964 von dem sowjetischen Mathematiker Fedorenko [33] vorgeschlagen. Es handelt sich dabei um ein iteratives Verfahren zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen.

Gesucht sei z.B. die Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Gleichung

$$A\boldsymbol{\varphi}_x^h = \boldsymbol{f}_x^h \qquad x \in \Omega^h. \tag{3.24}$$

Dabei sind $\boldsymbol{\varphi}^h$ und $\boldsymbol{f}^h$ Funktionen und A ein partieller Differentialoperator auf einem Gitter Ω^h mit Gitterabstand h. Außerdem soll ein iterativer

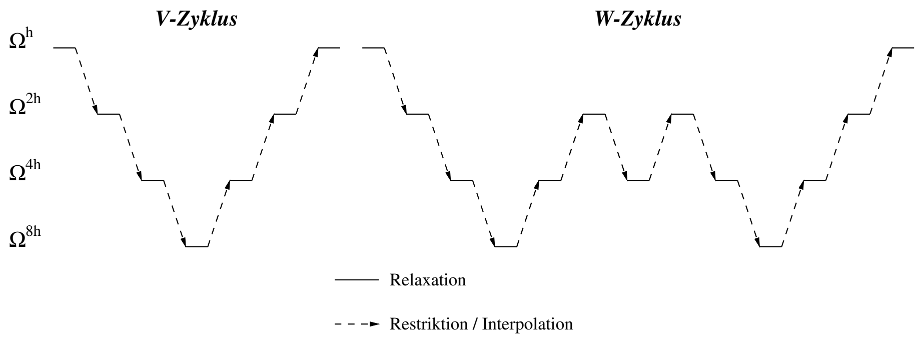


Abbildung 3.3: Der V- und der W-Zyklus des *Multigrid*-Algorithmus'.

Algorithmus $\boldsymbol{\varphi}^{h,i+1} = \mathcal{S}(\boldsymbol{\varphi}^{h,i})$ existieren, der in der Lage ist Gl. (3.24) zu lösen.

Wendet man diesen Algorithmus auf dem Gitter Ω^h an, so werden, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, die Moden mit kleinen Impulsen schneller konvergieren, als die, für das *critical slowing down* verantwortlichen Moden mit großen Impulsen. Deshalb überträgt man das Problem nach einigen Iterationen auf ein gröberes Gitter, z.B. auf ein Gitter Ω^{2h} mit doppeltem Gitterabstand.

Auf diesem gröberen Gitter rechnet man wiederum einige Iterationen. Da sich beim Übergang auf das gröbere Gitter Ω^{2h} auch die Wellenlängen der langsamen Moden halbiert haben, konvergieren diese schneller. Dieses Verfahren wiederholt man einige Male, bis zu einem Gitter $\Omega^{2^n h}$.

Anschließend interpoliert man die Funktion $\boldsymbol{\varphi}^{2^n h}$ vom groben Gitter zurück auf das feinere Gitter und rechnet nochmals einige Iterationen, um durch Interpolation und Restriktion möglicherweise entstandene Moden mit kleiner Wellenlänge zu eliminieren. Auch dies wiederholt man so lange, bis man wieder auf dem ursprünglichen Gitter Ω^h angelangt ist.

Der hier beschriebene *Multigrid*-Algorithmus heißt *V-Zyklus*. Neben diesem existieren noch weitere Methoden, wie z.B. der *W-Zyklus*, bei dem jedes grobe Gitter zweimal durchlaufen wird (siehe Abb. 3.3). Eine ausführliche Einleitung in die *Multigrid*-Theorie ist in [31] und [32] gegeben.

In ihrem Artikel [30] beschreiben Attilio Cucchieri und Tereza Mendes die Verwendung der *Multigrid*-Methode für die Eichfixierung. Unter Benutzung des inversen *Laplace*-Operators läßt sich die Transformationsmatrix $G(x)$ in Gl. (3.21) als

$$G(x) \approx 1 - ig\alpha p_{max}^2 \Delta^{-1} (\nabla A)(x) \tag{3.25}$$

umschreiben. Dies läßt sich umformen zu

$$\begin{aligned} -\Delta\boldsymbol{\varphi}_x &= \boldsymbol{f}_x \\ \text{mit} \quad \boldsymbol{\varphi}_x &= G(x) - 1 \\ \text{und} \quad \boldsymbol{f}_x &= ig\alpha p_{max}^2 (\nabla A)(x). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Gl. (3.26) ist auch als *Poisson*-Gleichung auf dem Gitter bekannt.

$\boldsymbol{\varphi}_x$ läßt sich nun durch einem *Multigrid*-Algorithmus mit *W-Zyklus* annähern. Als Relaxationsalgorithmus auf den verschiedenen Gittern kann dabei ein *Gauss-Seidel*-Algorithmus (siehe [31]) verwendet werden.

Der *Multigrid*-Algorithmus bietet drei große Vorteile:

- Die Konvergenz des Algorithmus' ist unabhängig vom Volumen des Gitters V.
- Der Rechenaufwand für eine Iteration ist nur von der Ordnung V, dem Volumen des feinsten Gitters.
- Der Algorithmus läßt sich einfach auf parallelen Maschinen mit lokaler Topologie implementieren. Wählt man den Zyklus so, daß das gröbste Gitter der Topologie des Parallelrechners entspricht, so ist nur Kommunikation zwischen benachbarten Rechnerknoten nötig.

Derzeit wird der *Multigrid*-Algorithmus erfolgreich von Attilio Cucchieri zur Fixierung der λ-Eichung eingesetzt [17] [18].

Kapitel 4

Monte-Carlo-Simulation

4.1 Erzeugung der Konfigurationen

Für die Bestimmung der Screeningmassen werden Konfigurationen der reinen $SU(3)$-Eichtheorie mit $(2,1)$-*tree-level* verbesserter Wirkung bei drei verschiedenen Kopplungen ($\beta = 4.400, 4.600$ und 4.800) und einer Gittergröße von $32^3 \times 4$ benutzt. Diese werden auf der Quadrics-Maschine *QH1a* erzeugt, wobei ein Monte-Carlo-Algorithmus mit jeweils vier *Kennedy-Pendleton-heatbath* [34] und einem *overrelaxation update* [35] verwendet wird. Bei dem *heatbath update* wird eine einzeler Link mit seiner direkten Umgebung ins thermodynamische Gleichgewicht gebracht. Die dadurch erzeugte Konfiguration ist mit der ursprünglichen Konfiguration jedoch stark korreliert. Diese Korrelation wird durch den *overrelaxation update*, bei dem der Phasenraum auf einer Hyperfläche konstanter Wirkung durchschritten wird, aufgebrochen.

Die Erzeugung der Eichfelder beginnt mit einer Einheitskonfiguration, die durch 800 solcher *big sweeps* thermalisiert wird. Die weiteren Konfigurationen sind durch jeweils 100 *big sweeps* voneinander getrennt, um eine statistische Unabhängigkeit sicherzustellen. Auf diese Weise erhält man eine *Markov*-Kette von Konfigurationen, die der *Boltzmann*-Verteilung genügen.

4.2 Bestimmung der Temperaturskala

Nach Gl. (2.46) ist die Temperatur auf einem $N_\sigma^3 \times N_\tau$-Gitter gegeben durch $T = (aN_\tau)^{-1}$. Der Gitterabstand a ist aber eine, von der Kopplung β

abhängige Größe. Die Beziehung zwischen $\beta = 2N_c/{g_0}^2$ und a wird durch die *Callan-Symanzik* β-Funktion

$$\beta(g_0) = -a\frac{\partial g}{\partial a} \tag{4.1}$$

gegeben. Diese Funktion kann auf störungstheoretische und auf nicht-störungstheoretische Weise bestimmt werden.

Bei dem störungstheoretischen Ansatz geht man davon aus, daß im Kontinuumslimes $a \to 0$ am kritischen Punkt die Kopplung g_0 verschwindet - die Theorie ist dann asymptotisch frei. Entwickelt man nun z.B. das Potential zwischen einem Quark-Antiquark-Paar für kleine g_0, so erhält man

$$\beta(g_0) = -b_0{g_0}^3 - b_1{g_0}^5 + O({g_0}^6) \;\; \text{mit} \;\; b_0 = \frac{11N_c}{48\pi^2}\,,\; b_1 = \frac{34}{3}\left(\frac{N}{16\pi^2}\right)\,.$$

Dies liefert zusammen mit Gl. (4.1) im asymptotischen Skalenbereich $g_0 \to 0$ die Beziehung

$$a\Lambda = R(\beta) = \left(\frac{\beta}{2N_c\, b_0}\right)^{\frac{b_1}{2{b_0}^2}} \exp\left(\frac{-\beta}{4N_c\, b_0}\right)\,. \tag{4.2}$$

In dieser Gleichung ist Λ ein freier Parameter der Theorie und muß durch den Vergleich mit dem Experiment bestimmt werden. Für das Verhältnis T/T_c erwartet man folglich dieses Skalenverhalten:

$$\frac{T}{T_c} = \frac{a(\beta_c)N_\tau}{a(\beta)N_\tau} = \frac{R(\beta_c)}{R(\beta)}\,. \tag{4.3}$$

Die kritische Temperatur T_c läßt sich experimentell bestimmen, und die kritische Kopplung β_c kann aus der Analyse der Suszeptibilität des Polyakov-Loops bestimmt werden [36]. Wie bereits gesagt, funktioniert der störungstheoretische Ansatz nur für kleine g_0. In der Hochtemperaturphase kann man ein Skalenverhalten gemäß Gl. (4.3) nicht erwarten.

Einen weiteren Zugang zur *Callan-Symanzik* β-Funktion liefert der nicht-störungstheoretische Ansatz. Dazu bestimmt man auf nicht-störungstheoretische Weise eine, in Gittereinheiten a gemessene Observable $\hat{\mathcal{O}}(g_0) = a\,\mathcal{O}(g_0)$ in Abhängigkeit der Kopplung β bzw. g_0. Aus dem analytischen Verlauf dieser Funktion läßt sich die β-Funktion wie folgt bestimmen.

$$\beta(g_0) = \hat{\mathcal{O}}(g_0)\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{O}}(g_0)}{\partial g_0}\right)^{-1}\,. \tag{4.4}$$

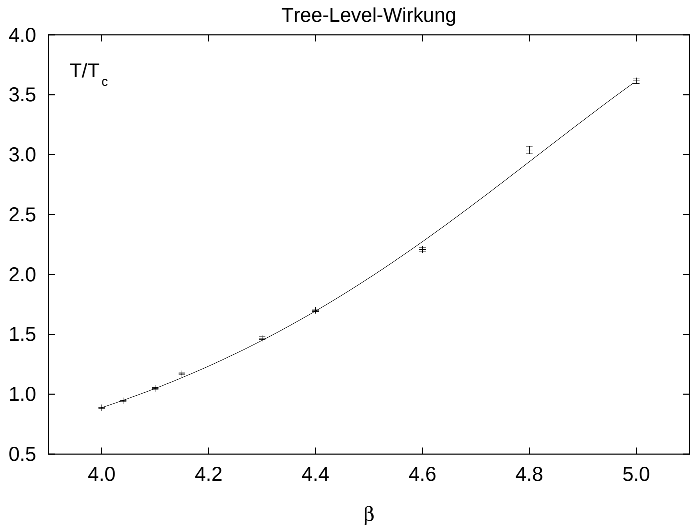


Abbildung 4.1: Temperaturskala für die $(2, 1)$-*tree level* verbesserte Wirkung, gewonnen aus der Untersuchung der *string tension* [36].

Dabei ist zu beachten, daß die so bestimmte β-Funktion nicht unabängig von der Wahl der Observable $\mathcal{O}$ ist. In seiner Diplomarbeit [36] benutzt Andreas Peikert die Quadratwurzel der *string tension* $\sqrt{\hat{\sigma}}$ zur Bestimmung der Temperaturskala. Die *string tension* $\hat{\sigma}$ ist in Gl. (2.71) bei der Beschreibung des Potentials zwischen einem Quark-Antiquark-Paar eingeführt worden. Nach [36] und [37] erhält man das Verhältnis T/T_c durch die Beziehung

$$\frac{T}{T_c} = \frac{a(\beta_c)\sqrt{\sigma}}{a(\beta)\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}}(\beta_c)}{\sqrt{\hat{\sigma}}(\beta)} \,. \tag{4.5}$$

Die Untersuchung der Suszeptibilität des Polyakov-Loops in [36] liefert für die kritische Kopplung den Wert $\beta_c = 4.0730(3)$. Die Werte der *string tension* und die daraus bestimmten Temperaturverhältnisse lauten:

β	σa^2	T/T_c
4.0730	0.1553(3)	1.000
4.4000	0.0541(5)	1.694(8)
4.6000	0.0320(4)	2.203(14)
4.8000	0.0170(3)	3.022(27)

Der Vollständigkeit halber folgen nun der Gitterabstand $a = (N_\tau T)^{-1}$ und die Temperatur T für die verwendeten Kopplungen β in physikalischen Einheiten. Dabei wurde die experimentelle Größe $\sqrt{\sigma} = 420\,MeV$ benutzt.

β	T	a
4.0730	266.4 MeV	0.193 fm
4.4000	451 ± 2 MeV	0.1139(5) fm
4.6000	587 ± 4 MeV	0.0876(6) fm
4.8000	805 ± 7 MeV	0.0639(6) fm

4.3 Eichfixierung

4.3.1 Technische Details

Zur Untersuchung der Eichinvarianz der Screeningmassen ist es nötig, die erzeugten Eichfelder in verschiedene Eichungen zu überführen. In dieser Arbeit werden die λ-Eichungen mit vier verschiedenen Parametern $\lambda = 1.0, 0.8, 0.5$ und 0.3 benutzt.

Der, zur Erzeugung der Konfigurationen verwendete Quadrics-Rechner ist aufgrund seiner Topologie für diesen Zweck nur begrenzt geeignet. Die Eichfixierung wird daher auf der *Parsytec CC-48* des *Paderborn Center for Parallel Computing* (PC^2) durchgeführt. Verwendet wird dabei ein fourierbeschleunigter Cornell-Algorithmus, der dort von Matthias Heß in seiner Diplomarbeit [5] für die Fixierung der Landau-Eichung implementiert wurde. Dieses Programm ist im Rahmen dieser Arbeit für die λ-Eichungen erweitert worden.

Als Parameter für die Schrittweite des Cornell-Algorithmus' wird $\alpha = 0.03125$ verwendet. Zur Bestimmung der Güte der Eichung wird nach allen zehn Eichfixierungsschritten der Wert von Θ (siehe Gl. (3.7)) bestimmt. Da bei einem numerischen Eichalgorithmus die Eichbedingung $\Theta = 0$ niemals exakt erfüllt werden kann, gilt eine Konfiguration als geeicht, sobald $\Theta < 10^{-9}$ ist. Die Dauer der Eichfixierung ist von Konfiguration zu Konfiguration sehr unterschiedlich. In der Regel werden 500-800 Schritte benötigt, um eine ungeeichte Konfiguration zu eichen.

In seiner Arbeit zeigte Matthias Heß, daß es theoretisch möglich ist, die verschiedenen Parallelrechner *QH1a* und *CC-48* zu einem *Metacomputing-System* zusammenzuschliessen. Die erzeugten Eichfelder können dann direkt

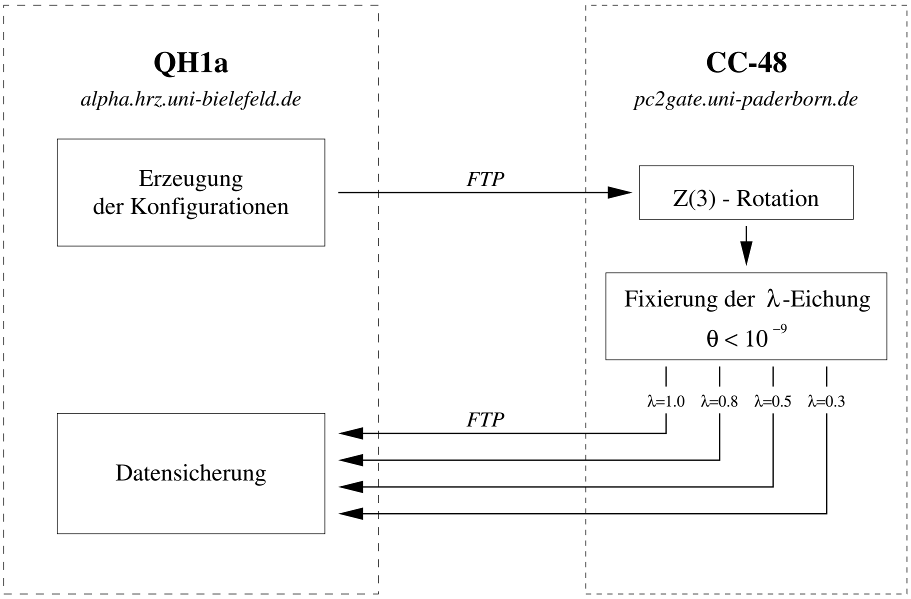


Abbildung 4.2: Programmablauf

über eine *pipeline* in das Eichfixierungsprogramm transferiert werden. Allerdings ist dies nicht während des normalen Betriebs der Rechner möglich. In dieser Arbeit werden daher die Eichfelder via *file transfer protocol* (ftp) vom *frontend* der *QH1a* zum PC^2 übermittelt. Nach erfolgreicher Eichfixierung werden die geeichten Konfigurationen zurück transferiert und auf Band ausgelagert (siehe Abb. 4.2). Dieser Vorgang wird von einem *CCS-Skript* auf Seite der *CC-48* gesteuert. Dabei muß sichergestellt werden, daß auf Seite der *QH1a-frontend* genügend freier Speicherplatz bereitsteht.

4.3.2 Das Polyakov-Loop-Kriterium

In der Hochtemperaturphase der reinen $SU(3)$-Eichtheorie besitzt der Polyakov-Loop L aufgrund der Z(3)-Symmetrie der Wirkung eine Verteilung gemäß

$$L \sim \exp\left(\frac{2\pi i}{3} l\right) |L| \quad \text{mit } l = 0, 1, 2\ . \tag{4.6}$$

Die $Z(3)$-Symmetrie der Wirkung wird allerdings gebrochen, sobald man dynamische Fermionen in der Theorie zuläßt. Der Polyakov-Loop nimmt in diesem Fall nur Werte im reellen Sektor ($l = 0$) an.

Dieser Sektor ist auch für die Bestimmung der Screeningmassen relevant. So zeigt Jörn Rank für die reine $SU(2)$-Eichtheorie in Landaueichung [4], daß die $(4,4)$-Komponente des Gluonpropagators einer Eichfeldkonfiguration einen deutlich zu hohen Wert annimmt, falls L nicht im positiv-reellen Sektor liegt, was schließlich zu einer falschen Vorhersage der elektrischen Screeningmasse führt.

Vor der Fixierung der Lambdaeichung wird aus diesem Grund für jede Konfiguration der Wert des Polyakov-Loops L bestimmt. Falls dieser sich in einem Sektor $l \neq 0$ befindet, wird das Eichfeld mittels einer globalen $Z(3)$-Transformation

$$U_4(\vec{x}, x_4 = N_\tau) \rightarrow \exp\left(-\frac{2\pi i}{3} l\right) U_4(\vec{x}, x_4 = N_\tau) \quad \forall \vec{x} \tag{4.7}$$

in den reellen Sektor transformiert.

4.3.3 Der Einfluss des Parameters λ

Die anfänglichen Durchführungen der Eichfixierungen legten die Vermutung nahe, daß auch der Parameter λ einen Einfluss auf die Dauer der Eichfixierung habe. So benötigten die Eichungen bei kleinen λ-Werten deutlich mehr Iterationsschritte als bei der *Landau*-Eichung. Dies änderte sich allerdings, nachdem die *Fourier*-Beschleunigung gemäß Gl. (3.23) abgeändert wurde. Danach konnte keine signifikant längere Eichfixierungsdauer selbst bei sehr kleinen λ-Werten festgestellt werden.

Um die Eichungen zu beschleunigen wurde in mehreren Schritten gearbeitet. Zuerst wurden die ungeeichten Konfigurationen mit $\lambda = 1.0$ geeicht. Die so geeichten Konfigurationen wurden dann mit $\lambda = 0.8$ weiter geeicht, u.s.w. Auf diese Weise konnte die Eichfixierungsdauer für die Eichungen mit $\lambda = 0.8, 0.5, 0.3$ auf etwa 100-200 Iterationen reduziert werden.

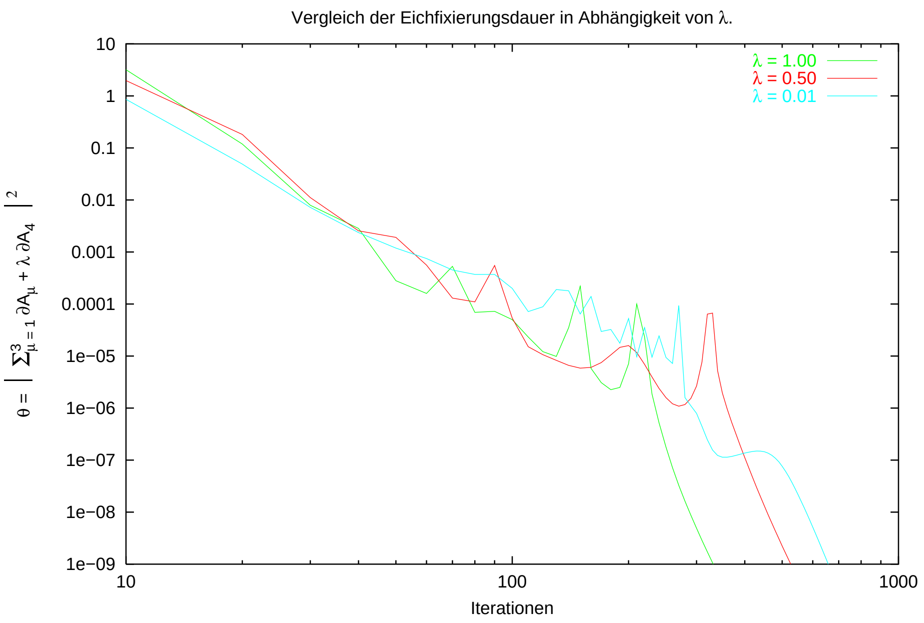


Abbildung 4.3: Die Dauer der Eichfixierung hängt nur sehr wenig vom Parameter λ ab.

4.4 Bestimmung der elektrischen Screeningmasse aus dem Singulettpotential

Die elektrische Screeningmasse m_e soll nun, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, aus den Korrelationsfunktionen der Polyakovloops bestimmt werden. Damit die Ergebnisse später mit den, aus der Analyse des Gluonpropagators gewonnenen Massen verglichen werden können, werden, anders als in Gl. (2.76), über Hyperflächen gemittelte Polyakovloops betrachtet. Diese werden für die geeichten Konfigurationen wie folgt ermittelt.

$$\Omega(z) \equiv \frac{1}{N_x N_y} \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \prod_{\tau=1}^{N_\tau} U_4(x,y,z,\tau) \tag{4.8}$$

Das Singulettpotential $V_1(z)$ läßt sich dann, unter Ausnutzung der Translationsinvarianz, durch die Gleichung

$$e^{-V_1(z,T)/T} = \frac{N_c}{N_z} \sum_{x_3=1}^{N_z} \frac{\left\langle \mathrm{Tr}\,\Omega(x_3+z)\Omega^\dagger(x_3) \right\rangle}{\langle |L| \rangle^2} \tag{4.9}$$

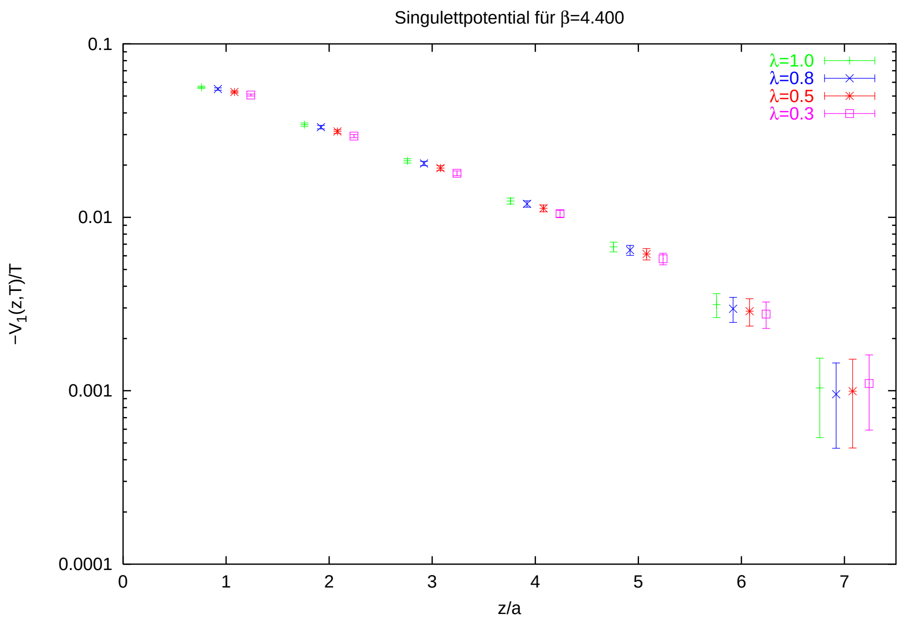


Abbildung 4.4: Das Singulettpotential für $\beta = 4.400$ in verschiedenen λ-Eichungen.

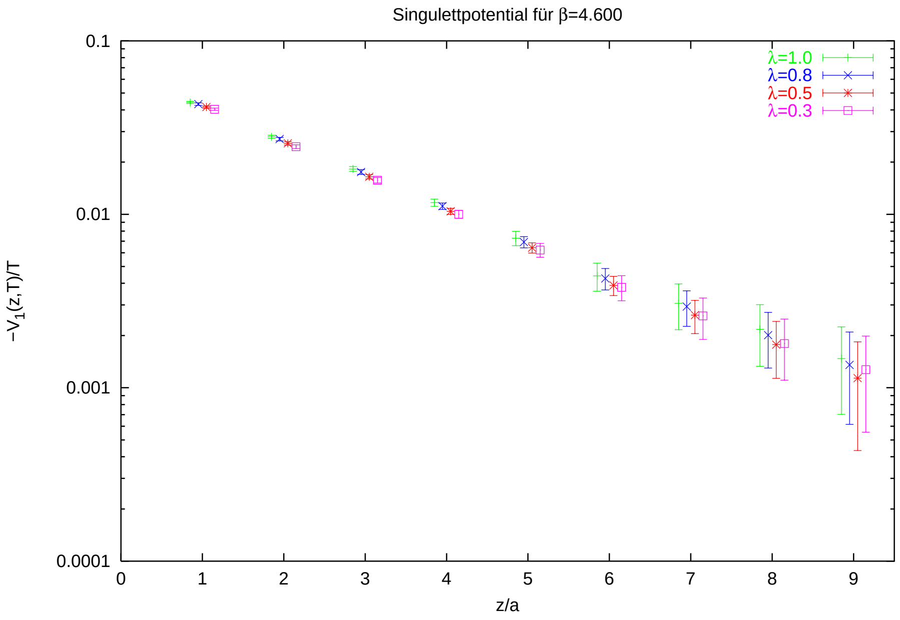
bestimmen. Die Ergebnisse der Simulation sind in Abb. 4.4 und 4.5 dargestellt. Dabei wurden für jeden Wert der Kopplung β und in jeder Eichung jeweils 60 Eichfeld-Konfigurationen benutzt. Die Mittelwerte und Fehler wurden mit dem Jackknife-Verfahren bestimmt.

Die elektrische Screeningmasse kann aus den Werten für das Singulettpotential durch ein Fit gewonnen werden. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen gilt

$$-V_1(z,T)/T = C\ \cosh\left(\hat{m}_e\left(\hat{z} - N_z/2\right)\right)\ . \tag{4.10}$$

Der Fit dieser Funktion liefert folgende Werte für m_e in Einheiten der Temperatur:

$m_{e,fit}/T$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
$\beta = 4.400$	2.33(11)	2.35(11)	2.32(12)	2.31(12)
$\beta = 4.600$	1.81(12)	1.83(10)	1.87(10)	1.82(12)
$\beta = 4.800$	1.824(92)	1.824(92)	1.824(92)	1.856(80)



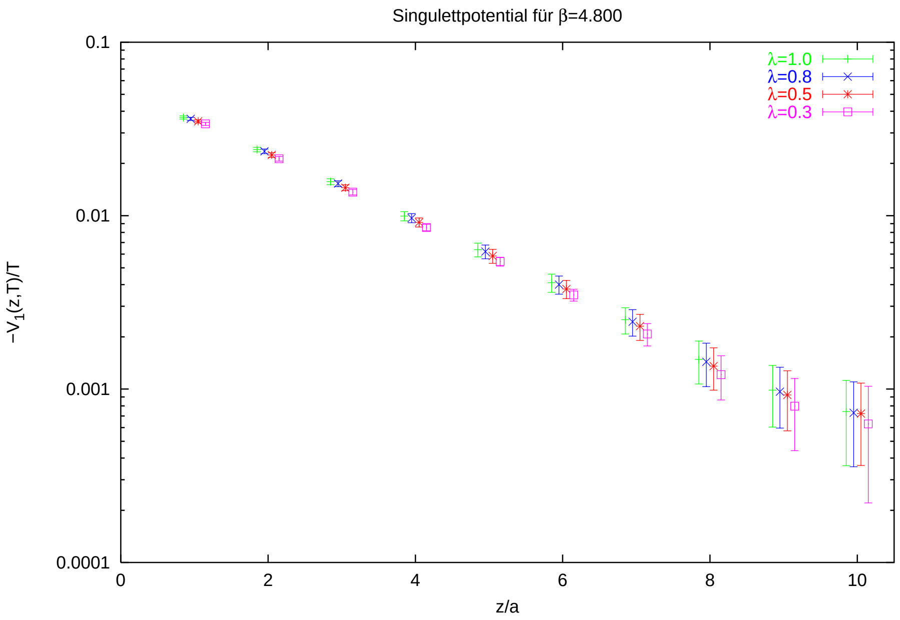


Abbildung 4.5: Das Singulettpotential für $\beta = 4.600$ und $\beta = 4.800$ in verschiedenen λ-Eichungen.

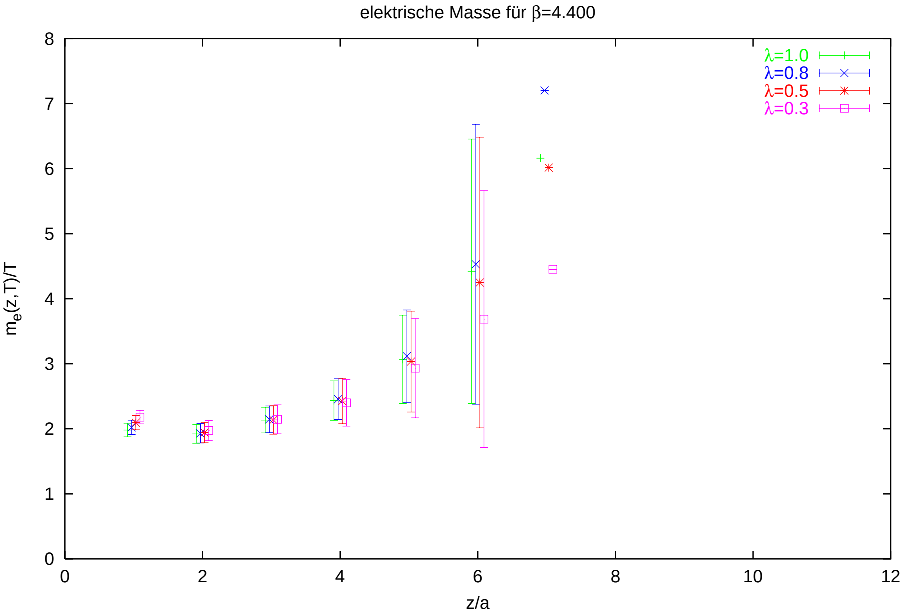


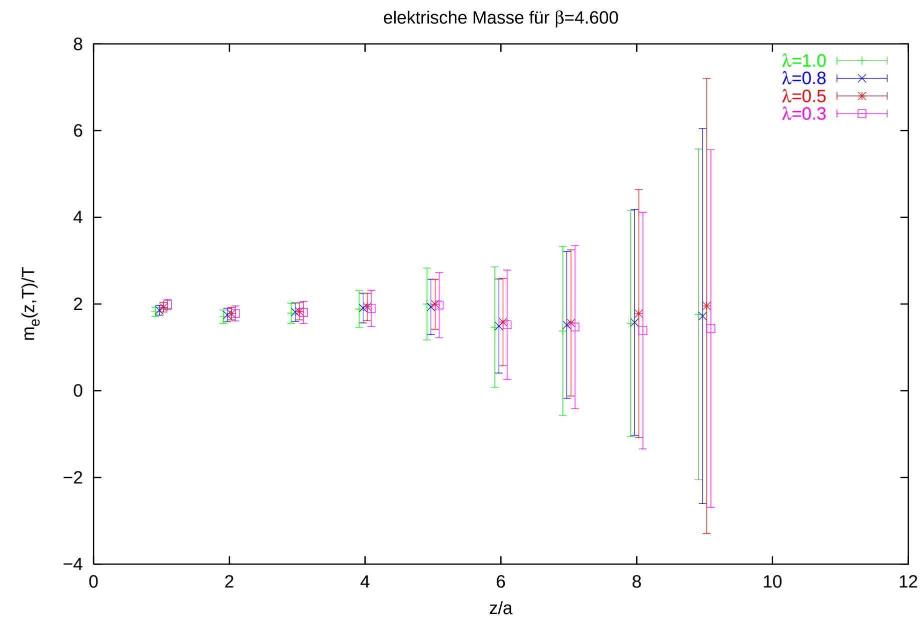
Abbildung 4.6: Die lokalen elektrischen Massen für $\beta = 4.400$ in verschiedenen λ-Eichungen, aus dem Singulettpotential bestimmt.

Genaugenommen gilt Gl. (4.10) nur für genügend große Abstände z. Mit zunehmendem Abstand wird jedoch der Fehler des Singulettpotentials sehr groß. Der Fit wurde deshalb über ein Intervall von z durchgeführt, in dem $\ln(-V_1(z,T)/T)$ linear bezüglich z ist. So wurde das Singulettpotential für $\beta = 4.400$ über das Intervall $\hat{z} \in [3,6]$ und für $\beta \geq 4.600$ über $\hat{z} \in [3,9]$ gefittet. Auch die Analyse des reduzierten Chi-Quadrats $\tilde{\chi}^2 = \chi^2/(N-p)$ liefert für diese Intervalle befriedigende Ergebnisse.

Nach Gl. (2.77) lassen sich die elektrischen Screeningmassen auch direkt aus den Singulettpotential berechnen. Wenn z nicht zu groß ist gilt dabei

$$\hat{m}_e(z,T) = -\ln \frac{V_1(\hat{z},T)}{V_1(\hat{z}+1,T)} \tag{4.11}$$

Da Gl. (2.77) aber nur für große Abstände gilt, sind die auf diese Weise bestimmten *lokalen Massen* noch explizit von z abhängig. Zu größeren Abständen hin erwartet man, daß die lokalen Massen gegen die gesuchte z-unabhängige Masse $m_e(T)$ strebt.



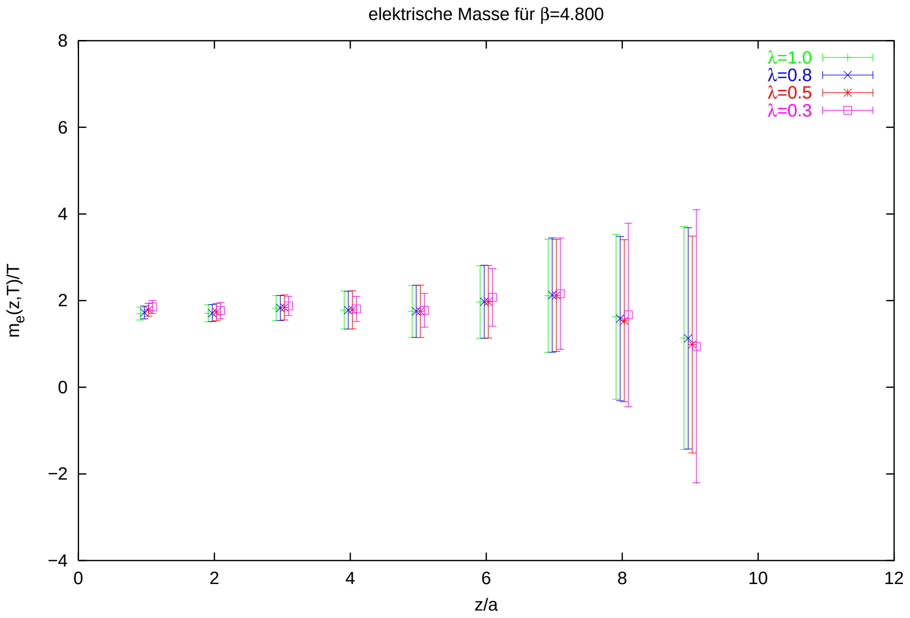


Abbildung 4.7: Die lokalen elektrischen Massen für $\beta = 4.600$ und $\beta = 4.800$ in verschiedenen λ-Eichungen, aus dem Singulettpotential bestimmt.

In Abb. 4.6 und 4.7 sind die lokalen Massen für die benutzten Kopplungen β in verschiedenen λ-Eichungen dargestellt. Aufgrund der geringen Statistik sind nur die lokalen Massen für kleine Abstände z betrachtet worden. Diese zeigen jedoch für $\beta \geq 4.600$ eine Übereinstimmung mit den gefitteten Werten von m_e. Außerdem zeigen die Massen eine sehr gute Invarianz bezüglich der verwendeten Eichung.

4.5 Bestimmung der Screeningmassen aus den Gluonpropagatoren

Wie in Abschnitt 2.4.3 beschrieben, lassen sich die elektrische und die magnetische Screeningmasse auch aus der Analyse des, über Hyperebenen gemittelten Gluonpropagators gewinnen. Dieser ist auf dem Gitter definiert als

$$G_i(z) \equiv \frac{1}{N_z} \sum_{x_3=1}^{N_z} \left\langle \tilde{A}_i(x_3+z)\tilde{A}_i(x_3) \right\rangle , \tag{4.12}$$

wobei $\tilde{A}_\mu(z)$ die über die zur z-Richtung senkrechten Hyperfläche summierten Eichfelder sind.

$$\tilde{A}_\mu(z) \equiv \sum_{x,y,t} A_\mu(x,y,z,t) \tag{4.13}$$

Die Eichfelder A_μ lassen sich durch Gl. (2.80) aus den Links U_μ bestimmen. Zusammen mit der Eichbedingung (3.3) folgt aus dieser Definition sofort, daß der Propagator $G_3(z)$ in λ-Eichung einen, von z unabhängigen konstanten Wert annehmen muß. Diese Eigenschaft soll im Folgenden dazu benutzt werden, die Güte der Eichung zu kontrollieren.

Die beiden Gluonpropagatoren $G_{av}(z) = (G_1(z) + G_2(z))/2$ und $G_4(z)$ zeigen folgendes Verhalten:

$$G_{av} \sim e^{-m_m(T)z} , \tag{4.14}$$
$$G_4 \sim e^{-m_e(T)z} . \tag{4.15}$$

Wie schon bei der Bestimmung des Singulett-Potentials wurden für die Bestimmung der Gluonpropagatoren bei jedem Kopplung und in jeder Eichung jeweils 60 Konfigurationen benutzt. Nur die Simulation bei $\beta = 4.800$ mit den Eichparametern $\lambda = 1.0$ und 0.3 wurden mit je 120 Konfigurationen durchgeführt. Bei $\beta = 4.800$ wurde außerdem eine Simulation mit Eichparameter $\lambda = 0.01$ durchgeführt, um den Gluonpropagator in Nähe der Coulomb-Eichung zu untersuchen.

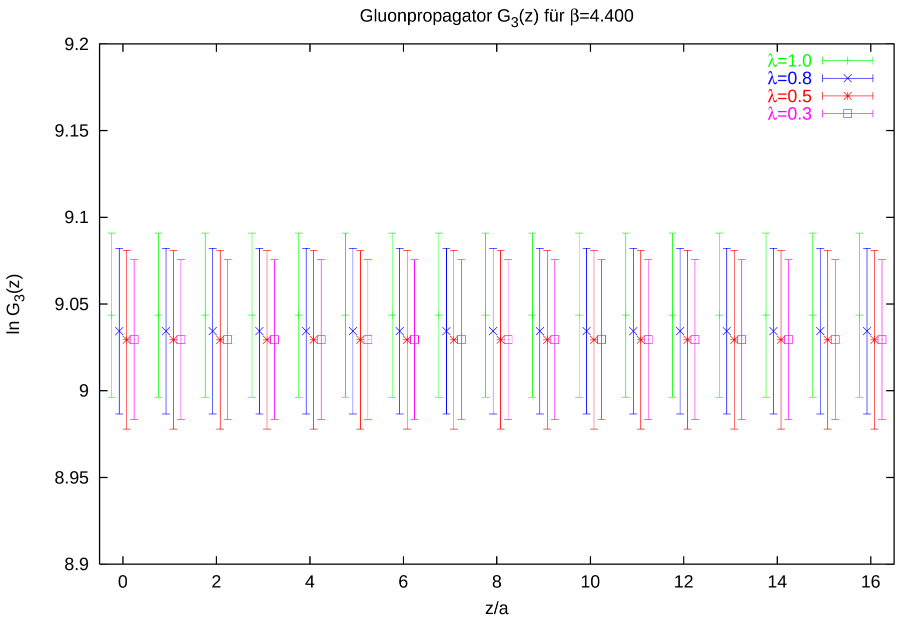


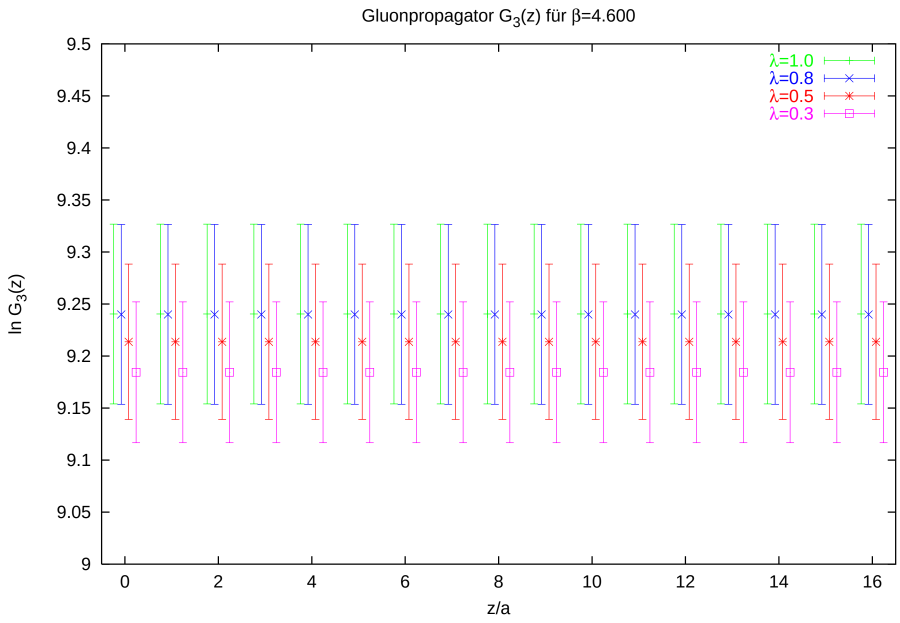
Abbildung 4.8: Der Gluonpropagator $G_3(\mathrm{z})$ für $\beta = 4.400$ in verschiedenen λ-Eichungen.

4.5.1 Die Güte der Eichfixierung

In den Abb. 4.8 und 4.9 sind die Ergebnisse der Simulation des Gluonpropagators $G_z(3)$ in Abhängigkeit von z aufgetragen. Die Werte zeigen, wie erwartet, für in jeder Eichung eine starke Unabhängigkeit von z. Die relative Abweichung vom Mittelwert liegt in der Größenordnung von $2 \cdot 10^{-5}\,\%$ und ist, verglichen mit dem statistischen Fehler, verschwindent gering. Diese hohe Konstanz findet sich nicht nur im Ensemble-Mittelwert, sondern auch in jeder einzelnen Eichfeld-Konfiguration. Dies ist ein Indiz für die hohe Güte der λ-Eichung.

Der Gluonpropagator $G_3(z)$ zeigt somit, daß der Fehler, der durch die numerische Ungenauigkeit bei der Fixierung der λ-Eichung auftritt, im Vergleich zu den statistischen Schwankungen bei der Bestimmung des Ensemble-Mittelwertes zu vernachlässigen ist.

Der Propagator $G_3(z)$ hat für $\lambda = 0.01$, $\beta = 4.800$ einen deutlich niedrigeren Wert, als in anderen Eichungen. Der Absolutwert des Propagators ist aber



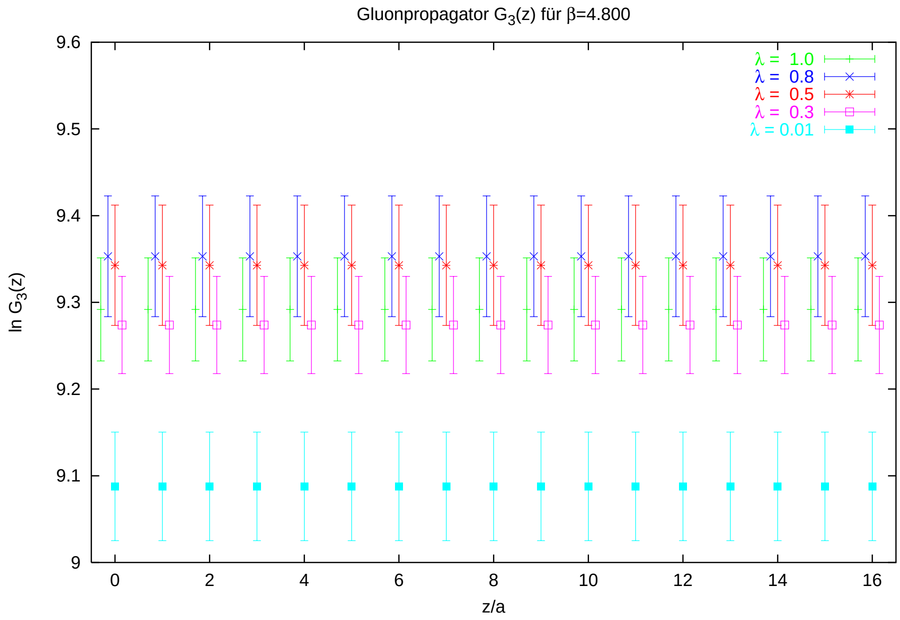


Abbildung 4.9: Der Gluonpropagator $G_3(z)$ für $\beta = 4.600$ und $\beta = 4.800$ in verschiedenen λ-Eichungen.

nicht von physikalischem Interesse. Interessant ist nur die Abhängigkeit von z. Diese Abweichung muß somit nicht weiter beachtet werden.

4.5.2 Bestimmung der elektrischen Screeningmasse

Die Ergebnisse der Simulation des Gluonpropagators $G_4(z)$ sind in den Abb. 4.10 und 4.11 dargestellt. Die Werte des Propagators stimmen unter Berücksichtigung ihrer statistischen Fehler für die verschiedenen λ-Eichungen sehr gut überein. Lediglich für den Eichparameter $\lambda = 0.01$ weichen sie geringfügig von denen in anderer Eichung ab.

Dieses Verhalten wurde bereits von A. Cucchieri und F. Karsch in [18] für die $SU(2)$-Eichtheorie beobachtet. Ob dies allerdings eine Eichinvarianz der Abschirmmasse m_e im Kontinuumslimes bedeutet ist fraglich. In ihrem Artikel zeigen sie, daß sich die Differenz zwischen den Werten des Gluonpropagators in Coulomb-Eichung ($\lambda = 0$) und λ-Eichung im Kontinuumslimes nicht verringert. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, daß dieser Effekt auf den Eichfixierungsalgorithmus zurück zuführen ist. Demnach ist für λ-Eichungen in der Nähe der Coulomb-Eichungen mit einer falschen Vorhersage der Screeningmassen zu rechnen. Zur genauen Klärung dieses Sachverhaltes sind aber noch weitere Untersuchungen bei kleinen λ-Parametern vonnöten.

Wie bereits bei der Untersuchung des Singulettpotentials läßt sich aus dem funktionalen Verlauf des Gluonpropagators $G_4(z)$ auf die Größe der elektrischen Abschirmmasse m_e schließen. Berücksichtigt man neben Gl. (4.15) auch die periodischen Randbedingungen des Gitters, so läßt sich $G_4(z)$ mit dem Ansatz

$$G_4(z) = C \cosh\left(\hat{m}_e(\hat{z} - N_z/2)\right) \tag{4.16}$$

fitten. Diese Beziehung gilt für nicht zu kleine Abstände z. Für einen stabilen Fit wählt man deshalb ein Intervall von z, in dem $\ln G_4(z)$ bereits ein lineares Verhalten zeigt, die statistischen Fehler aber noch nicht zu groß sind. Die folgenden Werte der elektrischen Screeningmasse in Einheiten der Temperatur wurden auf einem Intervall $\hat{z} \in [2, 6]$ für $\beta = 4.400$, sowie $\hat{z} \in [2, 9]$ für $\beta \geq 4.600$ gewonnen.

$m_{e,fit}/T$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.01$
$\beta = 4.400$	2.30(10)	2.32(10)	2.28(11)	2.24(11)	
$\beta = 4.600$	1.768(84)	1.768(84)	1.788(80)	1.736(80)	
$\beta = 4.800$	1.876(56)	1.816(88)	1.824(88)	1.896(56)	1.91(11)

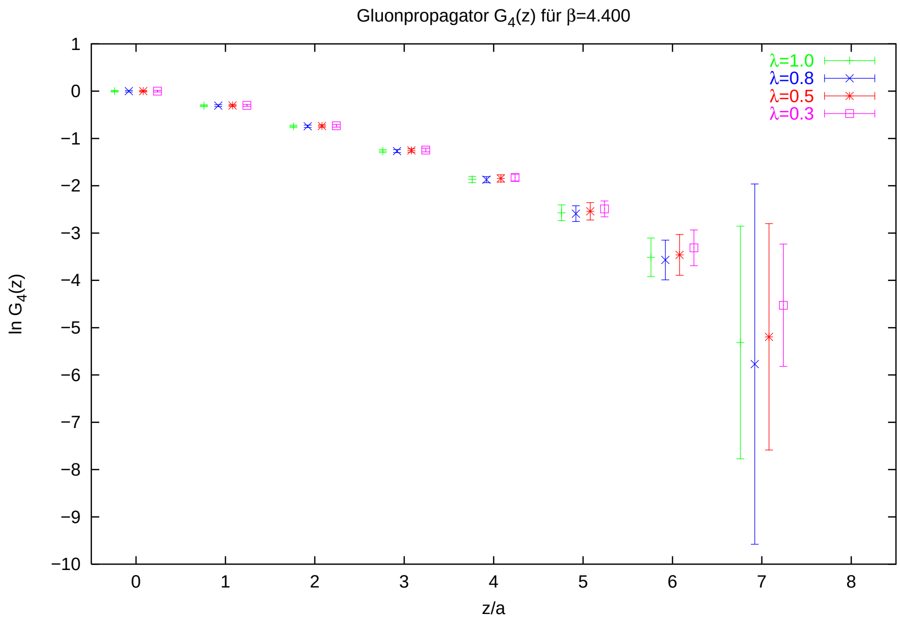
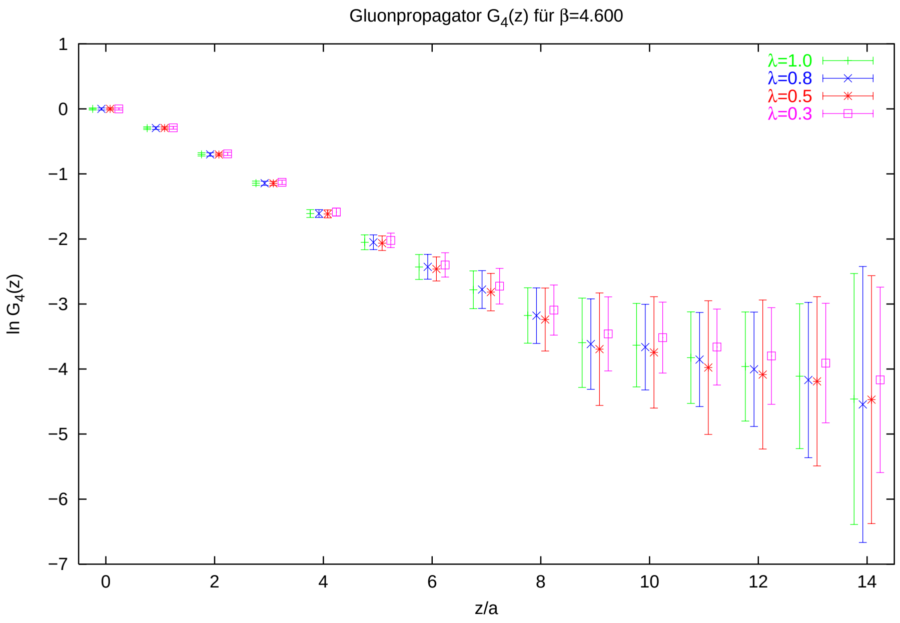


Abbildung 4.10: Der Gluonpropagator $G_4(z)$ für $\beta = 4.400$ in verschiedenen λ-Eichungen. Die Werte des Propagators sind dabei auf $G_4(0) = 1$ normiert.

Es zeigt sich, wie erwartet, daß die gefitteten elektrischen Massen in den verschiedenen Eichungen im Rahmen ihrer Fehler sehr gut übereinstimmen. Lediglich der Wert für $\beta = 4.800$, $\lambda = 0.01$ weicht aus den oben genannten Gründen etwas von den Werten in den anderen Eichungen ab.

Gleichzeitig erwartet man, daß die, aus dem Gluonpropagator G_4 gewonnenen elektrischen Massen mit den Werten aus der Analyse des Singulettpotentials übereinstimmen. Dies wird für die gefitteten Werte im Rahmen ihrer Fehler bestätigt.

Die Analyse des reduzierten Chi-Quadrats $\tilde{\chi}^2$ liefert für $\beta \geq 4.600$ gute Werte ≤ 0.5. Für $\beta = 4.400$ ist $\tilde{\chi}^2$ in der Größenordnung von eins. Hier weicht der Verlauf von $G_4(z)$ geringfügig vom prognostizierten Verlauf in Gl. (4.16) ab. Diese Abweichung läßt sich auf die geringe Statistik zurückführen.



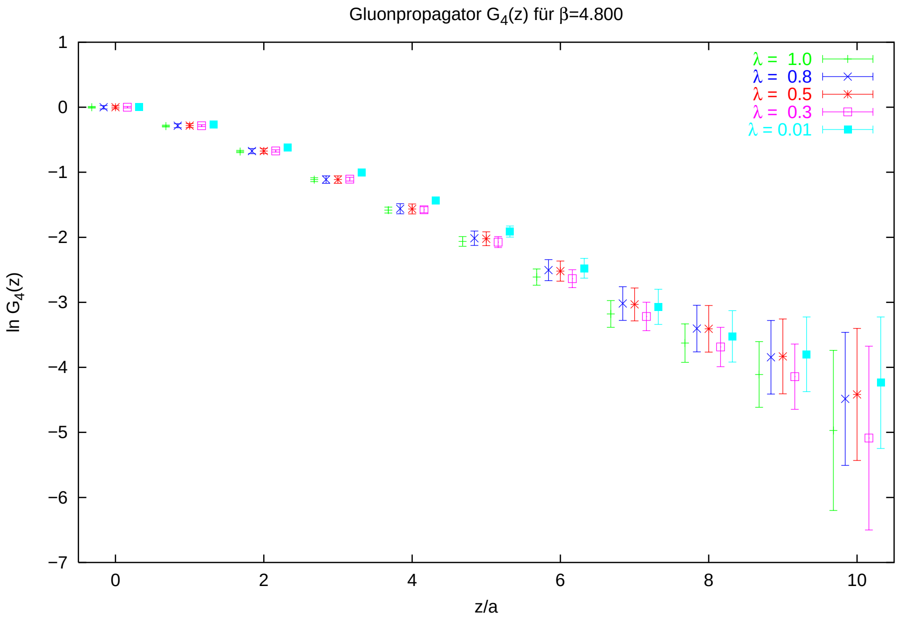


Abbildung 4.11: Der normierte Gluonpropagator $G_4(z)$ für $\beta = 4.600$ und $\beta = 4.800$ in verschiedenen λ-Eichungen.

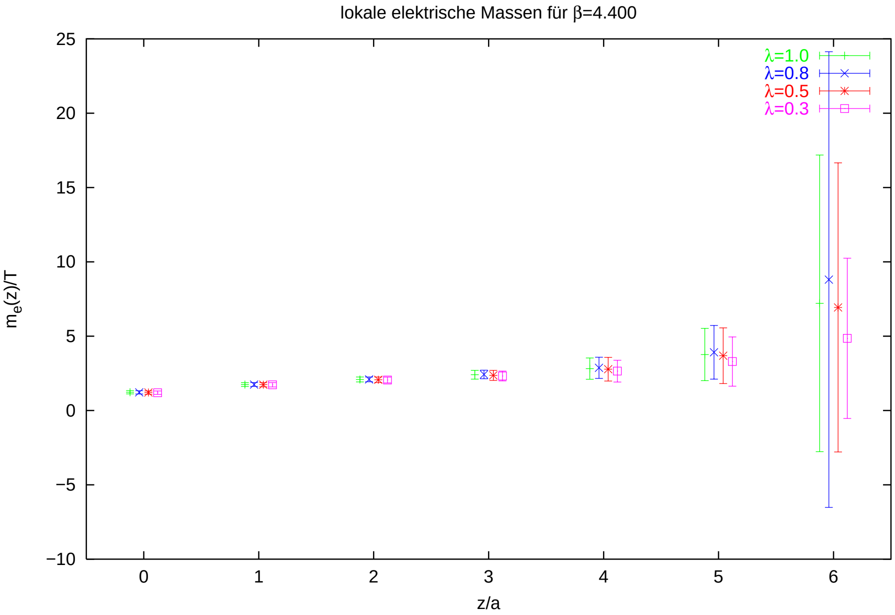


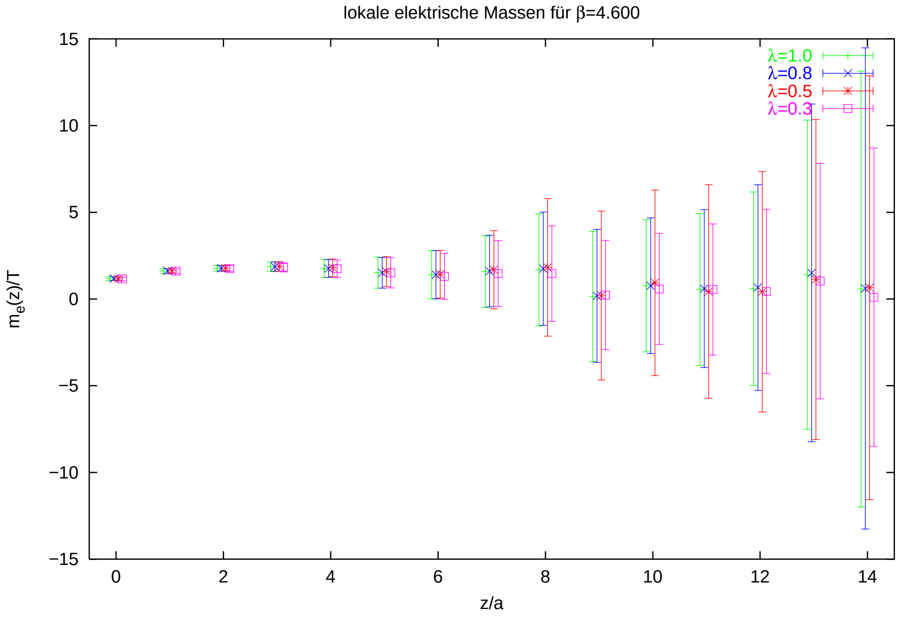
Abbildung 4.12: Die lokale elektrische Screeningmasse m_e, gewonnen aus dem Gluonpropagator $G_4(z)$ für $\beta = 4.400$ in verschiedenen λ-Eichungen.

Weitere Informationen über die Eichinvarianz der elektrischen Screeningmassen erhält man aus der Analyse der lokalen Massen

$$\hat{m}_e(z,T) = \ln \frac{G_4(\hat{z},T)}{G_4(\hat{z}+1,T)} \,. \tag{4.17}$$

Diese Gleichung berücksichtigt nicht die Randbedingungen des Gitters und gilt somit nicht für große Abstände. Genau wie bei der Untersuchung des Singulettpotentials erwartet man auch hier, daß die lokale Masse gegen einen konstanten Wert strebt. Ein solches Plateau läßt sich in Abb. 4.10 und 4.11 tatsächlich beobachten. Die lokalen Massen $m_e(z)$ zeigen außerdem eine gute Übereinstimmung mit den gefitteten Werten $m_{e,fit}$. Mit steigendem z nimmt ihr statistischer Fehler aber sehr stark zu, sodaß eine genaue Bestimmung der Masse m_e aus den lokalen Massen nicht möglich ist.

Insgesamt stimmen die lokalen Massen $m_e(z)$ aber in allen Eichungen sehr gut überein. Eine Abweichung bei $\lambda = 0.01$ läßt sich in Abb. 4.11 nur für kleine z feststellen. Sie liegt aber noch im Rahmen der statistischen Fehler.



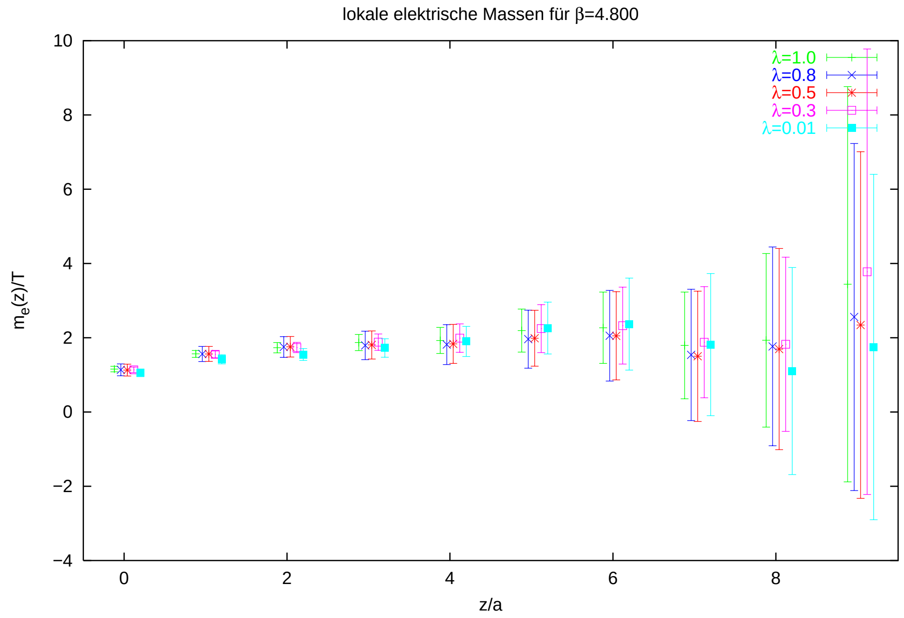


Abbildung 4.13: Die lokale elektrische Screeningmasse m_e, gewonnen aus dem Gluonpropagator $G_4(z)$ für $\beta = 4.600$ und $\beta = 4.800$ in verschiedenen λ-Eichungen.

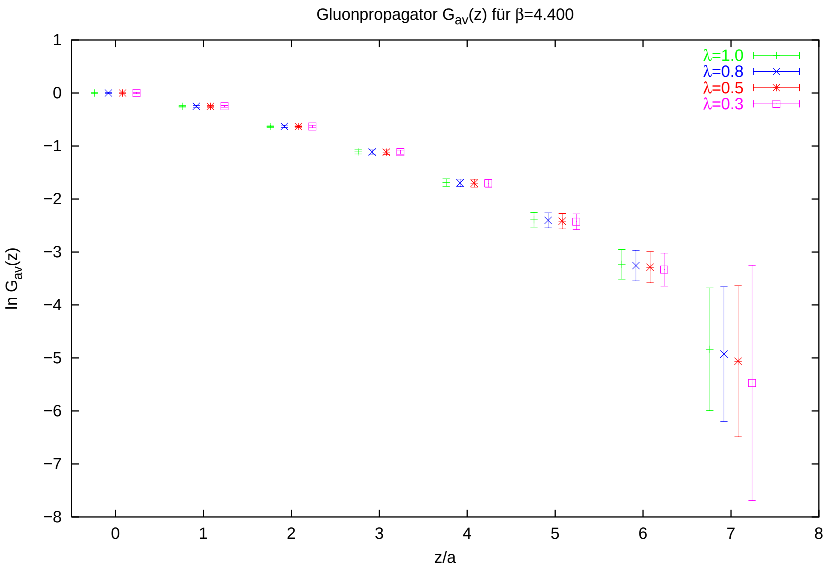


Abbildung 4.14: Der Gluonpropagator $G_{av}(z)$ für $\beta = 4.400$ in verschiedenen λ-Eichungen. Die Werte des Propagators sind dabei auf $G_{av}(0) = 1$ normiert.

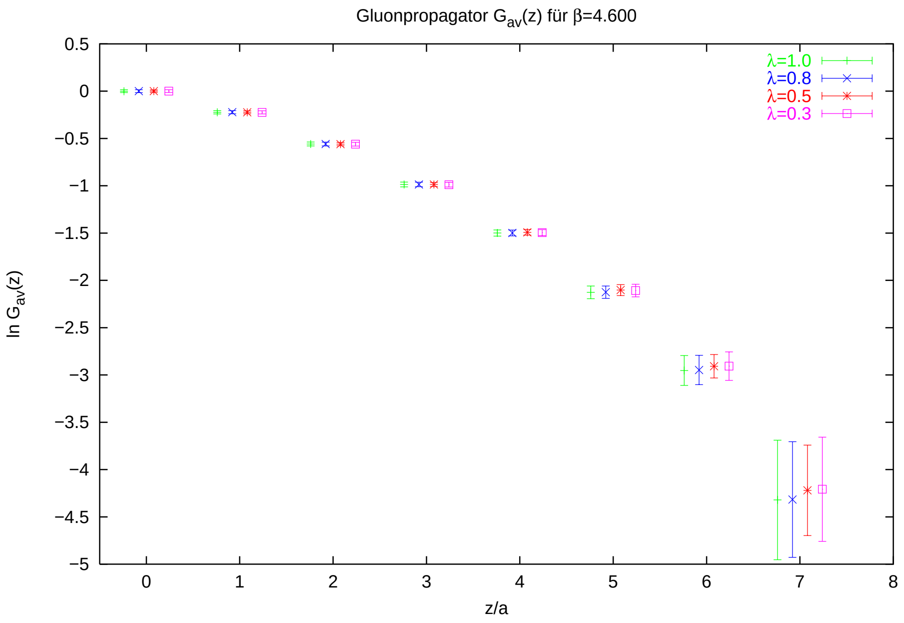
4.5.3 Bestimmung der magnetischen Screeningmasse

Die Ergebnisse der Simulation des Gluonpropagators $G_{av}(z)$ sind in den Abb. 4.14 und 4.15 dargestellt. Sie zeigen eine sehr gute Übereinstimmung in allen λ-Eichungen. Abweichungen für $\lambda = 0.01$, wie bei $G_4(z)$ beobachtet, können hier nicht festgestellt werden. Ein Fit des Gluonpropagators $G_{av}(z)$ mit der Funktion

$$G_{av}(z) = C \cosh\left(\hat{m}_m(\hat{z} - N_z/2)\right) \tag{4.18}$$

führt allerdings zu einigen Problemen. In den Abb. 4.12 und 4.13 zeigt $\ln G_{av}(z)$ alles andere als einen linearen Verlauf bezüglich z. Die Ergebnisse des Fittes werden somit sehr stark von der Wahl des Intervalls abhängen, auf dem der Fit durchgeführt wird.

Für die Intervalle $\hat{z} \in [3, 6]$ für $\beta \leq 4.600$ und $\hat{z} \in [3, 7]$ für $\beta = 4.800$ liefert die Analyse des reduzierten Chi-Quadrates die besten Ergebnisse. Allerdings ist $\tilde{\chi}^2$ auf diesen Intervallen immer noch recht groß ($\tilde{\chi}^2 \approx 3$ für $\beta = 4.600$). Die Ergebnisse des Fittes können somit nur als sehr grobe Abschätzung der magnetischen Masse m_m angesehen werden.



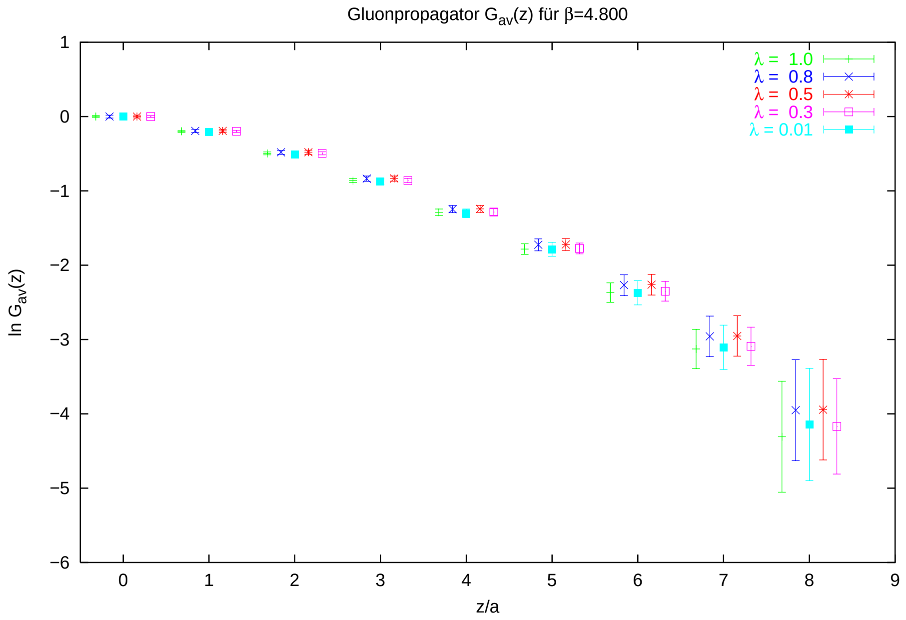


Abbildung 4.15: Der normierte Gluonpropagator $G_{av}(z)$ für $\beta = 4.600$ und $\beta = 4.800$ in verschiedenen λ-Eichungen.

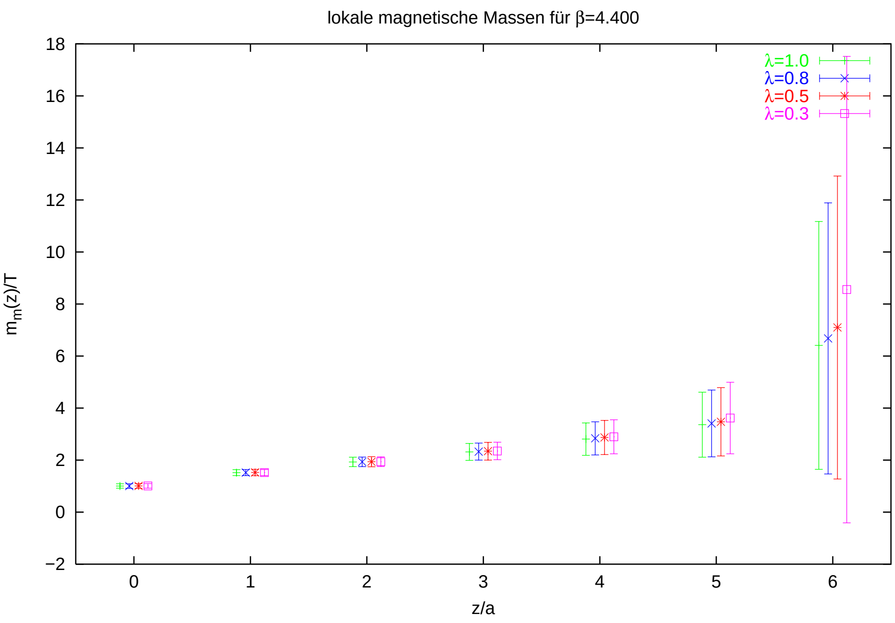


Abbildung 4.16: Die lokale magnetische Screeningmasse m_m, gewonnen aus dem Gluonpropagator $G_4(z)$ für $\beta = 4.400$ in verschiedenen λ-Eichungen.

Der Fit des Gluonpropagators $G_{av}(z)$ liefert folgende magnetischen Massen:

$m_{m,fit}/T$	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.01$
$\beta = 4.400$	2.58(19)	2.60(20)	2.63(20)	2.65(20)	
$\beta = 4.600$	2.32(10)	2.30(10)	2.29(9)	2.27(10)	
$\beta = 4.800$	1.96(10)	1.88(12)	1.88(12)	1.94(10)	1.96(13)

Die gefitteten magnetischen Massen $m_{m,fit}$ zeigen bei jeder Kopplung eine gute Invarianz bezüglich der verwendeten Eichung.

Zur genaueren Bestimmung der magnetischen Screeningmasse m_m werden nun die lokalen Massen $m_m(z)$ untersucht. Diese sind, für nicht zu große Abstände, durch

$$\hat{m}_m(z,T) = \ln \frac{G_{av}(\hat{z},T)}{G_{av}(\hat{z}+1,T)} \tag{4.19}$$

gegeben. Die Ergebnisse der Simulation sind in den Abb. 4.16 und 4.17 dargestellt. Wie schon bei der elektrischen Screeningmasse zeigt sich auch

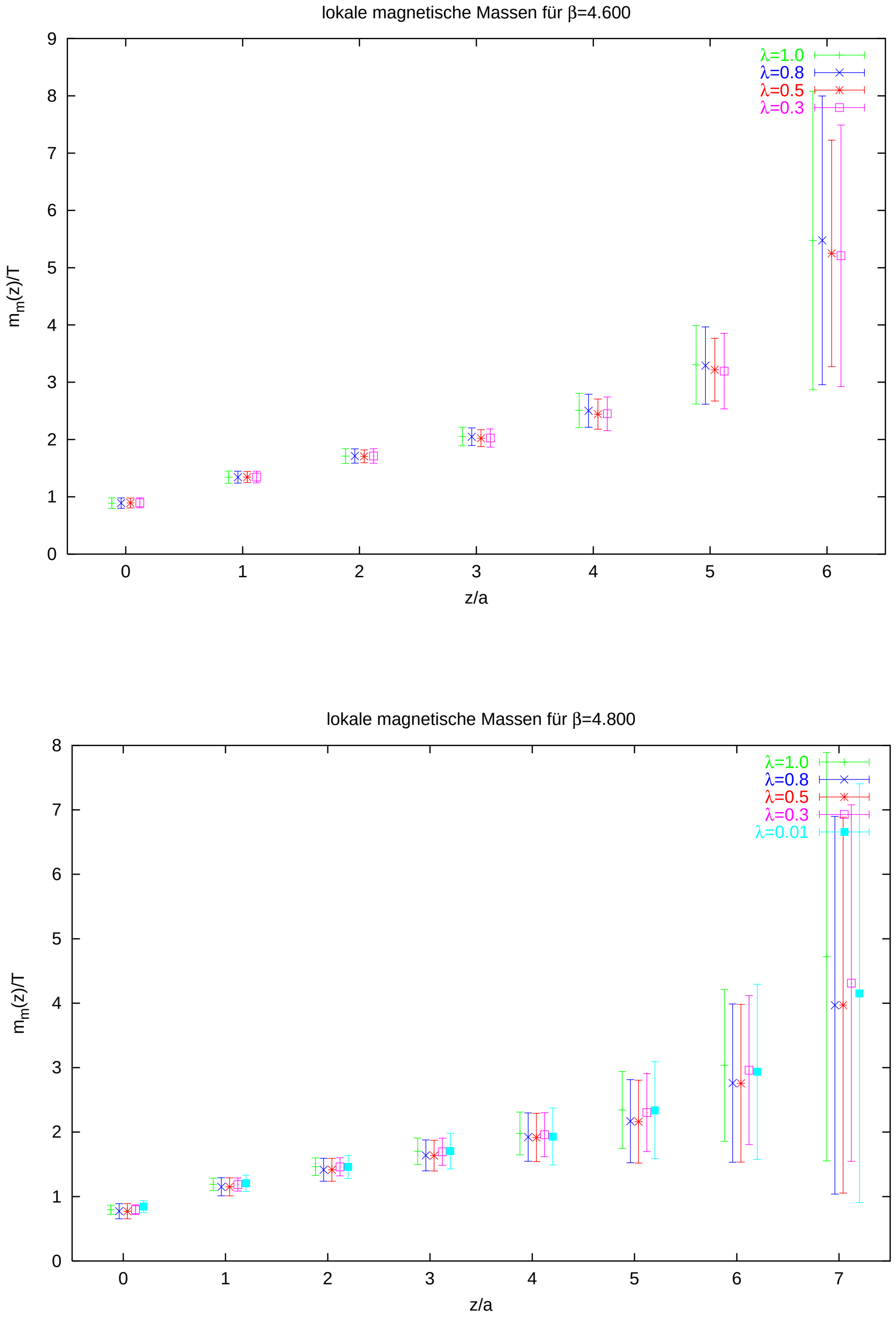


Abbildung 4.17: Die lokale magnetische Screeningmasse m_m, gewonnen aus dem Gluonpropagator $G_{av}(z)$ für $\beta = 4.600$ und $\beta = 4.800$ in verschiedenen λ-Eichungen.

bei der lokalen magnetischen Masse eine sehr gute Invarianz unter den verschiedenen λ-Eichungen.

Auch bei der lokalen magnetischen Masse $m_m(z,T)$ erwartet man, daß sie mit steigendem Abstand gegen einen konstanten Wert $m_m(T)$ strebt. Ein Plateau, wie bei der Untersuchung der lokalen elektrischen Massen, kann bei dieser Simulation allerdings nicht festgestellt werden. Vielmehr steigen die lokalen magnetischen Massen $m_m(z,T)$ mit steigendem z weiter an.

In seiner Diplomarbeit [4] zeigt J. Rank, daß das Plateau bei der lokalen magnetischen Masse wesentlich später einsetzt als bei der lokalen elektrischen Masse. Zur Bestimmung der magnetischen Screeningmasse $m_m(T)$ müßte daher der Gluonpropagator G_{av} mit wesentlich höherer Statistik simuliert werden, damit auch lokale Massen bei höheren Abständen z bestimmt werden können.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das Screeningverhalten der Gluonen in der Hochtemperaturphase der reinen $SU(3)$-Gittereichtheorie untersucht. Die Simulationen wurden alle oberhalb der kritischen Temperatur T_c des Deconfinement-Phasenüberganges durchgeführt. Ziel der Simulationen war es, die Invarianz der Screeningmassen m_e und m_m unter den λ-Eichungen zu überprüfen.

Ein erster Schwerpunkt war deshalb, die Implementierung eines Eichfixierungs-Algorithmus' für die λ-Eichung. Zu diesem Zweck wurde das, für die Landau-Eichung bereits bestehende Programm von M. Heß [5] für diese Eichungen erweitert. Die Funktion des Algorithmus' konnte durch Berechnung der Größen Θ_λ und $G_3(z)$ bestätigt werden.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit war die Bestimmung der elektrischen und magnetischen Screeningmassen $m_e(T)$ und $m_m(T)$. Dazu wurden aus den Polyakovloop-Korrelationen das Singulettpotential, sowie aus den Korrelationen der Eichfelder A_μ die Gluonpropagatoren G_4 und G_{av} in verschiedenen Eichungen berechnet. Dabei zeigte sich, mit Ausnahme der Eichungen mit sehr kleinem Parameter λ, eine sehr gute Eichinvarianz der Korrelationsfunktionen. Die Abweichung bei $\lambda = 0.01$ wurde bereits von F. Karsch und A. Cucchieri in [18] beobachtet, und deutet auf ein *'Artefakt'* des Eichfixierungsalgorithmus' bei kleinen λ-Werten hin.

Um eine Abschätzung für die Screeningmassen zu bekommen, wurden die Korrelationsfunktionen gefittet. Die, auf diese Weise aus dem Gluonpropagator bestimmten elektrischen Abschirmmassen wurden mit den, aus dem Singulettpotential berechneten Werten verglichen. Dabei zeigte sich, wie theoretisch erwartet, eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse beider Verfahren. Eine Inkonsistenz, wie sie M. Heß in [5] für $T/T_c = 10.7$ in Landau-Eichung festgestellt hatte, konnte nicht beobachtet werden.

Insgesamt stimmen die berechneten Massen in ihrer Größenordnung mit den Werten anderer Veröffentlichungen überein. So wurde in dieser Arbeit bei der Temperatur $T/T_c = 3.03$ in Landau-Eichung durch Fitten des Gluonpropagators $G_4(z)$ eine elektrische Screeningmasse $m_e/T = 1.876(56)$ bestimmt. In [13] wurde von Heller, Karsch und Rank bei gleicher Temperatur eine elektrische Screeningmasse von der Größe $m_e/T = 1.97(3)$ berechnet.

Eine genauere Methode zur Bestimmung der Screeningmassen ist die Untersuchung der lokalen Massen $m_e(z)$ und $m_m(z)$. Diese konnten aufgrund der geringen Statistik nur für kleine Abstände z bestimmt werden. Sie zeigen eine sehr gute Invarianz bezüglich der benutzten λ-Eichungen. Selbst bei dem kleinem Eichparameter $\lambda = 0.01$ tritt keine größere Abweichung auf. Die Invarianz der Screeningmassen unter λ-Eichungen in der Hochtemperaturphase wurde somit, im Rahmen der statistischen Fehler, bestätigt.

Der genaue Wert der Screeningmassen konnte aufgrund der geringen Statistik nicht ermittelt werden. Das, bei der lokalen elektrischen Screeningmasse gefundene Plateau bestätigt jedoch die durch den Fit ermittelten Werte von $m_e(T)$.

Für weitere Untersuchungen sind Simulationen der lokalen Screeningmassen in λ-Eichungen mit wesentlich höherer Statistik von großem Interesse. Dabei bedarf insbesondere der Algorithmus des Eichfixierung für kleine λ-Werte weiterer Untersuchungen.

Außerdem ist es interessant, die Screeningmassen bei anderer Definiton der Eichung zu untersuchen. So wird momentan von Peter Petreczki eine Eichbedingung

$$\lambda \partial_3 A_3(x) + \sum_{\mu=1,2,4} \partial_\mu A_\mu(x) = 0$$

benutzt. Erste Simulationen deuten darauf hin, daß die lokalen Screeningmassen $m_e(z, T)$ und $m_m(z, T)$ in dieser Eichung vom Parameter λ abhängig sind [38].

Anhang A

Ergebnisse der Simulation

A.1 Polyakov-Loop-Korrelationen

In den nachfolgenden Tabellen dieses Abschnittes sind die, durch die Untersuchung der Polyakov-Loop-Korrelationen gewonnenen Werte für das Singulettpotential eines statischen Quark-Antiquark-Paares aufgeführt.

Den Werten liegen jeweils 60 Konfigurationen bei 4 verschiedenen λ-Werten (1.0, 0.8, 0.5, 0.3) und 3 verschiedenen Kopplungen β (4.400, 4.600, 4.800) zugrunde. Die Simulationen wurden auf einem $32^4 \times 4$ Gitter durchgeführt.

In Tabelle A.4 sind die aus den Singulettpotentialen gewonnenen Werte für die lokalen elektrischen Massen aufgelistet. Aufgrund der Vorzeichenwechsel bei den Singulettpotentialen und den großen Fehlern wurden aber nur die Massen von $z \leq 8$ aufgeführt.

Singulett-Potential ($\beta = 4.400$)

	$-V_{sing}(zT,z)/T$	
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$
1	5.6174e-02 ± 8.20e-04	5.4911e-02 ± 8.31e-04
2	3.4226e-02 ± 7.46e-04	3.3115e-02 ± 7.58e-04
3	2.1167e-02 ± 6.00e-04	2.0433e-02 ± 6.04e-04
4	1.2414e-02 ± 4.99e-04	1.1948e-02 ± 4.99e-04
5	6.7552e-03 ± 4.33e-04	6.4659e-03 ± 4.30e-04
6	3.1363e-03 ± 4.92e-04	2.9660e-03 ± 4.88e-04
7	1.0381e-03 ± 5.02e-04	9.5557e-04 ± 4.90e-04
8	2.2237e-04 ± 5.01e-04	1.5777e-04 ± 4.77e-04
9	-2.8758e-04 ± 5.81e-04	-3.6349e-04 ± 5.53e-04
10	-5.0553e-04 ± 5.31e-04	-6.0654e-04 ± 4.91e-04
11	-6.7608e-04 ± 4.66e-04	-7.7695e-04 ± 4.20e-04
12	-4.7824e-04 ± 4.90e-04	-5.7349e-04 ± 4.29e-04
13	-1.7968e-04 ± 5.28e-04	-2.9749e-04 ± 4.60e-04
14	9.1066e-05 ± 6.54e-04	-3.0549e-05 ± 5.95e-04
15	1.9540e-04 ± 6.60e-04	1.1357e-04 ± 6.03e-04
16	6.4500e-04 ± 6.56e-04	5.8961e-04 ± 5.93e-04

	$-V_{sing}(zT,z)/T$	
z	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
1	5.2774e-02 ± 7.81e-04	5.0735e-02 ± 6.96e-04
2	3.1249e-02 ± 7.28e-04	2.9418e-02 ± 6.46e-04
3	1.9224e-02 ± 6.04e-04	1.7952e-02 ± 5.58e-04
4	1.1268e-02 ± 5.05e-04	1.0499e-02 ± 4.84e-04
5	6.1410e-03 ± 4.61e-04	5.7607e-03 ± 4.44e-04
6	2.8758e-03 ± 5.15e-04	2.7678e-03 ± 4.83e-04
7	9.9387e-04 ± 5.26e-04	1.1012e-03 ± 5.09e-04
8	2.2089e-04 ± 4.96e-04	3.6166e-04 ± 4.86e-04
9	-2.8312e-04 ± 5.57e-04	-6.0271e-05 ± 5.43e-04
10	-5.1897e-04 ± 4.99e-04	-2.1500e-04 ± 5.09e-04
11	-7.4708e-04 ± 4.01e-04	-4.5859e-04 ± 3.82e-04
12	-5.1985e-04 ± 3.95e-04	-2.0433e-04 ± 3.51e-04
13	-2.5823e-04 ± 4.13e-04	-5.2497e-05 ± 3.67e-04
14	-9.7972e-05 ± 4.97e-04	3.2826e-05 ± 4.45e-04
15	-3.4583e-06 ± 4.99e-04	1.3517e-04 ± 4.39e-04
16	3.8639e-04 ± 4.80e-04	4.1778e-04 ± 4.26e-04

Tabelle A.1: Singulettpotential für $\beta = 4.400$, bestimmt aus den über Hyperebenen gemittelten Polyakovloopkorrelationen.

Singulett-Potential ($\beta = 4.600$)

	$-V_{sing}(zT,z)/T$	
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$
1	4.4142e-02 ± 6.77e-04	4.3208e-02 ± 7.08e-04
2	2.7992e-02 ± 6.02e-04	2.7155e-02 ± 6.35e-04
3	1.8257e-02 ± 5.81e-04	1.7541e-02 ± 5.54e-04
4	1.1672e-02 ± 5.61e-04	1.1146e-02 ± 4.80e-04
5	7.2862e-03 ± 6.94e-04	6.9204e-03 ± 5.14e-04
6	4.4184e-03 ± 8.14e-04	4.2672e-03 ± 6.02e-04
7	3.0634e-03 ± 9.05e-04	2.9384e-03 ± 6.81e-04
8	2.1701e-03 ± 8.41e-04	2.0100e-03 ± 7.11e-04
9	1.4734e-03 ± 7.71e-04	1.3553e-03 ± 7.41e-04
10	9.4839e-04 ± 7.56e-04	8.8135e-04 ± 8.23e-04
11	1.2127e-03 ± 6.33e-04	1.0195e-03 ± 7.60e-04
12	1.0934e-03 ± 6.11e-04	9.2231e-04 ± 7.34e-04
13	1.0345e-03 ± 6.50e-04	7.8708e-04 ± 7.04e-04
14	9.0898e-04 ± 6.75e-04	6.8034e-04 ± 6.88e-04
15	7.7819e-04 ± 7.19e-04	4.5179e-04 ± 7.72e-04
16	6.3735e-04 ± 8.09e-04	2.1121e-04 ± 8.21e-04

	$-V_{sing}(zT,z)/T$	
z	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
1	4.1524e-02 ± 6.75e-04	4.0345e-02 ± 6.53e-04
2	2.5650e-02 ± 5.73e-04	2.4553e-02 ± 6.10e-04
3	1.6447e-02 ± 4.69e-04	1.5723e-02 ± 5.59e-04
4	1.0405e-02 ± 4.18e-04	1.0006e-02 ± 5.28e-04
5	6.4139e-03 ± 4.35e-04	6.2248e-03 ± 5.65e-04
6	3.8936e-03 ± 4.96e-04	3.7977e-03 ± 6.27e-04
7	2.6209e-03 ± 5.70e-04	2.5952e-03 ± 6.97e-04
8	1.7729e-03 ± 6.40e-04	1.7971e-03 ± 6.92e-04
9	1.1365e-03 ± 7.02e-04	1.2701e-03 ± 7.16e-04
10	6.9682e-04 ± 8.06e-04	8.8696e-04 ± 7.66e-04
11	8.2823e-04 ± 7.35e-04	1.0308e-03 ± 6.92e-04
12	7.1722e-04 ± 7.13e-04	9.7691e-04 ± 6.71e-04
13	6.2976e-04 ± 6.65e-04	8.1864e-04 ± 6.48e-04
14	5.6237e-04 ± 6.08e-04	7.4892e-04 ± 6.22e-04
15	3.5717e-04 ± 6.61e-04	5.4351e-04 ± 6.94e-04
16	1.4719e-04 ± 6.73e-04	3.9291e-04 ± 7.20e-04

Tabelle A.2: Singulettpotential für $\beta = 4.600$, bestimmt aus den über Hyperebenen gemittelten Polyakovloopkorrelationen.

Singulett-Potential ($\beta = 4.800$)

	$-V_{sing}(zT,z)/T$	
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$
1	3.6808e-02 ± 7.75e-04	3.6172e-02 ± 7.58e-04
2	2.4056e-02 ± 7.35e-04	2.3483e-02 ± 7.18e-04
3	1.5696e-02 ± 6.05e-04	1.5301e-02 ± 5.91e-04
4	9.9391e-03 ± 6.04e-04	9.6828e-03 ± 5.89e-04
5	6.3645e-03 ± 5.79e-04	6.2042e-03 ± 5.66e-04
6	4.1085e-03 ± 4.91e-04	4.0032e-03 ± 4.80e-04
7	2.5118e-03 ± 4.32e-04	2.4441e-03 ± 4.24e-04
8	1.4811e-03 ± 4.11e-04	1.4359e-03 ± 4.03e-04
9	9.8612e-04 ± 3.82e-04	9.6623e-04 ± 3.70e-04
10	7.4205e-04 ± 3.81e-04	7.2879e-04 ± 3.72e-04
11	3.4668e-04 ± 4.02e-04	3.2493e-04 ± 3.98e-04
12	1.7118e-04 ± 4.09e-04	1.5484e-04 ± 4.01e-04
13	-6.0703e-05 ± 4.24e-04	-7.3815e-05 ± 4.14e-04
14	-2.0027e-04 ± 3.99e-04	-1.6116e-04 ± 3.86e-04
15	-4.1312e-04 ± 4.45e-04	-3.4300e-04 ± 4.11e-04
16	-4.6078e-04 ± 5.04e-04	-3.7209e-04 ± 4.59e-04

	$-V_{sing}(zT,z)/T$	
z	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
1	3.4966e-02 ± 7.26e-04	3.3822e-02 ± 7.18e-04
2	2.2368e-02 ± 6.87e-04	2.1276e-02 ± 6.53e-04
3	1.4496e-02 ± 5.60e-04	1.3666e-02 ± 4.85e-04
4	9.1480e-03 ± 5.56e-04	8.5475e-03 ± 3.67e-04
5	5.8524e-03 ± 5.37e-04	5.4405e-03 ± 3.18e-04
6	3.7759e-03 ± 4.52e-04	3.4889e-03 ± 2.72e-04
7	2.3047e-03 ± 3.95e-04	2.0771e-03 ± 3.05e-04
8	1.3572e-03 ± 3.72e-04	1.2103e-03 ± 3.45e-04
9	9.2458e-04 ± 3.51e-04	7.9702e-04 ± 3.55e-04
10	7.2240e-04 ± 3.60e-04	6.2913e-04 ± 4.09e-04
11	3.4017e-04 ± 3.92e-04	2.5324e-04 ± 4.51e-04
12	1.8450e-04 ± 3.87e-04	1.4691e-04 ± 4.77e-04
13	-4.1245e-05 ± 3.99e-04	-5.3912e-05 ± 4.57e-04
14	-1.0153e-04 ± 3.78e-04	-8.1293e-05 ± 3.95e-04
15	-2.8300e-04 ± 3.93e-04	-2.3412e-04 ± 3.44e-04
16	-2.9570e-04 ± 4.39e-04	-2.4438e-04 ± 3.45e-04

Tabelle A.3: Singulettpotential für $\beta = 4.800$, bestimmt aus den über Hyperebenen gemittelten Polyakovloopkorrelationen.

Lokale el. Massen ($\boldsymbol{\beta} = 4.400$)

	$m_e(z,T)/T$			
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
1	1.980 ± 0.104	2.024 ± 0.108	2.096 ± 0.112	2.180 ± 0.104
2	1.924 ± 0.144	1.932 ± 0.148	1.944 ± 0.156	1.976 ± 0.152
3	2.136 ± 0.196	2.148 ± 0.204	2.136 ± 0.220	2.144 ± 0.224
4	2.436 ± 0.304	2.456 ± 0.316	2.428 ± 0.348	2.400 ± 0.360
5	3.068 ± 0.680	3.116 ± 0.708	3.036 ± 0.776	2.932 ± 0.764
6	4.424 ± 2.032	4.532 ± 2.152	4.248 ± 2.236	3.688 ± 1.976
7	6.164 ± 9.212	7.204 ± 12.26	6.016 ± 9.232	4.452 ± 5.680

Lokale el. Massen ($\boldsymbol{\beta} = 4.600$)

	$m_e(z,T)/T$			
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
1	1.824 ± 0.104	1.856 ± 0.116	1.928 ± 0.112	1.988 ± 0.120
2	1.708 ± 0.152	1.748 ± 0.156	1.776 ± 0.144	1.784 ± 0.172
3	1.788 ± 0.232	1.812 ± 0.212	1.832 ± 0.196	1.808 ± 0.256
4	1.884 ± 0.428	1.908 ± 0.344	1.936 ± 0.316	1.900 ± 0.420
5	2.000 ± 0.828	1.936 ± 0.640	1.996 ± 0.576	1.976 ± 0.752
6	1.464 ± 1.392	1.492 ± 1.084	1.584 ± 1.008	1.524 ± 1.260
7	1.380 ± 1.948	1.520 ± 1.692	1.564 ± 1.684	1.468 ± 1.876
8	1.548 ± 2.604	1.576 ± 2.604	1.780 ± 2.864	1.388 ± 2.728
9	1.764 ± 3.816	1.720 ± 4.328	1.956 ± 5.244	1.436 ± 4.124

Lokale el. Massen ($\boldsymbol{\beta} = 4.800$)

	$m_e(z,T)/T$			
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
1	1.700 ± 0.148	1.728 ± 0.148	1.788 ± 0.148	1.856 ± 0.148
2	1.708 ± 0.196	1.712 ± 0.196	1.736 ± 0.196	1.772 ± 0.188
3	1.828 ± 0.288	1.832 ± 0.288	1.840 ± 0.288	1.876 ± 0.224
4	1.784 ± 0.436	1.780 ± 0.440	1.788 ± 0.440	1.808 ± 0.292
5	1.752 ± 0.600	1.752 ± 0.604	1.752 ± 0.604	1.776 ± 0.388
6	1.968 ± 0.840	1.972 ± 0.844	1.976 ± 0.836	2.076 ± 0.664
7	2.112 ± 1.304	2.128 ± 1.320	2.120 ± 1.292	2.160 ± 1.284
8	1.628 ± 1.904	1.584 ± 1.900	1.536 ± 1.872	1.672 ± 2.116
9	1.136 ± 2.572	1.128 ± 2.556	0.988 ± 2.504	0.948 ± 3.152

Tabelle A.4: Lokale el. Massen, wie sie aus den Singulett-Potentialen in den Tabellen A.1, A.2 und A.3 bestimmt werden können.

A.2 Gluon-Propagatoren

In den folgenden Tabellen sind die Ergebnisse der Simulation der Gluonpropagatoren $G_{av}(z)$, $G_3(z)$ und $G_4(z)$, sowie die daraus gewonnenen elektrischen und magnetischen lokalen Screeningmassen $\hat{m}_e(z)$ und $\hat{m}_m(z)$ aufgeführt. Sämtliche Größen sind dabei in Gittereinheiten angegeben.

Die Simulationen wurden bei den Kopplungen $\beta = 4.400$, 4.600 sowie 4.800 in vier verschiedenen λ-Eichungen durchgeführt. Dabei wurden jeweils 60 Konfigurationen benutzt. Lediglich für die Eichungen mit $\lambda = 1.0$, 0.3 bei der Kopplung $\beta = 4.800$ wurde mit einer höheren Statistik (120 Konfigurationen) simuliert. Außerdem wurde bei dieser Kopplung eine Simulation mit $\lambda = 0.01$ bei einer Statistik von 60 Konfigurationen durchgeführt.

Gluon-Propagatoren $G_{av}(z)$ bei $\beta = 4.400$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	59012 ± 769	58839 ± 781	58003 ± 804	56728 ± 774
1	45926 ± 767	45797 ± 780	45113 ± 806	44097 ± 757
2	31425 ± 739	31324 ± 749	30825 ± 778	30154 ± 725
3	19403 ± 749	19318 ± 755	18990 ± 779	18573 ± 735
4	10877 ± 771	10799 ± 780	10575 ± 795	10321 ± 765
5	5392 ± 747	5315 ± 753	5160 ± 751	5003 ± 728
6	2327 ± 651	2267 ± 653	2165 ± 636	2026 ± 631
7	469 ± 542	427 ± 542	367 ± 524	239 ± 530
8	-597 ± 502	-609 ± 500	-629 ± 491	-717 ± 501
9	-1126 ± 543	-1127 ± 541	-1121 ± 536	-1162 ± 534
10	-1492 ± 563	-1498 ± 565	-1476 ± 562	-1486 ± 554
11	-1466 ± 618	-1488 ± 620	-1469 ± 610	-1429 ± 586
12	-1303 ± 664	-1345 ± 665	-1356 ± 641	-1276 ± 608
13	-1265 ± 779	-1315 ± 783	-1320 ± 749	-1177 ± 719
14	-1176 ± 892	-1218 ± 895	-1189 ± 858	-950 ± 830
15	-1156 ± 945	-1195 ± 951	-1125 ± 917	-828 ± 890
16	-1170 ± 998	-1207 ± 1005	-1111 ± 979	-794 ± 952

Tabelle A.5: Gluonpropagatoren bei $\beta = 4.400$, in diversen λ-Eichungen.

Gluon-Propagatoren $G_3(z)$ bei $\beta = 4.400$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	8463.956 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.637 $\pm$ 384
1	8463.956 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.637 $\pm$ 384
2	8463.956 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.637 $\pm$ 384
3	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
4	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
5	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
6	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
7	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
8	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
9	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
10	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
11	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
12	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
13	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
14	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
15	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384
16	8463.955 $\pm$ 400	8386.407 $\pm$ 400	8344.569 $\pm$ 430	8345.636 $\pm$ 384

Gluon-Propagatoren $G_4(z)$ bei $\beta = 4.400$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	46315 $\pm$ 801	46291 $\pm$ 821	46438 $\pm$ 830	46171 $\pm$ 849
1	34073 $\pm$ 698	34091 $\pm$ 709	34335 $\pm$ 737	34213 $\pm$ 760
2	22015 $\pm$ 547	22024 $\pm$ 547	22251 $\pm$ 604	22209 $\pm$ 631
3	13068 $\pm$ 437	13051 $\pm$ 427	13262 $\pm$ 503	13296 $\pm$ 515
4	7161 $\pm$ 472	7123 $\pm$ 459	7342 $\pm$ 560	7437 $\pm$ 539
5	3542 $\pm$ 591	3472 $\pm$ 579	3667 $\pm$ 674	3834 $\pm$ 643
6	1382 $\pm$ 563	1306 $\pm$ 548	1458 $\pm$ 628	1683 $\pm$ 637
7	228 $\pm$ 561	144 $\pm$ 550	258 $\pm$ 616	500 $\pm$ 646
8	-423 $\pm$ 554	-517 $\pm$ 545	-406 $\pm$ 615	-99 $\pm$ 616
9	-713 $\pm$ 534	-834 $\pm$ 509	-741 $\pm$ 575	-400 $\pm$ 544
10	-663 $\pm$ 464	-792 $\pm$ 424	-752 $\pm$ 456	-436 $\pm$ 393
11	-535 $\pm$ 518	-647 $\pm$ 477	-613 $\pm$ 477	-299 $\pm$ 414
12	-183 $\pm$ 643	-312 $\pm$ 600	-314 $\pm$ 581	-123 $\pm$ 519
13	140 $\pm$ 733	24 $\pm$ 707	-45 $\pm$ 650	72 $\pm$ 587
14	342 $\pm$ 721	255 $\pm$ 700	126 $\pm$ 627	245 $\pm$ 574
15	511 $\pm$ 713	431 $\pm$ 688	234 $\pm$ 599	284 $\pm$ 578
16	659 $\pm$ 750	589 $\pm$ 725	360 $\pm$ 620	394 $\pm$ 606

Tabelle A.6: Gluonpropagatoren bei $\beta = 4.400$, in diversen λ-Eichungen (Fortsetzung).

Gluon-Propagatoren $G_{av}(z)$ bei $\beta = 4.600$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	61734 ± 962	61462 ± 938	60534 ± 867	59345 ± 861
1	49419 ± 850	49197 ± 828	48427 ± 767	47438 ± 769
2	35333 ± 721	35162 ± 699	34596 ± 627	33891 ± 664
3	23036 ± 568	22913 ± 542	22579 ± 486	22085 ± 543
4	13790 ± 449	13727 ± 420	13617 ± 405	13304 ± 416
5	7366 ± 495	7343 ± 481	7392 ± 432	7210 ± 480
6	3224 ± 508	3225 ± 501	3306 ± 410	3245 ± 489
7	821 ± 519	820 ± 501	890 ± 425	883 ± 486
8	-493 ± 531	-498 ± 502	-449 ± 451	-423 ± 467
9	-1275 ± 555	-1278 ± 527	-1272 ± 507	-1160 ± 473
10	-1680 ± 507	-1696 ± 482	-1808 ± 459	-1630 ± 424
11	-1712 ± 449	-1734 ± 428	-1929 ± 418	-1705 ± 372
12	-1553 ± 430	-1591 ± 418	-1801 ± 459	-1553 ± 376
13	-1447 ± 513	-1505 ± 511	-1698 ± 619	-1444 ± 483
14	-1266 ± 607	-1324 ± 610	-1487 ± 756	-1214 ± 568
15	-1167 ± 739	-1225 ± 741	-1358 ± 854	-1108 ± 659
16	-1088 ± 803	-1142 ± 804	-1273 ± 911	-1033 ± 696

Gluon-Propagatoren $G_3(z)$ bei $\beta = 4.600$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
1	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
2	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
3	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
4	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
5	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
6	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
7	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
8	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.957 ± 659
9	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659
10	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659
11	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659
12	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659
13	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659
14	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659
15	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659
16	10305.21 ± 890	10300.80 ± 890	10034.06 ± 749	9743.956 ± 659

Tabelle A.7: Gluonpropagatoren bei $\beta = 4.600$, in diversen λ-Eichungen.

Gluon-Propagatoren $G_4(z)$ bei $\beta = 4.600$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	42837 ± 708	42918 ± 715	42712 ± 770	42825 ± 726
1	31867 ± 669	31956 ± 679	31828 ± 653	32050 ± 674
2	21283 ± 541	21322 ± 548	21210 ± 478	21469 ± 538
3	13666 ± 446	13681 ± 447	13591 ± 429	13854 ± 447
4	8574 ± 514	8586 ± 510	8494 ± 520	8767 ± 521
5	5513 ± 631	5525 ± 626	5417 ± 608	5675 ± 635
6	3769 ± 725	3787 ± 724	3645 ± 676	3890 ± 725
7	2655 ± 771	2670 ± 774	2553 ± 736	2806 ± 771
8	1788 ± 761	1786 ± 763	1674 ± 811	1943 ± 749
9	1175 ± 806	1153 ± 802	1062 ± 919	1347 ± 767
10	1132 ± 727	1101 ± 725	1011 ± 866	1272 ± 695
11	935 ± 658	910 ± 658	801 ± 822	1101 ± 643
12	816 ± 685	784 ± 689	719 ± 824	959 ± 713
13	703 ± 783	664 ± 793	648 ± 842	860 ± 790
14	495 ± 955	456 ± 967	489 ± 932	664 ± 947
15	429 ± 1064	392 ± 1074	416 ± 992	647 ± 1042
16	321 ± 1067	288 ± 1074	308 ± 976	544 ± 1039

Tabelle A.8: Gluonpropagatoren bei $\beta = 4.600$, in diversen λ-Eichungen (Fortsetzung).

Gluon-Propagatoren $\boldsymbol{G}_{av}(z)$ bei $\boldsymbol{\beta} = 4.800$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$
0	65202 ± 713	66272 ± 1271	65597 ± 1254
1	53445 ± 754	54639 ± 1202	54085 ± 1187
2	39698 ± 779	40974 ± 1119	40559 ± 1102
3	27529 ± 768	28753 ± 1012	28473 ± 1000
4	17987 ± 775	19089 ± 925	18919 ± 914
5	10968 ± 780	11804 ± 948	11718 ± 940
6	6105 ± 802	6864 ± 960	6825 ± 952
7	2858 ± 754	3442 ± 940	3426 ± 932
8	878 ± 656	1276 ± 867	1270 ± 859
9	-284 ± 511	66 ± 685	61 ± 674
10	-795 ± 426	-403 ± 572	-422 ± 558
11	-923 ± 393	-652 ± 606	-698 ± 578
12	-797 ± 464	-631 ± 788	-720 ± 743
13	-738 ± 553	-646 ± 995	-783 ± 937
14	-857 ± 681	-712 ± 1213	-894 ± 1144
15	-1135 ± 773	-876 ± 1341	-1085 ± 1272
16	-1344 ± 804	-943 ± 1394	-1160 ± 1327

z	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.01$
0	63577 ± 742	53977 ± 754
1	52106 ± 775	43703 ± 796
2	38733 ± 788	32333 ± 827
3	26883 ± 768	22453 ± 832
4	17596 ± 776	14660 ± 857
5	10781 ± 789	9045 ± 848
6	6062 ± 801	5039 ± 820
7	2891 ± 743	2420 ± 722
8	984 ± 631	856 ± 647
9	-132 ± 469	-144 ± 650
10	-634 ± 362	-702 ± 648
11	-807 ± 323	-913 ± 664
12	-782 ± 396	-976 ± 611
13	-855 ± 486	-975 ± 570
14	-1056 ± 596	-1169 ± 561
15	-1380 ± 700	-1514 ± 601
16	-1582 ± 732	-1807 ± 569

Tabelle A.9: Gluonpropagatoren $\boldsymbol{G}_{av}(z)$ bei $\beta = 4.800$, in diversen λ-Eichungen.

Gluon-Propagatoren $G_3(z)$ bei $\beta = 4.800$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$
0	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
1	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
2	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
3	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
4	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
5	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
6	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
7	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
8	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
9	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
10	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
11	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
12	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
13	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
14	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
15	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792
16	10849.02 ± 644	11534.51 ± 803	11415.71 ± 792

z	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.01$
0	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
1	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
2	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
3	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
4	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
5	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
6	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
7	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
8	10655.62 ± 598	8846.048 ± 554
9	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554
10	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554
11	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554
12	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554
13	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554
14	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554
15	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554
16	10655.62 ± 598	8846.046 ± 554

Tabelle A.10: Gluonpropagatoren $G_3(z)$ bei $\beta = 4.800$, in diversen λ-Eichungen.

Gluon-Propagatoren $G_4(z)$ bei $\beta = 4.800$

z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$
0	40561 ± 494	40400 ± 1021	40344 ± 1011
1	30377 ± 431	30424 ± 940	30419 ± 932
2	20540 ± 380	20588 ± 835	20577 ± 825
3	13320 ± 392	13289 ± 754	13264 ± 747
4	8345 ± 380	8489 ± 653	8444 ± 641
5	5156 ± 387	5391 ± 593	5339 ± 571
6	2980 ± 370	3302 ± 532	3249 ± 503
7	1690 ± 348	1976 ± 512	1945 ± 493
8	1080 ± 318	1345 ± 482	1337 ± 479
9	666 ± 336	865 ± 489	875 ± 503
10	282 ± 347	456 ± 466	487 ± 495
11	52 ± 349	261 ± 507	308 ± 532
12	9 ± 272	134 ± 451	194 ± 472
13	65 ± 275	-69 ± 469	-3 ± 489
14	43 ± 363	-270 ± 526	-203 ± 530
15	83 ± 382	-268 ± 536	-190 ± 535
16	109 ± 413	-331 ± 544	-260 ± 535

z	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.01$
0	40470 ± 483	40359 ± 662
1	30468 ± 426	30990 ± 618
2	20665 ± 373	21732 ± 509
3	13388 ± 389	14758 ± 476
4	8364 ± 390	9591 ± 508
5	5087 ± 427	5964 ± 513
6	2901 ± 400	3390 ± 515
7	1622 ± 355	1875 ± 506
8	1014 ± 308	1191 ± 470
9	643 ± 322	904 ± 519
10	250 ± 353	584 ± 590
11	57 ± 371	478 ± 604
12	75 ± 295	596 ± 563
13	192 ± 280	914 ± 596
14	280 ± 350	1174 ± 791
15	396 ± 370	1497 ± 925
16	445 ± 392	1666 ± 955

Tabelle A.11: Gluonpropagatoren $G_4(z)$ bei $\beta = 4.800$, in diversen λ-Eichungen.

Lokale el. Massen ($\boldsymbol{\beta} = 4.400$)

	$m_e(z,T)/T$			
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	1.228 ± 0.108	1.224 ± 0.108	1.208 ± 0.112	1.2 ± 0.116
1	1.748 ± 0.128	1.748 ± 0.128	1.736 ± 0.14	1.728 ± 0.144
2	2.088 ± 0.168	2.092 ± 0.164	2.068 ± 0.188	2.052 ± 0.192
3	2.408 ± 0.296	2.42 ± 0.288	2.364 ± 0.34	2.324 ± 0.328
4	2.816 ± 0.716	2.876 ± 0.716	2.776 ± 0.796	2.648 ± 0.732
5	3.764 ± 1.76	3.912 ± 1.804	3.688 ± 1.872	3.296 ± 1.656
6	7.208 ± 9.976	8.808 ± 15.328	6.936 ± 9.728	4.856 ± 5.388

Lokale el. Massen ($\boldsymbol{\beta} = 4.600$)

	$m_e(z,T)/T$			
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	1.184 ± 0.108	1.180 ± 0.108	1.176 ± 0.108	1.160 ± 0.108
1	1.616 ± 0.132	1.620 ± 0.132	1.624 ± 0.124	1.604 ± 0.132
2	1.772 ± 0.164	1.776 ± 0.168	1.780 ± 0.156	1.752 ± 0.164
3	1.864 ± 0.272	1.864 ± 0.272	1.880 ± 0.276	1.832 ± 0.272
4	1.768 ± 0.516	1.764 ± 0.512	1.800 ± 0.512	1.740 ± 0.508
5	1.520 ± 0.896	1.512 ± 0.888	1.584 ± 0.868	1.512 ± 0.868
6	1.400 ± 1.392	1.400 ± 1.388	1.424 ± 1.372	1.308 ± 1.328
7	1.580 ± 2.060	1.608 ± 2.064	1.688 ± 2.252	1.468 ± 1.892
8	1.676 ± 3.228	1.748 ± 3.264	1.820 ± 3.968	1.464 ± 2.752
9	0.148 ± 3.760	0.184 ± 3.832	0.196 ± 4.868	0.228 ± 3.156
10	0.764 ± 3.812	0.764 ± 3.912	0.932 ± 5.348	0.580 ± 3.196
11	0.544 ± 4.380	0.600 ± 4.552	0.428 ± 6.156	0.552 ± 3.780
12	0.600 ± 5.580	0.660 ± 5.932	0.420 ± 6.932	0.436 ± 4.728
13	1.400 ± 8.912	1.504 ± 9.740	1.124 ± 9.228	1.036 ± 6.784
14	0.576 ± 12.572	0.608 ± 13.872	0.652 ± 12.220	0.104 ± 8.600

Lokale el. Massen ($\boldsymbol{\beta} = 4.800$)

	$m_e(z,T)/T$				
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.01$
0	1.156 ± 0.076	1.136 ± 0.160	1.128 ± 0.160	1.136 ± 0.072	1.056 ± 0.104
1	1.564 ± 0.092	1.564 ± 0.204	1.564 ± 0.200	1.552 ± 0.092	1.420 ± 0.124
2	1.732 ± 0.140	1.752 ± 0.280	1.756 ± 0.276	1.736 ± 0.136	1.548 ± 0.160
3	1.872 ± 0.216	1.792 ± 0.384	1.808 ± 0.380	1.880 ± 0.220	1.724 ± 0.248
4	1.928 ± 0.352	1.816 ± 0.536	1.832 ± 0.524	1.988 ± 0.384	1.900 ± 0.404
5	2.192 ± 0.580	1.960 ± 0.780	1.988 ± 0.752	2.248 ± 0.644	2.260 ± 0.700
6	2.268 ± 0.960	2.052 ± 1.220	2.052 ± 1.188	2.328 ± 1.036	2.368 ± 1.240
7	1.792 ± 1.436	1.536 ± 1.768	1.500 ± 1.756	1.880 ± 1.496	1.816 ± 1.912
8	1.932 ± 2.336	1.768 ± 2.676	1.696 ± 2.708	1.824 ± 2.344	1.104 ± 2.788
9	3.440 ± 5.324	2.556 ± 4.672	2.344 ± 4.668	3.776 ± 6.000	1.748 ± 4.652
10	6.752 ± 27.208	2.240 ± 8.784	1.840 ± 8.020	5.896 ± 26.552	0.800 ± 6.476
11	7.252 ± 130.764	2.664 ± 15.564	1.848 ± 11.952		

Tabelle A.12: Lokale elektrische Massen für verschiedene kritische Kopplungen β und in verschiedenen Eichungen. Die Massen wurden aus den Gluonpropagatoren $G_4(z)$ berechnet.

Lokale magnetische Massen ($\beta = 4.400$)

	$m_m(z,T)/T$			
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	1.004 ± 0.084	1.004 ± 0.088	1.004 ± 0.092	1.008 ± 0.088
1	1.516 ± 0.116	1.520 ± 0.116	1.524 ± 0.124	1.520 ± 0.120
2	1.928 ± 0.180	1.932 ± 0.184	1.936 ± 0.192	1.940 ± 0.184
3	2.316 ± 0.324	2.328 ± 0.328	2.340 ± 0.344	2.352 ± 0.336
4	2.808 ± 0.624	2.836 ± 0.636	2.872 ± 0.656	2.896 ± 0.652
5	3.360 ± 1.248	3.408 ± 1.284	3.472 ± 1.312	3.616 ± 1.376
6	6.412 ± 4.764	6.680 ± 5.212	7.100 ± 5.824	8.556 ± 8.968

Lokale magnetische Massen ($\beta = 4.600$)

	$m_m(z,T)/T$			
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$
0	0.892 ± 0.092	0.892 ± 0.092	0.892 ± 0.084	0.896 ± 0.088
1	1.344 ± 0.108	1.344 ± 0.104	1.344 ± 0.096	1.344 ± 0.100
2	1.712 ± 0.128	1.712 ± 0.124	1.708 ± 0.112	1.712 ± 0.124
3	2.052 ± 0.164	2.048 ± 0.156	2.024 ± 0.148	2.028 ± 0.160
4	2.508 ± 0.300	2.504 ± 0.288	2.444 ± 0.264	2.452 ± 0.296
5	3.304 ± 0.684	3.292 ± 0.676	3.220 ± 0.548	3.192 ± 0.660
6	5.472 ± 2.604	5.476 ± 2.520	5.248 ± 1.976	5.208 ± 2.284

Lokale magnetische Massen ($\beta = 4.800$)

	$m_m(z,T)/T$				
z	$\lambda = 1.0$	$\lambda = 0.8$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.3$	$\lambda = 0.01$
0	0.796 ± 0.072	0.772 ± 0.116	0.772 ± 0.116	0.796 ± 0.076	0.844 ± 0.092
1	1.188 ± 0.096	1.152 ± 0.140	1.152 ± 0.140	1.188 ± 0.100	1.204 ± 0.124
2	1.464 ± 0.136	1.416 ± 0.180	1.416 ± 0.176	1.460 ± 0.140	1.460 ± 0.180
3	1.704 ± 0.204	1.640 ± 0.240	1.636 ± 0.240	1.696 ± 0.212	1.704 ± 0.276
4	1.980 ± 0.332	1.924 ± 0.376	1.916 ± 0.376	1.960 ± 0.340	1.932 ± 0.444
5	2.344 ± 0.596	2.168 ± 0.644	2.160 ± 0.644	2.304 ± 0.604	2.340 ± 0.752
6	3.036 ± 1.180	2.760 ± 1.228	2.756 ± 1.224	2.964 ± 1.156	2.932 ± 1.360
7	4.724 ± 3.168	3.968 ± 2.932	3.972 ± 2.916	4.312 ± 2.764	4.156 ± 3.248
8		11.828 ± 41.364	12.168 ± 44.556		

Tabelle A.13: Lokale magnetische Massen für verschiedene kritische Kopplungen β und in verschiedenen Eichungen. Die Massen wurden aus den Gluonpropagatoren $G_{av}(z)$ berechnet.

Literaturverzeichnis

[1] M. Creutz, "Quarks, Gluons and Lattices," Cambridge University Press (1983).

[2] H.J. Rothe "Lattice Gauge Theories - An Introduction," World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol.43 (1992).

[3] K.G. Wilson, "Confinement of Quarks," Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974).

[4] J. Rank, "Eichabhängige Korrelationsfunktionen in der Hochtemperaturphase der reinen SU(2)-Gittereichtheorie," Diplomarbeit, Universität Bielefeld (1995).

[5] M. Heß, "Gluon-Korrelationsfunktionen bei endlicher Temperatur und endlichem Impuls," Diplomarbeit, Universität Bielefeld (1999).

[6] L.D. Faddeev und V.N. Popov, "Feynman Diagrams For The Yang-Mills Field," Phys. Lett. **25B**, 29 (1967).

[7] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann, "Improved actions for QCD thermodynamics on the lattice," Nucl. Phys. **B462**, 414 (1996).

[8] O. Kaczmarek, "Korrelationsfunktionen und Potentiale mit verbesserten Wirkungen," Diplomarbeit, Universität Bielefeld (1997).

[9] L.D. McLerran, B. Svetitsky, "Quark Liberation at High Temperature: A Monte Carlo Study of SU(2) Gauge Theory," Phys. Rev. **D24**, 450 (1981).

[10] S. Nadkarni, "Non-Abelian Debye screening: The color-averaged potential," Phys. Rev. **D33**, 3738 (1986).

[11] S. Nadkarni, "Non-Abelian Debye screening. II. The singulet potential," Phys. Rev. **D34**, 3904 (1986).

[12] J.E. Mandula, M. Ogilvie "The Gluon propagator at finite temperature," Phys. Lett. **B201**, 117 (1988).

[13] U.M. Heller, F. Karsch und J. Rank, "Gluon propagator at high temperature: Screening, improvement and nonzero momenta," Phys. Rev. **D57**, 1438 (1998) hep-lat/9710033.

[14] H.A. Weldon, "Structure of the gluon propagator at finite temperature," (1996) hep-ph/9701279.

[15] R. Kobes, G. Kunstatter und A. Rebhan, "QCD Plasma Parameters And The Gauge Dependent Gluon Propagator," Phys. Rev. Lett. **64**, 2992 (1990).

[16] D.B. Leinweber, J.I. Skullerud, A.G. Williams, C. Parrinello [UKQCD Collaboration], "Asymptotic Scaling and Infrared Behavior of the Gluon Propagator, " hep-lat/9811027.

[17] A. Cucchieri, T. Mendes, "Gauge Fixing and Gluon Propagator in λ-Gauges," hep-lat/9902024.

[18] A. Cucchieri, F. Karsch, "Discretization effects and gauge independence for the electric and magnetic screening masses," hep-lat/9909011.

[19] C. Bernard, D. Murphy, A. Soni, K. Yee, "Lattice Quark Propagator In Fixed Gauges," Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B17**, 593 (1990).

[20] A. Hulsebos, "Gribov Copies And Other Gauge Fixing Beasties On The Lattice," Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **30**, 539 (1993) hep-lat/9211018.

[21] A. Cucchieri, "Gribov copies in the minimal Landau gauge: The influence on gluon and ghost propagators," Nucl. Phys. **B508**, 353 (1997) hep-lat/9705005.

[22] J.E. Mandula und M. Ogilvie, "Efficient Gauge Fixing Via Overrelaxation," Phys. Lett. **B248**, 156 (1990).

[23] A. Cucchieri und T. Mendes, "Critical slowing down in SU(2) Landau gauge fixing algorithms," Nucl. Phys. **B471**, 263 (1996) hep-lat/9511020.

[24] T. Lippert, K. Schilling, F. Toschi, S. Trentmann, R. Tripiccione, "FFT for APE Parallel Computer," Int. J. Mod. Phys. **C8**, 1317 (1997) hep-lat/9710060.

[25] A. Hulsebos, M.L. Laursen und J. Smit, “SU(N) multigrid Landau gauge fixing,” Phys. Lett. **B291**, 431 (1992).

[26] H. Suman und K. Schilling, “A Comparative study of gauge fixing procedures on the connection machines CM2 and CM5,” hep-lat/9306018.

[27] Ph. de Forchrand und R. Gupta, “Multigrid Techniques For Quark Propagator” Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B9**, 516 (1989).

[28] C.T. Davies *et al.*, “Fourier Acceleration In Lattice Gauge Theories. 1. Landau Gauge Fixing,” Phys. Rev. **D37**, 1581 (1988).

[29] A. Cucchieri und T. Mendes, “Gauge fixing and gluon propagator in lambda gauges,” hep-lat/9902024.

[30] A. Cucchieri und T. Mendes, “A Multigrid implementation of the Fourier acceleration method for Landau gauge fixing,”Phys. Rev. **D57**, 3822 (1998) hep-lat/9711047.

[31] W.L. Briggs, “A Multigrid Tutorial,” Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1987.

[32] A.D. Sokal, “Monte Carlo Methods In Statistical Mechanics: Foundations And New Algorithms,” *Troisieme Cycle de la Physique en Suisse Romande, Lausanne, Switzerland, Jun 15-29, 1989.*

[33] R.P. Fedorenko, Zh. Vychisl. i Mat. Fiz. 4,559 (1964).

[34] A.D. Kennedy, B.J. Pendleton, “Improved Heat Bath Method For Monte Carlo Calculations In Lattice Gauge Theories,” Phys. Lett. **156B**, 393 (1985).

[35] M. Creutz, “Overrelaxation And Monte Carlo Simulation,” Phys. Rev. **D36**, 515 (1987).

[36] A. Peikert, “Latente Wärme und Oberflächenspannung in der SU(3) Gittereichtheorie mit verbesserten Wirkungen,” Diplomarbeit , Universität Bielefeld (1997).

[37] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann und A. Peikert, “String tension and thermodynamics with tree level and tadpole improved actions,” Eur. Phys. J. **C6**, 133 (1999) hep-lat/9707023.

[38] P. Petreczky, *persönliche Mitteilung.*

Danksagung

Zu guter Letzt möchte ich all denen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Da ist als erstes Herr Prof. Dr. Frithjof Karsch, der es mir ermöglicht hat, meine Diplomarbeit in diesem interessanten Teilgebiet der theoretischen Physik durchzuführen. Für seine Betreuung möchte ich mich hiermit herzlich bei ihm bedanken. Ein Dank gilt auch allen anderen Professoren, wissenschaftlichen Mitarbeitern, Sekretärinnen, Doktoranden und Diplomanden der Arbeitsgruppe *„Gittereichtheorie"*.

Besonders bedanken möchte ich mich bei den Systemadministratoren Olaf Kaczmarek und Ines Wetzorke (Bielefeld), sowie Alex Keller vom PC^2 in Paderborn für ihre rasche Hilfe bei technischen Problemen.

Meinen Eltern möchte ich für ihre finanzielle Unterstützung danken, ohne die mein Studium der Physik sicherlich nicht möglich gewesen wäre.

Ein ganz besonderer Dank gilt meiner Freundin Bernadette Schäfers, die mich während meiner Diplomarbeit sehr gut unterstützt hat. Ihr möchte ich deshalb diese Arbeit widmen.

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit mit keinen weiteren, als im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Matthias Buse