# Latente Wärme und Oberflächenspannung in der SU(3) Gittereichtheorie mit verbesserten Wirkungen

**Diplomarbeit**

an der
Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Andreas Peikert

6. Februar 1997

# Inhaltsverzeichnis


**Einleitung** **7**

**1 QCD-Phasenübergang** **11**

1.1 Das frühe Universum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

1.1.1 Small Supercooling and Phase Separation Scenario . . . . . . 13

1.2 Ultrarelativistische Schwerionenkollisionen . . . . . . . . . . . . . . . . 16

**2 QCD im Kontinuum und auf dem Gitter** **19**

2.1 QCD als Eichtheorie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.2 Gitterformulierung der QCD . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

2.2.1 QCD auf dem Gitter . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

2.3 Der Kontinuumslimes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.4 SU(3) Gittereichtheorie bei endlicher Temperatur . . . . . . . . . . . 26

2.4.1 Thermodynamische Observablen auf dem Gitter . . . . . . . . 27

2.5 Verbesserte Wirkungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

2.5.1 Tree-level-verbesserte Wirkungen . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

2.5.2 1-loop-verbesserte Wirkungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

2.5.3 Tadpole-verbesserte Wirkungen . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

**3 Numerische Methoden** **43**

3.1 Monte-Carlo-Simulation . . . . . 43

3.2 Fehleranalyse . . . . . 45

3.3 Ferrenberg-Swendsen Analyse . . . . . 46

**4 Auswertung und Resultate** **51**

4.1 Kritische Kopplungen . . . . . 52

4.2 String-Tension . . . . . 54

4.3 Die Temperatur-Skala und $\beta$-Funktion . . . . . 58

4.4 Die kritische Temperatur . . . . . 60

4.5 Oberflächenspannung . . . . . 62

4.6 Latente Wärme . . . . . 65

4.7 Unterkühlungsrate . . . . . 72

4.8 Druck . . . . . 73

**Zusammenfassung** **77**

**A Naiver Kontinuumslimes** **79**

A.1 Kontinuumslimes der Wilson-Wirkung . . . . . 79

A.2 Kontinuumslimes der $2\times1$-Tree-Level-Wirkung . . . . . 81

**B Simulationsergebnisse mit Tree-Level-Wirkung** **83**

**C Simulationsergebnisse mit Tadpole-Wirkung** **91**

# Abbildungsverzeichnis


1.1 Freie Energie einer Hadronblase in Abhängigkeit ihres Radius R und der Temperatur T . . . 14

1.2 Struktur einer deflagrationsartig expandierenden Blase . . . 15

1.3 Raumzeit-Diagramm einer ultrarelativistischen Schwerionenkollision . 16

2.1 Polyakov-Loop in der komplexen Ebene . . . 28

2.2 Freie Energie $F$ und Entropie $\mathcal{S}$ bei einem Phasenübergang 1. Ordnung 32

2.3 Polyakov-Loop-Verteilung bei einer Kopplung nahe $\beta_c$ für drei räumliche Gittergrößen . . . 33

2.4 Oberfläche in gemischter Phase auf Gitter mit periodischen Randbedingungen . . . 34

2.5 Tadpole-Loop . . . 40

4.1 Betrag des Polyakov-Loops in Abh. von $\beta$ . . . 53

4.2 Suszeptibilität des Polyakop-Loops in Abh. von $\beta$ . . . 53

4.3 Schmieren von Wilson-Loops . . . 56

4.4 Potentiale zwischen schweren Quarks . . . 57

4.5 String-Tension für Tree-Level-Wirkung und Tadpole-Wirkung . . . 59

4.6 Temperaturskala für Tree-Level-Wirkung und Tadpole-Wirkung . . . 61

4.7 Fit der Extrema der Polyakov-Loop-Verteilung . . . . . . . . . . . . . 63

4.8 Polyakov-Loop-Verteilungen für Tree-Level-Wirkung . . . . . . . . . . . 64

4.9 Polyakov-Loop-Verteilungen für Tadpole-Wirkung . . . . . . . . . . . 64

4.10 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $S - \partial S/\partial\beta$ . . . . . . . . . . . . 66

4.11 Zeitentwicklung des Polyakov-Loops für tree-level-verbesserte Wirkung auf Gitter $32^3 \cdot 4$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67

4.12 $S$ in der Confinement- und Deconfinement-Phase, sowie deren Differenz für die Tree-Level Wirkung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

4.13 Zeitentwicklung des Polyakov-Loops für tadpole-verbesserte Wirkung auf Gitter $32^3 \cdot 4$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70

4.14 $S - dS/d\beta$ in der Confinement- und Deconfinement-Phase, sowie deren Differenz für die Tadpole-Wirkung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

4.15 $\delta S$ für Tree-Level-Wirkung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

4.16 $\delta(S - \partial S/\partial\beta)$ für Tadpole-Wirkung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

4.17 Druckverläufe für verschiedene Wirkungen . . . . . . . . . . . . . . . . 75

# Einleitung

In der Elementarteilchenphysik geht es darum, die Vielzahl der heute bekannten Teilchen auf einige wenige fundamentale Teilchen und deren Wechselwirkung untereinander zurückzuführen. Der heutige Kenntnisstand erlaubt es, alle in der Natur beobachteten Prozesse vier grundlegenden Wechselwirkungen zuzuordnen. Der starken Wechselwirkung, die für die Kernkräfte verantwortlich ist, der elektromagnetischen Wechselwirkung, die sich in elektrischen, magnetischen und chemischen Phänomenen ausdrückt, der schwachen Wechselwirkung, die sich in der Radioaktivität und in $\beta$-Zerfällen manifestiert, sowie der Gravitation. Die Stärke dieser vier Wechselwirkungen überspannt einen Bereich von $10^{39}$ Größenordnungen. Die Gravitation ist im Vergleich zu den anderen Kräften so schwach, daß sie in der Elementarteilchenphysik vernachlässigt werden kann.

Bis auf die Gravitation werden alle den Wechselwirkungen zugrundeliegenden Theorien als sogenannte Eichfeldtheorien formuliert, d.h. die Grundgleichungen der Theorie sind invariant unter einer lokalen Transformation mit den Elementen einer Symmetriegruppe. Im Rahmen dieser Formulierung sind die elektro-schwache, die Vereinigung von schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung, und die starke Wechselwirkung formal zum Standardmodell zusammengefaßt. Somit kann mit dem Standardmodell die Dynamik stark und schwach wechselwirkender Hadronen und schwach wechselwirkender Leptonen beschrieben werden, sowie die Dynamik der Eichbosonen, die die Wechselwirkung vermitteln. Aufgrund der Erfolge bei der Voraussage von Ergebnissen von Streuexperimenten, gilt das Standardmodell als weitgehend akzeptiert.

Die **Quantenchromodynamik** (**QCD**) ist die fundamentale Theorie der starken Wechselwirkung, der Quarks und deren Austauschteilchen, die Gluonen, unterliegen. Sie ist durch die Übereinstimmung störungstheoretischer Rechnungen und den Ergebnissen tiefinelastischer Streuungen im Bereich großer Impulse gut bestätigt. Aus experimentellen Befunden ist geschlossen worden, daß Quarks einen inneren Freiheitsgrad tragen, der als *Colour (Farbe)* bezeichnet wird. Quarkfelder sind dann

Vektoren in dem entsprechenden Farbraum und die Lagrangedichte der QCD ist invariant unter lokalen Eichtransformationen der $SU(3)_c$-Farbladungsgruppe.
In der sogenannten *Quenched Approximation* werden die dynamischen Freiheitsgrade der Quarks vernachlässigt, so daß nur die Gluonen dynamisch sind. Deren Dynamik ist im Gegensatz zu der von Photonen in der Quantenelektrodynamik nicht-trivial, da Gluonen Farbladungen tragen und somit untereinander wechselwirken. In dieser Näherung ist die QCD eine *reine $SU(3)_c$-Eichtheorie*, die in dieser Arbeit untersucht wird.

Die QCD weist zwei hoch interessante Eigenschaften auf: *Asymptotische Freiheit* und *Confinement*. Für kleine Abstände geht die Wechselwirkungsstärke zwischen Farbladungen, ausgedrückt in der Kopplung $\alpha$, gegen Null, es herrscht asymptotische Freiheit. Da in der Natur noch nie freie Quarks, sondern immer farbneutrale Objekte beobachtet werden konnten, wurde die Confinement-Hypothese aufgestellt, die besagt, daß die Separation zweier Quarks eine unendliche Menge Energie kostet. Für die Kopplung bedeutet dies einen starken Anstieg von $\alpha$ mit zunehmenden Abständen, so daß es nicht mehr sinnvoll ist, die Theorie störungstheoretisch in Potenzen der Kopplung zu entwickeln. Eine Bestätigung des Confinement macht also einen nicht-störungstheoretischen Zugang zur QCD nötig, der auch für große Abstände Gültigkeit besitzt. Diesen liefert die Gitterformulierung der QCD, die auf Wilson [1] zurückgeht.
In der euklidischen Pfadintegralformulierung der QCD wird die kontinuerliche Raumzeit durch ein diskretes Raumzeit-Gitter mit einem Gitterabstand $a$ ersetzt [2][3]. Durch diese sogenannte Gitterregularisierung wird das Pfadintegral im Gegensatz zur Kontinuumsformulierung endlich-dimensional und läßt sich mit Monte-Carlo-Methoden lösen.

Man erwartet, daß es bei hohen Temperaturen einen Deconfinement-Phasenübergang von einem Hadrongas zu einem Quark-Gluon-Plasma gibt. Um diese Annahme zu überrüfen, nutzt man die formale Analogie zwischen Statistischer Mechanik und der euklidischen Pfadintegraldarstellung einer Feldtheorie, indem man eine Thermodynamik der $SU(3)_c$-Eichtheorie formuliert. Die Temperatur ist dabei proportional zur inversen zeitlichen Ausdehnung des Raumzeit-Gitters.
In der reinen $SU(3)_c$-Eichtheorie findet man in Simulationen einen Deconfinement-Phasenübergang, der mit großer Wahrscheinlichkeit 1. Ordnung ist. Phasenübergänge 1. Ordnung sind gekennzeichnet durch eine Latente Wärme und die Existenz einer gemischten Phase am kritischen Punkt des Systems. Dabei sind Confinement- und Deconfinement-Phase durch eine Oberfläche getrennt, deren Oberflächenspannung sich in Gittersimulationen bestimmen läßt.

Bei der Gitterregularisierung der QCD wird an die Gitterwirkung die Forderung gestellt, im Limes Gitterabstand $a$ gegen Null die Kontinuumswirkung zu reproduzieren. Bei einem endlichen Cutoff $a$ zeigen sich bei hohen Temperaturen in der standard Wilson-Formulierung der Gittereichtheorie Abweichungen in $\mathcal{O}(a^2)$ von dem Kontinuumsausdruck der Wirkung. Da das Hochtemperaturverhalten thermodynamischer Größen besonders von Beiträgen hoher Impulse bestimmt wird, die aber durch den endlichen Cutoff unterdrückt werden, weist der Hochtemperaturlimes von Größen wie der Energiedichte und des Druckes in der Wilson-Formulierung Cutoff-Effekte der Ordnung $\mathcal{O}((aT)^2)$ auf [4][5]. Simulationen zeigen für thermodynamische Observablen eine starke Cutoff-Abhängigkeit [6].
Das Konstruktionsprinzip von Gitterwirkungen, im Limes $a \to 0$ die korrekte Kontinuumswirkung zu ergeben, läßt eine gewisse Freiheit bei der Wahl der Wirkung. Diese Freiheit kann ausgenutzt werden zur Konstruktion von Wirkungen, die eine verminderte oder gar keine Cutoff-Abhängigkeit im Bereich schwacher Kopplung bzw. im Hochtemperaturlimes besitzen. Dazu gehören Tree-Level-Symanzik-verbesserte Wirkungen [7][8] und perfekte Wirkungen [9][10]. Alle diese Wirkungen zeigen in Simulationen eine drastische Reduktion von endlichen Cutoff-Effekten auch bei Temperaturen nahe $T_c$. Korrekturen zur Wirkung in Ordnung $\mathcal{O}(a^2g^2)$ scheinen einen relativ geringen Einfluß auf das Hochtemperaturverhalten thermodynamischer Größen zu haben.

Die in dieser Arbeit untersuchten Tree-Level-Symanzik-verbesserten Wirkungen sind derart konstruiert, daß in ihrer störungstheoretischen Entwicklung in niedrigster Ordnung der Kopplung $g$ die Korrekturen zur Kontinuumswirkung erst bei $\mathcal{O}(a^4)$ des Gitter-Cutoffs beginnen. Eine Ergänzung dieses Verbesserungsschemas stellt die sogenannte Tadpole-Verbesserung [11] dar, bei der Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(a^2g^2)$ und höher durch Redefinition der Gitteroperatoren in diesen teilweise integriert werden sollen.
Ein Vergleich der Cutoff-Abhängigkeit verschiedener thermodynamischer Observablen für Tree-Level-Symanzik- und Tadpole-Symanzik-verbesserte Wirkungen soll zeigen, inwieweit die Cutoff-Abhängigkeit bei Tadpole-Verbesserung weiter reduziert ist. Im Besonderen wird der Frage nachgegangen, ob die Reduktion von endlichen Cutoff-Effekten bei Temperaturen nahe $T_c$ auch zu verbessertem Cutoff-Verhalten bei $T_c$ führt. Dazu werden thermodynamische Observablen wie die Latente Wärme und die Oberflächenspannung untersucht, die sowohl von Eigenschaften der Niedrig- als auch der Hochtemperaturphase abhängen.

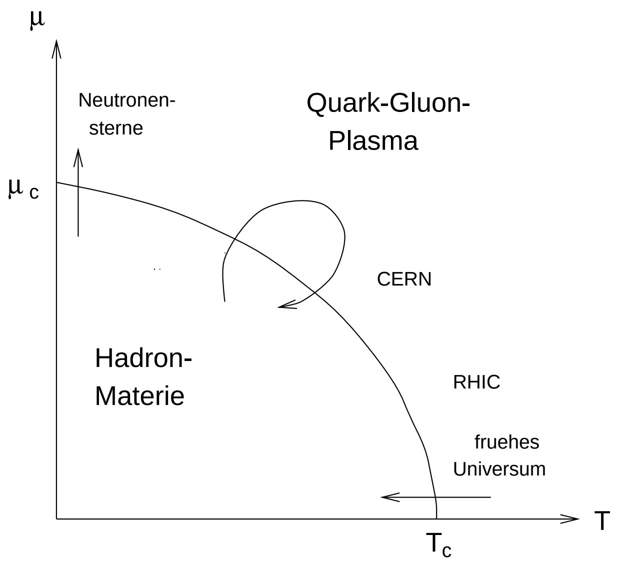
Im folgenden Kapitel soll die Bedeutung der Latenten Wärme und der Oberflächenspannung beim QCD-Phasenübergangs für Schwerionenstöße und im frühen Universum erläutert werden. Dabei wird das *Small Supercooling and Phase Separation Scenario* als mögliches dynamisches Modell des Deconfinement-Phasenübergangs vorgestellt.

Im zweiten Kapitel wird die Formulierung der QCD als $SU(3)_c$-Eichtheorie im Kontinuum und auf dem Gitter besprochen. Deren Thermodynamik und verschiedene Observablen wie Polyakov-Loop, Energiedichte, Druck, Latente Wärme und Oberflächenspannung werden eingeführt. Außerdem wird das Konstruktionsprinzip störungstheoretisch verbesserter Wirkungen und tadpole-verbesserter Wirkungen erläutert.
Kapitel 3 beschäftigt sich kurz mit den verwendeten Simulationsmethoden und Algorithmen. Desweiteren wird die Behandlung von korrelierten Meßdaten mit der Jackknife-Methode und die Datenanalyse mit der sogenannten Multihistogrammmethode nach Ferrenberg und Swendsen [12] besprochen. Der letzteren kommt eine wichtige Bedeutung bei der Berechnung von kritischen Temperaturen, der Oberflächenspannung und des Druckes zu.
Die Auswertung und die Ergebnisse dieser Arbeit finden sich in Kapitel 4. Es wird deren Bedeutung im Zusammenhang mit bisherigen Ergebnissen diskutiert und in der Zusammenfassung soweit möglich bewertet.
Im Anhang Teil A finden sich die störungstheoretischen Entwicklungen der Wilson-Wirkung und der verbesserten Wirkungen, im Teil B und C sind sämtliche Simulationsergebnisse in tabellarischer Form aufgeführt.

# Kapitel 1

# Latente Wärme und Oberflächenspannung beim Quark-Hadron-Phasenübergang in Schwerionenstößen und im frühen Universum

Die Theorie der starken Wechselwirkung macht die Vorhersage, daß Materie unter extremen Bedingungen wie hoher Temperatur und hohem Druck nicht als Hadronmaterie existieren kann, sondern den Zustand eines Plasmas von Quarks und Gluonen annimmt. Die Vorraussetzung für das Vorhandensein einer Plasma-Phase ist eine Energiedichte von etwa 1-2 GeV/fm$^3$ oder eine Temperatur größer als 160-200 MeV. Die drei Szenarien, bei denen solche extremen Bedingungen vorkommen könnten, sind im nebenstehenden Schaubild schematisch angedeutet. Im Kern von Neutronensternen mit einer sehr großen Baryonenzahldichte und einer Temperatur nahe Null und bei der Expansion und Abkühlung des Universums unter eine kritische Temperatur $T_c$ bei chemischem Potential Null könnte der Phasenübergang “in der Natur” stattfinden bzw.

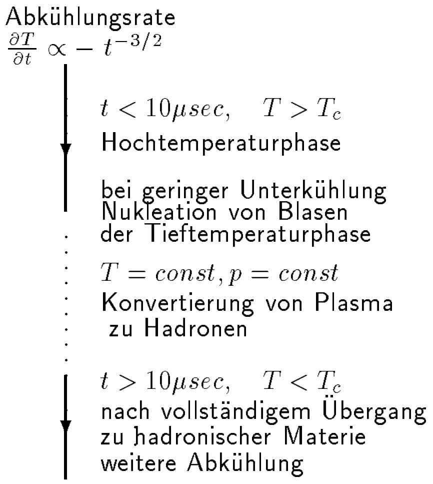


stattgefunden haben. Bei Schwerionenexperimenten mit ultra-relativistischen Energien [13][14] unterscheidet man zwei Situation: das sogenannte "stopping scenario" bei etwa 10 GeV pro Nukleon , bei dem Target- und Projektil-Baryonen vollständig oder teilweise abgestoppt werden und das "transparent scenario" mit einer Energie $\gtrsim$ 100 GeV pro Nukleon, die ein vollständiges Abstoppen der Baryonen verhindert, so daß diese sich aus der Kollisionsregion entfernen, aber in dieser aufgrund einer Vielzahl von Stößen eines Nukleons mit den Nukleonen des anderen Kerns eine große Energiemenge hinterlassen. Im ersten Fall erwartet man sehr baryon-reiches Quark-Gluon-Plasma ($\mu \gg 0$) in der Zentralregion, im zweiten Fall ein Quark-Gluon-Plasma mit einer sehr kleinen Anzahl von Baryonen ($\mu \sim 0$).
Die bisherigen Experimente in Energiebereichen der "stopping"-Region lassen noch keine endgültigen Schlüsse auf die Existenz eines Plasmas zu. In zukünftigen Beschleunigern, dem Relativistic-Heavy-Ion-Collider (RHIC) in Brookhaven und dem Large Hadron-Collider (LHC) beim CERN in Genf, werden Energien zur Verfügung stehen, die es erlauben sollten, nahezu baryonfreies Quark-Gluon-Plasma zu erzeugen.
Obwohl im frühen Universum und in transparenten Schwerionenstößen die Bildung von Hadronen ausgeht von einem baryonfreien Quark-Gluon-Plasma, unterscheiden sich die dynamischen Prozesse des Phasenübergangs aufgrund einer im ersten Fall sehr langsamen und im zweiten Fall sehr schnellen Abkühlung des Systems deutlich. In den beiden nächsten Kapiteln sollen beide Szenarien kurz dargestellt werden.

## 1.1 Das frühe Universum

Das expandierende frühe Universum läßt sich mithilfe der Einstein'schen Gleichungen und den Zustandsgleichungen der QCD beschreiben [15]. Bei Benutzung der Zustandsgleichungen des phänomenologischen Bag-Modells ergibt sich eine Abkühlrate des Universums von $T \propto t^{-1/2}$. Etwa $10\mu sec$ nach dem Urknall führte diese Abkühlung zur Kondensation von hadronischer Materie im Quark-Gluon-Plasma. Eine Beschreibung dieses Phasenübergangs ist lediglich im Rahmen eines Modells möglich, da man die genaue Kinematik des Vorgangs nicht kennt. An dieser Stelle soll das sogenannte **Small Supercooling and Phase Separation Scenario** besprochen werden.
Dieses Modell nimmt an, daß der Phasenübergang 1. Ordnung ist, und sich das System ausgehend von der Hochtemperaturphase in der Nähe des kritischen Punktes mit konstanter Rate abkühlt. Bei einer geringen Unterkühlung setzt die spontane Bildung von Hadronblasen ein; die bei der Expansion der Blasen auftretenden Schockwellen erhitzen das Plasma zurück auf $T_c$ und die Keimbildung kommt zu einem Ende. Bei konstanter Temperatur und konstantem Druck expandiert das System unter Umwandlung von Quarkmaterie zu Hadronen. Die Koexistenz von

Quark-Gluon-Plasma und hadronischer Materie in einem gemischten Zustand bei einer Übergangstemperatur $T \approx T_c$ erfordert eine Oberfläche, die beide Phasen separiert. Diese Trennfläche beeinflußt die freie Energie der gemischten Phase, so daß die Dynamik des Phasenübergangs nicht nur von der Größe der **latenten Wärme**, sondern auch von der **Oberflächenspannung** abhängt. Beide Größen bestimmen wesentlich die aus kosmologischer Sicht interessanten Größen wie die Unterkühlungsrate und den mittleren Abstand der Hadronblasen, der ein Maß für die Inhomogenitäten der Hadronmaterie ist.




Eine Beschreibung des Phasenübergangs ist zum einen durch ein phänomenologisches Bag-Model oder durch Simulation der **Quantenchromodynamik** (QCD) mit Monte-Carlo Methoden möglich. Das Bag-Modell setzt den Phasenübergang als gegeben an, die Monte-Carlo Simulation zeigt dagegen ausgehend von den fundamentalen Grundgleichungen der Theorie, daß die QCD zwei Zustände der Materie beschreibt: das Quark-Gluon-Plasma und die hadronische Materie, wie wir sie heute kennen.
Die Ordnung des Phasenübergangs der QCD ist entscheidend dafür, ob das obige Szenario eine sinnvolle Beschreibung für das frühe Universum liefert. In der reinen Eichtheorie, bei der man die dynamischen Freiheitsgrade der Quarks vernachlässigt, handelt es sich mit großer Sicherheit um einen Phasenübergang 1. Ordnung, so daß es sinnvoll erscheint die latente Wärme und die Oberflächenspannung zu ermitteln, um eine grobe Schätzung für die Unterkühlungsrate, den mittleren Blasenabstand und die erzeugte Inhomogenität zu bekommen. Die Ordnung des Phasenübergangs der vollen QCD mit physikalischen Quarkmassen ist nicht bekannt, so daß sich das Modell als unzureichend herausstellen könnte.

### 1.1.1 Small Supercooling and Phase Separation Scenario

Bei diesem Szenario ist der Ausgangspunkt ein leicht unterkühltes Quark-Gluon-Plasma, was nach dem klassischen Keimbildungsmodell, wie man es bei Landau-Lifschitz [16] findet, zur Formation von Hadronblasen verschiedener Größe führt. Die Erzeugungsrate der Blasen ist danach

$$\Gamma \; dt \; dV \quad \propto \quad T^4 \; e^{-F_B/T} \; dT dV \quad , \tag{1.1}$$

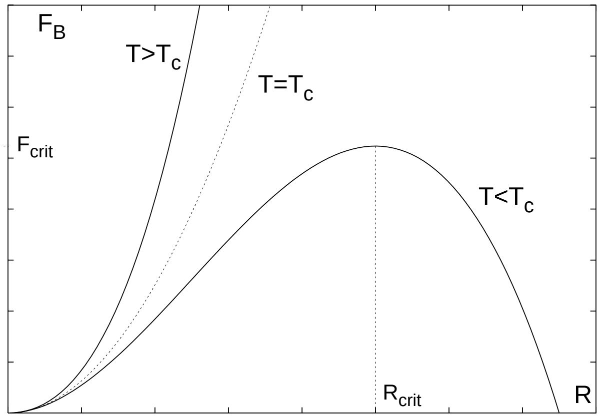



Abbildung 1.1: Freie Energie einer Hadronblase in Abhängigkeit ihres Radius R und der Temperatur T

mit der freien Energie der Hadronblase

$$F_B = -L\ \bar{T}\ V_B + \sigma A_B \quad , \qquad \bar{T} = (T_c - T)/T_c \tag{1.2}$$

$$= -L\ \bar{T}\ \frac{4}{3}\pi R^3 + \sigma 4\pi R^2 \quad , \tag{1.3}$$

wobei $V_B$, $A_B$ und $R$ das Volumen, die Oberfläche bzw. den Radius der Blase bezeichnen und $L$ die **latente Wärme** sowie $\sigma$ die **Oberflächenspannung** ist. Die Abbildung 1.1 zeigt den Verlauf der freien Energie für verschiedene Temperaturen. Da das System bestrebt ist, die freie Energie zu minimieren, können für $T \geq T_c$ keine stabilen Blasen entstehen. Bei Temperaturen unterhalb von $T_c$ allerdings können Blasen, die einen kritischen Radius $R_c = 2\sigma/(L\bar{T})$ überschreiten, den energetisch ungünstigen Beitrag durch die Plasma-Hadron-Oberfläche kompensieren. Diese expandieren explosionsartig als Deflagrations-Blase [15]; Abbildung 1.2 zeigt deren Struktur ¶. Die Front des Phasenübergangs propagiert sehr langsam im Vergleich zu der zusätzlich auftretenden Schockwelle mit der Überschallgeschwindigkeit $v_s$, die das Plasma zurück auf $T \approx T_c$ erhitzt, so daß in diesem Raumbereich keine neue Blasenbildung stattfinden kann. Die Kondensation von Blasen ist abgeschlossen, wenn der von Schockwellen unbeeinflußte Volumenanteil

$$f(t) = 1 - \int_{t_c}^{t} dt' \frac{4}{3}\ \pi\ v_s^3\ (t - t'')^3\ \Gamma(T(t')) \tag{1.4}$$

Null wird. Eine approximative Lösung des Integrals liefert für die Unterkühlungsrate

$$\frac{T_c - T_{pt}}{T_c} \approx \alpha \chi^{-\frac{1}{2}} \quad , \tag{1.5}$$

¶Die Struktur der Blase stammt aus relativistisch-hydrodynamischen Überlegungen.

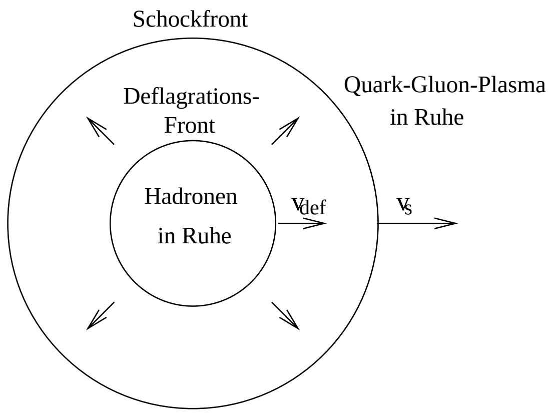



Abbildung 1.2: Struktur einer deflagrationsartig expandierenden Blase: Die Blase der hadronischen Materie wächst mit der Geschwindigkeit $v_{def}$; da die Hadronphase weniger dicht ist, wird die zur Verfügung stehende Energiedichte in Form einer Schockwelle abgeführt, wobei komprimiertes Quark-Gluon-Plasma nach außen strömt. Die Front der Schockwelle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v_s \gg v_{def}$ [17].

sowie für den mittleren Blasenabstand

$$d \approx v_s \pi^{\frac{1}{3}}\ e^{\chi/4}\ \alpha \chi^{-\frac{3}{2}}\ T_c^{-1} \quad , \tag{1.6}$$

wobei $\chi = 4\ \ln(T_c^2/C)$ ist. In der Literatur [18] findet man $\chi = 173$ und $v_s^2 = \frac{1}{3}$. $T_c$ ist die kritische Temperatur des QCD Phasenübergangs, deren Wert bei etwa 150 MeV liegt. Die Latente Wärme und die Oberflächenspannung tauchen lediglich in dem Skalenfaktor $\alpha$ auf

$$\alpha^2 = 16\pi\sigma^3\ /\ 3L^2 T_c \quad . \tag{1.7}$$

Die kosmologisch interessanten Größen $(T_c - T_{pt})/T_c$ und $d$ hängen also entscheidend von $L$ und $\sigma$ ab, die man aus Monte-Carlo Simulationen extrahieren kann. Wie dies im einzelnen geschieht, wird in Kapitel 2.4 dargestellt.
Aus dem mittleren Blasenabstand läßt sich die durch den Phasenübergang entstandene Dichteinhomogenität

$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} \propto \chi d \tag{1.8}$$

berechnen. Eine große Inhomogenität würde evtl. noch heute sichtbare Spuren hinterlassen haben, ist aber nach [15] bei der wahrscheinlich geringen Unterkühlungsrate nicht zu erwarten.

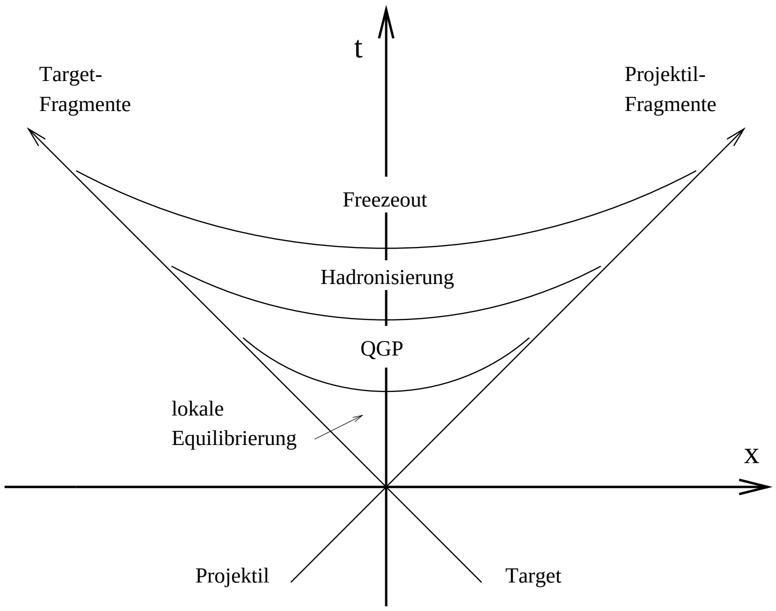



Abbildung 1.3: Raumzeit-Diagramm einer ultrarelativistischen Schwerionenkollision.

## 1.2 Ultrarelativistische Schwerionenkollisionen

Das Kollisionsszenario zweier schwerer Ionen ist in Abb. 1.3 als Raumzeit-Diagramm dargestellt. Target- und Projektil-Nukleus bewegen sich von $x = -\infty$ bzw. $x = +\infty$ kommend mit nahezu Lichtgeschwindigkeit und treffen am Punkt $x = 0$ und $t = 0$ frontal aufeinander. Aufgrund der Lorentzkontraktion in $x$-Richtung kann man sich die beiden Nuklei durch sehr dünne Scheiben repräsentiert vorstellen. Diese sind bei Energien von 100 GeV pro Nukleon füreinander transparent und können einander mit einem gewissen Rapiditätsverlust durchdringen. Zwischen den beiden Fragmenten der Kollision im zentralen Rapiditätsbereich entsteht eine hochangeregte, nahezu baryonfreie Region, die nach der Eigenzeit $\tau_0$ ein thermisches Gleichgewicht erreicht. Die Energiedichte bei Erreichen dieses Gleichgewichts wurde von Bjorken [19] mithilfe der Rapiditätsverteilung $dN/dy$ der erzeugten Teilchen abgeschätzt. Ermittelt man diese aus den Raumzeit-Punkten der Teilchen, deren transversale Masse $m_T^2 = m^2 + \vec{p}_T^{\,2}$ ist, so erhält man für die Energiedichte $\epsilon_0$ gemittelt über die transversale Kollisionsfläche $A$

$$\epsilon_0 = \frac{m_T}{\tau_0 A} \frac{dN}{dy}\bigg|_{y=0} \quad . \tag{1.9}$$

Die Rapiditätsverteilung ist im Experiment meßbar, die Eigenzeit $\tau_0$, bei der das Plasma entsteht, ist von Bjorken auf 1 fm/c geschätzt worden.

Nach Erreichen des Gleichgewichts entwickelt sich das Plasma nach einem hydrodynamische Modell [19] mit einer Energiedichte in Abhängigkeit der Eigenzeit $\tau$ als Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = -\frac{\epsilon + P}{\tau} \quad , \tag{1.10}$$

mit der Anfangsbedingung $\epsilon(\tau_0) = \epsilon_0$ aus (1.9). Die Gleichung (1.10) kann nun mit den entsprechenden Zustandsgleichungen der QCD gelöst werden. Häufig wird hier auf die Zustandsgleichungen des phänomenologischen Bag-Modells zurückgegriffen, besser ist es allerdings diese aus den Grundgleichungen der QCD mithilfe von Gitterrechnungen zu bestimmen.
Wenn die Temperatur des Plasmas unter die kritische Temperatur $T_c$ sinkt, findet der Übergang vom Plasma zu Hadronen statt. Aufgrund der sehr schnellen Abkühlung des Systems ist die genaue Dynamik dieses Vorgangs nicht bekannt, da man nur wenig über den Keimbildungsprozeß von Hadronblasen sagen kann. Die Oberflächenspannung der Blasen ist einer der Parameter, die die Erzeugungsrate bestimmen sollten.
Nach dem vollständigen Übergang zu hadronischer Materie ist es weiterhin gerechtfertigt, deren Dynamik durch die Gleichungen eines relativistischen Gases zu beschreiben. Erst bei weiterer Abkühlung und Erreichen der sogenannten "freezeout"-Temperatur sind die Hadronen nicht länger in thermischem Kontakt.

# Kapitel 2

# QCD im Kontinuum und auf dem Gitter

Eine der vier Grundkräfte der Natur ist die starke Kraft, der die stark wechselwirkenden Teilchen - die Gluonen, die Quarks und deren gebundenen Zustände, die Hadronen - unterliegen. Die Quantenchromodynamik (QCD) wird als die zugrundeliegende fundamentale Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung der Quarks und Gluonen angesehen.

Die QCD ist eine $SU(3)_c$ Eichtheorie, deren grundlegenden Ideen Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre insbesondere von Nambu und Gell-Mann formuliert wurden. Zur systematischen Erklärung der großen Zahl stark wechselwirkender Teilchen wurde das Quarkmodel entwickelt, welches die Teilchen als gebundene Zustände fundamentaler Teilchen, den Quarks, beschreibt. Heute kennt man sechs verschiedene Quarks und deren Antiteilchen, die man nach ihrem *flavour* typisiert: *up, down, charm, strange, bottom, top* .
Quarks sind Fermionen und tragen die elektrische Ladung $-\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$. Es gibt gebundene Zustände mit drei Quarks $(3q)$ bzw. Antiquarks $(3\bar{q})$, die Baryonen, sowie Zustände mit einem Quark-Antiquark-Paar $(q\bar{q})$, die Mesonen. Da Baryonen vom Typ $(qqq)$, die auch experimentell nachgewiesen wurden, mit gleichem Flavour, gleichem Spin und identischen Ortsraumwellenfunktionen das Pauli-Prinzips verletzten, hat man einen zusätzlichen Quarkfreiheitsgrad *colour* postuliert. Jedes Quark kann in drei verschiedenen *colour* Zuständen *red , blue, green* existieren.

## 2.1 QCD als Eichtheorie

Als Eichtheorie wird an die QCD die Forderung gestellt, daß ihre Lagrangedichte invariant unter lokalen Eichtransformationen bezüglich der $\mathrm{SU}(3)_c$ Farbladungsgruppe ist.
Die Lagrangedichte der freien Quarks lautet

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{f,c} \bar{\Psi}(x)^f_c (i\partial\!\!\!/ - m_f) \Psi^f_c(x) \tag{2.1}$$

mit der Summe über alle *flavour*- und alle *colour*-Indizes und den Feldern der Antiteilchen $\bar{\Psi}(x) \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$. Diese Lagrangedichte erfüllt mithilfe der sog. *minimalen Substitution*

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu(x) \tag{2.2}$$

die Forderung nach lokaler Eichinvarianz. Die $A_\mu(x)$ sind die Felder der Eichbosonen, den Gluonen, die über folgende Beziehung mit den acht Generatoren der Eichgruppe $\mathrm{SU}(3)_c$ verbunden sind

$$A_\mu(x) = \sum_k \frac{1}{2} A^k_\mu(x) \lambda_k \tag{2.3}$$

Die $A^k_\mu(x)$ sind reelle Eichfelder und die $\lambda_k$ die Generatoren der $\mathrm{SU}(3)_c$ Farbladungsgruppe. Daraus ergibt sich die Lagrangedichte als

$$\mathcal{L}_F(x) = \sum_{f,c,\beta} \bar{\Psi}(x)^f_c (iD\!\!\!\!/\,^{c\beta} - m_f \delta^{c\beta}) \Psi^f_\beta(x) \quad . \tag{2.4}$$

wobei sich die Quark- und Gluonfelder in folgender Weise mit $G \in SU(3)$ transformieren

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\longrightarrow G\Psi(x) \quad , \\ \bar{\Psi}(x) &\longrightarrow \bar{\Psi}(x) G^\dagger \quad , \\ A_\mu(x) &\longrightarrow G(x) A_\mu(x) G^\dagger(x) - \frac{i}{g} G(x) \partial_\mu(x) G^\dagger(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Der Wechselwirkung der Eichbosonen untereinander wird durch Addition eines weiteren eichinvarianten Ausdrucks zur Lagrangefunktion Rechnung getragen

$$\mathcal{L}_G(x) = -\frac{1}{4} F^a_{\mu,\nu}(x) F^{\mu,\nu}_a(x) \tag{2.6}$$

mit

$$F^a_{\mu,\nu}(x) = \partial_\mu A^a_n(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) - g f^a_{bc} A^b_\mu(x) A^c_\nu(x) \quad , \tag{2.7}$$

wobei die $f^a_{bc}$ die Strukturfunktionen der SU(3) sind.

Die Lagrangefunktion $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G$ beschreibt nun die Wechselwirkung der QCD, wobei g die starke Kopplungskonstante ist.

## 2.2 Gitterformulierung der QCD

Man beobachtet, daß farbige Objekte – Quarks und Gluonen – in der Natur nicht als freie Zustände vorkommen. Beobachtbare Zustände sind immer "farblos"; diese Eigenschaft bezeichnet man als **Colour Confinement**. Man ist der Meinung, daß das Confinement in der Selbstwechselwirkung der Gluonen begründet liegt, die vergleichbar in der QED nicht vorkommt.
Bei der störungstheoretischen Entwicklung der QCD erhält man divergente Resultate, die eine Renormierung der Theorie notwendig machen. Dies führt auf eine renormierte vom Impulsübertrag $Q^2$ abhängige Kopplung, deren störungstheoretische Entwicklung in 1-loop-Näherung gegeben ist als

$$\alpha(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\log\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}}\right)} \quad , \tag{2.8}$$

und die man als *rennende Kopplung* bezeichnet. $\Lambda_{QCD}$ ist im Limes masseloser Quarks der einzige freie Parameter der Theorie, der sogenannte Skalenparameter der QCD, dessen Wert sich aus dem Vergleich mit dem Experiment ergibt; $N_F$ ist die Anzahl der Quark-Flavour.
Da kleine Abstände großen Impulsüberträgen entsprechen, geht die Kopplung und somit die Wechselwirkung für diesen Fall gegen Null, die Theorie zeigt **Asymptotische Freiheit**.
Illustrieren lassen sich beide Eigenschaften anhand des Potentials zwischen schweren Quarks, wie es sich für das Charmonium oder Bottonium ergibt. Bei Abständen unter etwa $0.1 fm$ wird die Wechselwirkung dominiert durch Ein-Gluon-Austausch, analog zum Ein-Photon-Austausch der QED; in niedrigster Ordnung Störungstheorie findet man ein coulombartiges Potential wie in der QED

$$V(r) \propto \frac{\alpha}{r} \tag{2.9}$$

mit der starken Kopplungskonstante $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$.
Betrachtet man Abstände größer als $0.1 fm$ so verhindert der Anstieg der rennenden Kopplung störungstheoretische Berechnungen. Empirisch findet man, daß ein mit dem Abstand linear ansteigendes Potential der Form

$$V(r) \propto \sigma r \tag{2.10}$$

das Spektrum von Bindungszuständen schwerer Quarks gut beschreibt, dabei ist $\sigma$ die sogenannte String-Tension.
Diese Confinement Eigenschaft der QCD läßt sich nur bestätigen durch eine nicht störungstheoretische Herangehensweise. Die **Gitterformulierung der QCD** liefert eine Möglichkeit, mithilfe von Monte-Carlo Simulationen den nicht störungstheoretischen Bereich der Theorie zu berechnen.

### 2.2.1 QCD auf dem Gitter

Die Monte-Carlo Simulation einer Quantenfeldtheorie erfordert es, die Theorie in diskreter Form zu formulieren. Ausgangspunkt hierfür ist der **euklidische Pfadintegralformalismus**.
Die Vakuumserwartungswerte zeitgeordneter Produkte von fermionischen und gluonischen Feldern, die Greensfunktionen, beschreiben eine Quantenfeldtheorie vollständig und lassen sich durch den folgenden euklidischen † Pfadintegralausdruck berechnen

$$\langle 0|T[\Psi_\alpha(x),\ldots\bar{\Psi}_\beta(y),\ldots A_\mu(z),\ldots]|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}A\ \mathcal{D}\Psi\ \mathcal{D}\bar{\Psi}\ (\Psi_\alpha(x)\cdots\bar{\Psi}_\beta(y)\cdots A_\mu(z)\cdots)\ e^{-S_E[A,\psi,\bar{\psi}]}}{\int \mathcal{D}A\ \mathcal{D}\psi\ \mathcal{D}\bar{\psi}\ e^{-S_E[A,\psi,\bar{\psi}]}} \quad . \tag{2.11}$$

Das Integrationsmaß $\mathcal{D}A\ \mathcal{D}\Psi\ \mathcal{D}\bar{\Psi}$ steht symbolisch für die Integration über alle Felder; somit erhält man ein unendlich-dimensionales Integral, das erst in der Gitterversion zu einem sinnvollen mathematischen Ausdruck wird.
$S_E$ bezeichnet die euklidische Wirkung

$$S_E = \int d^4x\ \mathcal{L}_E(x) \quad , \tag{2.12}$$

mit der euklidischen Lagrangedichte der QCD,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E(x) &= \sum_{f,\alpha,\beta} \bar{\Psi}(x)^f_\alpha(\gamma^E_\mu {D_\mu}^{\alpha\beta} + m_f\delta^{\alpha\beta})\Psi^f_\beta(x) \\ &\quad + \frac{1}{4}F^a_{\mu,\nu}(x)F^{\mu,\nu}_a(x) \quad ,\end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei die Matrizen $\gamma^E_\mu$ aufgrund der euklidischen Metrik die Relation

$$\{\gamma^E_\mu, \gamma^E_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad {}^{\dagger\dagger} \tag{2.14}$$

erfüllen.

Der Übergang von der kontinuierlichen euklidischen Raumzeit $\mathcal{R}^4$ zu einem diskreten Raumzeit-Gitter mit Gitterabstand a wird als **Gitterregularisierung** bezeichnet. Dies führt dazu, daß jedem Gitterpunkt ein 4-Tupel von ganzen Zahlen zugeordnet wird, $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ $, n_i \in \mathcal{N}$, das System auf ein endliches Gittervolumen $V_4 = V_\sigma \cdot V_\tau = (aN_\sigma^3)\cdot(aN_\tau)$ beschränkt wird ( $N_\sigma$ bzw. $N_\tau$ sind Anzahl der Gitterpunkte in räumlicher bzw. zeitlicher Richtung) und Ableitungen durch Differenzenquotienen sowie Integrale über $\mathcal{R}^4$ durch endliche Summen über die Gitterpunkte

† Die entsprechenden euklidischen Größen erhält man durch Fortsetzung der Zeitachse ins Imaginäre: $x_0 \to -ix_4$ mit $x_4 \in \mathcal{R}$

†† Im weiteren wird nur noch die euklidische Formulierung benutzt, daher entfällt zur Vereinfachung der Index E.

ersetzt werden. Das unendlich-dimensionale Integral wird somit auf dem Gitter endlich und ist ein auch streng mathematisch sinnvoller Ausdruck. Aus der Forderung, daß im Limes $a \to 0$ die Gitterwirkung gegen die euklidische Kontinuumswirkung geht, ergeben sich folgenden Ausdrücke:

**Gluonischer Anteil in der Standard Wilson Formulierung**

$$S_G(\{U\}) = \beta \sum_{n,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr}U_{\mu,\nu}(n)\right) \quad , \tag{2.15}$$

mit der Plaquette, dem kleinsten geschlossenen Loop als Produkt von Linkvariablen

$$U_{\mu,\nu}(n) \equiv U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad , \tag{2.16}$$

wobei ein Link $U_\mu(n)$ eine Verbindung zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten herstellt und die Eichfelder enthält. Dies geschieht mithilfe des Schwingerschen Linienintegrals, dessen Integrationsweg die Gitterpunkte $n$ und $n + a\hat{\mu}$ verbindet

$$U_\mu(n) = \exp\left(ig\int_n^{n+a\hat{\mu}} dy A_\mu(y)\right) \quad . \tag{2.17}$$

**Fermionischer Anteil der Wirkung**

$$S_F \ = \sum_{n,m;\alpha,\beta} \bar{\Psi}_\alpha(n)K_{\alpha\beta}(n,m)\Psi_\beta(m) \tag{2.18}$$

mit der Fermionenmatrix

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}(n,m) \ = \ & \sum_\mu \frac{1}{2}\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,[\ \delta_{m,n+\hat{\mu}}\ U_\mu(n) - \delta_{m,n-\hat{\mu}}\ U_\mu^\dagger(n-\hat{\mu})\ ] \\ & +m \quad \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Greensfunktionen nehmen somit folgende Gestalt an

$$\begin{aligned} &\langle 0|T[\Psi_\alpha(x),\ldots\bar{\Psi}_\beta(y),\ldots U_\mu(z),\ldots]|0\rangle = \\ &\frac{\int \mathcal{D}U\ \mathcal{D}\Psi\ \mathcal{D}\bar{\Psi}\ (\Psi_\alpha(x)\cdots\bar{\Psi}_\beta(y)\cdots U_\mu(z)\cdots)\ e^{-(S_G[U]+S_F[\psi,\bar{\psi}])}}{\int \mathcal{D}U\ \mathcal{D}\psi\ \mathcal{D}\bar{\psi}\ e^{-(S_G[U]+S_F[\psi,\bar{\psi}])}} \quad . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Durch Ausintegration des fermionischen Anteils in der Gesamtwirkung mithilfe des Grassmannintegrals, erhält man

$$\int DU D\bar{\Psi} D\Psi \ \ e^{-(\bar{\Psi}K[U]\Psi + S_G[U])} \ = \ \int DU\, \det(K(U)) \ \ e^{-S_G[U]} \quad . \tag{2.21}$$

In der *Quenched Approximation* wird die Fermiondeterminante auf Eins gesetzt, was physikalisch einen Verzicht auf Berücksichtigung der Vakuumspolarisationseffekte bedeutet. Somit gelangt man zum Ausgangspunkt für diese Arbeit, zu einer reinen SU(3)-Eichtheorie auf dem Gitter[†], die nur noch gluonische Freiheitsgrade enthält.

## 2.3 Der Kontinuumslimes

Mit der Gitterregularisierung hat man eine Möglichkeit gefunden, die divergenten Terme aus der nicht-regularisierten Theorie zu entfernen. Dabei nimmt man in Kauf, daß alle Größen in Einheiten des Gitterabstandes auftreten, man aber die Kopplung und nicht den Gitterabstand in der Wirkung als freien Parameter hat. Eigentlich interessiert ist man an Größen des Kontinuums, also am Grenzwert $a \to 0$. In diesem Limes muß die Korrelationslänge auf dem Gitter divergieren

$$\hat{\xi} = \frac{\xi}{a} \underset{a \to 0}{\longrightarrow} \infty \quad , \tag{2.22}$$

wobei $\xi$ die physikalische Korrelationslänge ist.
Da $g$ der freie Parameter der Theorie ist, findet man die entsprechende Kontinuumstheorie bei einem Parameter $g^*$, für den gilt

$$\hat{\xi}(g) \underset{g \to g^*}{\longrightarrow} \infty \quad . \tag{2.23}$$

Somit sind die Gittergröße $a$ und die Kopplung $g$ durch die Beziehung

$$g(a) \underset{a \to 0}{\longrightarrow} g^* \tag{2.24}$$

miteinander verknüpft. Aus der Überlegung, daß im Kontinuumslimes alle Gittergrößen gegen die entsprechende physikalische Größe gehen sollen, ergibt sich eine Relation zwischen $a$ und $g$.

$$\lim_{a \to 0} \mathcal{O}\left(g(a), a\right) = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^{d\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}\left(g(a), a\right) = \mathcal{O}_{phys} \quad , \tag{2.25}$$

wobei $d\mathcal{O}$ die Massendimension der Größe $\mathcal{O}$ ist. Für kleine $a$ sollte die Größe $\mathcal{O}$ unabhängig vom Gitterabstand sein, so daß die Ableitung der Gleichung (2.25) Null

[†]Von nun an soll, wenn von Wirkung gesprochen wird, immer die reine Eichwirkung gemeint sein.

wird:

$$
\begin{aligned}
a\frac{d}{da}\mathcal{O}\left(g(a),a\right) &= 0 \\
\left(a\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O} &= 0 \\
\left(a\frac{\partial}{\partial a} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O} &= 0 \qquad ,
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

wobei $\beta(g) = -a\partial g/\partial a$ die Callan-Symanzik $\beta$-Funktion und (2.26) die Renormierungsgruppengleichung ist.
Die $\beta$-Funktion ist mit zwei Methoden bestimmbar: (1.) störungstheoretisch und (2.) nicht-störungstheoretisch.

1. Die störungstheoretische Methode beruht auf der Annahme der Asymptotischen Freiheit der Theorie, so daß der kritische Punkt bei $g^* = 0$ liegt. Eine Entwicklung für kleine $g$ z. B. des Potentials bis zur Ordnung $g^6$ liefert

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \ldots \quad \text{mit} \quad b_0 = \frac{11N}{48\pi^2},\; b_1 = \frac{34}{3}\left(\frac{N}{16\pi^2}\right)^2 \qquad , \tag{2.27}$$

   wobei die Koeffizienten $b_0$ und $b_1$ universell † sind. Daraus erhält man

$$a\Lambda = R(\beta) = \left(\frac{\beta}{2Nb_0}\right)^{\frac{b_1}{2b_0^2}} \exp\left(\frac{-\beta}{4Nb_0}\right) \tag{2.28}$$

   im aymptotischen Skalenbereich $g \to 0$, wobei $\Lambda$ ein freier Parameter der Theorie ist, der aus dem Vergleich mit dem Experiment zu bestimmen ist.

2. Nicht-störungstheoretisch wird die $\beta$-Funktion durch die Bestimmung einer physikalischen Observablen in Gittereinheiten $a$ in Abhängigkeit von der Kopplung $g$ ermittelt, wobei die $\beta$-Funktion im allgemeinen nicht unabängig von der Wahl der Observablen ist. Aus der Simulation berechnet man die Größe $\hat{\mathcal{O}}(g_i) = (\mathcal{O}a)(g_i)$ bei verschiedenen Kopplungen $g_i$ und interpoliert zwischen den Meßpunkten. Die Ableitung der Interpolationsfunktion nach g liefert dann die inverse $\beta$-Funktion.

$$\beta(g) = -a\frac{\partial g}{\partial a} = (\mathcal{O}a)(g)\,\left(\frac{\partial(\mathcal{O}a)(g)}{\partial g}\right)^{-1} \tag{2.29}$$

   In Kapitel 4 dieser Arbeit wird die String-Tension als Größe zur Bestimmung genommen.

†Universell im Sinne von Unabhängigkeit von der entwickelten Größe und vom Renormierungsschema.

Die Abweichungen der $\beta$-Funktion vom asymptotischen Skalenverhalten bei großen $g$ können auch berücksichtigt werden , indem man in (2.28) die nackte durch eine effektive Kopplung ersetzt. Bei diesem effektiven Ansatz definiert man sich ausgehend von einer in einer Simulation gemessenen nicht-physikalischen Größe $\langle\mathcal{O}\rangle$ ein effektives "renormiertes" $g$

$$g_{\text{eff}} = f(\langle\mathcal{O}\rangle) \quad , \tag{2.30}$$

wobei die Funktion $f$ gerade so gewählt ist, daß man bei Entwicklung von $f(\langle\mathcal{O}\rangle)$ in Ordnungen von $g^2$ im Limes $N_\sigma, N_\tau \to \infty$ den richtigen asymptotischen Ausdruck bis $\mathcal{O}(g^2)$ erhält; $g_{\text{eff}}$ geht also für kleine Kopplungen über in die nackte Kopplung g. Es ergibt sich dann für die effektive $\beta$-Funktion

$$\beta(g_{\text{eff}}) = -a\frac{\partial g}{\partial a} = R(g_{\text{eff}})\left(\frac{\partial R(g_{\text{eff}})}{\partial g_{\text{eff}}}\frac{\partial g_{\text{eff}}}{\partial g}\right)^{-1} \quad . \tag{2.31}$$

Die erste Ableitung $(\partial R(g_{\text{eff}})/\partial g_{\text{eff}})$ läßt sich analytisch ausführen, die zweite $(\partial g_{\text{eff}}/\partial g)$ muß numerisch aus den Simulationsdaten gewonnen werden. Es zeigt sich, daß die auf diese Art definierte $\beta$-Funktion ein wesentlich besseres Verhalten bei $g \approx 1$ zeigt als die störungstheoretische $\beta$-Funktion.

## 2.4 SU(3) Gittereichtheorie bei endlicher Temperatur

Die Möglichkeit, die Thermodynamik der SU(3) Eichtheorie zu formulieren, liegt in der Analogie zwischen Greenschen Funktionen (2.20) der euklidischen Formulierung und *Korrelationsfunktionen* eines statistisch mechanischen Systems begründet. Die Zustandssumme der SU(3) in der euklidischen Pfadintegralformulierung im Kontinuum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(T,V) &= \int DA \quad e^{-S_G[A]} \\ &= \int DA \quad e^{\left(-\int_V d^3x \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \mathcal{L}_G(A)\right)} \quad . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Die Temperatur $T$ wird eingeführt, indem die Integration in Zeitrichtung durch eine Integration über das endliche Intervall $[0, \frac{1}{T}]$ ersetzt wird. Für eine Formulierung auf dem Gitter müssen die entsprechenden Ersetzungen aus Kapitel 2.2.1 durchgeführt werden; die Zustandssumme lautet dann

$$\mathcal{Z}(T,V_\sigma) = \int \prod_{n,\mu} dU_\mu(n) \quad e^{-S_G[U]} \quad , \tag{2.33}$$

wobei die Temperatur in Einheiten des Gitterabstandes gegeben ist durch $T = (N_\tau a)^{-1}$.
Der thermische Erwartungswert einer Observablen $\mathcal{O}$ ergibt sich in Analogie zur Statistischen Mechanik als:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \prod_{n,\mu} dU_\mu(n)\ \mathcal{O}[U] \quad e^{-S_G[U]} \quad . \tag{2.34}$$

Das Integral über alle Feldkonfigurationen ist nicht explizit lösbar, sondern es läßt sich mit Hilfe der Monte-Carlo Methode ein repräsentativer Satz von Konfigurationen erzeugen, der eine Berechnung des Erwartungswertes mit einem entsprechenden statistischen Fehler gestattet.

### 2.4.1 Thermodynamische Observablen auf dem Gitter

In diesem Kapitel sollen die Größen eingeführt werden, die ein thermodynamisches System charakterisieren. Dazu gehören zum einen die Zustandsgrößen wie die **Energiedichte** und der **Druck**, aber auch der Ordnungsparameter eines Phasenübergangs sowie die dazugehörige **Latente Wärme** und die **Oberflächenspannung**. Der Ordnungsparameter des Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs der SU(3) auf dem Gitter ist der sogenannte **Polyakov-Loop**, dessen Bedeutung im folgenden qualitativ erläutert werden soll.

#### Der Polyakov-Loop

In der statistischen Mechanik ist eine Phasenübergang mit einer globalen Symmetriebrechung verbunden. Diese Symmetrie ist für die reine Eichwirkung die $Z(3)$-Symmetrie. Die Transformation ist definiert auf allen zeitartigen Links einer Zeitschicht

$$U_4(\vec{n}, n_4) \to z U_4(\vec{n}, n_4) \quad , z \in Z(3), \quad \forall \vec{n},\ n_4 \text{ fest} \quad . \tag{2.35}$$

Da die Elemente der Gruppe Z(3), $\exp(2\pi i l/3) \in Z(3), l = 1, 2, 3,$ die das Zentrum der SU(3) bilden, mit den Elementen $U \in SU(3)$ vertauschen, bleibt die Wirkung unter dieser Symmetrietransformation invariant. Der wie folgt definierte Polyakov-Loop $L(\vec{n})$,

$$L(\vec{n}) \equiv \frac{1}{N} \mathrm{Tr} \prod_{n_4=1}^{N_\tau} U_4(\vec{n}, n_4) \quad . \tag{2.36}$$

transformiert sich dagegen nicht-trivial

$$L(\vec{n}) \to z L(\vec{n}) \quad , z \in Z(3) \quad . \tag{2.37}$$

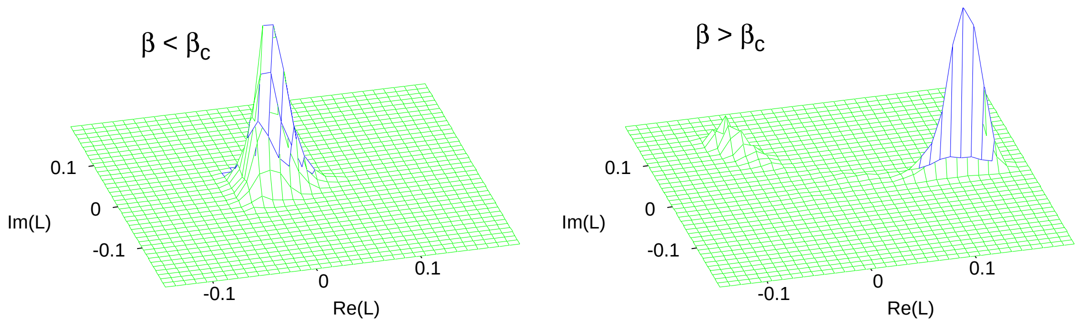



Abbildung 2.1: Polyakov-Loop Verteilung in der komplexen Ebene bei jeweils einer Kopplung $\beta$ der Confinement- und Deconfinement-Phase.

Respektiert der Grundzustand des Systems die Z(3)-Symmetrie, sollten die Konfigurationen, die durch die Symmetrie miteinander verknüpft sind, gleich häufig auftreten. Dies bedeutet für den Polyakov-Loop, daß er mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $L_l = \langle L \rangle \exp(2\pi i l/3)$ $(l = 0, 1, 2)$ annehmen wird. Somit gilt

$$|\langle L \rangle|^2 = |\frac{1}{3} \underbrace{\sum_l e^{2\pi i l/3}}_{=0} \langle L \rangle|^2 = 0 \quad . \tag{2.38}$$

Wird die Symmetrie nicht respektiert, so befindet sich das System in nur einer der drei Phasen, der Erwartungswert des Polyakov-Loops ist endlich

$$|\langle L \rangle|^2 > 0 \quad . \tag{2.39}$$

In Monte-Carlo-Simulationen findet man genau dieses Verhalten bestätigt, wie man aus Figur 2.1 ersehen kann. Auf einem Gitter mit endlichem Volumen ist die Schärfe des Phasenübergangs allerdings etwas ausgewaschen, das heißt auch in der gebrochenen Phase können alle drei Zustände vorkommen.

Die Verbindung des Polyakov-Loops zum Deconfinement-Phasenübergang stellt man her, indem man das Potential eines statischen Quark-Antiquark-Paares betrachtet. Es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Korrelationsfunktion des Polyakov-Loops am Ort $\vec{n}$ und $\vec{m}$ und des Potentials eines Quarks am Ort $\vec{n}$ und eines Antiquarks am Ort $\vec{m}$

$$\langle L(\vec{n}), L^\dagger(\vec{m}) \rangle \propto e^{-V_{Q\bar{Q}}/T} \quad . \tag{2.40}$$

Erfüllt die Korrelationsfunktion die Clustereigenschaft, so gilt

$$\lim_{|\vec{n}-\vec{m}| \to \infty} \langle L(\vec{n}), L^\dagger(\vec{m}) \rangle = |\langle L \rangle|^2 \quad . \tag{2.41}$$

Ist der Erwartungswert Null, wird das Potential unendlich und es herrscht Confinement. Für den Fall eines Erwartungswertes ungleich Null ist das Potential endlich und das System befindet sich in der Deconfinement-Phase.

### Energiedichte und Druck

Die Kontinuumsausdrücke für Energiedichte und Druck lauten

$$\epsilon = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}\right)_V \tag{2.42}$$

und

$$P = T\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial V}\right)_T \quad . \tag{2.43}$$

Deren Übersetzung in Gitterausdrücke erfordert es, die Theorie auf einem anisotropen Gitter mit einer räumlichen und zeitlichen Gitterkonstanten $a_\sigma$ und $a_\tau$ zu formulieren, da die Ableitungen nach T und V bei konstantem V bzw. T durchgeführt werden müssen. Dieses erfordert eine unabhängige Variation der Zeit- und Raumrichtungen, die nicht möglich ist, wenn beide durch eine Gitterkonstante miteinander verknüpft sind. In Kapitel 2.3 wurde dargestellt, daß alle Observablen auf dem Gitter von der Kopplung und nicht explizit vom Gitterabstand abhängen. Um den Kontinuumslimes definieren zu können, fordert man ausgehend von Renormierungsgruppenargumenten einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Kopplungskonstante $g$ und Gitterabstand $a$, so daß für anisotrope Gitter die Einführung zweier Kopplungen $g_\sigma$ und $g_\tau$ nötig ist, die wie folgt von $a$ abhängen:

$$\begin{aligned} \left(g_\sigma(a_\sigma,\xi)\right)_{\xi=1} &= \left(g_\tau(a_\sigma,\xi)\right)_{\xi=1} = g(a) \quad , & (2.44)\\ \left(\frac{\partial g_\sigma(a_\sigma,\xi)}{\partial a_\sigma}\right)_{\xi=1} &= \left(\frac{\partial g_\tau(a_\sigma,\xi)}{\partial a_\sigma}\right)_{\xi=1} = \frac{\partial g(a)}{\partial a} \quad , & (2.45)\end{aligned}$$

wobei $\xi = a_\sigma/a_\tau$ ist. Um die Herleitung auch für sämtliche in dieser Arbeit besprochenen verbesserten Wirkungen allgemein genug zu halten, soll eine Wirkung der Form $S_G[U, f(\beta)] = \beta\ \tilde{S}_G[U, f(\beta)]$ betrachtet werden mit einer beliebigen Funktion $f$ der Kopplung $\beta$. Die Wirkung lautet dann

$$S_G[U, f(\beta)] = \frac{2N}{g_\sigma^2}\xi\ \tilde{S}_\sigma[U, f(g_\sigma^{-2})] + \frac{2N}{g_\tau^2}\frac{1}{\xi}\ \tilde{S}_\tau[U, f(g_\tau^{-2})] \quad , \tag{2.46}$$

mit den räumlichen und zeitlichen Bestandteilen der Wirkung

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\sigma[U, f(g_\sigma^{-2})] &= \sum_{\mu<\nu<4} S_{\mu,\nu}[U, f(g_\sigma^{-2})] \quad , & (2.47)\\ \tilde{S}_\tau[U, f(g_\tau^{-2})] &= \sum_{\mu=1,2,3} S_{\mu,4}[U, f(g_\tau^{-2})] \quad , & (2.48)\end{aligned}$$

wobei $S_{\mu,\nu}[U,f(\beta)]$ die einfache Plaquette-Wirkung sein kann oder eine beliebige Wirkung aus Kapitel 2.5.

Für die Energiedichte und den Druck ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\epsilon &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial\left(\frac{1}{T}\right)}\right)_V \\
&= T^4\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left(a_\tau\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial a_\tau}\right\rangle\right)_{a_\sigma} && (2.49)\\
&= T^4\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left(\xi\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial \xi}\right\rangle\right)_{a_\sigma} && (2.50)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P &= T\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial V}\right)_T \\
&= -\frac{T^4}{3}\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left(a_\sigma\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial a_\sigma}\right\rangle\right)_{a_\tau} && (2.51)\\
&= -\frac{T^4}{3}\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left[\left(a_\tau\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial a_\tau}\right\rangle\right)_\xi-\left(\xi\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial \xi}\right\rangle\right)_{a_\sigma}\right] && (2.52)\\
&= \frac{\epsilon}{3}+\frac{T^4}{3}\left(\frac{N_\tau}{\xi N_\sigma}\right)^3\left(a_\tau\left\langle\frac{\partial S_G}{\partial a_\tau}\right\rangle\right)_\xi && (2.53)
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke für den Druck und die Energiedichte lassen sich nun berechnen, indem man die Ableitungen der Wirkung (2.46) nach $\xi$ bzw. $a_\tau$ ausführt und die Vakuumsbeiträge subtrahiert, welche durch den Wert von Energiedichte und Druck auf einem Gitter mit Temperatur Null gegeben sind, das heißt mit $N_\tau=\infty$.

$$\begin{aligned}
\epsilon &= T^4\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\frac{2N}{g^2}\Bigg\{\bar{S}_\sigma-\bar{S}_\tau+\frac{\partial\bar{S}_\sigma}{\partial f(g^{-2})}\frac{\partial f(g^{-2})}{\partial g^{-2}}\,c_\sigma \\
&\quad+\frac{\partial\bar{S}_\tau}{\partial f(g^{-2})}\frac{\partial f(g^{-2})}{\partial g^{-2}}\,c_\tau+g^2\left(c_\sigma\bar{S}_\sigma+c_\tau\bar{S}_\tau\right)\Bigg\} && (2.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\epsilon}{3}+\frac{T^4}{3}\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\left(a\frac{\partial\beta}{\partial a}\right)\left(\left(\frac{\partial S_G[U,f(\beta)]}{\partial\beta}\right)_{(\beta,N_\tau)}-\left(\frac{\partial S_G[U,f(\beta)]}{\partial\beta}\right)_{(\beta,\infty)}\right)\\
&= \frac{\epsilon}{3}+\frac{T^4}{3}\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\frac{-4N}{g^3}\left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right)\left(\bar{S}_G[U,f(\beta)]+\beta\left(\frac{\partial\bar{S}_G[U,f(\beta)]}{\partial\beta}\right)\right)\quad, && (2.55)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\bar{S}_\kappa &= \langle\tilde{S}_\kappa[U,f(\beta)]\rangle_{(\beta,N_\tau)}-\langle\tilde{S}_\kappa[U,f(\beta)]\rangle_{(\beta,\infty)}\quad \kappa=\sigma,\tau\\
\bar{S}_G[U,f(\beta)] &= \langle\tilde{S}_G[U,f(\beta)]\rangle_{(\beta,N_\tau)}-\langle\tilde{S}_G[U,f(\beta)]\rangle_{(\beta,\infty)} && (2.56)
\end{aligned}$$

und die Koeffizienten $c_\sigma$ und $c_\tau$ durch

$$c_\sigma = \left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}(a_\sigma,\xi)}{\partial\xi}\right)_{\xi=1} \tag{2.57}$$

$$c_\tau = \left(\frac{\partial g_\tau^{-2}(a_\sigma,\xi)}{\partial\xi}\right)_{\xi=1} \tag{2.58}$$

definiert sind und für die Wilson-Wirkung in Störungstheorie berechnet worden sind [20].

Somit lassen sich die Energiedichte und der Druck aus den Erwartungswerten der Wirkungsanteile berechnen, allerdings mit dem Nachteil, daß die Koeffizienten auf Gitterstörungstheorie beruhen. Dies hat zur Folge, daß die Werte für Energiedichte und Druck nur insofern korrekt sind, wie die Störungstheorie Gültigkeit besitzt. Daher sollte man bei der Berechnung des Drucks auf einen nicht-störungstheoretischen Ansatz ausweichen.

Für ein homogenes statistisches System gilt zwischen Druck und freier Energie $f$ die Beziehung

$$P = -f = \frac{T}{V}\ln\mathcal{Z} \quad . \tag{2.59}$$

Die Ableitung der letzten Gleichung nach $\beta$ liefert

$$\frac{\partial P}{\partial\beta} = -T^4\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\left\langle \tilde{S}_G[U,f(\beta)] + \beta\left(\frac{\partial\tilde{S}_G[U,f(\beta)]}{\partial\beta}\right)\right\rangle \quad . \tag{2.60}$$

Somit läßt sich der Druck aus der Integration der Gleichung (2.60) berechnen, wenn man noch den Vakuumsbeitrag abzieht

$$P = -T^4\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\int_0^\beta d\beta'\left(\bar{S}_G[U,f(\beta)] + \beta\left(\frac{\partial\bar{S}_G[U,f(\beta)]}{\partial\beta}\right)\right) \quad . \tag{2.61}$$

Desweiteren hat man mit (2.55) und (2.61) zwei Ausdrücke für den Druck , woraus sich unter Ausnutzung der Summenregel

$$\left(a\frac{\partial g^{-2}}{\partial a}\right) = -2\left(\left(\frac{\partial g_\sigma^{-2}}{\partial\xi}\right) + \left(\frac{\partial g_\tau^{-2}}{\partial\xi}\right)\right)_{\xi=1} \tag{2.62}$$

die Möglichkeit ergibt, auch die Koeffizienten $c_\sigma$ und $c_\tau$ nicht-störungstheoretisch zu berechnen, wenn die nicht-störungstheoretische $\beta$-Funktion bekannt ist.

### Latente Wärme

Ein Phasenübergang 1. Ordnung ist dadurch gekennzeichnet, daß eine der 1. Ableitungen des thermodynamischen Potentials nach seinen natürlichen Variablen unstetig ist. Bei einem System im Wärmebad sind die Temperatur, das Volumen und

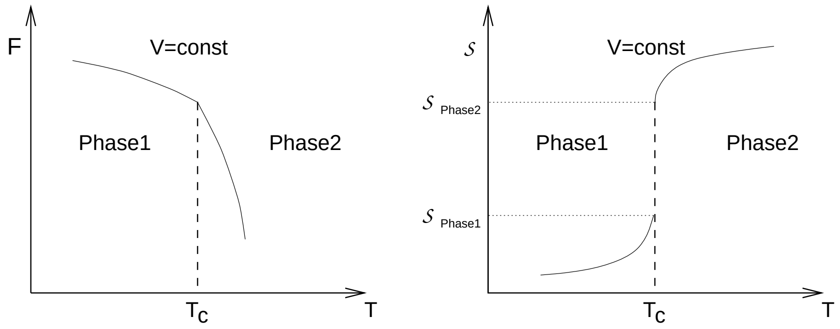



Abbildung 2.2: Freie Energie $F$ und Entropie $\mathcal{S}$ bei einem Phasenübergang 1. Ordnung

die Teilchenzahl die unabhängigen Variablen und das entsprechende Potential ist die freie Energie $F(T, V, N)$. Die Figur 2.2 zeigt den qualitativen Verlauf der freien Energie $F$ und deren Ableitung nach der Temperatur, die Entopie $\mathcal{S} = -\partial F / \partial T|_V$. Diese weist eine Diskontinuität bei $T_c$ auf, deren Größe ein Maß für die latente Wärme ist

$$T_c \left(\mathcal{S}_{\text{Phase2}} - \mathcal{S}_{\text{Phase1}}\right) = T_c \Delta \mathcal{S} = \Delta \mathcal{E} \quad . \tag{2.63}$$

Die Latente Wärme auf dem Gitter kann durch Berechnung der Größen $\Delta\left(\epsilon - 3P\right)/T_c^4$ oder $\Delta\left(\epsilon + P\right)/T_c^4$ bestimmt werden, wenn man berücksichtigt, daß der Druck im thermodynamischen Limes bei $T_c$ einen kontinuierlichen Verlauf hat

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\epsilon}{T_c^4} &= \Delta\left(\frac{\epsilon - 3P}{T_c^4}\right) \\
&= \left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3 \frac{4N}{g^3}\left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right)\Delta\left[\bar{S}_G[U, f(\beta)] + \beta\left(\frac{\partial \bar{S}_G[U, f(\beta)]}{\partial \beta}\right)\right] \quad ,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\epsilon}{T_c^4} &= \Delta\left(\frac{\epsilon + P}{T_c^4}\right) \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^3\left\{\Delta\bar{S}_\sigma\left[\frac{2N}{g^2} + g^2 c_\sigma + \frac{N}{g^3}\left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right)\right]\right. \\
&\qquad -\Delta\bar{S}_\tau\left[\frac{2N}{g^2} - g^2 c_\tau - \frac{N}{g^3}\left(a\frac{\partial g}{\partial a}\right)\right] \\
&\qquad \left.+\frac{2N}{g^2}\Delta\left[\frac{\partial \bar{S}_\sigma}{\partial f(g^{-2})}\frac{\partial f(g^{-2})}{\partial g^{-2}}\, c_\sigma + \frac{\partial \bar{S}_\tau}{\partial f(g^{-2})}\frac{\partial f(g^{-2})}{\partial g^{-2}}\, c_\tau\right]\right\}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

mit der $\beta$-Funktion $\tilde{\beta}(g) = a\left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)$. Die Notation $\Delta X$ meint die Differenz der Größe $X$ in der oberen und unteren Phase.

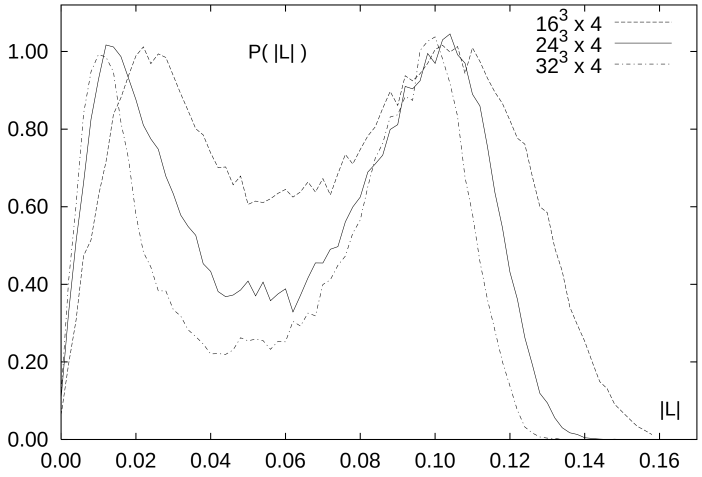



Abbildung 2.3: Polyakov-Loop-Verteilung bei einer Kopplung nahe $\beta_c$ für drei räumliche Gittergrößen

Betrachtet man die Komplexität der Ausdrücke (2.64) und (2.65), so ist es naheliegend die latente Wärme durch $\Delta\left(\epsilon - 3P\right)/T_c^4$ auszudrücken, da man sich erspart, die $c_\sigma$ und $c_\tau$ zu bestimmen. Andererseits würde die Berechnung der latenten Wärme mit sowohl der einen als auch anderen Formel eine Möglichkeit bieten, die Verletzung des asymptotischen Skalenverhaltens beider Größen zu vergleichen. Aufgrund der Schwierigkeiten bei der Bestimmung von $c_\sigma$ und $c_\tau$ wird dies in dieser Arbeit nicht durchgeführt.

**Oberflächenspannung**

Die zweite wichtige Größe bei einem Phasenübergang 1. Ordnung neben der latenten Wärme ist die Oberflächenspannung. In diesem Teil der Arbeit soll dargestellt werden, wie man die Oberflächenspannung aus der Gittertheorie berechnen kann. Dies basiert auf der Histogrammethode, wie sie von Binder [21] für ein Ising-Modell eingeführt und in [18] auf den SU(3) Phasenübergang angewendet wurde.
Der Deconfinement-Phasenübergang äußert sich bei einer Kopplung nahe $\beta_c$ durch eine Doppelpeakstruktur der Verteilung des Polyakov-Loops (Figur 2.3). Die beiden Maxima entsprechen Konfigurationen die sich vollständig in der Confinement- bzw. Deconfinement-Phase befinden, die Beiträge zwischen den Maxima stammen von Konfigurationen, die sich in gemischten Zuständen befinden. Dann sind die beiden Phasen durch eine Oberfläche getrennt, deren zusätzlicher energetischer Beitrag zur freien Energie den gemischten Zustand weniger wahrscheinlich macht. Da

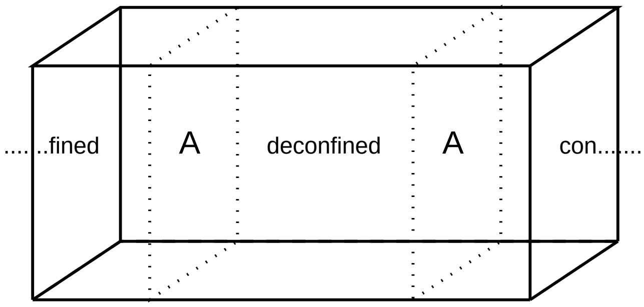



Abbildung 2.4: Oberfläche in gemischter Phase auf Gitter mit periodischen Randbedingungen

sich im Polyakov-Loop die Brechung der Z(3)-Symmetrie wiederspiegelt, gibt es eine Confinement- und drei Realisierungen der Deconfinement-Phase, die bei $T_c$ alle gleich wahrscheinlich sind. Somit sind Oberflächen der Art Confinement-Deconfinement und Deconfinement-Deconfinement möglich. In [22] wird allerdings gezeigt, daß bei $T_c$ die Deconfinement-Deconfinement-Oberfächen durch vollständiges "wetting" stark unterdrückt sind. Es bildet sich zwischen zwei verschiedenen Deconfinement-Phasen ein Bereich der Confinement-Phase, wobei für die Oberflächenspannung der Grenzflächen gilt: $\sigma_{deconf-deconf} = 2\sigma_{conf-deconf}$. Simulationen zeigen außerdem, daß Übergänge von einer Deconfinement-Konfiguration zu einer anderen immer über die Confinement-Phase gehen, so daß es nicht zur Ausbildung von Deconfinement-Deconfinement-Oberflächen kommt. Im folgenden wird diese Art Oberflächen also vernachlässigt.
Auf einem Gitter der Größe $V = N_\sigma^3 a^3$ mit periodischen Randbedingungen beträgt die gesamte Fläche, die die Phasen trennt $2A = 2N_\sigma^2 a^2$(Fig. 2.4). Um eine sinnvolle Schätzung für die Oberflächenspannung zu bekommen, muß ein Ansatz für die Verteilungsfunktion des Polyakov-Loops gefunden werden. Im thermodynamischen Limes kann die Verteilung um die Maxima herum als gaußförmig angenommen werden, mit dem Erwartungswert $\langle |L_i| \rangle$ in dieser Phase als Maximum der Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit, das System in einer der beiden reinen Phasen zu finden ist durch den Boltzman-Faktor $\exp(-f_i V/T)$ gegeben, wobei $f_i$ die freie Energiedichte der jeweiligen Phase bezeichnet. Die Summe aus beiden Verteilungen liefert einen guten Ansatz für die Gesamtverteilung in der Nähe der beiden Peaks

$$P_{1,2}(|L|) = P_1(|L|) + P_2(|L|) \quad , \tag{2.66}$$

mit der Wahrscheinlichkeit für die reinen Phasen

$$P_i(|L|) \propto d_i(V) \exp(-f_i V/T) \exp(-(|L| - \langle |L_i| \rangle)^2 c_i V) \quad , \quad c_i \in \mathcal{R} \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \tag{2.67}$$

wobei die $d_i(V)$ Funktionen des Volumens sind, auf deren genaue Struktur weiter unten eingegangen wird. Die Abweichungen dieses Ansatzes von der wahren Verteilung sind natürlich am Ort des Minimums am größten, da die Beiträge aus der gemischten Phase nicht berücksichtigt sind. Die Wahrscheinlichkeit für die gemischte Phase sollte sich aus den Anteilen der freien Energien und der Oberflächenenergie ergeben,

$$P_m(|L|) \propto d_m(V)\exp(-[f_1V_1 + f_2V_2 + 2\sigma_I A]/T) \quad , \tag{2.68}$$

mit $V_1 + V_2 = V$, wobei $V_1$ und $V_2$ die Volumenanteile sind, die von der einen bzw. anderen Phase eingenommen werden und $\sigma_I$ die Oberflächenspannung ist. $P_m(|L|)$ hängt dabei nur implizit von $|L|$ ab, wobei $|L|$ den relativen Anteil der Phasen 1 und 2 charakterisiert. Dieser kann definiert werden durch die Beziehung

$$\begin{aligned} \langle|L|\rangle &= (\langle|L_1|\rangle\, V_1 \;+\; \langle|L_2|\rangle\, V_2)/V \\ &= \gamma_1\, |L_1| \;+\; \gamma_2\, |L_2| \quad , \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad , \end{aligned} \tag{2.69}$$

die sich aus der Überlegung ergibt, daß für große Volumina die Verteilung im wesentlichen nur aus zwei scharfen Peaks an der Stelle $|L_i|,\ i = 1, 2$ besteht, deren gewichtetes Mittel gerade den Mittelwert der Verteilung ergibt.
Beachtet man, daß das Minimum von $P_{1,2}(|L|)$ exponentiell mit dem Volumen abnimmt , das Minimum von $P_m(|L|)$ aber nur exponentiell mit der Fläche, so ist es sinnvoll, $P_m(|L|)$ als Wert des Minimums anzusehen. Da im Limes unendlichen Volumens bei $\beta_c$ die freien Energien $f_1$ und $f_2$ gleich sind, führt die Betrachtung der Größe

$$\begin{aligned} &\left.\frac{P_{min}(|L|)}{P_{max_1}(|L|)^{\gamma_1} P_{max_2}(|L|)^{\gamma_2}}\right|_{f_1=f_2} \\ &= \left.\frac{d_m(V)\exp(-[f_1V_1 + f_2V_2 + 2\sigma_I A]/T)}{(d_1(V)\exp(-f_1V/T))^{\gamma_1}\ (d_2(V)\exp(-f_2V/T))^{\gamma_2}}\right|_{f_1=f_2} \\ &= \tilde{d}(V)\ \exp(-2\sigma_I A/T) \end{aligned} \tag{2.70}$$

auf folgende Definition

$$\frac{\sigma_I}{T_c^3} \equiv \lim_{V\to\infty} \left(\frac{\sigma_I}{T_c^3}\right)_V \quad , \tag{2.71}$$

mit

$$\left(\frac{\sigma_I}{T_c^3}\right)_V \equiv -\frac{N_\tau^2}{2N_\sigma^2} \ln \frac{P_{min}(|L|)}{P_{max_1}(|L|)^{\gamma_1} P_{max_2}(|L|)^{\gamma_2}} \tag{2.72}$$

$$= -\frac{N_\tau^2}{2N_\sigma^2} \ln \frac{P_{min}(|L|)}{P_{max}(|L|)} \quad \text{für} \quad P_{max_1} = P_{max_2} \quad . \tag{2.73}$$

Bei dieser Definition der Oberflächenspannung auf endlichem Volumen sind die volumenabhängigen Vorfaktoren $d_i(V)$ nicht berücksichtigt. Dies soll bei der Extrapolation zu unendlichem Volumen geschehen. Wie in [18] dargestellt, müssen dann verschiedene Korrekturen berücksichtigt werden:

1. Gaußsche Fluktuationen der Verteilungen in der reinen Phase, das heißt die Peaks sind nicht unendlich schmal wie in (2.69) angenommen.

2. Null-Moden Beiträge aufgrund von Translationen der Oberflächen in Flächennormalenrichtung bei konstantem Abstand beider Oberflächen.

3. Beiträge durch Abweichungen der Oberfläche von ihrer planaren Form.

Die Einflüsse einer endlichen Dicke der Oberfläche und eine mögliche Wechselwirkung der Oberflächen untereinander werden vernachlässigt. Zur Wahrscheinlichkeitsdichte der gemischten Phase könnten auch mehr als zwei planare Flächen oder große sphärische Blasen einer Phase, die eingebettet sind in die andere, beitragen. Diese sollten aber aufgrund der größeren Oberflächenenergie unterdrückt sein.
Bei Berücksichtigung der drei Faktoren ergibt das folgenden Ansatz für die Interpolation zu unendlichem Volumen

$$\left(\frac{\sigma_I}{T_c^3}\right)_V = \left(\frac{\sigma_I}{T_c^3}\right) - \left(\frac{N_\tau}{N_\sigma}\right)^2 \left[c + \frac{1}{4}\ln N_\sigma\right] \quad . \tag{2.74}$$

Tatsächlich sind die verwendeten Volumina von maximal $32^3$ noch immer zu klein, so daß auch noch höhere Korrekturen relevant werden könnten.

## 2.5 Verbesserte Wirkungen

Die Kontinuumsgrößen ergeben sich aus der Gittertheorie im Limes $a \to 0$. Eine Simulation wird bei einem endlichen räumlichen und zeitlichen Gitter durchgeführt, so daß das räumliche Gittervolumen endlich und der Gitterabstand $a = T/N_\tau$ größer Null ist. Im Impulsraum beschränkt das endliche räumliche Gittervolumen die möglichen Impulse auf Werte, die nicht beliebig klein werden können; man spricht von einem Infrarot-Cut-off. Die größten möglichen Impulse auf dem Gitter sind durch $2\pi/a$ gegeben, so daß die Impulse durch den Gitterabstand $a > 0$ nach oben beschränkt sind; dieser Effekt wird als Ultraviolett-Cut-off bezeichnet.
Die Forderung an die Gitterwirkung, im Limes $a \to 0$ die Kontinuumswirkung zu reproduzieren, läßt eine gewisse Freiheit bei ihrer Wahl. Die Plaquette-Wirkung der Standard-Wilson Formulierung ist die einfachste Möglichkeit diese Bedingung zu erfüllen. Qualitativ führt die Entwicklung beliebiger Wirkungen in Potenzen des Gitterabstandes a und der Kopplung g zu folgendem Ausdruck:

$$\lim_{a\to 0} S_{LAT} = S_{KONT} + \mathcal{O}(a^{2n}) + \mathcal{O}(g^{2n}a^{2k}) \quad n,k \geq 1 \quad (je\ nach\ Wirkung^\dagger) \tag{2.75}$$

Bei **verbesserten Wirkungen** soll die Freiheit bei der Wahl der Wirkung zur Reduktion von Korrekturen zum Kontinuumsausdruck genutzt werden, und zwar

† siehe Anhang für beispielhafte Berechnung mit Wilson-Wirkung

durch Addition zusätzlicher Loops zur Standard Wilson-Wirkung. Ein von Weisz und Wohlert [23] untersuchter allgemeiner Ansatz für eine verbesserte Wirkung sieht folgendermaßen aus

$$\begin{aligned}
S_{imp} &= \beta \quad [(c_1^{'} + c_1^{''}g^2) \sum_{n,\mu<\nu} \Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \quad {}_{\mu,\nu}(n)\Big) \\
&\quad +(c_2^{'} + c_2^{''}g^2) \sum_{n,\mu<\nu} \Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \quad {}_{\mu,\nu}(n)\Big) \\
&\quad +(c_3^{'} + c_3^{''}g^2) \sum_{n,\mu<\nu<\rho} \Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \quad {}_{\mu,\nu,\rho}(n)\Big) \\
&\quad +(c_4^{'} + c_4^{''}g^2) \sum_{n,\mu<\nu<\rho} \Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \quad {}_{\mu,\nu,\rho}(n)\Big) \quad ] \\
&\qquad c_i^{'}, c_i^{''} \in \mathcal{R} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.76}$$

wobei die Symbole jeweils symmetrisierte† Loops darstellen sollen.
Die hier vorgeschlagene Wirkung benutzt die Summe aller linear unabhängiger Loops bis zur Länge 6, man könnte aber zum Beispiel auch einen Ansatz mit der Summe aller planaren Loops benutzen, wie es Burkhard Beinlich in seiner Diplomarbeit[24] getan hat. Um die Korrekturen in der Wirkung zu verringern, muß nun (2.76) nach $a$ und $g$ entwickelt und die Koeffizienten $c_i^{'}, c_i^{''}$ so bestimmt werden, daß die Korrekturen der $\mathcal{O}(a^2)$ oder höher wegfallen. Die Wirkung mit einer Verbesserung in niedrigster Ordnung g , bezeichnet man als **tree-level-verbesserte Wirkung** im Unterschied zu einer **1-loop-verbesserten Wirkung**, bei der auch noch die nächste Ordnung $g^2$ berücksichtigt wird.
Da sich die Verbesserungen aus einer störungstheoretischen Entwicklung der Wirkung ergeben, sollte das Verhalten der Theorie vor allem in dem Bereich verbessert sein, für den die Störungsentwicklung gültig ist. Berücksichtigt man nur die niedrigste Ordnung $g$ in der Entwicklung, so ist ein verbessertes Verhalten für $g \to 0$ zu erwarten; wird auch die nächste Ordnung in $g$ mitgenommen, so erwartet man eine Verbesserung auch bei größerem $g$. In der Nähe des kritischen Punktes $g^2 \approx 2N/\beta_c$ bricht die Störungstheorie mit der nackten Kopplung $g$ als Entwicklungsparameter zusammen, so daß vom theoretischen Standpunkt aus, eine Aussage über die Güte der Verbesserung nur schwer möglich ist. Eine Simulation, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt wurde, kann hier Aufschluß bringen.
In einer Arbeit von Lepage und Mackenzie [11] wird vorgeschlagen die Gitteroperatoren so zu redefinieren, daß höhere Ordnung $g$ Terme in den Operatoren absorbiert werden. Auf diese Weise verbesserte Wirkungen bezeichnet man als **tadpole-verbessert**.

†Symmetrisiert meint die Summe aller Loops eines Typs, die man durch Rotation und Spiegelung am Linkmittelpunkt erhält

### 2.5.1 Tree-level-verbesserte Wirkungen

In diesem Abschnitt sollen Wirkungen betrachtet werden, die keine Korrekturen der $\mathcal{O}(a^2)$ enthalten, wenn sie in niedrigster Ordnung $g$ entwickelt werden. Ausgehend von obigem Ansatz kann man zeigen[††], daß eine Wirkung mit den Koeffizienten

$$c_1^{'} = \frac{5}{3} \quad , c_2^{'} = -\frac{1}{12} \quad c_3^{'} = c_4^{'} = c_i^{''} = 0 \quad , i = 1 \ldots 4 \tag{2.77}$$

keine $\mathcal{O}(a^2)$ Korrekturen mehr hat:

$$\begin{aligned} S^{(1,2)} &= \beta \sum_{x,\nu>\mu} \frac{5}{3} \Big(1 - \frac{1}{N} \mathrm{ReTr} \; \square_{\mu\nu}(n)\Big) \\ &\quad -\frac{1}{6}\Big(1 - \frac{1}{2N}\mathrm{ReTr}\Big( \square\!\square_{\mu\nu}(n) + \begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array}_{\mu\nu}(n)\Big) \end{aligned} \tag{2.78}$$

Diese Wirkung zeigt ein deutlich verbessertes Hochtemperaturverhalten, wie durch eine störungstheoretische Untersuchung [8] belegt wird. Die Abweichungen der Energiedichte vom Stefan-Boltzmann-Wert eines freien Gluonengases liegen bei einer zeitlichen Ausdehnung des Gitters von $N_\tau \geq 4$ unter 1.5%, für die Wilson-Wirkung sind es 49%. Die Simulation einer vergleichbaren Wirkung mit $N_\tau = 4$ [8] * liefert für den Druck im Vergleich zur Standard-Plaquette-Wirkung ein deutlich verbessertes Finite-Cut-off-Verhalten. Der Druckverlauf ist vergleichbar dem der Wilson-Wirkung für $N_\tau = 8$.

In dieser Arbeit soll die $2{\times}1$-Wirkung (2.78) auf ihr Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes, das heißt bei $g \approx 1$, untersucht werden. Außerdem wird ein Vergleich mit einer tadpole-verbesserten-$2{\times}1$-Wirkung durchgeführt, wie sie in Kapitel 2.5.3 eingeführt werden wird.

### 2.5.2 1-loop-verbesserte Wirkungen

An dieser Stelle soll auf 1-loop-verbesserte Wirkungen eingegangen werden. Die Vorgehensweise von Weisz, Wohlert und Lüscher [23] bei der Bestimmung der Koeffizienten $c_i^{'}$ und $c_i^{''}$ in der Wirkung (2.76) soll kurz dargestellt werden:

[††] siehe Anhang

$^*S^{(2,2)} = \beta \sum_{x,\nu>\mu} \frac{4}{3} \Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \; \square_{\mu\nu}(n)\Big) - \frac{1}{48}\Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \; \boxed{\phantom{\square\square}}_{\mu\nu}(n)\Big)$

1. Die Koeffizienten $c_i^{'}$ sind aus der tree-level Berechnung bekannt.

2. Störungstheoretische Entwicklung im Impulsraum von Wilson-Loops bis zur zweiten Ordnung in $g^2$ mit einer totalen Wirkung

$$S_{total} = S_{imp} + S_{gaugefixing} + g^2\ S_{measure} + g^2\ S_{ghost} \quad . \tag{2.79}$$

3. Die Bedingung, daß die Entwicklung der Wilson-Loops frei von Impulsen der $\mathcal{O}(k^4)$ sein sollte, liefert drei Bedingungen für die Koeffizienten $c_i^{''}$

$$\begin{array}{lrcl} (a) & c_3^{''} + c_4^{''} & = & -N 0.0005258 \\ (b) & c_2^{''} - c_3^{''} - c_4^{''} & = & -N\ (0.0080770) + \frac{1}{N}\ 0.0102904 \\ (c) & c_1^{''} + 8\ c_2^{''} + 16\ c_3^{''} + 8\ c_4^{''} & = & 0 \quad , \end{array} \tag{2.80}$$

wobei $(a)$ sich als unphysikalisch [25] herausstellt, da es sich bei den Wilson-loops nicht um eine on-shell† Größe handelt. Zusätzlich hat man noch die Freiheit $c_4^{''} = 0$ zu wählen [25].

4. Als Ergebnis einer Entwicklung zweier on-shell Größen ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} c_1^{''} & = & 0.2370 \\ c_2^{''} & = & -0.02521 \\ c_3^{''} & = & -0.0041 \end{array}$$

Bei der so gewählten Wirkung sollten sich Verbesserungen bei $g \neq 0$ einstellen, die Ergebnisse einer Simulation von Alford et al.[26] zeigen aber, daß bei der untersuchten Größe (Abweichung des Quarkpotentials von der Rotationsinvarianz) keine wesentliche Verbesserung gegenüber der $2 \times 1$-tree-level-verbesserten Wirkung vorhanden ist.

### 2.5.3 Tadpole-verbesserte Wirkungen

Lepage und Mackenzie haben gezeigt [11], daß Gitterstörungstheorie deutlich besser konvergiert, wenn man in Potenzen einer *renormierten Kopplung* entwickelt anstelle der *nackten Kopplung*. Verantwortlich für die schlechte Konvergenz der Störungsreihe mit nackter Kopplung machen sie sogenannte **tadpole**-Loops, die in der Entwicklung in Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ und höher beitragen. Die renormierte Kopplung ist so definiert, daß diese Beiträge zumindest teilweise in ihr absorbiert werden. Der Unterschied des Konvergenzverhalten zwischen der Entwicklung mit der nackten und der renormierten Kopplung liegt nach Meinung der Autoren in der Beziehung zwischen

†im Sinne von physikalisch meßbbar

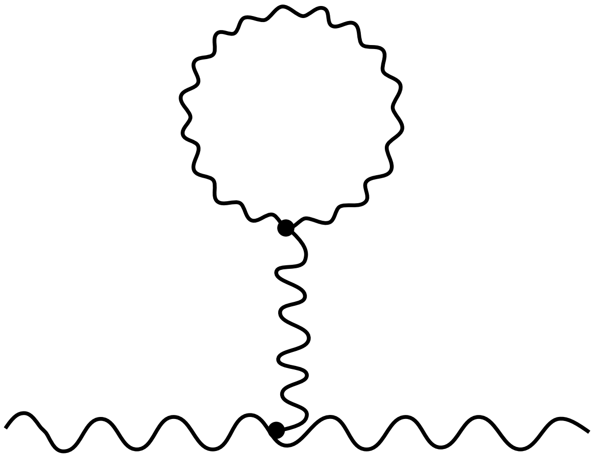


Abbildung 2.5: Tadpole-Loop

Gitter- und Kontinuumsoperatoren begründet. Auf dem Gitter sind die Operatoren so gewählt, daß ihre Entwicklung in niedrigster Ordnung $g$ im Limes $a \to 0$ den Kontinuumsausdruck ergibt. Das heißt, für einen Linkoperator stellt die Entwicklung der Exponentialfunktion die Verbindung zum Kontinuum her

$$U_\mu(n) \ = \ \exp\left(-igaA_\mu(n)\right) \ \to \ 1 - igaA_\mu(n) \qquad . \tag{2.81}$$

Die höheren Terme sollten mit Ordung $a^2$ und höher unterdrückt sein, sind aber, wie die Berechnung des Vakuumerwartungswertes des nächsten Terms in der Entwicklung zeigt, nur mit Ordnung $g^2$ unterdrückt

$$\langle 0|\frac{1}{2}igaA_\mu^2(n)|0\rangle \propto g^2a^2\langle 0|A_\mu^2(n)|0\rangle \propto g^2a^2\frac{1}{a^2} = g^2 \quad , \tag{2.82}$$

da $\langle 0|A_\mu^2(n)|0\rangle$ einen ultraviolett-divergenten Beitrag $1/a^2$ liefert. Auf dem Gitter hat man in der Entwicklung also Beiträge von Loops, die im Kontinuum nicht vorkommen; diese "Gitterartefakte" führen zu relativ großen Abweichungen zwischen Gitter und Kontinuum. Einer dieser "Gitterartefakte" , der in $g^2$ beiträgt, ist der sogenannte **tadpole**-Loop (Abbildung 2.5). Um die Diskrepanz zwischen Gitter- und Kontinuumsoperatoren zu verringern, schlagen Lepage und Mackenzie eine Redefinition der Gitteroperatoren vor. Betrachtet man zum Beispiel den Erwartungswert des Linkoperators in Landaueichung auf dem Gitter, so liefert dieser bei $\beta = 5.7$

$$\langle\frac{1}{3}\mathrm{Tr}U_\mu\rangle \approx 0.82 \quad , \tag{2.83}$$

der entsprechende Kontinuumserwartungswert $\langle\frac{1}{3}Tr(1 - igaA_\mu)\rangle$ ist dahingegen Eins. Eine verbesserte Verbindung zwischen dem Linkoperator auf dem Gitter und dem Kontinuum lautet somit

$$U_\mu(n) \ \ \to \ \ u_0(1 - igaA_\mu(n)) \qquad , \tag{2.84}$$

wobei $u_0$ der Erwartungswert des Links ist.
Jeder Linkoperator sollte also durch sein "tadpole" - verbessertes Pendant ersetzt werden

$$U_\mu(n) \quad \rightarrow \; \tilde{U}_\mu(n) = \frac{U_\mu(n)}{u_0} \quad , \tag{2.85}$$

wobei $u_0$ als globaler Faktor für alle Links eingehen muß, um die Eichinvarianz der Größen zu gewährleisten. Da die Bestimmung des Linkerwartungswertes nur in einer festen Eichung möglich ist, kann man $u_0$ in guter Näherung auch aus dem gemessenen Plaquetteerwartungswert extrahieren

$$u_o = \langle \frac{1}{3}\mathrm{Tr}U_{plaq} \rangle^{\frac{1}{4}} \quad . \tag{2.86}$$

Diese Art der Bestimmung weicht nur wenig von der direkten Messung des Linkerwartungswertes ab.
Für die Wilson-Wirkung wirkt sich die tadpole-Verbesserung lediglich durch eine Umdefinition der $\beta$-Skala aus

$$\begin{aligned} S_G(\{U\}) &= \beta \sum_{n,\mu<\nu} \frac{1}{u_0^4} \left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr}U_{\mu,\nu}(n)\right) \\ &= \beta \frac{1}{u_0^4} \sum_{n,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr}U_{\mu,\nu}(n)\right) \\ &= \tilde{\beta} \sum_{n,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr}U_{\mu,\nu}(n)\right) \quad . \end{aligned} \tag{2.87}$$

Führt man tadpole-verbesserte Links jedoch in tree-level-verbesserte Wirkungen ein, so ergibt sich für die 2×1-Wirkung

$$\begin{aligned} S_{tad}^{(1,2)} &= \beta \sum_{x,\nu>\mu} \frac{5}{3u_0^4} \left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \; \square_{\mu\nu}(n)\right) \\ &\quad - \frac{1}{6u_0^6}\left(1 - \frac{1}{2N}\mathrm{ReTr}\left( \boxed{\phantom{\square\square}}_{\mu\nu}(n) + \boxed{\phantom{\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}}}_{\mu\nu}(n)\right)\right. \\ &= \beta \frac{1}{u_0^4} \sum_{x,\nu>\mu} \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \; \square_{\mu\nu}(n)\right) \\ &\quad - \frac{1}{6u_0^2}\left(1 - \frac{1}{2N}\mathrm{ReTr}\left( \boxed{\phantom{\square\square}}_{\mu\nu}(n) + \boxed{\phantom{\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}}}_{\mu\nu}(n)\right)\right. \\ &= \tilde{\beta} \sum_{x,\nu>\mu} \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr} \; \square_{\mu\nu}(n)\right) \\ &\quad - \frac{1}{6u_0^2}\left(1 - \frac{1}{2N}\mathrm{ReTr}\left( \boxed{\phantom{\square\square}}_{\mu\nu}(n) + \boxed{\phantom{\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}}}_{\mu\nu}(n)\right)\right. \quad , \end{aligned} \tag{2.88}$$

wobei $\tilde{\beta}$ die redefinierte Kopplung ist.
In dieser Arbeit wurden die Faktoren $u_0$ in der Wirkung (2.88) iterativ bestimmt, indem der Vorgang – Messung der Plaquette, Berechnung von $u_0$ und Simulation mit neuem $u_0$ – solange wiederholt wurde, bis der Plaquetterwartungswert innerhalb der Fehlergrenzen mit $u_0^4$ übereinstimmte. Aus der Simulation bei verschiedenen $\beta$-Werten und Splineinterpolation erhält man so einen funktionalen Zusammenhang zwischen $\beta$ und $u_0$. Dieser ist notwendig, um thermodynamische Größen, in denen die Ableitung der Wirkung nach $\beta$ auftritt, berechnen zu können.

# Kapitel 3

# Numerische Methoden der Simulation und Datenauswertung

## 3.1 Monte-Carlo-Simulation

In Kapitel 2.4 wurde dargestellt, daß sich thermodynamische Erwartungswerte einer Observablen in der SU(3)-Eichtheorie durch das hochdimensionale Integral

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \prod_{n,\mu} dU_\mu(n)\ \mathcal{O}[U] \quad e^{-S_G[U]} \tag{3.1}$$

berechnen lassen. Selbst auf dem kleinsten in dieser Arbeit verwendeten Gitter der Größe $12^3 \times 3$ müssen mehr als 160000 Integrale gelöst werden, was analytische und numerische Integrationsverfahren, wie Trapez- oder Simpsonregel, ausschließt, da deren Rechenaufwand exponentiell mit der Anzahl der Dimensionen ansteigt. Die einzige anwendbare Methode ist die Monte-Carlo-Integration, bei der man im einfachsten Fall eine Stichprobe von $N$ zufälligen Feldkonfigurationen $U_\mu(n)$ erzeugt, auf der man eine Schätzung für den Erwartungswert berechnet

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mathcal{Z}}\ \mathcal{O}[U]\ e^{-S_G[U]} \tag{3.2}$$

mit einem statistischen Fehler proportional $1/\sqrt{N}$.
Da der Integrand aber auf großem Gittervolumen bei bestimmten Konfiguartionen scharf gepeakt ist, approximiert Gleichung (3.2) das Integral nur sehr uneffizient; viele der erzeugten Konfigurationen tragen zum Mittelwert der Stichprobe (3.2) nur sehr gering bei. Bei einer effizienten Monte-Carlo-Integration wird das sogenannte

*Importance Sampling* eingesetzt. Dabei werden die Konfigurationen einer Stichprobe entsprechend der Verteilung des kanonischen Ensembles erzeugt. Der Mittelwert der Stichprobe berechnet sich dann als

$$\langle \mathcal{O} \rangle \approx \bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{O}[U] \quad , \tag{3.3}$$

wobei der statistische Fehler proportional $1/\sqrt{N}$ ist.
Man muß also einen Algorithmus finden, der ausgehend von einer Konfiguration eine neue berechnet, wobei die Verteilung aller erzeugten Konfigurationen gerade der gewünschten entspricht

$$W_c[U] = \frac{1}{\mathcal{Z}}\, e^{-S_G[U]} \quad . \tag{3.4}$$

Bei der Metropolis-Methode werden in einem Markov-Prozeß sukzessive Konfigurationen erzeugt, $U(n) \to U(n+1)$, mit der Übergangswahrscheinlichkeit

$$P[U(n) \to U(n+1)] \quad . \tag{3.5}$$

Ein Markov-Prozeß erfüllt die Bedingung der starken Ergodizität, die besagt, daß jede Konfiguration mit endlicher Wahrscheinlichkeit ausgehend von einer beliebig anderen erreicht werden kann. Darüberhinaus müssen noch die folgenden Normierungsbedingungen erfüllt sein

$$\sum_{U'} P[U \to U'] = 1 \tag{3.6}$$

$$\sum_{U'} W[U'] = 1 \quad .$$

Eine Markovkette muß gewährleisten, daß sie ausgehend von einer beliebigen Startkonfiguration nach einer gewissen Anzahl von Schritten ihrer eindeutigen Fixpunktverteilung $W[U]$ zustrebt. Das sogenannte *Detailed Balance* ist eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung dafür, daß die Fixpunktverteilung $W[U]$ gleich der gewünschten Verteilung $W_c[U]$ ist

$$W_c[U]P[U \to U'] = W_c[U']P[U' \to U] \quad . \tag{3.7}$$

Detailed Balance für die Erzeugung von Konfigurationen der Eichfelder lautet dann

$$e^{-S_G[U]}P[U \to U'] = e^{-S_G[U']}P[U' \to U] \quad . \tag{3.8}$$

Es gibt mehrere Algorithmen, die eine neue Konfiguration aus der Wiederholung lokaler Update-Schritte erzeugen, bei denen jeweils ein Link geändert wird. Ein vollständiger Sweep über alle Links des Gitters erzeugt dann eine neue Konfiguration in der Weise, daß Detailed Balance und die Ergodizität gewährleistet sind.

In dieser Arbeit wurde der sogenannte Pseudo-Heatbath-Algorithmus [27] verwendet, der die Erzeugung neuer SU(3)-Konfigurationen auf die Generierung von SU(2)-Untermatrizen zurückführt. Dieses geschieht mit einem Algorithmus, der von Creutz [28] entwickelt und von Kennedy und Pendleton [29] verbessert wurde.
Da bei einem Heatbath-Schritt nur jeweils ein Link mit seiner direkten Umgebung ins thermische Gleichgewicht gebracht wird, erhält man nach einem Sweep über das ganze Gitter keine von der vorherigen unabhängige Konfiguration. Somit sind sehr viele Sweeps nötig, um den Phasenraum hinreichend weit zu durchlaufen. Der *Overrelaxation-Algorithmus* von Adler [30][31] soll diese Korrelationen aufbrechen, indem man auf der Phasenraumfläche konstanter Wirkung den Phasenraum durchschreitet.
Die Kombination aus dem kanonischen Heatbath-Algorithmus und dem mikrokanonischen Overrelaxation-Algorithmus ermöglichen es, die gewünschte Verteilung der Konfigurationen effizient zu erzeugen.

## 3.2 Fehleranalyse

Da die Meßdaten $K_i$ einer Monte-Carlo-Simulation nicht unkorreliert sind, sollten nicht der naive Mittelwert und dessen Fehler berechnet werden, sondern eine verbesserte Schätzung. Die Anzahl von Messungen, die notwendig ist, zur Erzeugung einer unabhängigen Konfiguration, bezeichnet man als integrierte Autokorrelationszeit $\tau_{int}$, wobei diese abhängig von der betrachteten Größe ist. Für alle Observablen $\mathcal{O}$, die lineare Funktionen der Meßdaten $K_i$ sind, liefern die naive Mittelwertbildung und verbesserte Schätzmethoden, die die Korrelationen berücksichtigen, dasselbe Ergebnis. Man kann allerdings eine verbesserte Fehlerschätzung angeben, in die die Autokorrelationszeit eingeht

$$\sigma^2_{verb.}(\mathcal{O}) = \sigma^2_{naiv}(\mathcal{O})\ (1 + 2\tau_{int}) \quad , \tag{3.9}$$

mit dem naiven Fehler $\sigma_{naiv}(\mathcal{O})$ der Observablen $\mathcal{O}$.
Bei Observablen, die nicht-linear von den Meßdaten abhängen, kann man mithilfe der sogenannten Jackknife-Methode sowohl verbesserte Schätzungen für den Mittelwert als auch für den Fehler berechnen.

**Fehleranalyse mit der Jackknife-Methode**
Ein Datensatz der Länge $L$ wird in $N$ Datensätze gleicher Länge $L'$ aufgeteilt, von denen man wiederum $N-1$ zu einem Unterdatensatz zusammenfaßt. Der Erwartungswert einer Observablen $\mathcal{O}$ auf dem gesamten Datensatz sei mit $\bar{\mathcal{O}}$ bezeichnet, der Erwartungswert auf einem der Unterdatensätze mit $\bar{\mathcal{O}}_i$. Ist die Länge $L'$ größer

als die Autokorrelationszeit, so sollten die wie folgt definierten Pseudowerte des Jackknife statistisch unabhängig sein

$$J_i = N\ \bar{\mathcal{O}} - (N-1)\bar{\mathcal{O}}_i \tag{3.10}$$

Damit erhält man

$$\bar{\mathcal{O}}_{verb.} = \bar{J} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ J_i \tag{3.11}$$

und

$$\Delta\mathcal{O}_{verb.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\ (J_i - \bar{J})^2}{N(N-1)}} \tag{3.12}$$

als verbesserte Schätzungen des Mittelwertes und des Fehlers der Observable $\mathcal{O}$.

## 3.3 Ferrenberg-Swendsen Analyse

Bei der MC-Simulation statistischer Modelle und Gittereichtheorien werden die Erwartungswerte von Observablen an einem Punkt im Parameterraum bestimmt. Ist man an einer Observablen über einen weiten Bereich des Parameterraumes interessiert, so ist es daher notwendig viele zeitaufwendige und kostenintensive Simulationen durchzuführen. Der Simulationsaufwand kann aber erheblich reduziert werden, wenn man berücksichtigt, daß das Histogramm der Wirkung einer unendlich langen Simulation die gesamte thermodynamische Information des Systems beinhaltet.
Ferrenberg und Swendsen [12] haben 1988 vorgeschlagen, genau diese Eigenschaft auszunutzen, um eine effiziente Datenanalyse durchzuführen. Simuliert man ein statistisches System im kanonischen Ensemble so ist die Häufigkeit der erzeugten Konfigurationen proportional zum Boltzmanngewicht $\exp(-\beta S)$ mit dem Kopplungsparameter $\beta$ und der Wirkung des Systems $S$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wirkung $S$ bei einer Kopplung $\beta$ ist gegeben als

$$P_\beta(S) = \frac{1}{Z(\beta)} W(S) e^{-\beta S} \quad , \tag{3.13}$$

wobei $W(S)$ die kopplungsunabhängige Zustandsdichte bezeichnet, also die Anzahl der Konfiguration mit Wirkung $S$ ist

$$W(S) = \sum_\sigma \delta(S - S(\sigma)) \quad .$$

Die Zustandssumme $Z(\beta)$ über alle Konfigurationen $\sigma$ lautet

$$Z(\beta) = \sum_\sigma e^{-\beta H(\sigma)} = \sum_S W(S) e^{-\beta S} \quad . \tag{3.14}$$

Die Wahrscheinlichkeit, Konfigurationen mit der Wirkung $S$ bei einer anderen Kopplung $\beta'$ zu erhalten, ist demnach

$$P_{\beta'}(S) = \frac{1}{Z(\beta')} W(S) e^{-\beta' S} \quad . \tag{3.15}$$

Ebenso läßt sich die Zustandssumme in Abhängigkeit von der Zustandsdichte bei einer anderen Kopplung ausdrücken

$$Z(\beta') = \sum_S W(S) e^{-\beta' S} \quad . \tag{3.16}$$

Der Zusammenhang dieser theoretischen Überlegungen mit dem gemessenen Wirkungshistogramm $N_\beta(S)$ besteht nun darin, daß die relative Häufigkeit von Konfiguration mit einer Wirkung $S$ für eine große Anzahl von Messungen gegen die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_\beta(S)$ strebt

$$\frac{N_\beta(S)}{n_\beta} \underset{n_\beta \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{Z(\beta)} W(S) e^{-\beta S} \quad , \tag{3.17}$$

wobei $n_\beta = \sum_S N_\beta(S)$ die Gesamtzahl der Messungen ist. Für eine große Zahl von Messungen sollte (3.17) approximativ gültig sein, so daß man die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei beliebigem $\beta'$ berechnen kann

$$P_{\beta'}(S) = \frac{N_\beta(S)}{n_\beta} \frac{Z(\beta)}{Z(\beta')} e^{-(\beta'-\beta)S} = \frac{N_\beta(S) e^{-(\beta'-\beta)S}}{\sum_S N_\beta(S) e^{-(\beta'-\beta)S}} \quad . \tag{3.18}$$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert einer thermodynamischen Observablen $O$ als

$$\langle O_{\beta'} \rangle = \sum_S O(S) P_{\beta'}(S) \quad . \tag{3.19}$$

Der Nachteil der beschriebenen Methode besteht darin, daß es sich um eine Extrapolation handelt, die nur in der Nähe der simulierten Kopplung brauchbare Ergebnisse liefert. Eine verbesserte Variante des Verfahrens stellt die Multihistogrammethode dar, bei der man die Zustandsdichte aus mehreren Wirkungshistogrammen bei verschiedenen Kopplungen gewinnt, wobei die Flanken der Verteilungen hinreichend stark überlappen sollten, um eine stabile Interpolation zu erhalten. Die einzelnen Histogramme werden mit dem Faktor $g_k^{-1} = (1 + 2\tau_k)^{-1}$ gewichtet, den man mit der Autokorrelationszeit $\tau_k$ berechnet. Die gesamte Zustandsdichte ergibt sich als gewichtete Summe über alle $W_k(S)$

$$W(S) = \sum_{k=1}^{R} p_k(S) W_k(S) \tag{3.20}$$

mit beliebigen Gewichten $p_k(S)$, für die gilt $\sum_k p_k(S) = 1$ und den einzelnen Zustandsdichten

$$\begin{aligned} W_k(S) &= \frac{N_k(S)}{n_k} Z(\beta_k) e^{\beta_k S} \\ &= \frac{N_k(S)}{n_k} e^{-f_k + \beta_k S} \quad . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dabei ist die freie Energie als $f_k = \ln Z(\beta_k)$ definiert, $N_k(S)$ ist das gemessene Wirkungshistogramm der k. Simulation und $n_k = \sum_S N_k(S)$ die Anzahl der Messungen bei $\beta_k$. Durch das Minimieren des Fehlers von $W(S)$, erhält man für die Gewichte

$$p_k(S) = \frac{n_k \; g_k^{-1} \; e^{-\beta_k S + f_k}}{\sum_{k=1}^{R} n_k \; g_k^{-1} \; e^{-\beta_k S + f_k}} \tag{3.22}$$

Faßt man die Gleichungen (3.20), (3.21) und (3.22) zusammen, so ergeben sich die Zustandsdichte und die Zustandssumme als

$$\begin{aligned} W(S) &= \frac{\sum_{k=1}^{R} N_k(S) \; g_k^{-1}}{\sum_{k=1}^{R} n_k \; g_k^{-1} \; e^{-\beta_k S + f_k}} \\ Z(\beta_k) &= \sum_S W(S) e^{-\beta_k S} = e^{-f_k} \quad . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Werte für $f_k$ werden selbstkonsistent durch Iteration der Gleichungen (3.23) bestimmt, wobei ein $f_k$ beliebig gesetzt werden kann, da die freie Energie lediglich bis auf eine Konstante bestimmt ist.
Der Erwartungswert einer Observablen, die funktional nicht direkt von der Wirkung abhängt, wie zum Beispiel der Polyakov-Loop in der SU(3)-Eichtheorie, läßt sich dann wie folgt berechnen

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\beta'} = \sum_S \left( \sum_k^R \sum_\sigma \frac{\delta(S - S(\sigma)) \; \mathcal{O}(\sigma) \; g_k^{-1}}{W(S)} \right) P_{\beta'}(S) \tag{3.24}$$

$$= \sum_k^R \sum_\sigma \mathcal{O}(\sigma) \; g_k^{-1} \sum_S \frac{\delta(S - S(\sigma)) \; P_{\beta'}(S)}{W(S)} \tag{3.25}$$

$$= \sum_k^R \sum_\sigma \frac{\mathcal{O}(\sigma) \; g_k^{-1}}{W(S(\sigma))} \; P_{\beta'}(S(\sigma)) \quad . \tag{3.26}$$

Programmtechnisch berechnet man in der Regel die Erwartungswerte nach (3.24), da man zuerst eine große Anzahl von Meßdaten auf eine wesentlich geringere Anzahl von Wirkungsklassen reduzieren kann und somit den Speicherbedarf erheblich verringert. Ist man an der Verteilung einer Größe interessiert, so muß man sich jedes Bin des Histogramms als eigene Observable in der Ferrenberg-Swendsen-Analyse definieren

$$\langle \mathcal{O}_i \rangle_{\beta'} = \sum_k^R \sum_\sigma \frac{\delta(\mathcal{O}(\sigma) - \mathcal{O}_i) \; g_k^{-1}}{W(S(\sigma))} \; P_{\beta'}(S(\sigma)) \quad , \tag{3.27}$$

wobei $\mathcal{O}_i$ gerade das i. Bin der Verteilung ist. In einem solchen Fall, bei dem man eine große Anzahl von Observablen hat, die ausgehend von <u>einer</u> gemessenen Größen berechnet werden, ist es zur Begrenzung des Speicherbedarfs günstiger, die Erwartungswerte nach (3.26) bzw. (3.23) zu ermitteln.

Für die in Kapitel 2.5.3 eingeführte tadpole-verbesserte Wirkung müssen obige Ausdrücke auf einen zweidimensionalen Parameterraum erweitert werden, da die Wirkung die Form hat

$$\begin{aligned} \beta\ S &= \beta_1\ S_1 + \beta_1\ f(\beta_1)\ S_2 \\ &= \beta_1\ S_1 + \beta_2\ S_2 \quad \text{mit } \beta_2 = \beta_1\ f(\beta_1)\ , \end{aligned} \tag{3.28}$$

wobei $f(\beta_1)$ eine Funktion der Kopplung ist.
Man hat die Wirkung in der Form $(S_1, S_2)$ sowie andere Observablen bei verschiedenen Parameterpaaren $(\beta_1, \beta_2)$ gemessen und ist am Erwartungswert der Observablen auf einem Pfad in der von $\beta_1$ und $\beta_2$ aufgespannten Parameterebene interessiert. Dazu müssen in den obigen Formeln die Ersetzungen $S \to (S_1, S_2)$, $\beta \to (\beta_1, \beta_2)$ und $\beta\ S \to \beta_1\ S_1 + \beta_2\ S_2$ vorgenommen werden. Der Erwartungswert einer Observablen $\mathcal{O}$ läßt sich dann wie folgt berechnen

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\beta_1', \beta_2'} = \sum_{S_1, S_2} \left( \sum_k^R \sum_\sigma \frac{\delta(S_1 - S_1(\sigma))\ \delta(S_2 - S_2(\sigma))\ \mathcal{O}(\sigma)\ g_k^{-1}}{W(S_1, S_2)} \right)\ P_{\beta_1', \beta_2'}(S_1, S_2) \quad , \tag{3.29}$$

mit

$$P_{\beta_1', \beta_2'}(S_1, S_2) = \frac{1}{Z(\beta_1', \beta_2')} W(S_1, S_2) e^{-(\beta_1 S_1 + \beta_2 S_2)} \quad . \tag{3.30}$$

# Kapitel 4

# Auswertung und Resultate

In diesem Kapitel der Arbeit werden die thermodynamischen Größen der SU(3)-Eichtheorie mit $2\times1$-tree-level- und $2\times1$-tadpole-verbesserter Wirkung analysiert. Das Finite-Cutoff-Verhalten der verbesserten Wirkungen im Vergleich zur Wilson-Wirkung und deren Kontinuumsextrapolation werden anhand mehrerer Observablen untersucht. Die Messung der Oberflächenspannung und der Latenten Wärme soll Aufschluß über die erwartete Reduktion der Finite-Cutoff-Effekte der Tadpole- im Vergleich zur Tree-Level-Wirkung für $\beta \approx \beta_c$ bringen.
Die Simulationen wurden auf verschiedenen QUADRICS-Parallelrechnern mit 16, 32, bzw. 256 Prozessoren durchgeführt. Dabei bestand jeder Sweep zur Erzeugung einer neuen Konfiguration aus fünf Overrelaxation-Schritten und einem Heatbath-Schritt. Je nach Gittergröße und Kopplung sind die ersten 500 bis 1000 Konfigurationen zur Thermalisierung des System weggelassen worden. Beide Wirkungen wurden bei endlicher Temperatur auf Gittern mit zeitlicher Ausdehnung $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$ mit räumlichem Volumen $12^3$ bzw. $16^3$, $24^3$ und $32^3$ simuliert. Die Temperatur-Null-Messungen wurden auf einem symmetrischen Gitter der Größe $16^4$ bzw. bei großen $\beta$ auf einem $24^4$-Gitter durchgeführt.
Zu Beginn dieses Kapitels wird die Bestimmung der Faktoren $u_0^2$ in der tadpole-verbesserten-Wirkung (2.88) dargestellt.

**Bestimmung der Tadpolefaktoren**
Auf einem Gitter der Größe $16^3 \times 4$ wurden bei den $\beta$-Werten 3.80, 4.00, 4.20, 4.50, 5.00, 6.00 Simulationen mit der Tadpole-Wirkung (2.88) durchgeführt, wobei als Startwert für $u_0^2$ Eins gewählt wurde. Nach der Thermalisierung wurde aus 300 Iterationen der Erwartungswert der Plaquette bestimmt und eine neue Simulation mit dem daraus errechneten $u_0^2$ gestartet. Es zeigte sich, daß eine vier- bis fünfmalige Wiederholung dieses Prozesses notwendig war, bis der Plaquetteerwartungswert

innerhalb der Fehlergrenzen mit $u_0^4$ übereinstimmte. Als Ergebnis erhält man dann folgende Werte:

| $\beta$ | $\langle(1\text{x}1)\rangle$ | $u_0^2$ |
|---|---|---|
| 3.80 | 0.463838( 182 ) | 0.681057 |
| 4.00 | 0.511237( 275 ) | 0.715008 |
| 4.20 | 0.560142( 238 ) | 0.748427 |
| 4.50 | 0.613736( 130 ) | 0.783413 |
| 5.00 | 0.664764( 114 ) | 0.815330 |
| 6.00 | 0.730540( 74 ) | 0.854765 |

Eine Spline-Interpolation der Zwischenwerte liefert die $u_0^2$ bei den Kopplungen $\beta$, bei denen im weiteren simuliert wird.

## 4.1 Kritischen Kopplungen – $\beta_c$

In diesem Kapitel wird dargestellt, wie für die beiden verbesserten Wirkungen die kritischen Kopplungen auf den verschiedenen Gittern bestimmt wurden. In den Tabellen des Anhang B findet man die $\beta$-Werte fettgedruckt, die jeweils in die Berechnung von $\beta_c$ eingehen. Das prinzipielle Vorgehen soll beispielhaft anhand der Tadpole-Wirkung auf einem Gitter der Größe $16^3 \cdot 4$ dargestellt werden.
Ein kritischer Punkt ist dadurch charakterisiert, daß der Ordnungsparameter der Theorie, im Falle der SU(3) also der Polyakov-Loop, bei unendlichem Volumen eine Diskontinuität aufweist. Bei Simulationen auf endlichem Gitter ist der sprunghafte Anstieg von $|L|$ jedoch ausgewaschen, wie man in Abbildung 4.1 deutlich sieht.

Daher bestimmt man $\beta_c$ nicht aus dem Verlauf von $|L|$ selbst, sondern analysiert die Suszeptibilität des Polyakov-Loop

$$\chi = N_\sigma^3 \left( \langle |L|^2 \rangle - \langle |L| \rangle^2 \right) \quad . \tag{4.1}$$

Diese weist an der Stelle der pseudo-kritischen Kopplung $\beta_c$ ein Maximum auf, welches aus einer Interpolation mit der Ferrenberg-Swendsen-Methode ermittelt wird. In Abbildung 4.2 sieht man die Meßdaten, sowie die Interpolationskurve mit einem Fehlerband, dessen Breite aus einer Jackknife-Analyse mit 10 Blöcken stammt. Auf den 10 Unterdatensätzen wurde die Position des Maximums bestimmt; deren Jackknife-Mittel liefert $\beta_c$ mit dem entsprechenden Jackknife-Fehler.

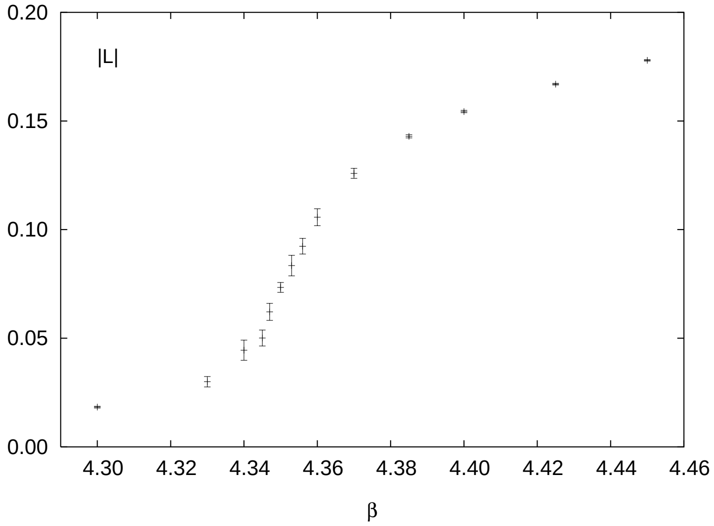



Abbildung 4.1: Betrag des Polyakov-Loops für die Tadpole-Wirkung auf einem $16^3 \times 4$ Gitter

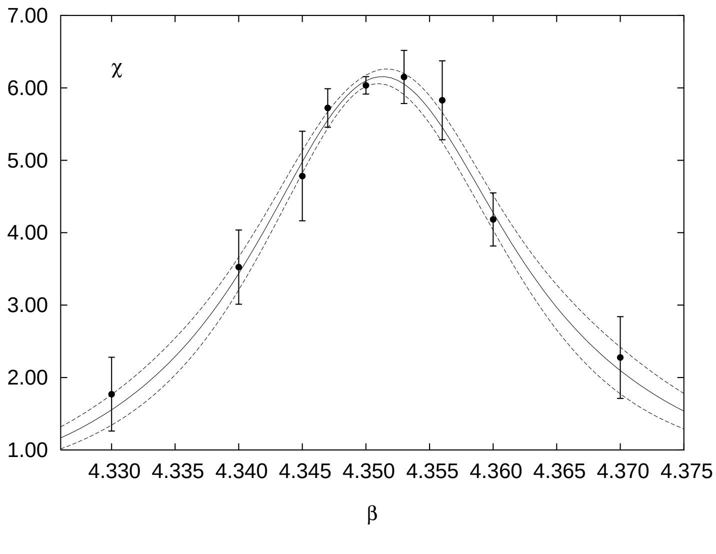



Abbildung 4.2: Suszeptibilität des Polyakov-Loops für die Tadpole-Wirkung auf einem $16^3 \times 4$ Gitter

| Tree-Level-Wirkung | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $N_\sigma^3$ | $N_\tau$ | # $\beta$-Werte | # Konfig. | $\beta_c$ |
| $12^3$ | 3 | 5 | 80000 | 3.9079 (6) |
| $16^3$ | 4 | 8 | 157500 | 4.0715 (4) |
| $24^3$ | 4 | 3 | 75200 | 4.0722 (4) |
| $32^3$ | 4 | 1 | 46800 | 4.0729 (3) |
| $(\infty)^3$ | 4 | | | 4.0730 (3) |
| Tadpole-Wirkung | | | | |
| $N_\sigma^3$ | $N_\tau$ | # $\beta$-Werte | # Konfig. | $\beta_c$ |
| $12^3$ | 3 | 6 | 85500 | 4.1868 (4) |
| $16^3$ | 4 | 7 | 135400 | 4.3512 (4) |
| $24^3$ | 4 | 1 | 38500 | 4.3519 (5) |
| $32^3$ | 4 | 1 | 59000 | 4.3522 (4) |
| $(\infty)^3$ | 4 | | | 4.3523 (4) |

Tabelle 4.1: Kritische Kopplungen für die Tree-Level- und Tadpole-Wirkung. Die Werte der tree-level-verbesserten Wirkung für die Gitter $12^3 \times 3$ und $16^3 \times 4$ stimmen innerhalb zweier Standardabweichungen mit Ergebnissen von Cella et al. [32] überein.

Die Ergebnisse für die beiden verbesserten Wirkungen und die verschiedenen Gittergrößen findet man in Tabelle 4.1. Für $N_\tau = 4$ wurde eine Extrapolation zu unendlichem Volumen mit folgendem Ansatz durchgeführt, der für 1. Ordnung Phasenübergänge Gültigkeit besitzt

$$\beta_c(N_\tau, N_\sigma) = \beta_c(N_\tau, \infty) - h\,(N_\tau/N_\sigma)^3 \quad . \tag{4.2}$$

Die Größe des Parameters $h$ charakterisiert die Volumenabhängigkeit der kritischen Kopplungen. Es ergibt sich $h = 0.101$ (34) bzw. $h = 0.068$ (45) für die tree-level- und tadpole-verbesserte Wirkung, Werte die vergleichbar denen der Wilson-Wirkung [33][34] sind.

## 4.2 Die String-Tension – $\hat{\sigma}$

Das Potential zwischen schweren Quarks bei Temperatur Null läßt sich mit dem Ansatz

$$\hat{V}(\hat{R}) = \hat{V}_0 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{R}} + \hat{\sigma}\hat{R} \quad ^\dagger \tag{4.3}$$

$^\dagger$Die Größen versehen mit einem Hut bezeichnen Gittergrößen gut beschreiben. Der coulombartige Anteil sorgt für das korrekte kurzreichweitige Verhalten, der lineare Term mit der String Tension $\hat{\sigma}$ führt auf die Confinement-Eigenschaft der Theorie. Die unbekannten Koeffizienten des Potentialansatzes erhält man aus der Simulation, indem man die zeitartigen Wilson-Loops entlang einer Contour $\mathcal{C}$ analysiert

$$\hat{W}(\hat{R},\hat{T}) \equiv \langle \mathrm{Tr} \prod_{l\in\mathcal{C}} U_l \rangle \quad , \tag{4.4}$$

wobei $\hat{R}$ und $\hat{T}$ die räumlichen bzw. zeitlichen Ausdehnungen des Loops sind. Entsprechend den Überlegungen in [2] ergibt sich mit dem Ansatz (4.3) folgenden Ausdruck für das Verhalten der Wilson-Loops

$$\hat{W}(\hat{R},\hat{T}) \propto F(\hat{R}) e^{-\hat{V}(\hat{R})\hat{T}} \quad \text{für} \quad \hat{T} \to \infty. \tag{4.5}$$

Dabei bezeichnet $F(\hat{R})$ den Überlapp des Zustandes eines Quark-Antiquark-Paares im Abstand $\hat{R}$ mit dem Grundzustand des Systems.
Man erhält somit für das Potential

$$\hat{V}(\hat{R}) = \lim_{\hat{T}\to\infty} -\frac{1}{\hat{T}} \ln \hat{W}(\hat{R},\hat{T}) \quad . \tag{4.6}$$

Um die gemessenen Wilson-Loops auswerten zu können, definiert man sich lokale Potentiale

$$\hat{V}_{\hat{T}}(\hat{R}) \equiv \ln\left(\frac{\hat{W}(\hat{R},\hat{T})}{\hat{W}(\hat{R},\hat{T}+1)}\right) \quad , \tag{4.7}$$

die im Limes großer zeitlicher Ausdehnung gegen das Potential (4.3) konvergieren.
In der Praxis benutzt man “ geschmierte ” Wilson-Loops, das heißt man bildet Linearkombinationen der räumlichen Links mit der Summe aller $1\times 1$-Staples der orthogonalen räumlichen Ebenen

$$U_\mu \to U_\mu + \gamma \sum_{\nu\perp\mu} (1\times 1 - \mathrm{Staples})_\nu \quad , \gamma \in \mathcal{R} \quad . \tag{4.8}$$

Das Schmieren von Wilson-Loops erhöht den Überlapp mit dem Grundzustand $F(\hat{R})$, so daß man zu weniger großen Zeiten gehen muß, um aus den lokalen Potentialen $\hat{V}(\hat{R})$ extrahieren zu können. Durch Wiederholung des Schmierprozesses und Variation des Parameters $\gamma$ läßt sich $F(\hat{R})$ maximieren. Abbildung 4.3 zeigt den relativen Wert eines Wilson-Loops in Abhängigkeit vom Schmierparameter $\gamma$ und der Anzahl der Schmierschritte. Es zeigt sich, daß man bei optimaler Wahl von $\gamma$ mit weniger als 10 Schmierschritten das 95%-Niveau erreichen kann.
Simuliert wurden sowohl die tree-level- als auch die tadpole-verbesserte Wirkung auf Gittern der Größe $16^4$ und $24^4$. Mit Gleichung (4.7) wurden die lokalen Potentiale als Jackknifeschätzung mit entsprechendem Fehler bestimmt; die Potentiale streben nach einem exponentiellen Abfall einem konstanten Wert zu, und zwar abhängig vom $\beta$-Wert umso schneller je kleiner der räumliche Abstand $\hat{R}$ ist. Das Potential

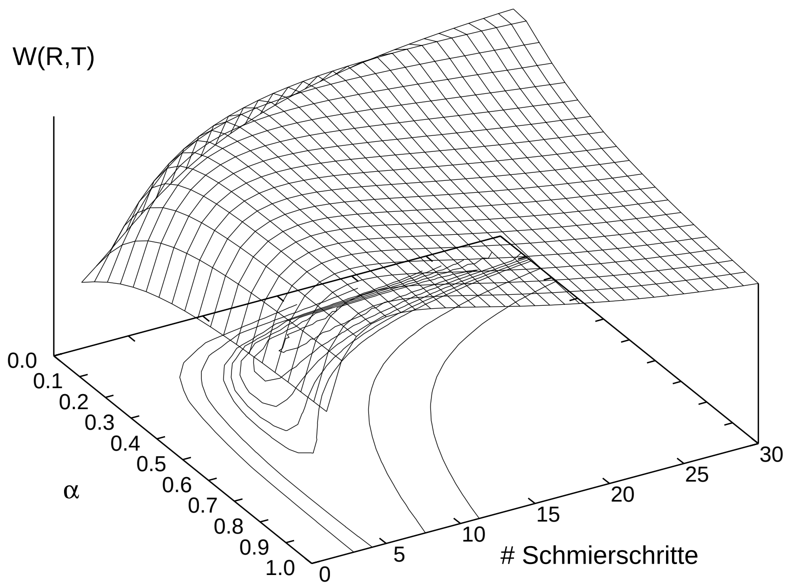



Abbildung 4.3: Wert eines geschmierten Wilson-Loops abhängig von $\gamma$ und der Anzahl der Schmierschritte. Die projezierten Niveaulinien geben von außen nach innen das $85\%, 90\%, 95\%, 96\%, 97\%, 98\%$ und $99\%$ Level an.

im Abstand $\hat{R}$ erhält man dann aus einem Konstantenfit an das lokale Potential ab einem bestimmten $\hat{T}_{\text{min}}$. Die $\hat{T}_{\text{min}}$ für die einzelnen $\beta$-Werte findet man in Tabelle 4.2.

Die Potentiale $\hat{V}(\hat{R})$ in Abbildung 4.4 wurden dann mit dem Ansatz (4.3) gefittet, wobei es sich als sinnvoll herausgestellt hat, den Parameter $\hat{\alpha}$ als konstant zu wählen; der dreiparametrige Fit liefert keine stabilen Ergebnisse bei Änderung des Fitbereiches. Aus der Stringtheorie kommt für große Abstände $\hat{R}$ die Vorhersage von $\hat{\alpha} = -\pi/12$ [35], die für den zweiparametrigen Fit benutzt wurde.
Das Ergebnis der String-Tension wurde gewonnen, indem die untere Grenze $\hat{R}_{\text{min}}$ des Fitbereichs variiert und die daraus resultierenden $\hat{\sigma}$ ab dem $\hat{R}^{\star}_{\text{min}}$ gemittelt wurden, ab dem sie innerhalb der Fehler konsistent sind. Die Ergebnisse und die entsprechenden $\hat{R}^{\star}_{\text{min}}$ sind in Tabelle 4.2 aufgeführt, sowie in Abbildung 4.5 graphisch dargestellt. Zusätzlich ist die Kurve für den asymptotischen Verlauf von $a^2(\beta)$ (2.28) eingezeichnet und man erkennt, daß bei großen $\beta$ die Werte der String-Tension zu groß sind. Da man bei großem $\beta$ auf kleinem physikalischen Gittervolumen rechnet, kennt man die lokalen Potentialen nur bis zu kleinen physikalischen Abständen und befindet sich eventuell noch nicht im linearen Bereich des Potentials. Im weiteren werden daher für die Tree-Level-Wirkung der $\beta$-Wert 5.40 und für die Tadpole-Wirkung die $\beta$-Werte 5.25 und 5.40 nicht berücksichtigt.

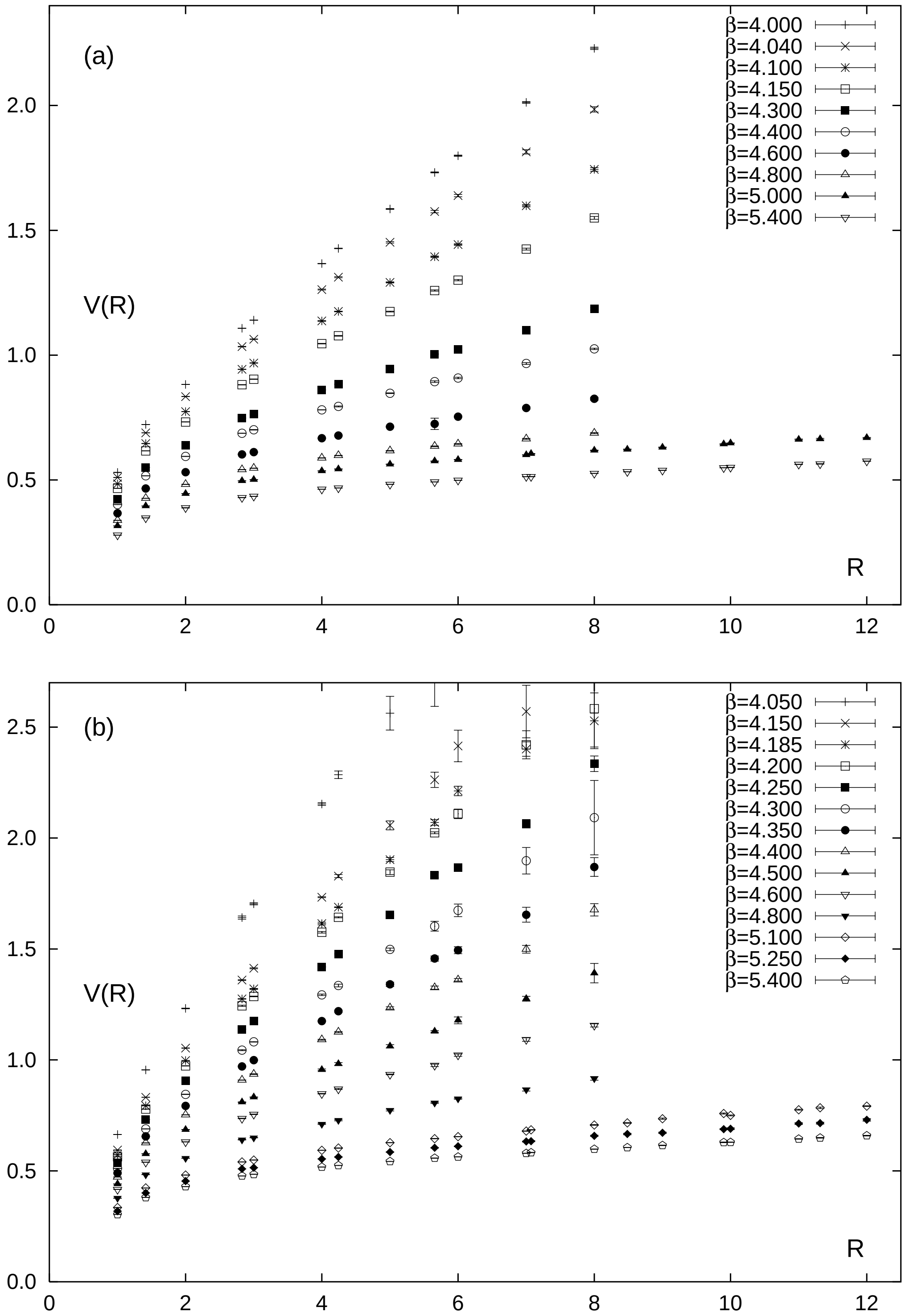



Abbildung 4.4: Potentiale, ermittelt aus den Wilsonloops auf Gittern der Größe $16^4$ (Datenpunkte bis zum Abstand 8) und $24^4$ (Datenpunkte bis zum Abstand 12) für (a) die Tree-Level-Wirkung und (b) die Tadpole-Wirkung.

| Tree-level Wirkung | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $N_\sigma^3 N_\tau$ | $\beta$ | $T_{\text{min}}$ | $R^\star_{\text{min}}$ | $\hat{\sigma}$ |
| $16^4$ | 4.000 | 2 | 2.82 | 0.19923 (162) |
| $16^4$ | 4.040 | 2 | 2.82 | 0.17542 (104) |
| $16^4$ | 4.100 | 3 | 2.82 | 0.14234 (165) |
| $16^4$ | 4.150 | 3 | 2.82 | 0.11423 (131) |
| $16^4$ | 4.300 | 4 | 2.82 | 0.07265 (107) |
| $16^4$ | 4.400 | 4 | 2.82 | 0.05412 (51) |
| $16^4$ | 4.600 | 4 | 2.82 | 0.03209 (37) |
| $16^4$ | 4.800 | 5 | 2.82 | 0.01695 (33) |
| $24^4$ | 5.000 | 6 | 4.00 | 0.01196 (12) |
| $24^4$ | 5.400 | 6 | 5.00 | 0.00904 (8) |
| Tadpole Wirkung | | | | |
| $N_\sigma^3 N_\tau$ | $\beta$ | $T_{\text{min}}$ | $R^\star_{\text{min}}$ | $\hat{\sigma}$ |
| $16^4$ | 4.050 | 1 | 2.828 | 0.42159 (217) |
| $16^4$ | 4.150 | 2 | 2.828 | 0.30582 (130) |
| $16^4$ | 4.185 | 2 | 2.828 | 0.27153 (216) |
| $16^4$ | 4.200 | 2 | 2.828 | 0.26205 (198) |
| $16^4$ | 4.250 | 2 | 2.828 | 0.21829 (176) |
| $16^4$ | 4.300 | 2 | 2.828 | 0.18343 (103) |
| $16^4$ | 4.350 | 3 | 2.828 | 0.15588 (99) |
| $16^4$ | 4.400 | 3 | 2.828 | 0.12994 (154) |
| $16^4$ | 4.500 | 3 | 2.828 | 0.09633 (53) |
| $16^4$ | 4.600 | 4 | 2.828 | 0.07154 (90) |
| $16^4$ | 4.800 | 4 | 2.828 | 0.04315 (55) |
| $24^4$ | 5.100 | 6 | 4.0 | 0.01967 (22) |
| $24^4$ | 5.250 | 6 | 4.0 | 0.01619 (44) |
| $24^4$ | 5.400 | 6 | 4.0 | 0.01214 (14) |

Tabelle 4.2: String-Tension für die Tree-Level- und Tadpole-Wirkung.

## 4.3 Die Temperatur-Skala und $\beta$-Funktion

Die Temperaturskala und die $\beta$-Funktion können, wie in Kapitel 2.3 ausgeführt, nicht-störungstheoretisch aus der Wurzel der String-Tension bestimmt werden, da

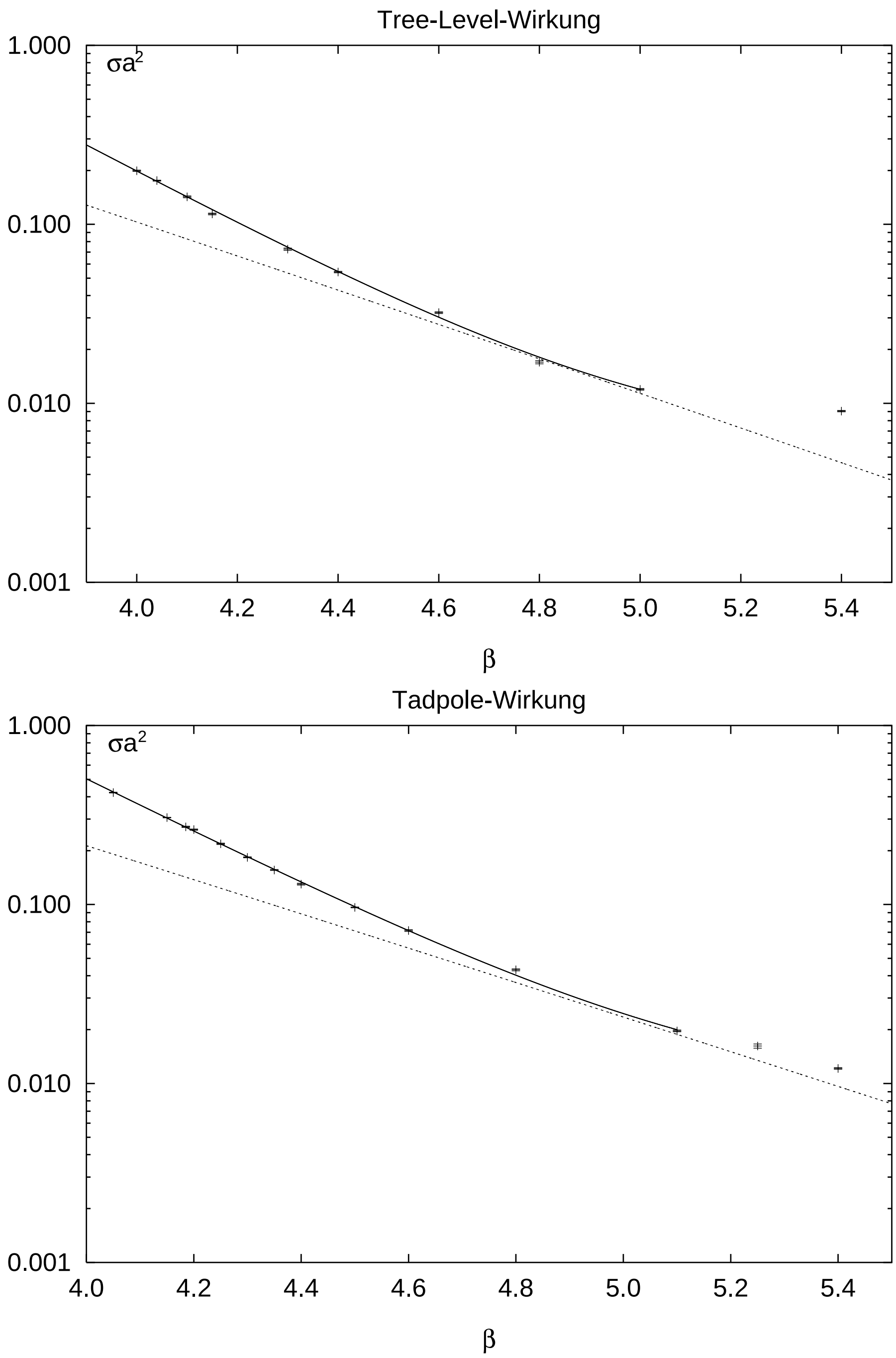



Abbildung 4.5: String-Tension in Einheiten des quadratischen Gitterabstandes für die Tree-Level-Wirkung und Tadpole-Wirkung. Die durchgezogene Kurve ist ein Fit an die String-Tensions mit dem Fitansatz 4.10. Die gestrichelte Kurve ist das Quadrat der asymptotischen Skalenrelation (2.28): $a^2(\beta) = const\ R^2(\beta)$

diese in Einheiten des Gitterabstandes gemessen wird

$$\hat{\sigma} = \sigma a^2 \Rightarrow \sqrt{\hat{\sigma}} = \sqrt{\sigma} a \quad . \tag{4.9}$$

In beiden Fällen benötigt man einen funktionalen Zusammenhang zwischen der String-Tension und $\beta$. Diesen erhält man indem man die Zwischenwerte der gemessenen $\hat{\sigma}(\beta)$ aus einer Splineinterpolation ermittelt oder die String-Tension mit einem Ansatz der Form

$$\hat{\sigma}(\beta) = ae^{b\beta} + c \tag{4.10}$$

fittet, was den Vorteil hat, daß man die Fehler auf $\hat{\sigma}$ besser berücksichtigt. In Abbildung 4.5 ist ein solcher Fit eingezeichnet.
Bestimmt man aus dem Fit den Wert der String-Tension am kritischen Punkt des entsprechenden Gitters, so kann man mithilfe des Ausdrucks

$$\frac{T}{T_c} = \frac{\sqrt{\sigma} a(\beta_c)}{\sqrt{\sigma} a(\beta)} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}}(\beta_c)}{\sqrt{\hat{\sigma}}(\beta)} \tag{4.11}$$

die Temperaturskala berechnen (siehe Abbildung 4.6).
Für die $\beta$-Funktion muß man noch zusätzlich die Ableitung der String-Tension nach $\beta$ kennen

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -a\partial g/\partial a = g^3/4N\,(a\partial\beta/\partial g) \\ &= g^3/4N\sqrt{\sigma}a \;\; (\partial\beta/\partial\sqrt{\sigma}a) \\ &= g^3/4N\sqrt{\sigma}a \;\; (\partial\sqrt{\sigma}a/\partial g)^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{4.12}$$

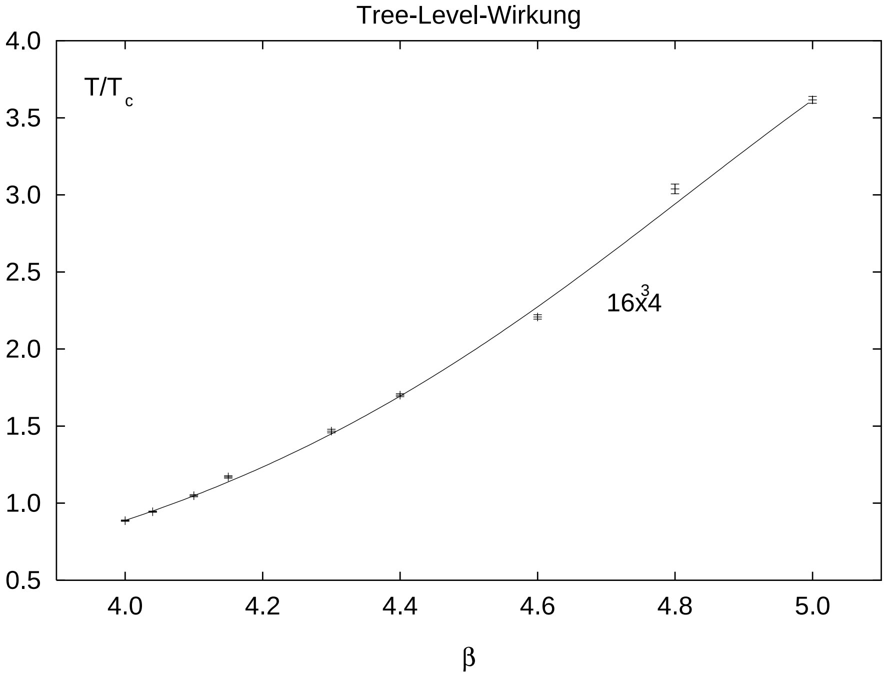
Der Wert von $\sqrt{\hat{\sigma}}$ sowie die Ableitung nach $\beta$ wurden aus dem Spline, dem Exponentialfit und einem Geradenfit an $\ln\sqrt{\hat{\sigma}}$ gewonnen, wobei der letztere paarweise für benachbarte Datenpunkte durchgeführt wurde. Der Fehler der $\beta$-Funktion wurde so gewählt, daß er konsistent mit den Ergebnissen der drei beschriebenen Methoden zur Berechnung der $\beta$-Funktion ist.

## 4.4 Die kritische Temperatur – $T_c/\sqrt{\sigma}$

Wenn man die kritische Kopplung und die String-Tension in Abhängigkeit von $\beta$ bestimmt hat, so lassen sich auch die kritischen Temperaturen des 1. Ordnung Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs in Einheiten der String-Tension berechnen

$$\frac{T_c}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{N_\tau a(\beta_c)\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{N_\tau\sqrt{\hat{\sigma}(\beta_c)}} \quad . \tag{4.13}$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.3 zu sehen.



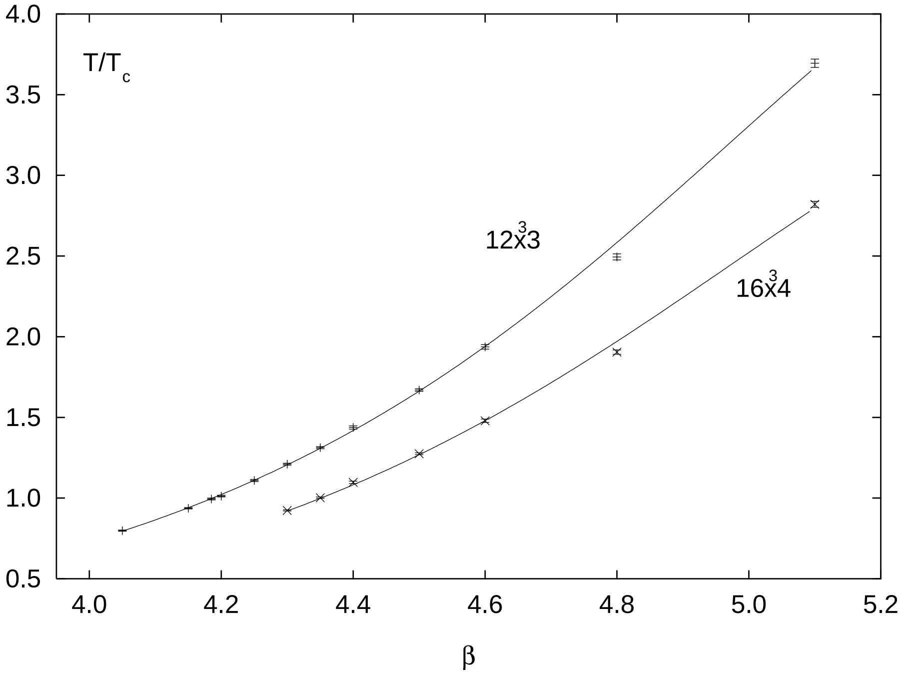




Abbildung 4.6: Temperaturskala für die Tree-Level-Wirkung und die Tadpole-Wirkung

| Tree-Level-Wirkung | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $N_\tau$ | $N_\sigma$ | $\beta_c$ | $a(\beta_c)\sqrt{\sigma}$ | $T_c/\sqrt{\sigma}$ |
| 3 | 12 | 3.9079 (6) | 0.5195 (20) | 0.642 (3) |
| 4 | $\infty$ | 4.0730 (3) | 0.3941 (25) | 0.634 (3) |
| Tadpole-Wirkung | | | | |
| $N_\tau$ | $N_\sigma$ | $\beta_c$ | $a(\beta_c)\sqrt{\sigma}$ | $T_c/\sqrt{\sigma}$ |
| 3 | 12 | 4.1868 (4) | 0.5182 (21) | 0.643 (3) |
| 4 | $\infty$ | 4.3523 (4) | 0.3946 (14) | 0.634 (3) |

Tabelle 4.3: Kritische Temperaturen für die Tree-Level- und Tadpole-Wirkung in Einheiten der String-Tension.

Die Werte der String-Tension am kritischen Punkt sind dem Fit für $a^2\sigma$ entnommen (Abb. 4.5), wobei es sich im Falle von $N_\tau = 3$ der Tree-Level-Wirkung um eine Extrapolation handelt. Der Fehler auf den String-Tensions ist abgeschätzt durch den Fehler auf $\hat{\sigma}$ bei benachbarten gemessenen $\beta$.
Eine Extrapolation der kritischen Temperaturen der Wilson-Wirkung zu $N_\tau, N_\sigma \to \infty$ ergibt einen Wert von 0.629(3) [6]. Die Ergebnisse der verbesserten Wirkungen für $N_\tau = 4$ stimmen innerhalb ihrer Fehler mit diesem Wert überein . Auch die Abweichungen von $T_c/\sqrt{\sigma}$ bei $N_\tau = 3$ von der Kontinuumsextrapolation sind deutlich geringer als die Abweichungen der Resultate der Wilson-Wirkung bei $N_\tau = 4$.
Mit einer Renormierungsgruppen-verbesserten Wirkung [37] haben Iwasaki et al. einen Kontinuumswert für die kritische Temperatur von $T_c/\sqrt{\sigma} = 0.657(5)$ ermittelt [38]. Dieser liegt etwa 3.5% über den Ergebnissen der Tree-Level- und Tadpole-Wirkungen mit $N_\tau = 4$.

## 4.5 Die Oberflächenspannung – $\sigma_I/T_c^3$

Die Oberflächenspannung wurde aus den Extrema der Polyakov-Loop-Verteilung entsprechend der Darstellung in Kapitel 2.4.1 berechnet. Hierzu wurden Simulationen mit tree-level- und tadpole-verbesserten Wirkungen auf Gittern der Größe $N_\sigma = 16, 24, 32$ mit $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 12$ mit $N_\tau = 3$ ausgewertet. Die Anzahl der $\beta$-Werte, die in die Berechnung eingingen, entspricht der für die Bestimmung von $\beta_c$ (siehe Tabelle 4.1). Um die statistischen Fluktuationen der Verteilungen für die Bestimmung der Maxima und des Minimums besser berücksichtigen zu können, wurden die Bereiche um die Extrema mit einem Polynom 3. Grades gefittet (Abb. 4.7). Die Fits wurden auf ihre Unabhängigkeit vom Fit-Bereich getestet.

Mit der Multihistogrammethode von Ferrenberg-Swendsen (siehe Kapitel 3.3) wurden die Verteilungen derart umgewichtet, daß die beiden Extrema des Doppelpeaks die gleiche Höhe haben. Der $\beta$-Wert, bei dem dies der Fall ist, sei mit $\beta_0$ bezeichnet. Die aus den Fits gewonnenen Werte für die Extrema $P_{\max} = P_{\max 1} = P_{\max 2}$ und $P_{\min}$ wurden dann benutzt, um die Oberflächenspannung wie folgt zu bestimmen

$$\left(\frac{\sigma_I}{T_c^3}\right)_V = -\frac{N_\tau^2}{2N_\sigma^2} \ln \frac{P_{\min}(|L|)}{P_{\max}(|L|)} \quad . \tag{4.14}$$

Der Nachteil dieser Berechnungsmethode ist die fehlende Möglichkeit einen sinnvollen Fehler auf $(\sigma_I/T_c^3)_V$ angeben zu können. Daher wurde das Jackknife-Mittel der Größe

$$\left(\frac{\sigma_I}{T_c^3}\right)_V = -\frac{N_\tau^2}{2N_\sigma^2} \ln \frac{P_{\min}(|L|)}{P_{\max 1}(|L|)^{\gamma_1} P_{\max 2}(|L|)^{\gamma_2}} \tag{4.15}$$

mit Hilfe der Ferrenberg-Swendsen Multihistogrammethode berechnet. Dabei sind die $P_{\text{extr}}$ definiert als

$$P_{\text{extr}} \equiv \#\ \text{Daten im Bin der Breite}\ \ \Delta\ \ \text{um}\ \ |L|_{\text{extr}} \quad . \tag{4.16}$$

Die Exponenten $\gamma_1$ und $\gamma_2$ wurden aus den beiden Beziehungen

$$\langle |L| \rangle_{\beta_0} = \gamma_1\ |L_1|_{\beta_0}\ +\ \gamma_2\ |L_2|_{\beta_0} \qquad\qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \tag{4.17}$$

berechnet, wobei $|L_1|_{\beta_0}$ und $|L_2|_{\beta_0}$ gerade die Werte von $|L|$ an der Stelle der Maxima sind. Die Ergebnisse in Tabelle 4.5 sind auf ihre Unabhängigkeit von der Binbreite $\Delta$ getestet worden. Die Resultate in Tabelle 4.5 der Oberflächenspannung für

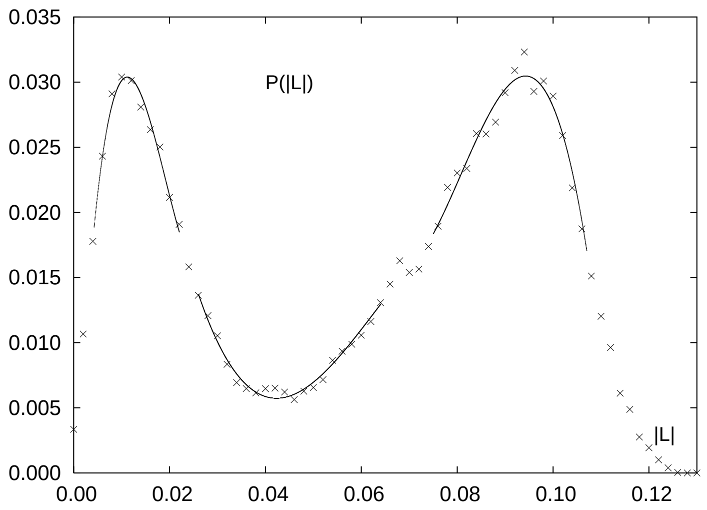



Abbildung 4.7: Fit der Extrema der Polyakov-Loop-Verteilung. Der Fitbereich entspricht den Intervallen, für die die Polynome 3.Grades eingezeichnet sind.

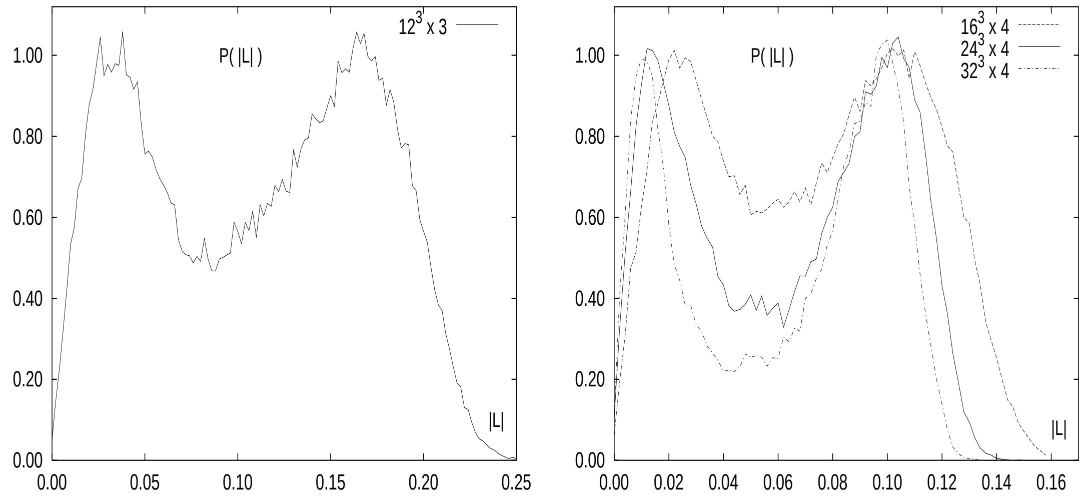



Abbildung 4.8: Umgewichtete Polyakov-Loop-Verteilungen mit Tree-Level-Wirkung für $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$

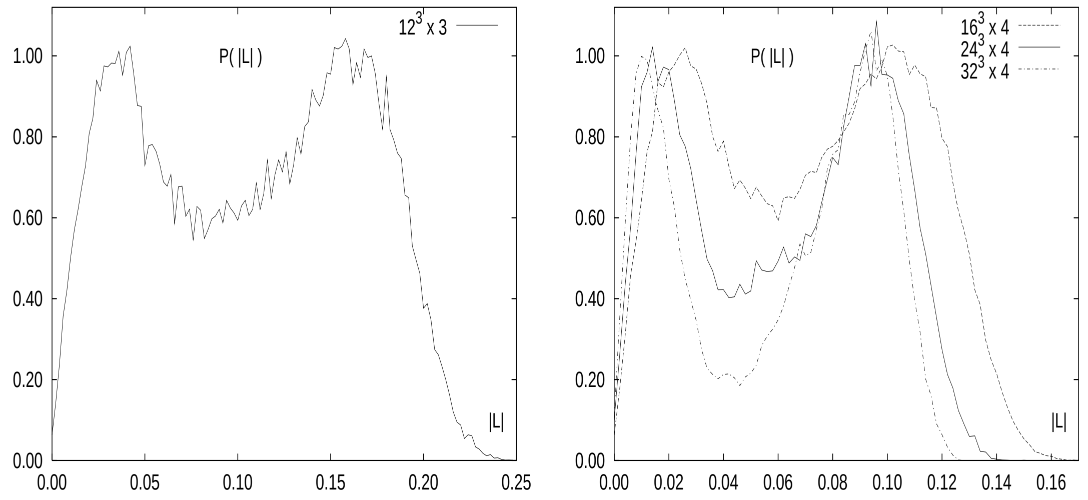



Abbildung 4.9: Umgewichtete Polyakov-Loop-Verteilungen mit Tadpole-Wirkung für $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$

| Tree-level Wirkung | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $N_\tau$ | $N_\sigma^3$ | $\beta_0$ | $\gamma_1$ | $(\sigma_I/T_c^3)_V^{\text{simple}}$ | $(\sigma_I/T_c^3)_V^{\text{jack}}$ |
| 3 | $12^3$ | 3.90760 | 0.413 (25) | 0.0219 | 0.0234 (24) |
| 4 | $16^3$ | 4.07068 | 0.400 (19) | 0.0150 | 0.0148 (16) |
| 4 | $24^3$ | 4.07218 | 0.426 (34) | 0.0144 | 0.0136 (25) |
| 4 | $32^3$ | 4.07297 | 0.385 (74) | 0.0117 | 0.0116 (23) |
| 4 | $\infty$ | | | | 0.0152 (26) |
| Tadpole Wirkung | | | | | |
| $N_\tau$ | $N_\sigma^3$ | $\beta_0$ | $\gamma_1$ | $(\sigma_I/T_c^3)_V^{\text{simple}}$ | $(\sigma_I/T_c^3)_V^{\text{jack}}$ |
| 3 | $12^3$ | 4.18685 | 0.421 (15) | 0.0159 | 0.0158 (11) |
| 4 | $16^3$ | 4.35023 | 0.414 (21) | 0.0141 | 0.0147 (13) |
| 4 | $24^3$ | 4.35197 | 0.402 (51) | 0.0123 | 0.0119 (21) |
| 4 | $32^3$ | 4.35268 | 0.399 (93) | 0.0130 | 0.0125 (16) |
| 4 | $\infty$ | | | | 0.0152 (20) |

Tabelle 4.4: Oberflächenspannung für die verbesserten Wirkungen.

unendliches Volumen stammen aus dem Fitansatz (2.74), in dem endliche Volumenkorrekturen berücksichtigt sind. Für die tree-level-verbesserte Wirkung ist das $\chi^2_{\text{dof}} = 0.42$, für die Tadpole-Wirkung findet man $\chi^2_{\text{dof}} = 0.03$.
Der Vergleich zu Ergebnissen der Oberflächenspannung für die Wilson-Wirkung zeigt, daß die Finite-Cutoff-Abhängigkeit für die verbesserten Wirkungen deutlich reduziert sind. Iwaski et al. [18] messen Werte für die Oberflächenspannung von $(\sigma_I/T_c^3) = 0.0295$ (21) für $N_\tau = 4$ und $(\sigma_I/T_c^3) = 0.0218$ (33) für $N_\tau = 6$. Eine Extrapolation in $1/N_\tau^2 = (aT_c)^2$ liefert einen Wert von $(\sigma_I/T_c^3) = 0.0156$, der sehr gut mit den Ergebnissen der Tadpole-Wirkung übereinstimmt.
Die Resultate für $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$ der Tree-level-Wirkung zeigen noch eine Cutoff-Abhängigkeit, für die Tadpole-Wirkung stimmen sie innerhalb der Fehlergrenzen überein.

## 4.6 Die Latente Wärme – $\Delta\epsilon/T_c^4$

Wie in Kapitel 2.4.1 dargestellt, läßt sich die Latente Wärme aus der Differenz der Erwartungswerte der Wirkungsanteile in der Confinement- und Deconfinement-Phase bestimmen. Bei einer Simulation am kritischen Punkt $\beta_c$ befindet sich das System entweder in einer der beiden reinen oder der gemischten Phase, wobei die Übergangshäufigkeit von einer in die andere Phase mit zunehmendem Gittervolumen abnimmt. Um eine sinnvolle Phasenseparation durchführen zu können, wurde

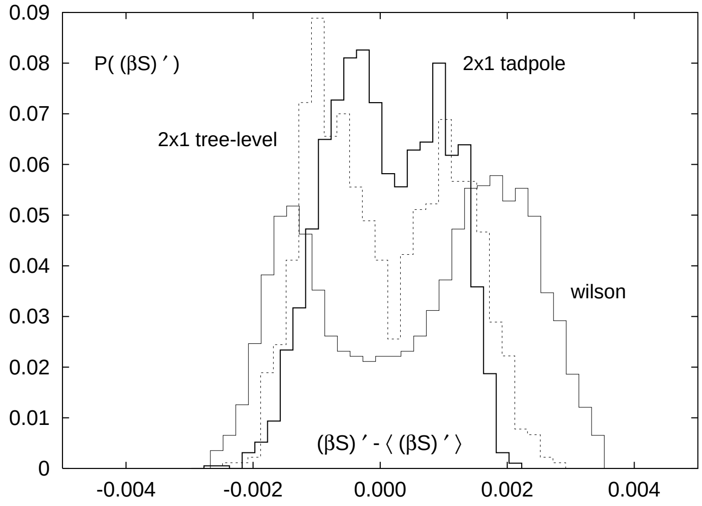



Abbildung 4.10: Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Wirkungsanteile, die in die Berechnung der Latenten Wärme eingehen, $S - \partial S/\partial\beta$, wobei jeweils über 20 Messungen gemittelt wurde. Die Daten der Wilson-Wirkung sind [34] entnommen.

daher ein räumliches Gittervolumen von $N_\sigma^3 = 32^3$ gewählt; räumliche Gitter der Größe 16 und 24 haben sich als unzureichend groß herausgestellt.
Eine grobe Abschätzung für die Latente Wärme erhält man aus dem Abstand der Maxima der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $S - \partial S/\partial\beta$ (Abb. 4.10), wobei die Doppelpeakstruktur nur auftritt, wenn man die Daten binweise zusammenfaßt. Es zeigt sich deutlich, daß die Breite der Diskontinuität der verbesserten Wirkungen im Vergleich zur Wilson-Wirkung deutlich reduziert ist.
Da die Koexistenz der beiden reinen Phasen in der Wirkung nicht genügend ausgeprägt ist, zieht man den Polyakov-Loop als Kriterium für die Separation der Phasen heran. In der Literatur [34] findet man zwei Vorgehensweisen beschrieben. Die eine beruht auf der Analyse der Polyakov-Loop-Verteilung, bei der die Messungen, deren Wert des Polyakov-Loops in einem Intervall der Breite $\delta$ um einen Peak der Verteilung liegen, einer der beiden Phasen zugeordnet wird. Dementsprechend erhält man die Erwartungswerte der Wirkungsanteile für die Confinement- und Deconfinement-Phase und kann deren Differenz berechnen. Dieses wurde mit verschiedenen Intervallbreiten $\delta$ durchgeführt, die Ergebnisse zeigten jedoch eine deutliche $\delta$-Abhängigkeit, so daß die Latente Wärme nur mit einem Fehler von über 25% berechnet werden konnte.
Das Verfahren auf das letztendlich zurückgegriffen wurde, beruht auf der Analyse der Zeitentwicklung des Polyakovloops, wie es ausführlich in [33] dargestellt ist. Hierbei wurde die Klassifizierung der beiden Phasen dadurch erreicht, daß in der Zeitentwicklung bei einem mittleren Polyakov-Loop-Wert $|L_S|$ ein Schnitt gesetzt und eine gewisse Anzahl Konfigurationen der Übergangsregion weggelassen wurden,

um eine Verfälschung der Erwartungswerte für die beiden Phasen durch Beiträge der gemischten Phase auszuschließen. Die Mittelwerte der Wirkungsanteile in der einen bzw. anderen Phase wurden dann daraufhin getestet, inwieweit sie unabhängig vom Separationswert $|L_S|$ und von der Anzahl der entfernten Konfigurationen des Übergangsbereichs sind.
Die Zuverlässigkeit des Verfahrens wurde mit Hilfe von Daten einer Simulation der Wilson-Wirkung [6] auf einem Gitter $32^3 \cdot 6$ bei $\beta = 5.890$ überprüft. Aufgrund des häufigen Übergangs von einer zur anderen Phase und der geringen Statistik von 30000 Konfigurationen, konnte die Latente Wärme nur mit einem relativ großen Fehler bestimmt werden. Es ergibt sich $\Delta\left(\epsilon/T_c^4\right) = 2.44(19)$, wobei der Fehler aus einer Jackknife-Analyse stammt. Dieser Wert stimmt innerhalb der Fehlergrenzen sehr gut mit dem Ergebnis von Iwasaki et al. [33] von $\Delta\left(\epsilon/T_c^4\right) = 2.395(63)$ überein.

### Tree-level-verbesserte Wirkung

Auf einem Gitter der Größe $32^3 \cdot 4$ wurden bei einem $\beta$ von 4.0730, das heißt sehr dicht bei $\beta_c = 4.0729(3)$ 46800 Konfigurationen erzeugt.
In Abbildung 4.11 ist die Zeitentwicklung des jeweils über 10 Konfigurationen gemittelten Polyakov-Loops zu sehen mit dem minimalen und maximalen Separationswert $|L_S|$. Es zeigen sich deutlich zwei Phasen mit einer Aufenthaltsdauer von bis zu 5000 Konfigurationen in einer Phase. Die Abbildungen 4.12 (a) und (b) zeigen den Erwartungswert von $S$ in den beiden Phasen mit Jackknifefehler. Man erkennt, daß der Mittelwert zwischen 600 und 2000 entfernten Iterationen ein Plateau erreicht

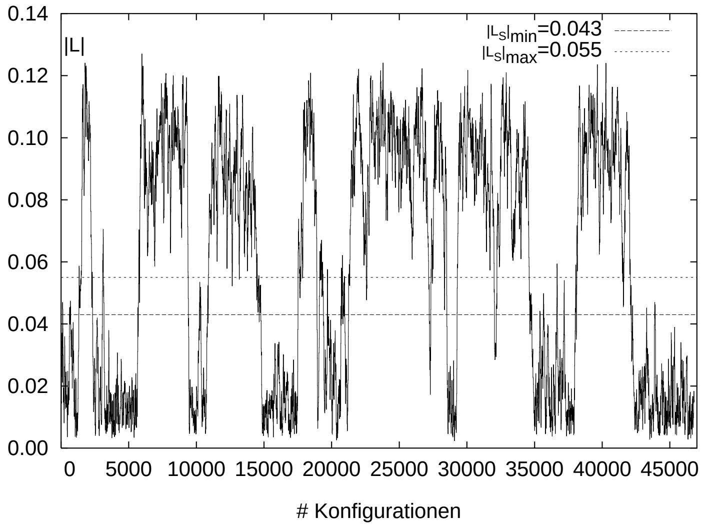



Abbildung 4.11: Zeitentwicklung des über 10 Konfigurationen gemittelten Polyakov-Loops für die tree-level-verbesserte Wirkung auf einem Gitter der Größe $32^3 \cdot 4$ bei $\beta = 4.0730$.

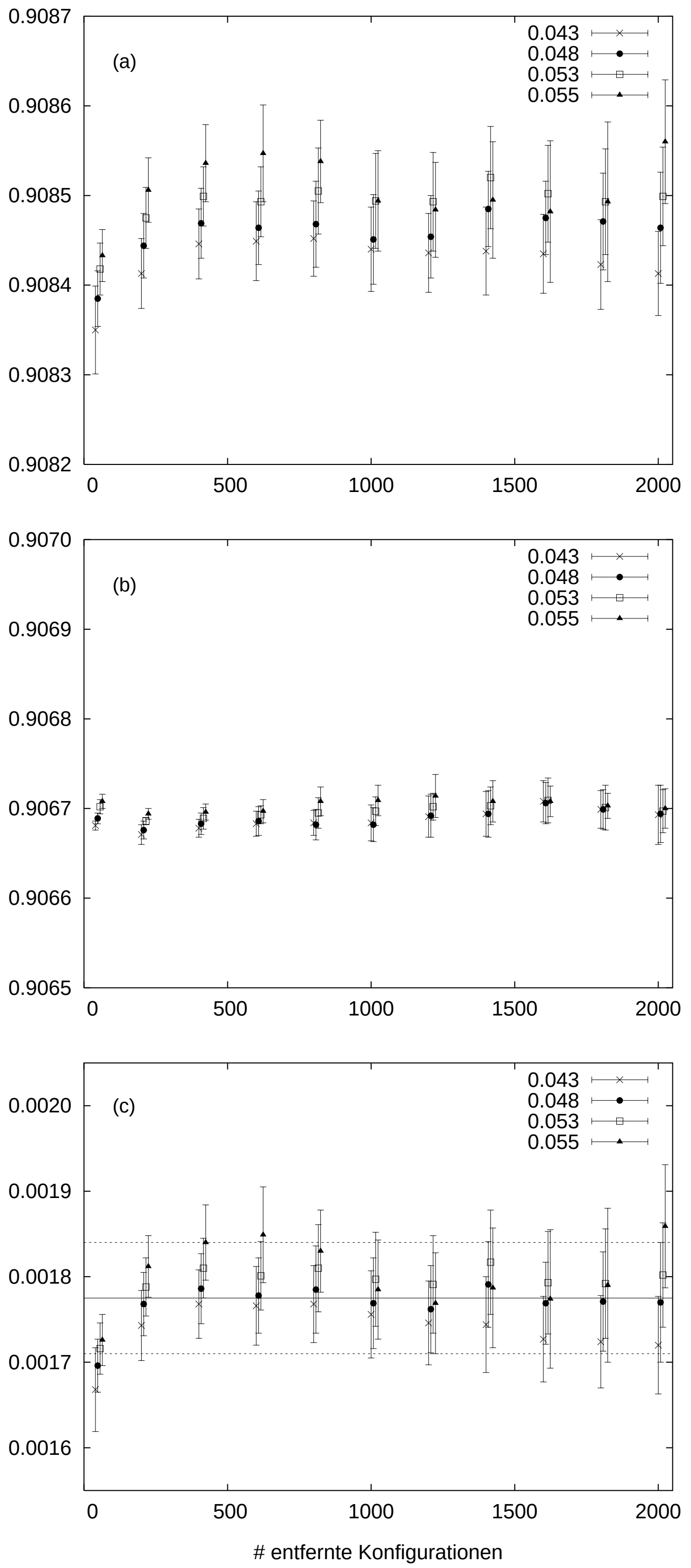



Abbildung 4.12:
(a) $S$ in der Deconfinement-Phase , (b) $S$ in der Confinement-Phase, (c) $\Delta S$ für die tree-level-verbesserte Wirkung auf einem Gitter der Größe $32^3 \cdot 4$ bei $\beta = 4.0730$ Die verschiedenen Separationswerte $|L_S|$ sind versetzt gedruckt.

und die systematische Verschiebung bei verschiedenem Separationswert nur gering ist. Bei einer größeren Anzahl von entfernten Iterationen werden die Werte instabil, was dadurch erklärbar ist, daß dann in den einzelnen Phasen nur noch wenige Konfigurationen zum Mittelwert beitragen. Aus den Datenpunkten der Abbildung (4.12) (c) wurde die Differenz $\Delta S$ derart extrahiert, daß sie innerhalb der Fehler mit allen Daten des Plateaus kompatibel ist. Als Wert ergibt sich dann

$$\Delta S = 0.001775(65) \quad . \tag{4.18}$$

In die Berechnung der Latenten Wärme geht zusätzlich noch die $\beta$-Funktion ein, die wie in Kapitel 4.3 dargestellt berechnet wurde. Dies ergab

$$\left( a \frac{\partial g^{-2}}{\partial a} \right) = 0.096(5) \quad . \tag{4.19}$$

Daraus folgt für die Latente Wärme

$$\left( \Delta\epsilon / T_c^4 \right) \quad = \quad 1.57(12) \quad , \tag{4.20}$$

bzw. mit störungstheor. $\beta$-Funktion

$$\left( \Delta\epsilon / T_c^4 \right)_{\mathrm{pert}} \quad = \quad 2.28(8) \quad . \tag{4.21}$$

**Tadpole-verbesserte Wirkung**

Die Tadpole-Wirkung wurde bei $\beta = 4.3524$ in nächster Nähe von $\beta_c = 4.3522(4)$ mit der Gittergröße $32^3 \cdot 4$ simuliert. In Abbildung 4.13 ist die zeitliche Entwicklung des Polyakov-Loops der erzeugten 59000 Konfigurationen über jeweils 10 Datenpunkte gemittelt dargestellt. Man erkennt etwa 4 Flip-Flops von einer in die andere Phase, wobei die Aufenthaltsdauer in den einzelnen Phasen mehr als 10000 Konfigurationen beträgt.

Die Wirkungsanteile $S - \partial S/\partial\beta$ in den beiden Phasen, sowie deren Differenz erreichen nach etwa 600 entfernten Konfigurationen ein Plateau und zeigen eine geringe Abhängigkeit vom Separationswert $|L_S|$ (siehe Abbildung 4.14). Der Wert für die Differenz der Wirkungsanteile ist so gewählt, daß er innerhalb der Fehler im Einklang mit den Daten des Plateus ist.

$$\Delta(S - \partial S/\partial\beta) = 0.001515(55) \tag{4.22}$$

Mit der nach 4.12 zu

$$\left( a \frac{\partial g^{-2}}{\partial a} \right) = 0.099(5) \tag{4.23}$$

bestimmten $\beta$-Funktion ergibt sich für die Latente Wärme

$$\left(\Delta\epsilon/T_c^4\right) \;=\; 1.40(9) \quad , \tag{4.24}$$

oder mit störungstheor. $\beta$-Funktion

$$\left(\Delta\epsilon/T_c^4\right)_{\mathrm{pert}} \;=\; 1.95(8) \quad . \tag{4.25}$$

**Zusammenfassung**
Die Ergebnisse der Latenten Wärme für die Wilson-Wirkung und die verbesserten Wirkungen sind in Tabelle 4.6 zusammengestellt. Die Finite-Cutoff-Abhängigkeit

| Wirkung | $N_\sigma^3$ | $N_\tau$ | $\Delta\epsilon/T_c^4$ | $\left(\Delta\epsilon/T_c^4\right)_{\mathrm{pert}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Wilson | $24^2 \times 36$ | 4 | 2.27 (5) | 4.06 (8) |
| | $36^2 \times 48$ | 6 | 1.53 (4) | 2.39 (6) |
| 2×1-tree-level-verb. | $32^3$ | 4 | 1.57 (12) | 2.28 (8) |
| 2×1-tadpole-verb. | $32^3$ | 4 | 1.40 (9) | 1.95 (8) |

Tabelle 4.5: Latente Wärme für die verbesserten Wirkungen und die Wilson-Wirkung. Die Ergebnisse für die Wilson-Wirkung stammen von Iwasaki et al. [33], die nicht-störungstheoretische $\beta$-Funktion ist [6] entnommen.

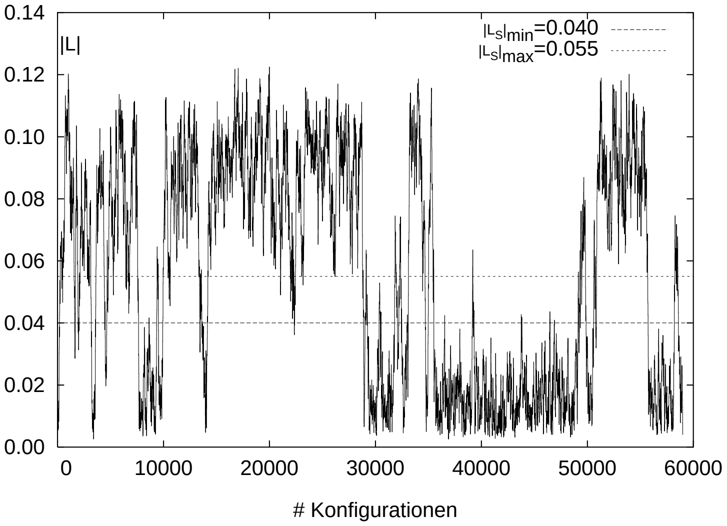



Abbildung 4.13: Zeitentwicklung des über 10 Konfigurationen gemittelten Polyakov-Loops für die tadpole-verbesserte Wirkung auf einem Gitter der Größe $32^3 \cdot 4$ bei $\beta = 4.3524$.

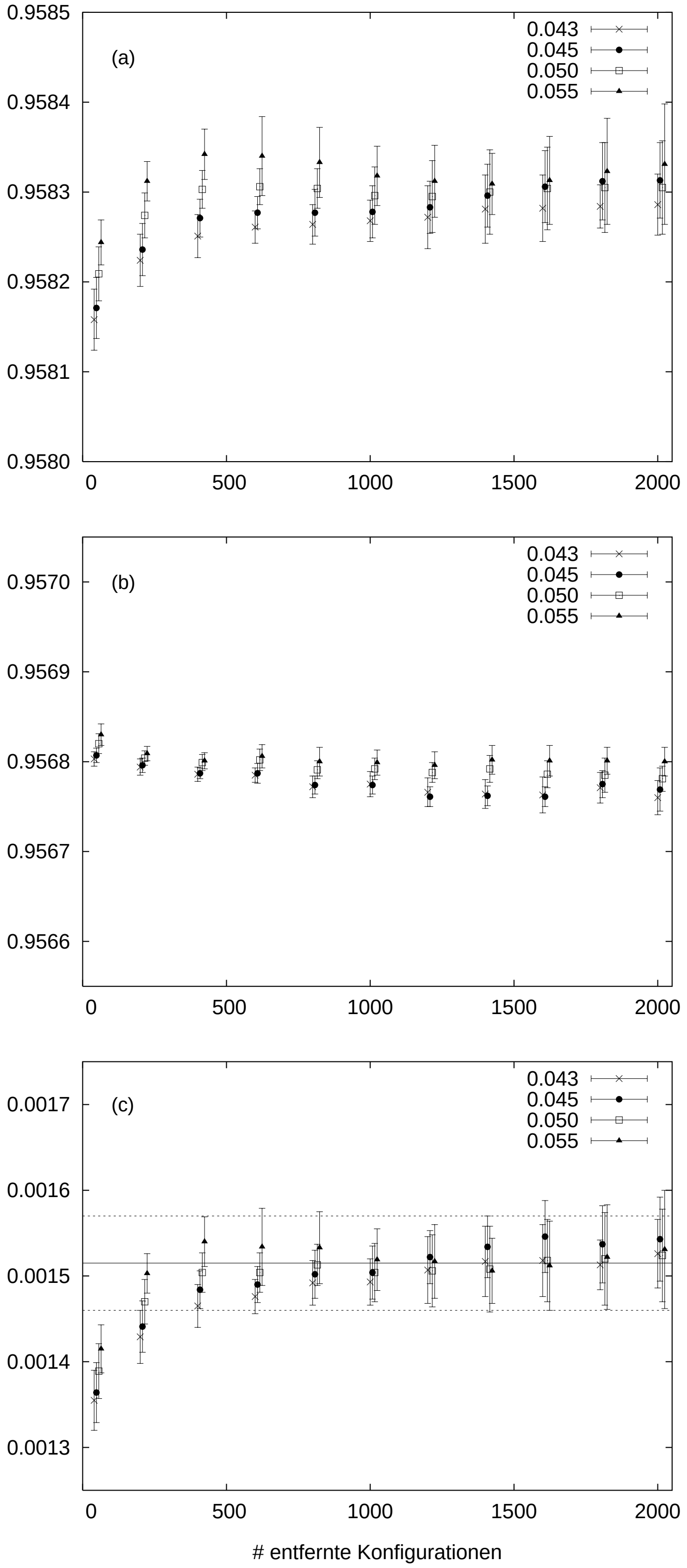



Abbildung 4.14: (a) $S - \partial S/\partial\beta$ in der Deconfinement-Phase , (b) $S - \partial S/\partial\beta$ in der Confinement-Phase und (c)$\Delta(S - \partial S/\partial\beta)$ für die tadpole-verbesserte Wirkung auf einem Gitter der Größe $32^3 \cdot 4$ bei $\beta = 4.3524$.
Die verschiedenen Separationswerte $|L_S|$ sind versetzt gedruckt.

der Latenten Wärme für die verbesserten Wirkungen ist stark reduziert, die Ergebnisse der Tree-Level- und Tadpole-Wirkung für $N_\tau = 4$ sind innerhalb der Fehler vergleichbar mit denen der Wilson-Wirkung für $N_\tau = 6$. Tree-level- und Tadpole-Wirkung unterscheiden sich in ihrem Finite-Cutoff-Verhalten im Rahmen ihrer Fehlergenauigkeit von etwa 7% nicht .

## 4.7 Unterkühlungsrate und Inhomogenität beim QCD-Phasenübergang im frühen Universum

In Kapitel 1 wurde mit dem sogenannten "Small Supercooling and Phase Separation Scenario" ein Modell für den QCD-Phasenübergang im frühen Universum dargestellt. Dabei sind die kritische Temperatur $T_c$, die Oberflächenspannung $\hat{\sigma}$ und die Latente Wärme $L$ wichtige Parameter des Modells, die die Unterkühlungsrate beim Confinement-Deconfinement-Phasenübergang und den mittleren Blasenabstand bestimmen, wobei $\hat{\sigma}$ und $L$ lediglich als Kombination im Skalenfaktor $\alpha$ auftauchen

$$\alpha = \frac{16\pi\hat{\sigma}^3}{3L^2T_c} \quad . \tag{4.26}$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.6 zusammengestellt, wobei für $T_c$ ein Wert von 150 MeV angenommen wurde. In dieser Größenordnung liegt die kritische Temperatur, die man aus der vollen QCD mit fermionischen Freiheitsgraden extrahiert. Die Übergangstemperatur $T_{P\ddot{U}}$ ist demnach etwa 99.95% der kritischen Temperatur, die Unterkühlung also sehr gering. Der mittlere Blasenabstand als Maß für die Dichtinhomogenität ist so klein, daß keine der heute im Universum sichtbaren Inhomogenitäten darauf zurückgeführt werden könnten. Die physikalische Aussagekraft der Ergebnisse für $(T_c - T_{P\ddot{U}})/T_c$ und $d$ ist fragwürdig, da sie aus Latenter Wärme und Oberflächenspannung bei Vernachlässigung von fermionischen Freiheitsgraden hervorgehen. Sie erlauben aber zumindest eine Einschätzung der Größenordnungen in denen sich Unterkühlungsrate und mittlerer Blasenabstand bewegen, solange es

| Wirkung | $\hat{\sigma} = \sigma_I/T_c^3$ | $L = \Delta\epsilon/T_c^4$ | $\alpha$ | $(T_c - T_{P\ddot{U}})/T_c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Tree-Level | 0.0152 (20) | 1.57 (12) | 0.0055 (11) | $4.2\ (0.8) \times 10^{-4}$ | 16.5 (3.3) mm |
| Tadpole | 0.0152 (26) | 1.40 (9) | 0.0049 (13) | $3.7\ (1.0) \times 10^{-4}$ | 14.7 (3.9) mm |
| Wilson | 0.0218 (33) | 1.53 (4) | 0.0086 (20) | $6.5\ (1.5) \times 10^{-4}$ | 25.8 (6.0) mm |

Tabelle 4.6: Unterkühlungsrate $(T_c - T_{P\ddot{U}})/T_c$ und mittlerer Blasenabstand $d$ beim QCD-Phasenübergang im frühen Universum für die verbesserten Wirkungen mit $N_\tau = 4$ und die Wilson-Wirkung [18] mit $N_\tau = 6$.

noch keinen brauchbaren Resultate für $\hat{\sigma}$ und $L$ mit voller QCD gibt. Für 4-Flavour-QCD ist in [39] lediglich eine obere Grenze für $\sigma_I/T_c^3$ von 0.1 angegeben worden.

## 4.8 Der Druck – $p/T^4$

Der Druck berechnet sich nicht-störungstheoretisch entsprechend (2.61) aus der Differenz der Wirkungsanteile auf einem Gitter mit endlicher Temperatur und Temperatur Null

$$\delta\left(\tilde{S} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta}\right) = \left(\tilde{S} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta}\right)_{N_\sigma=\infty} - \left(\tilde{S} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta}\right)_{N_\sigma<\infty} \quad , \tag{4.27}$$

wobei die partielle Ableitung der Wirkung nach $\beta$ für die tree-level-verbesserte Theorie Null ist.

Die Simulationen bei Temperatur Null wurden auf einem Gitter der Größe $16^4$ durchgeführt, deren Ergebnisse man in den Tabellen B.13 und C.13 des Anhangs findet. Bei endlicher Temperatur wurde für die Tree-Level-Wirkung auf einem Gitter der Größe $16^3 \times 4$, sowie für die Tadpole-Wirkung auf einem $12^3 \times 3$- und $16^3 \times 4$-Gitter simuliert (Ergebnisse in Tabellen B.4, C.1 und C.4). In Abbildung 4.15 und 4.16 sind die Wirkungsdifferenzen für verschiedene Wirkungen und Gittergrößen aufgetragen. Mithilfe eines Splines wurden die Wirkungsanteile bei verschiedenen $\beta$-Werten bestimmt; die daraus berechneten $\delta S$ sind als ausgefüllte Kreise in den Abbildungen zu erkennen.

Die Werte zwischen den $\delta S$-Daten wurden dann durch eine Splineinterpolation ermittelt, wobei der Nullpunkt bei einem $\beta$ gewählt wurde, bei dem die Wirkungsdifferenz innerhalb der Fehler gleich Null war.

Die numerische Integration des Splines mithilfe der Trapezregel liefert die Druckverläufe wie in Abbildung 4.17 eingezeichnet. Man erkennt, daß die Kurven des Druckes für alle verbesserten Wirkungen wesentlich näher an der Kontinuumsextrapolation liegen, als die der Wilson-Wirkung bei gleichem bzw. größerem $N_\tau$. Die Ultraviolett-Cutoff-Effekte der verbesserten Wirkungen sind also über den gesamten Temperaturbereich deutlich vermindert. In direkter Nähe des kritischen Punktes zeigen die beiden Tadpole-Wirkungen geringere Abweichungen von der Extrapolation als die Tree-Level-Wirkung.

Es erscheint etwas merkwürdig, daß die Druckkurve für $N_\tau = 3$ ab etwa 2.2 $T/T_c$ unter der für $N_\tau = 4$ liegt, obwohl der Hochtemperaturlimes für $N_\tau = 3$ größer ist. Die relative Differenz des Druckes beträgt bei $T/T_c = 2.7$ etwa 2.1%. Nimmt man an, daß der Fehler von 1%, den man für die Wilson-Wirkung aufgrund verschiedener Integrationsmethoden findet, auch für die verbesserten Wirkungen in dieser Größenordnung liegt, so stellen sich die gefundenen Ergebnisse aber als durchaus sinnvoll heraus.

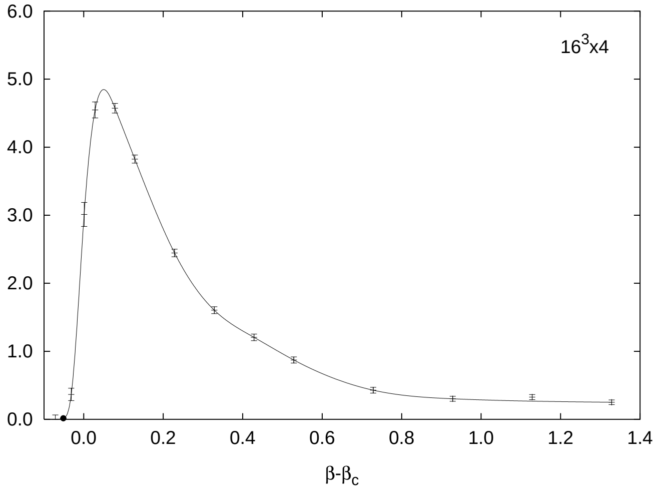



Abbildung 4.15: Differenz der Tree-Level-Wirkung $\delta S$ bei endlicher Temperatur und Temperatur Null auf einem Gitter der Größe $16^3 \times 4$.

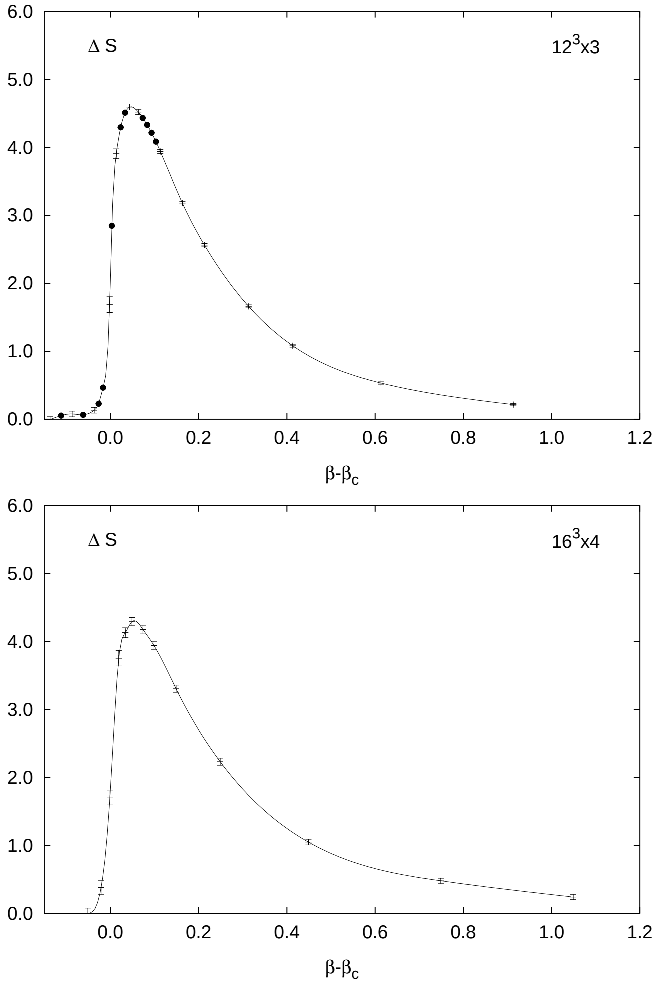



Abbildung 4.16: Differenz der Tadpole-Wirkung $\delta(S - \partial S/\partial\beta)$ bei endlicher Temperatur und Temperatur Null (a) auf einem Gitter der Größe $12^3 \times 3$ und (b) auf einem Gitter der Größe $16^3 \times 4$.

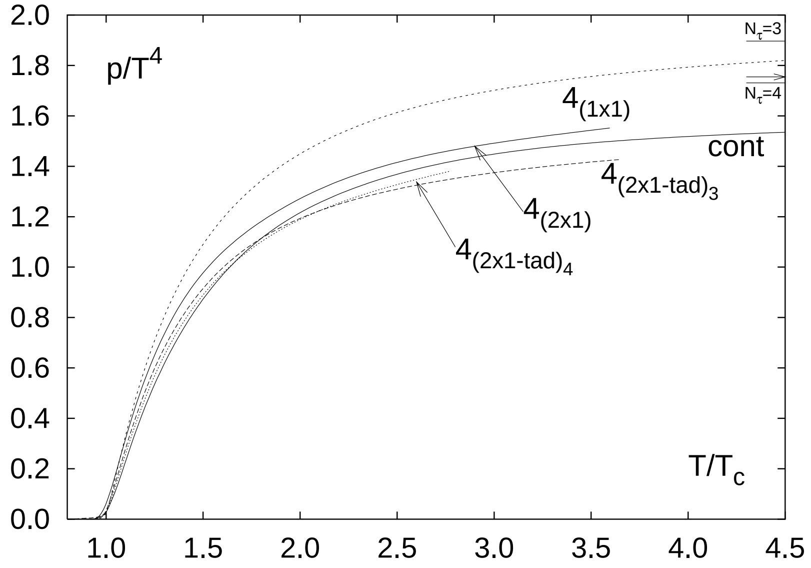



Abbildung 4.17: Druckverläufe der tree-level-verbesserten Wirkung für $N_\tau = 4$ und tadpole-verbesserten Wirkung für $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$ mit der nicht-störungstheoretischer Temperatuskala aus 4.3. Zusätzlich eingezeichnet ist der Druck für die Wilson-Wirkung mit $N_\tau = 4$ und eine Kontinuumsextrapolation des Druckes ausgehend von Messungen für die Wilson-Wirkung mit $N_\tau = 6$ und $N_\tau = 8$. Am rechten Rand sind die Hochtemperaturlimiten des Druckes der $2{\times}1$-verbesserten Wirkung für $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$, sowie der Stefan-Boltzmann-Wert (Pfeil) eingetragen.

# Zusammenfassung

Es wurde die Thermodynamik der SU(3)-Eichtheorie mit der 2×1-tree-level- und der 2×1-tadpole-verbesserten Wirkung untersucht. Anhand der verschiedenen thermodynamischen Größen konnte das Finite-Cutoff-Verhalten der beiden Wirkungen untereinander und mit der Wilson-Wirkung verglichen werden. Zum Teil wurden die hier beschriebenen Ergebnisse bereits veröffentlicht [40][41].

Auf einem symmetrischen Gitter wurde die String-Tension gemessen, mithilfe derer eine nichtstörungstheoretische Temperaturskala und $\beta$-Funktion berechnet werden konnten. Die Annäherung der String-Tension an das asymtotische Verhalten ist bei großen $\beta$ nicht gegeben, die gemessen $\hat{\sigma}$ sind zu groß. Eine Simulation mit größerem räumlichen Volumen sollte die korrekten Resultate liefern.
Die Bestimmung der kritischen Temperatur in Einheiten der String-Tension ergab bei $N_\tau = 4$ für beide verbesserten Wirkungen einen Wert von 0.634(3), der innerhalb der Fehler mit einer Kontinuumsextrapolation der Ergebnisse der Wilson-Wirkung übereinstimmt. Die Resultate für $N_\tau = 3$ lagen etwa 1.5% höher.
Aus der Verteilung des Polyakov-Loops wurde die Oberflächenspannung beim Confinement-Deconfinement-Phasenübergang extrahiert. Die Cutoff-Abhängigkeit der verbesserten Wirkungen ist im Vergleich zu früheren Ergebnissen mit der Wilson-Wirkung stark reduziert. Für $N_\tau = 4$ sind die Resultate der Tree-Level- und Tadpole-Wirkung innerhalb ihrer Fehler identisch. Der Vergleich der Werte auf Gittern mit $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$ zeigt für die tree-level-verbesserte Wirkung eine Abhängigkeit vom Gitterabstand, die man bei der tadpole-verbesserten Wirkung nicht findet. Aus den beiden Ergebnissen von $\sigma_I/T_c^3$ der Tadpole-Wirkung ergibt sich

$$\sigma_I/T_c^3 = 0.0155\ (16) \quad .$$

Die zweite Größe, die einen Phasenübergang 1.Ordnung charakterisiert, ist die Latente Wärme. Diese wurde für beide verbesserten Wirkungen auf einem Gitter der Größe $32^3 \times 4$ gemessen. Die Ergebnisse sind innerhalb ihrer Fehler kompatibel und stimmen mit dem Resultat für $N_\tau = 6$ der Wilson-Wirkung überein. Mit der Tadpole-Wirkung findet man einen Wert von

$$\left(\Delta\epsilon/T_c^4\right) = 1.40(9) \quad .$$

Die beiden Größen Oberflächenspannung und Latente Wärme haben eine physikalische Relevanz bei der Berechnung von Unterkühlungsraten und Inhomogenitäten in kosmologischen Modellen, allerdings mit der Einschränkung, daß keine Quarks in der Rechnung berücksichtigt sind. Es ergaben sich Werte von $T_{P\ddot{U}} = 0.9995\ T_c$ für die Temperatur, bei der der Phasenübergang einsetzt und ein mittlerer Blasenabstand von etwa 20 mm, ein Wert der zu klein ist, um heutige Inhomogenitäten im Universum zu erklären.
Der Druck wurde extrahiert, um verschiedene Wirkungen über einen größeren $\beta$-Bereich vergleichen zu können. Die Kurven des Druckes der verbesserten Wirkung liegen sehr dicht an der Kontinuumsextrapolation des Druckes für die Wilson-Wirkung, die Finite-Cutoff-Abhängigkeit ist deutlich reduziert. Die beiden Druckverläufe der Tadpole-Wirkung mit einer zeitlichen Gitterausdehnung von $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$ zeigen eine sehr geringe Differenz, bis etwa 2.5 $T_c$ liegen sie etwa deckungsgleich.
Betrachtet man die Resultate der Messungen aller Observablen zusammengenommen, so läßt sich eindeutig feststellen, daß die Finite-Cutoff-Effekte sowohl mit Tree-Level- als auch mit Tadpole-Wirkung deutlich verringert sind, insbesondere auch am kritischen Punkt. Für $N_\tau = 4$ scheinen die Ergebnisse, die man mit beiden Wirkungen erziehlt, recht nahe am Kontinuumswert zu sein. Darüberhinaus zeigen die Messungen des Druckes und der Oberflächenspannung, daß sich die Ergebnisse mit der tadpole-verbesserten Wirkung für $N_\tau = 3$ und $N_\tau = 4$ nicht unterscheiden. Eine Messung des Druckes für $N_\tau = 3$ mit der Tree-Level-Wirkung könnte darüber Aufschluß geben, ob sich die Cutoff-Abhängigkeit bei den Ergebnissen der Oberflächenspannung auch beim Druck bestätigt.

# Anhang A

# Naiver Kontinuumslimes der Wilson- und 2×1-Tree-Level-Wirkung

## A.1 Kontinuumslimes der Wilson-Wirkung

Die Wilson-Wirkung (2.15) ist definiert als

$$S_G(\{U\}) = \beta \sum_{n,\mu<\nu} \Big(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr}U_{\mu,\nu}(n)\Big) \tag{A.1}$$

mit der Plaquette

$$U_{\mu,\nu}(n) \equiv U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad , \tag{A.2}$$

wobei jeder Link durch das Schwingersche Linienintegral gegeben ist

$$\begin{aligned} &U_{\mu,\nu}(n) \\ &= \; e^{ig\int_n^{n+a\hat{\mu}} A_\mu(y)\;dy} e^{ig\int_{n+a\hat{\mu}}^{n+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}} A_\nu(y)\;dy} e^{-ig\int_{n+a\hat{\nu}}^{n+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}} A_\mu(y)\;dy} e^{-ig\int_n^{n+a\hat{\nu}} A_\nu(y)\;dy} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Eine Entwicklung in Potenzen des Gitterabstandes $a$ und der Kopplung $g$ gelingt mithilfe der Baker-Hausdorff Formel $e^A e^B = e^{(A+B+1/2[A,B]+\ldots)}$ und einer Änderung der Integrationsgrenzen. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} U_{\mu,\nu}(n) \;=\; \exp\Big\{ig\Big[&\int_n^{n+a\hat{\nu}} A_\nu(y+a\hat{\mu}) - A_\nu(y)\;dy \\ &- \int_n^{n+a\hat{\mu}} A_\mu(y+a\hat{\nu}) - A_\mu(y)\;dy\Big] + \mathcal{O}(g^2)\Big\} \quad . \end{aligned} \tag{A.4}$$

In niedrigster Ordnung trägt der Kommutator $[A, B]$ nicht bei, so daß man einen Ausdruck linear in den Feldern erhält.
Die Taylorentwicklung der Felder $A_\mu$ um den Mittelpunkt der Plaquette liefert

$$
\begin{aligned}
&\int_{n}^{n+a\hat{\nu}} A_\nu(y + a\hat{\mu}) - A_\nu(y)\, dy \\
&= \int_{-a\hat{\nu}/2}^{a\hat{\nu}/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \partial_\nu^{(j)} \left[A_\nu(n + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}/2) - A_\nu(n + a\hat{\nu}/2)\right]\, dy \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{(2j+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{(2j+1)} \partial_\nu^{(2j)} \left[A_\nu(n + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}/2) - A_\nu(n + a\hat{\nu}/2)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{(2j+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{(2j+1)} \partial_\nu^{(2j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{(2k+1)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \partial_\mu^{(2k+1)} A_\nu(n + a\hat{\mu}/2 + a\hat{\nu}/2) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} \partial_\mu A_\nu(n + a\hat{\mu}/2 + a\hat{\nu}/2) \quad , \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}
$$

mit

$$
c_{jk} = \frac{2^{-2j}}{(2k+1)!(2(j-k)+1)!} \quad . \qquad \text{(A.6)}
$$

Damit erhält man den Plaquetteterm

$$
\begin{aligned}
U_{\mu,\nu}(n) = & \qquad \text{(A.7)} \\
& \exp\Big\{ ig\Big[ \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \Big\{ \partial_\nu^{(2(j-k)} \left(\partial_\mu^{(2k)} \partial_\mu A_\nu(n + a\hat{\mu}/2 + a\hat{\nu}/2)\right) \\
+ \; & \partial_\mu^{(2(j-k))} \left(\partial_\nu^{(2k)} \partial_\nu A_\mu(n + a\hat{\mu}/2 + a\hat{\nu}/2)\right) \Big\}\Big] + \mathcal{O}(g^2)\Big\} \\
= \; & \exp\Big\{ ig\Big[ \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}^{(0)}(n + a\hat{\mu}/2 + a\hat{\nu}/2))\Big] \\
+ \; & \mathcal{O}(g^2)\Big\} \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei $F_{\mu\nu}^{(0)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu$ der Kontinuumsfeldstärketensor in niedrigster Ordnung $g$ ist

$$
F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(0)} - ig[A_\mu, A_\nu] \quad . \qquad \text{(A.8)}
$$

Einsetzen von A.7 in die Wirkung und Entwicklung der Exponentialfunktion ergibt

$$
\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{N} \mathrm{ReTr} \; \Box_{\mu\nu}(n) \\
&= \frac{g^2}{2N} \mathrm{Tr} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{jk} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}^{(0)}(n') \right]^2 + \mathcal{O}(g^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g^2}{2N}\mathrm{Tr}\left[a^4 F^{(0)}_{\mu\nu}(n')F^{(0)}_{\mu\nu}(n') + a^6\frac{1}{12}F^{(0)}_{\mu\nu}(n')(\partial^{(2)}_\mu + \partial^{(2)}_\nu)F^{(0)}_{\mu\nu}(n')\right. \\
&\quad \left. +\mathcal{O}(a^8)\right] + \mathcal{O}(g^4) \quad . \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

Im Limes $a \to 0$ erhält man einen Audruck der Form 2.75, wie zu zeigen war

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to 0}\beta \sum_{n,\mu<\nu} S_{\mu,\nu} &= \lim_{a\to 0} a^4 \sum_{n,\mu<\nu}\left[\mathrm{Tr}\ F^{(0)}_{\mu\nu}F^{(0)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^2)\right] + \mathcal{O}(g^2) \\
&= \frac{1}{2}\int_V d^3x \int_0^{1/T} dx_4\ \mathrm{Tr}\ F^{(0)}_{\mu\nu}F^{(0)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(g^2) \quad . \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}
$$

Berücksichtigt man in der Entwicklung auch die nächste Ordnung $g^2$, so wird im Kontinuumslimes der vollständige Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ reproduziert.

## A.2 Kontinuumslimes der 2×1-tree-level-verbesserten Wirkung

Es ist zu zeigen, daß die Wirkung $S^{1,2}$ der Form (2.78)

$$
\begin{aligned}
S^{(1,2)} &= \beta \sum_{x,\nu>\mu} c_1'\left(1 - \frac{1}{N}\mathrm{ReTr}\ \square_{\mu\nu}(n)\right) \\
&\quad + c_2'\left(1 - \frac{1}{2N}\mathrm{ReTr}\left(\square\!\square_{\mu\nu}(n) + \begin{smallmatrix}\square\\ \square\end{smallmatrix}_{\mu\nu}(n)\right)\right. \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

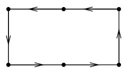
mit den Koeffizienten $c_1' = 5/3$ und $c_2' = -1/12$ im naiven Kontinuumslimes keine Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ besitzt. Der Plaquetteanteil der Wirkung ist aus A.1 bekannt, so daß noch die beiden 2×1-Loops entwickelt werden müssen

$$
\square\!\square_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\mu(n+\hat\mu)U_\nu(n+2\hat\mu)U^\dagger_\mu(n+\hat\mu+\hat\nu)U^\dagger_\mu(n+\hat\nu)U^\dagger_\nu(n) \quad . \qquad \text{(A.12)}
$$

Setzt man für die Links das Schwingersche Linienintegral ein und ersetzt das Produkt von Exponentialfunktionen mithilfe der Baker-Hausdorff-Formel, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\square\!\square_{\mu\nu}(n) &= \exp\left\{ig\left[\int_n^{n+a\hat\nu} A_\nu(y+2a\hat\mu) - A_\nu(y)\ dy\right.\right. \\
&\quad + \int_n^{n+a\hat\mu} A_\mu(y) + A_\mu(y+a\hat\mu) - A_\mu(y+a\hat\mu+a\hat\nu) \\
&\quad \left.\left. - A_\mu(y+a\hat\nu)\ dy\right] + \mathcal{O}(g^2)\right\} \quad . \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

Die Taylorentwicklung der Summe jeweils zweier Felder um den Plaquettemittelpunkt wird wie für die Wilson-Wirkung in A.1 durchgeführt. Damit erhält man

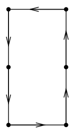


$$
{}_{\mu\nu}(n) = \exp\left\{ ig \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c_{j,k} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}^{(0)}(x + \frac{1}{2}\hat{\nu} + \hat{\mu}) + \mathcal{O}(g^2) \right\} , \tag{A.14}
$$

wobei

$$
c_{j,k} = \frac{2^{(2(k-j)+1)}}{(2k+1)!(2(k-j)+1)!} \quad . \tag{A.15}
$$

Analog berechnet sich der 2×1-Loop in der anderen Orientierung

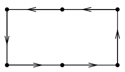
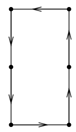


$$
{}_{\mu\nu}(n) = \exp\left\{ ig \sum_{j=0}^{\infty} a^{2(j+1)} \sum_{k=0}^{j} c'_{j,k} \partial_\nu^{(2(j-k))} \partial_\mu^{(2k)} F_{\mu\nu}^{(0)}(n + \frac{1}{2}\hat{\mu} + \hat{\nu}) + \mathcal{O}(g^2) \right\} , \tag{A.16}
$$

wobei

$$
c'_{j,k} = \frac{2^{(-2k+1)}}{(2k+1)!(2(k-j)+1)!} \quad . \tag{A.17}
$$

Zusammenfassend ergibt sich bei Entwicklung der Exponentialfunktion für die Wirkungsanteile des 2×1-Loops

$1 - \frac{1}{2N}\mathrm{ReTr}\Big($  ${}_{\mu\nu}(n) +$  ${}_{\mu\nu}(n)\Big)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g^2}{2N}\mathrm{Tr}\Big[ a^4\ 4\ F_{\mu\nu}^{(0)}(n')F_{\mu\nu}^{(0)}(n') \\
&\quad + a^6\ \frac{5}{6} F_{\mu\nu}^{(0)}(n') \left(\partial_\mu^{(2)} + \partial_\nu^{(2)}\right) F_{\mu\nu}^{(0)}(n') \\
&\quad + \mathcal{O}(a^8)\Big] + \mathcal{O}(g^4)
\end{aligned} \tag{A.18}
$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für die Wilson-Wirkung A.9, so erkennt man, daß bei einer Wahl von $c'_1 = 5/3$ und $c'_2 = -1/6$ in A.11 der Vorfaktor für die Beiträge in $a^4$ zu Eins und der Vorfaktor für die Beiträge in $a^6$ zu Null wird. Somit zeigt die Wirkung im Hochtemperaturlimes keine Abweichungen zum Kontinuum in Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$.

# Anhang B

# Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen mit tree-level-verbesserter Wirkung

Tabelle B.1: Erwartungswerte der Plaquette $(1\times1)$, der räumlichen Plaquette $(1\times1)_\sigma$, der zeitlichen Plaquette $(1\times1)_\tau$, des $2\times1$-Loops $(2\times1)$, des räumlichen $2\times1$-Loops $(2\times1)_\sigma$ und des zeitlichen $2\times1$-Loops $(2\times1)_\tau$ der $2\times1$-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 3$ und $N_\sigma = 12$.

| $\beta$ | Anzahl | $(1\times1)$ | $(1\times1)_\sigma$ | $(1\times1)_\tau$ | $(2\times1)$ | $(2\times1)_\sigma$ | $(2\times1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3.89800** | 12500 | 0.541469( 165 ) | 0.541211( 141 ) | 0.541728( 191 ) | 0.296598( 258 ) | 0.295986( 200 ) | 0.297211( 325 ) |
| **3.90400** | 15000 | 0.544186( 206 ) | 0.543693( 176 ) | 0.544680( 238 ) | 0.300434( 321 ) | 0.299295( 247 ) | 0.301574( 397 ) |
| **3.90800** | 22500 | 0.546121( 245 ) | 0.545449( 203 ) | 0.546793( 287 ) | 0.303241( 385 ) | 0.301659( 287 ) | 0.304822( 484 ) |
| **3.91200** | 15000 | 0.548851( 246 ) | 0.547879( 206 ) | 0.549824( 287 ) | 0.307280( 388 ) | 0.304962( 291 ) | 0.309599( 488 ) |
| **3.91800** | 15000 | 0.551633( 142 ) | 0.550362( 119 ) | 0.552904( 167 ) | 0.311328( 223 ) | 0.308318( 169 ) | 0.314338( 280 ) |

Tabelle B.2: Gesamte, räumliche und zeitliche Wirkung der $2\times1$-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 3$ und $N_\sigma = 12$.

| $\beta$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| **3.89800** | 12500 | 0.853016( 232 ) | 0.852687( 201 ) | 0.853344( 265 ) |
| **3.90400** | 15000 | 0.856904( 290 ) | 0.856272( 251 ) | 0.857537( 331 ) |
| **3.90800** | 22500 | 0.859661( 344 ) | 0.858805( 291 ) | 0.860518( 398 ) |
| **3.91200** | 15000 | 0.863539( 346 ) | 0.862304( 295 ) | 0.864774( 398 ) |
| **3.91800** | 15000 | 0.867500( 200 ) | 0.865884( 171 ) | 0.869117( 231 ) |

Tabelle B.3: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der $2\times1$-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 3$ und $N_\sigma = 12$.

| $\beta$ | $\|L\|$ | $\chi$ |
|---|---|---|
| **3.89800** | 0.057133( 3819 ) | 7.8660( 13562 ) |
| **3.90400** | 0.087485( 4444 ) | 13.3857( 5602 ) |
| **3.90800** | 0.111793( 5435 ) | 15.8270( 4345 ) |
| **3.91200** | 0.147245( 4995 ) | 13.1603( 13681 ) |
| **3.91800** | 0.178261( 2587 ) | 6.9623( 8612 ) |

Tabelle B.4: Gesamte, räumliche und zeitliche Wirkung der 2×1-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 16$.

| $\beta$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| 3.80000 | 9400 | 0.814371( 55 ) | 0.814356( 58 ) | 0.814386( 56 ) |
| 4.00000 | 10000 | 0.885617( 43 ) | 0.885592( 45 ) | 0.885641( 45 ) |
| **4.04000** | 10000 | 0.897593( 41 ) | 0.897556( 44 ) | 0.897630( 43 ) |
| **4.06000** | 13600 | 0.903314( 65 ) | 0.903231( 63 ) | 0.903397( 71 ) |
| **4.06700** | 13600 | 0.905995( 113 ) | 0.905826( 100 ) | 0.906165( 128 ) |
| **4.07000** | 20800 | 0.906981( 106 ) | 0.906777( 95 ) | 0.907185( 119 ) |
| **4.07252** | 45000 | 0.908032( 71 ) | 0.907782( 62 ) | 0.908281( 81 ) |
| **4.07500** | 29000 | 0.908761( 97 ) | 0.908510( 86 ) | 0.909013( 109 ) |
| **4.08000** | 17000 | 0.910849( 104 ) | 0.910470( 86 ) | 0.911227( 114 ) |
| **4.10000** | 8500 | 0.916447( 53 ) | 0.915935( 51 ) | 0.916959( 59 ) |
| 4.12500 | 8200 | 0.922774( 36 ) | 0.922180( 39 ) | 0.923368( 39 ) |
| 4.15000 | 8200 | 0.928371( 36 ) | 0.927731( 39 ) | 0.929011( 38 ) |
| 4.17500 | 6400 | 0.933718( 37 ) | 0.933035( 39 ) | 0.934400( 43 ) |
| 4.20000 | 10900 | 0.938858( 26 ) | 0.938139( 29 ) | 0.939577( 30 ) |
| 4.30000 | 8700 | 0.957593( 27 ) | 0.956825( 30 ) | 0.958361( 30 ) |
| 4.40000 | 8700 | 0.974407( 25 ) | 0.973607( 29 ) | 0.975207( 27 ) |
| 4.50000 | 8200 | 0.989840( 24 ) | 0.989055( 28 ) | 0.990625( 27 ) |
| 4.60000 | 8200 | 1.004069( 22 ) | 1.003295( 26 ) | 1.004844( 25 ) |
| 4.80000 | 8200 | 1.029798( 21 ) | 1.029014( 25 ) | 1.030582( 24 ) |
| 5.00000 | 10600 | 1.052577( 17 ) | 1.051820( 20 ) | 1.053333( 20 ) |
| 5.20000 | 9000 | 1.073015( 18 ) | 1.072271( 21 ) | 1.073759( 20 ) |
| 5.40000 | 9000 | 1.091442( 17 ) | 1.090738( 20 ) | 1.092147( 19 ) |

Tabelle B.5: Erwartungswerte der Plaquette $(1\times1)$, der räumlichen Plaquette $(1\times1)_\sigma$, der zeitlichen Plaquette $(1\times1)_\tau$, des $2\times1$-Loops $(2\times1)$, des räumlichen $2\times1$-Loops $(2\times1)_\sigma$ und des zeitlichen $2\times1$-Loops $(2\times1)_\tau$ der $2\times1$-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 16$.

| $\beta$ | Anzahl | $(1\times1)$ | $(1\times1)_\sigma$ | $(1\times1)_\tau$ | $(2\times1)$ | $(2\times1)_\sigma$ | $(2\times1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.80000 | 9400 | 0.514993( 37 ) | 0.514983( 39 ) | 0.515004( 39 ) | 0.263709( 47 ) | 0.263690( 48 ) | 0.263729( 48 ) |
| 4.00000 | 10000 | 0.563889( 30 ) | 0.563870( 31 ) | 0.563907( 32 ) | 0.325188( 43 ) | 0.325152( 44 ) | 0.325223( 45 ) |
| **4.04000** | 10000 | 0.572175( 29 ) | 0.572147( 31 ) | 0.572203( 30 ) | 0.336186( 43 ) | 0.336128( 44 ) | 0.336245( 46 ) |
| **4.06000** | 13600 | 0.576144( 47 ) | 0.576080( 44 ) | 0.576209( 51 ) | 0.341558( 77 ) | 0.341413( 68 ) | 0.341703( 87 ) |
| **4.06700** | 13600 | 0.578026( 82 ) | 0.577893( 71 ) | 0.578160( 106 ) | 0.344290( 157 ) | 0.343972( 113 ) | 0.344609( 192 ) |
| **4.07000** | 20800 | 0.578715( 77 ) | 0.578554( 67 ) | 0.578876( 87 ) | 0.345266( 130 ) | 0.344882( 104 ) | 0.345650( 155 ) |
| **4.07252** | 45000 | 0.579456( 52 ) | 0.579259( 44 ) | 0.579653( 59 ) | 0.346370( 88 ) | 0.345897( 70 ) | 0.346843( 106 ) |
| **4.07500** | 29000 | 0.579964( 70 ) | 0.579764( 61 ) | 0.580165( 80 ) | 0.347078( 120 ) | 0.346580( 95 ) | 0.347576( 145 ) |
| **4.08000** | 17000 | 0.581436( 75 ) | 0.581136( 61 ) | 0.581736( 86 ) | 0.349268( 128 ) | 0.348541( 104 ) | 0.349996( 154 ) |
| **4.10000** | 8500 | 0.585340( 38 ) | 0.584932( 36 ) | 0.585747( 43 ) | 0.354712( 76 ) | 0.353715( 56 ) | 0.355709( 90 ) |
| 4.12500 | 8200 | 0.589741( 25 ) | 0.589267( 27 ) | 0.590215( 27 ) | 0.360764( 38 ) | 0.359587( 39 ) | 0.361942( 42 ) |
| 4.15000 | 8200 | 0.593624( 25 ) | 0.593110( 27 ) | 0.594138( 27 ) | 0.366014( 38 ) | 0.364716( 40 ) | 0.367312( 42 ) |
| 4.17500 | 6400 | 0.597333( 26 ) | 0.596784( 27 ) | 0.597881( 30 ) | 0.371019( 40 ) | 0.369630( 39 ) | 0.372408( 46 ) |
| 4.20000 | 10900 | 0.600896( 18 ) | 0.600318( 20 ) | 0.601474( 21 ) | 0.375807( 28 ) | 0.374342( 29 ) | 0.377272( 31 ) |
| 4.30000 | 8700 | 0.613885( 19 ) | 0.613263( 21 ) | 0.614507( 21 ) | 0.393291( 28 ) | 0.391675( 31 ) | 0.394907( 31 ) |
| 4.40000 | 8700 | 0.625551( 17 ) | 0.624897( 20 ) | 0.626204( 19 ) | 0.409065( 26 ) | 0.407329( 29 ) | 0.410802( 28 ) |
| 4.50000 | 8200 | 0.636271( 17 ) | 0.635623( 20 ) | 0.636919( 19 ) | 0.423672( 26 ) | 0.421903( 29 ) | 0.425442( 28 ) |
| 4.60000 | 8200 | 0.646166( 16 ) | 0.645520( 18 ) | 0.646811( 18 ) | 0.437241( 24 ) | 0.435434( 27 ) | 0.439048( 27 ) |
| 4.80000 | 8200 | 0.664088( 15 ) | 0.663430( 18 ) | 0.664745( 17 ) | 0.462089( 23 ) | 0.460215( 27 ) | 0.463963( 26 ) |
| 5.00000 | 10600 | 0.679991( 12 ) | 0.679349( 14 ) | 0.680634( 14 ) | 0.484455( 19 ) | 0.482568( 22 ) | 0.486342( 22 ) |
| 5.20000 | 9000 | 0.694290( 12 ) | 0.693653( 15 ) | 0.694926( 14 ) | 0.504807( 20 ) | 0.502909( 24 ) | 0.506705( 23 ) |
| 5.40000 | 9000 | 0.707207( 12 ) | 0.706597( 14 ) | 0.707817( 14 ) | 0.523416( 19 ) | 0.521539( 22 ) | 0.525293( 21 ) |

Tabelle B.6: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der 2×1-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 16$.

| $\beta$ | $\lvert L \rvert$ | $\chi$ |
|---|---|---|
| 3.80000 | 0.006900( 55 ) | 0.0538( 7 ) |
| 4.00000 | 0.014993( 224 ) | 0.2649( 108 ) |
| **4.04000** | 0.022406( 758 ) | 0.7651( 1255 ) |
| **4.06000** | 0.034619( 1939 ) | 2.3734( 3788 ) |
| **4.06700** | 0.061970( 4863 ) | 5.8674( 1906 ) |
| **4.07000** | 0.071057( 3423 ) | 6.0009( 1989 ) |
| **4.07252** | 0.083591( 2289 ) | 6.0509( 2347 ) |
| **4.07500** | 0.087166( 3186 ) | 6.4101( 3798 ) |
| **4.08000** | 0.112840( 3243 ) | 3.8374( 8600 ) |
| **4.10000** | 0.140669( 1121 ) | 1.3011( 3381 ) |
| 4.12500 | 0.160352( 431 ) | 0.6283( 281 ) |
| 4.15000 | 0.173353( 409 ) | 0.5944( 416 ) |
| 4.17500 | 0.184009( 349 ) | 0.4661( 176 ) |
| 4.20000 | 0.193135( 299 ) | 0.4602( 279 ) |
| 4.30000 | 0.222559( 220 ) | 0.3693( 68 ) |
| 4.40000 | 0.246345( 198 ) | 0.3362( 48 ) |
| 4.50000 | 0.267171( 198 ) | 0.3311( 36 ) |
| 4.60000 | 0.286021( 197 ) | 0.3242( 84 ) |
| 4.80000 | 0.319402( 184 ) | 0.2987( 66 ) |
| 5.00000 | 0.349232( 157 ) | 0.2823( 55 ) |
| 5.20000 | 0.375315( 186 ) | 0.2840( 60 ) |
| 5.40000 | 0.398989( 165 ) | 0.2650( 61 ) |

Tabelle B.7: Erwartungswerte der Plaquette $(1\times1)$, der räumlichen Plaquette $(1\times1)_\sigma$, der zeitlichen Plaquette $(1\times1)_\tau$, des $2{\times}1$-Loops $(2\times1)$, des räumlichen $2{\times}1$-Loops $(2\times1)_\sigma$ und des zeitlichen $2{\times}1$-Loops $(2\times1)_\tau$ der $2{\times}1$-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 24$.

| $\beta$ | Anzahl | $(1\times1)$ | $(1\times1)_\sigma$ | $(1\times1)_\tau$ | $(2\times1)$ | $(2\times1)_\sigma$ | $(2\times1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4.07000** | 18000 | 0.578427( 137 ) | 0.578317( 115 ) | 0.578537( 159 ) | 0.344774( 236 ) | 0.344506( 186 ) | 0.345042( 287 ) |
| **4.07252** | 48200 | 0.579191( 89 ) | 0.579033( 76 ) | 0.579349( 103 ) | 0.345910( 154 ) | 0.345529( 121 ) | 0.346291( 186 ) |
| **4.07500** | 9000 | 0.580137( 119 ) | 0.579904( 100 ) | 0.580369( 135 ) | 0.347369( 205 ) | 0.346799( 162 ) | 0.347939( 249 ) |

Tabelle B.8: Gesamte, räumliche und zeitliche Wirkung der $2{\times}1$-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 24$.

| $\beta$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| **4.07000** | 18000 | 0.906582( 189 ) | 0.906444( 160 ) | 0.906721( 216 ) |
| **4.07252** | 48200 | 0.907667( 124 ) | 0.907467( 107 ) | 0.907866( 141 ) |
| **4.07500** | 9000 | 0.908999( 163 ) | 0.908707( 141 ) | 0.909292( 184 ) |

Tabelle B.9: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der $2{\times}1$-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 24$.

| $\beta$ | $\lvert L\rvert$ | $\chi$ |
|---|---|---|
| **4.07000** | 0.050655( 7965 ) | 5.8727( 7774 ) |
| **4.07252** | 0.068137( 4932 ) | 6.0389( 2273 ) |
| **4.07500** | 0.095076( 6059 ) | 3.7734( 11766 ) |

Tabelle B.10: Erwartungswerte der Plaquette $(1\times1)$, der räumlichen Plaquette $(1\times1)$, der zeitlichen Plaquette $(1\times1)$, des 2×1-Loops $(2\times1)$, des räumlichen 2×1-Loops $(2\times1)$ und des zeitlichen 2×1-Loops $(2\times1)$ der 2×1-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N\sigma = 32$.

| $\beta$ | Anzahl | $(1\times1)$ | $(1\times1)_\sigma$ | $(1\times1)_\tau$ | $(2\times1)$ | $(2\times1)_\sigma$ | $(2\times1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.07280 | 10400 | 0.578457( 23 ) | 0.578415( 20 ) | 0.578499( 25 ) | 0.344630 ( 37 ) | 0.344530( 29 ) | 0.344730( 44 ) |
| **4.07300** | 46800 | 0.579160( 119 ) | 0.579020( 101 ) | 0.579301( 137 ) | 0.345827 ( 204 ) | 0.345486( 161 ) | 0.346167( 248 ) |

Tabelle B.11: Gesamte, raümliche und zeitliche Wirkung der 2×1-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N\sigma = 32$.

| $\beta$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| 4.07280 | 10400 | 0.906657( 32 ) | 0.906604( 28 ) | 0.906710( 35 ) |
| **4.07300** | 46800 | 0.907629( 164 ) | 0.907452( 142 ) | 0.907807( 187 ) |

Tabelle B.12: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der 2×1-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N\sigma = 32$.

| $\beta$ | $\lvert L\rvert$ | $\chi$ |
|---|---|---|
| 4.07280 | 0.018284( 1648 ) | 0.6166( 1187 ) |
| **4.07300** | 0.059602( 7305 ) | 6.2378( 3260 ) |

Tabelle B.13: Gesamte, räumliche und zeitliche Wirkung der 2×1-tree-level-verbesserten Theorie für $N_\tau = 16$ und $N_\sigma = 16$.

| $\beta$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| 4.00000 | 3000 | 0.885631( 37 ) | 0.885636( 40 ) | 0.885627( 38 ) |
| 4.04000 | 2900 | 0.897380( 38 ) | 0.897374( 38 ) | 0.897386( 41 ) |
| 4.07252 | 2900 | 0.906263( 34 ) | 0.906274( 36 ) | 0.906252( 36 ) |
| 4.10000 | 3000 | 0.913487( 55 ) | 0.913499( 60 ) | 0.913474( 52 ) |
| 4.15000 | 2900 | 0.925394( 29 ) | 0.925394( 32 ) | 0.925394( 32 ) |
| 4.20000 | 2900 | 0.936368( 29 ) | 0.936376( 30 ) | 0.936360( 32 ) |
| 4.30000 | 2900 | 0.956001( 25 ) | 0.955999( 27 ) | 0.956003( 27 ) |
| 4.40000 | 2900 | 0.973363( 22 ) | 0.973351( 24 ) | 0.973374( 25 ) |
| 4.50000 | 2900 | 0.989056( 20 ) | 0.989040( 23 ) | 0.989071( 23 ) |
| 4.60000 | 3300 | 1.003501( 19 ) | 1.003492( 22 ) | 1.003511( 22 ) |
| 4.80000 | 2900 | 1.029519( 17 ) | 1.029521( 21 ) | 1.029518( 20 ) |
| 5.00000 | 2900 | 1.052380( 16 ) | 1.052388( 19 ) | 1.052372( 18 ) |
| 5.20000 | 2900 | 1.072802( 16 ) | 1.072809( 19 ) | 1.072795( 18 ) |
| 5.40000 | 2800 | 1.091279( 15 ) | 1.091274( 18 ) | 1.091283( 18 ) |

# Anhang C

# Ergebnisse der Monte-Carlo Simulationen mit tadpole-verbesserter Wirkung

Tabelle C.1: Erwartungswerte der gesamten, räumlichen und zeitlichen Wirkung der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 3$ und $N_\sigma = 12$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.050 | 0.723677 | 10500 | 0.811613( 73 ) | 0.811557( 76 ) | 0.811669( 76 ) |
| 4.100 | 0.732276 | 9000 | 0.829835( 77 ) | 0.829793( 83 ) | 0.829878( 80 ) |
| 4.150 | 0.740594 | 10500 | 0.847606( 78 ) | 0.847491( 83 ) | 0.847722( 80 ) |
| **4.170** | 0.743796 | 10500 | 0.854936( 122 ) | 0.854764( 115 ) | 0.855109( 135 ) |
| **4.180** | 0.745364 | 10000 | 0.859178( 213 ) | 0.858818( 182 ) | 0.859537( 248 ) |
| **4.185** | 0.746139 | 21000 | 0.861913( 229 ) | 0.861368( 197 ) | 0.862458( 262 ) |
| **4.187** | 0.746448 | 22500 | 0.863223( 236 ) | 0.862567( 196 ) | 0.863878( 278 ) |
| **4.190** | 0.746908 | 10500 | 0.865454( 284 ) | 0.864583( 238 ) | 0.866324( 331 ) |
| **4.200** | 0.748426 | 10500 | 0.870446( 136 ) | 0.869200( 122 ) | 0.871692( 156 ) |
| 4.250 | 0.755621 | 10500 | 0.886854( 61 ) | 0.885029( 65 ) | 0.888680( 66 ) |
| 4.300 | 0.762196 | 10500 | 0.900027( 52 ) | 0.898024( 55 ) | 0.902031( 57 ) |
| 4.350 | 0.768209 | 10000 | 0.911634( 49 ) | 0.909501( 55 ) | 0.913767( 53 ) |
| 4.400 | 0.773715 | 10500 | 0.922299( 43 ) | 0.920071( 48 ) | 0.924527( 49 ) |
| 4.500 | 0.783413 | 10500 | 0.941498( 40 ) | 0.939231( 46 ) | 0.943764( 44 ) |
| 4.600 | 0.791665 | 10500 | 0.958606( 38 ) | 0.956323( 44 ) | 0.960889( 43 ) |
| 4.800 | 0.804900 | 10500 | 0.988558( 33 ) | 0.986272( 40 ) | 0.990845( 38 ) |
| 5.000 | 0.815330 | 10500 | 1.014398( 30 ) | 1.012192( 35 ) | 1.016604( 35 ) |
| 5.100 | 0.820015 | 10000 | 1.026107( 31 ) | 1.023937( 37 ) | 1.028276( 36 ) |
| 5.200 | 0.824465 | 10500 | 1.037284( 30 ) | 1.035138( 35 ) | 1.039430( 34 ) |
| 5.400 | 0.832770 | 10500 | 1.057917( 28 ) | 1.055821( 33 ) | 1.060013( 32 ) |

Tabelle C.2: Erwartungswerte der Plaquette (1×1), der räumlichen Plaquette $(1{\times}1)_\sigma$, der zeitlichen Plaquette $(1{\times}1)_\tau$, des 2×1-Loops (2×1), des räumlichen 2×1-Loops $(2{\times}1)_\sigma$ und des zeitlichen 2×1-Loops $(2{\times}1)_\tau$ der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 3$ und $N_\sigma = 12$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | (1×1) | $(1{\times}1)_\sigma$ | $(1{\times}1)_\tau$ | (2×1) | $(2{\times}1)_\sigma$ | $(2{\times}1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.050 | 0.723677 | 10500 | 0.523814( 53 ) | 0.523769( 55 ) | 0.523859( 55 ) | 0.266646( 67 ) | 0.266565( 70 ) | 0.266727( 72 ) |
| 4.100 | 0.732276 | 9000 | 0.536467( 56 ) | 0.536429( 60 ) | 0.536506( 59 ) | 0.282411( 75 ) | 0.282314( 79 ) | 0.282509( 79 ) |
| 4.150 | 0.740594 | 10500 | 0.548845( 57 ) | 0.548747( 60 ) | 0.548942( 59 ) | 0.298319( 81 ) | 0.298111( 81 ) | 0.298527( 87 ) |
| **4.170** | 0.743796 | 10500 | 0.553989( 93 ) | 0.553832( 85 ) | 0.554145( 105 ) | 0.305156( 147 ) | 0.304764( 120 ) | 0.305547( 180 ) |
| **4.180** | 0.745364 | 10000 | 0.557018( 164 ) | 0.556697( 136 ) | 0.557340( 195 ) | 0.309411( 271 ) | 0.308622( 199 ) | 0.310199( 348 ) |
| **4.185** | 0.746139 | 21000 | 0.559006( 176 ) | 0.558519( 147 ) | 0.559493( 207 ) | 0.312323( 292 ) | 0.311129( 214 ) | 0.313516( 371 ) |
| **4.187** | 0.746448 | 22500 | 0.559970( 182 ) | 0.559380( 146 ) | 0.560559( 220 ) | 0.313779( 304 ) | 0.312318( 217 ) | 0.315240( 395 ) |
| **4.190** | 0.746908 | 10500 | 0.561629( 219 ) | 0.560843( 177 ) | 0.562416( 262 ) | 0.316368( 366 ) | 0.314395( 262 ) | 0.318340( 472 ) |
| **4.200** | 0.748426 | 10500 | 0.565258( 104 ) | 0.564134( 90 ) | 0.566382( 122 ) | 0.321750( 172 ) | 0.318932( 122 ) | 0.324568( 219 ) |
| 4.250 | 0.755621 | 10500 | 0.576861( 45 ) | 0.575202( 47 ) | 0.578520( 50 ) | 0.338126( 67 ) | 0.333864( 64 ) | 0.342388( 79 ) |
| 4.300 | 0.762196 | 10500 | 0.586038( 38 ) | 0.584201( 40 ) | 0.587876( 42 ) | 0.350779( 56 ) | 0.345933( 58 ) | 0.355624( 65 ) |
| 4.350 | 0.768209 | 10000 | 0.594075( 36 ) | 0.592112( 40 ) | 0.596038( 39 ) | 0.361786( 53 ) | 0.356534( 57 ) | 0.367038( 59 ) |
| 4.400 | 0.773715 | 10500 | 0.601445( 32 ) | 0.599388( 35 ) | 0.603502( 36 ) | 0.371892( 47 ) | 0.366317( 51 ) | 0.377468( 56 ) |
| 4.500 | 0.783413 | 10500 | 0.614687( 29 ) | 0.612571( 33 ) | 0.616802( 32 ) | 0.390047( 43 ) | 0.384127( 49 ) | 0.395967( 49 ) |
| 4.600 | 0.791665 | 10500 | 0.626492( 28 ) | 0.624345( 32 ) | 0.628640( 31 ) | 0.406350( 42 ) | 0.400192( 47 ) | 0.412507( 48 ) |
| 4.800 | 0.804900 | 10500 | 0.647200( 24 ) | 0.645026( 29 ) | 0.649375( 28 ) | 0.435173( 38 ) | 0.428715( 44 ) | 0.441631( 44 ) |
| 5.000 | 0.815330 | 10500 | 0.665113( 22 ) | 0.662987( 25 ) | 0.667238( 26 ) | 0.460448( 35 ) | 0.453912( 40 ) | 0.466984( 41 ) |
| 5.100 | 0.820015 | 10000 | 0.673223( 23 ) | 0.671118( 27 ) | 0.675328( 26 ) | 0.471992( 36 ) | 0.465405( 42 ) | 0.478579( 42 ) |
| 5.200 | 0.824465 | 10500 | 0.680966( 22 ) | 0.678876( 26 ) | 0.683055( 25 ) | 0.483095( 34 ) | 0.476485( 41 ) | 0.489705( 40 ) |
| 5.400 | 0.832770 | 10500 | 0.695241( 20 ) | 0.693189( 24 ) | 0.697293( 23 ) | 0.503750( 33 ) | 0.497134( 39 ) | 0.510366( 39 ) |

Tabelle C.3: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 3$ und $N_\sigma = 12$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | $\|L\|$ | $\chi$ |
|---|---|---|---|
| 4.050 | 0.723677 | 0.016904( 151 ) | 0.1367( 32 ) |
| 4.100 | 0.732276 | 0.021224( 257 ) | 0.2161( 68 ) |
| 4.150 | 0.740594 | 0.032701( 1072 ) | 0.7071( 621 ) |
| **4.170** | 0.743796 | 0.048291( 2286 ) | 2.0433( 2394 ) |
| **4.180** | 0.745364 | 0.073118( 5149 ) | 4.5873( 3614 ) |
| **4.185** | 0.746139 | 0.096206( 4794 ) | 5.8444( 1120 ) |
| **4.187** | 0.746448 | 0.110964( 4950 ) | 6.1847( 1538 ) |
| **4.190** | 0.746908 | 0.139963( 5462 ) | 4.9885( 2283 ) |
| **4.200** | 0.748426 | 0.179250( 2251 ) | 2.0848( 3446 ) |
| 4.250 | 0.755621 | 0.237765( 432 ) | 0.5169( 157 ) |
| 4.300 | 0.762196 | 0.266174( 311 ) | 0.3914( 76 ) |
| 4.350 | 0.768209 | 0.287369( 272 ) | 0.3390( 73 ) |
| 4.400 | 0.773715 | 0.305113( 253 ) | 0.3161( 14 ) |
| 4.500 | 0.783413 | 0.333516( 219 ) | 0.2697( 30 ) |
| 4.600 | 0.791665 | 0.356948( 216 ) | 0.2582( 29 ) |
| 4.800 | 0.804900 | 0.396388( 195 ) | 0.2285( 41 ) |
| 5.000 | 0.815330 | 0.428739( 188 ) | 0.2144( 22 ) |
| 5.100 | 0.820015 | 0.443230( 185 ) | 0.2050( 34 ) |
| 5.200 | 0.824465 | 0.456854( 173 ) | 0.1913( 41 ) |
| 5.400 | 0.832770 | 0.481679( 176 ) | 0.1836( 41 ) |

Tabelle C.4: Gesamte, räumliche und zeitliche Wirkung der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 16$

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.100 | 0.732276 | 8500 | 0.829746( 44 ) | 0.829736( 47 ) | 0.829755( 45 ) |
| 4.300 | 0.762196 | 8100 | 0.893459( 41 ) | 0.893435( 45 ) | 0.893483( 40 ) |
| 4.330 | 0.765867 | 8700 | 0.901513( 56 ) | 0.901474( 51 ) | 0.901552( 60 ) |
| **4.340** | 0.767048 | 8700 | 0.904282( 92 ) | 0.904204( 78 ) | 0.904359( 95 ) |
| **4.345** | 0.767631 | 14000 | 0.905583( 73 ) | 0.905494( 55 ) | 0.905672( 84 ) |
| **4.347** | 0.767863 | 18700 | 0.906427( 83 ) | 0.906281( 69 ) | 0.906573( 93 ) |
| **4.350** | 0.768209 | 44300 | 0.907325( 52 ) | 0.907153( 46 ) | 0.907497( 60 ) |
| **4.353** | 0.768553 | 19500 | 0.908272( 98 ) | 0.908064( 82 ) | 0.908480( 115 ) |
| **4.356** | 0.768895 | 19500 | 0.909185( 76 ) | 0.908942( 64 ) | 0.909429( 95 ) |
| **4.360** | 0.769335 | 8700 | 0.910426( 104 ) | 0.910144( 92 ) | 0.910709( 117 ) |
| 4.370 | 0.770469 | 8700 | 0.913173( 68 ) | 0.912802( 60 ) | 0.913544( 77 ) |
| 4.385 | 0.772113 | 8520 | 0.916854( 37 ) | 0.916426( 38 ) | 0.917283( 41 ) |
| 4.400 | 0.773715 | 8700 | 0.920371( 30 ) | 0.919898( 33 ) | 0.920845( 34 ) |
| 4.425 | 0.776294 | 8700 | 0.925781( 30 ) | 0.925266( 32 ) | 0.926296( 32 ) |
| 4.450 | 0.778766 | 7900 | 0.930909( 30 ) | 0.930347( 32 ) | 0.931471( 33 ) |
| 4.500 | 0.783413 | 8200 | 0.940532( 28 ) | 0.939920( 30 ) | 0.941145( 30 ) |
| 4.600 | 0.791665 | 8500 | 0.958054( 24 ) | 0.957411( 28 ) | 0.958698( 27 ) |
| 4.800 | 0.804900 | 8500 | 0.988286( 22 ) | 0.987618( 25 ) | 0.988953( 24 ) |
| 5.100 | 0.820015 | 8500 | 1.026076( 19 ) | 1.025438( 23 ) | 1.026713( 21 ) |
| 5.400 | 0.832770 | 8100 | 1.057862( 17 ) | 1.057230( 20 ) | 1.058494( 20 ) |
| 6.000 | 0.854717 | 6400 | 1.109534( 17 ) | 1.108957( 20 ) | 1.110112( 20 ) |

Tabelle C.5: Erwartungswerte der Plaquette $(1{\times}1)$, der räumlichen Plaquette $(1{\times}1)_\sigma$, der zeitlichen Plaquette $(1{\times}1)_\tau$, des $2{\times}1$-Loops $(2{\times}1)$, des räumlichen $2{\times}1$-Loops $(2{\times}1)_\sigma$ und des zeitlichen $2{\times}1$-Loops $(2{\times}1)_\tau$ der $2{\times}1$-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 16$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $(1 \times 1)$ | $(1 \times 1)_\sigma$ | $(1 \times 1)_\tau$ | $(2 \times 1)$ | $(2 \times 1)_\sigma$ | $(2 \times 1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.100 | 0.732276 | 8500 | 0.536391( 32 ) | 0.536382( 34 ) | 0.536399( 33 ) | 0.282242( 42 ) | 0.282220( 45 ) | 0.282265( 43 ) |
| 4.300 | 0.762196 | 8100 | 0.580796( 31 ) | 0.580775( 33 ) | 0.580816( 30 ) | 0.340856( 46 ) | 0.340814( 48 ) | 0.340899( 47 ) |
| **4.330** | 0.765867 | 8700 | 0.586428( 43 ) | 0.586394( 38 ) | 0.586463( 47 ) | 0.348626( 76 ) | 0.348542( 59 ) | 0.348709( 85 ) |
| **4.340** | 0.767048 | 8700 | 0.588381( 81 ) | 0.588312( 59 ) | 0.588450( 98 ) | 0.351397( 140 ) | 0.351222( 101 ) | 0.351573( 180 ) |
| **4.345** | 0.767631 | 14000 | 0.589292( 57 ) | 0.589212( 48 ) | 0.589373( 67 ) | 0.352671( 103 ) | 0.352464( 77 ) | 0.352877( 129 ) |
| **4.347** | 0.767863 | 18700 | 0.589910( 64 ) | 0.589781( 53 ) | 0.590038( 74 ) | 0.353628( 114 ) | 0.353313( 89 ) | 0.353942( 138 ) |
| **4.350** | 0.768209 | 44300 | 0.590552( 41 ) | 0.590399( 35 ) | 0.590705( 48 ) | 0.354581( 73 ) | 0.354196( 57 ) | 0.354966( 90 ) |
| **4.353** | 0.768553 | 19500 | 0.591232( 77 ) | 0.591047( 63 ) | 0.591416( 96 ) | 0.355596( 147 ) | 0.355136( 104 ) | 0.356057( 184 ) |
| **4.356** | 0.768895 | 19500 | 0.591885( 64 ) | 0.591669( 49 ) | 0.592101( 76 ) | 0.356563( 115 ) | 0.356027( 80 ) | 0.357100( 145 ) |
| **4.360** | 0.769335 | 8700 | 0.592774( 81 ) | 0.592522( 70 ) | 0.593025( 94 ) | 0.357879( 145 ) | 0.357247( 113 ) | 0.358510( 177 ) |
| 4.370 | 0.770469 | 8700 | 0.594723( 52 ) | 0.594394( 45 ) | 0.595052( 60 ) | 0.360727( 89 ) | 0.359903( 70 ) | 0.361552( 111 ) |
| 4.385 | 0.772113 | 8520 | 0.597309( 28 ) | 0.596924( 28 ) | 0.597694( 31 ) | 0.364409( 45 ) | 0.363422( 43 ) | 0.365396( 52 ) |
| 4.400 | 0.773715 | 8700 | 0.599771( 23 ) | 0.599345( 24 ) | 0.600198( 25 ) | 0.367891( 35 ) | 0.366793( 36 ) | 0.368989( 40 ) |
| 4.425 | 0.776294 | 8700 | 0.603533( 23 ) | 0.603069( 24 ) | 0.603997( 24 ) | 0.373122( 34 ) | 0.371920( 35 ) | 0.374325( 39 ) |
| 4.450 | 0.778766 | 7900 | 0.607091( 22 ) | 0.606586( 24 ) | 0.607596( 24 ) | 0.378054( 34 ) | 0.376747( 35 ) | 0.379362( 37 ) |
| 4.500 | 0.783413 | 8200 | 0.613756( 20 ) | 0.613204( 22 ) | 0.614307( 22 ) | 0.387291( 30 ) | 0.385847( 33 ) | 0.388735( 33 ) |
| 4.600 | 0.791665 | 8500 | 0.625871( 18 ) | 0.625284( 20 ) | 0.626458( 20 ) | 0.404052( 27 ) | 0.402463( 30 ) | 0.405641( 31 ) |
| 4.800 | 0.804900 | 8500 | 0.646791( 16 ) | 0.646176( 18 ) | 0.647406( 18 ) | 0.433196( 24 ) | 0.431468( 28 ) | 0.434923( 27 ) |
| 5.100 | 0.820015 | 8500 | 0.672994( 14 ) | 0.672393( 17 ) | 0.673595( 15 ) | 0.470267( 22 ) | 0.468473( 26 ) | 0.472061( 24 ) |
| 5.400 | 0.832770 | 8100 | 0.694998( 13 ) | 0.694400( 15 ) | 0.695596( 15 ) | 0.502000( 20 ) | 0.500175( 24 ) | 0.503825( 24 ) |
| 6.000 | 0.854717 | 6400 | 0.730604( 12 ) | 0.730048( 15 ) | 0.731161( 14 ) | 0.554572( 20 ) | 0.552778( 24 ) | 0.556365( 23 ) |

Tabelle C.6: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 16$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | $\|L\|$ | $\chi$ |
|---|---|---|---|
| 4.100 | 0.732276 | 0.007508( 64 ) | 0.0634( 9 ) |
| 4.300 | 0.762196 | 0.018304( 404 ) | 0.4309( 405 ) |
| 4.330 | 0.765867 | 0.029986( 2403 ) | 1.7704( 5091 ) |
| **4.340** | 0.767048 | 0.044495( 4631 ) | 3.5249( 5123 ) |
| **4.345** | 0.767631 | 0.047239( 3641 ) | 4.4362( 4107 ) |
| **4.347** | 0.767863 | 0.062158( 3914 ) | 5.7226( 2659 ) |
| **4.350** | 0.768209 | 0.073385( 2281 ) | 6.0345( 1199 ) |
| **4.353** | 0.768553 | 0.083440( 4730 ) | 6.1508( 3671 ) |
| **4.356** | 0.768895 | 0.092365( 3620 ) | 5.8286( 5453 ) |
| **4.360** | 0.769335 | 0.105705( 3889 ) | 4.1836( 3664 ) |
| 4.370 | 0.770469 | 0.125900( 2304 ) | 2.2770( 5646 ) |
| 4.385 | 0.772113 | 0.142927( 718 ) | 0.9940( 1446 ) |
| 4.400 | 0.773715 | 0.154346( 565 ) | 0.6787( 327 ) |
| 4.425 | 0.776294 | 0.166941( 392 ) | 0.6004( 137 ) |
| 4.450 | 0.778766 | 0.177916( 350 ) | 0.5210( 179 ) |
| 4.500 | 0.783413 | 0.195779( 324 ) | 0.4943( 427 ) |
| 4.600 | 0.791665 | 0.223888( 241 ) | 0.3991( 49 ) |
| 4.800 | 0.804900 | 0.266925( 210 ) | 0.3459( 67 ) |
| 5.100 | 0.820015 | 0.318079( 190 ) | 0.3108( 58 ) |
| 5.400 | 0.832770 | 0.360463( 183 ) | 0.2919( 29 ) |
| 6.000 | 0.854717 | 0.429312( 206 ) | 0.2682( 56 ) |

Tabelle C.7: Erwartungswerte der Plaquette (1×1), der räumlichen Plaquette $(1{\times}1)_\sigma$, der zeitlichen Plaquette $(1{\times}1)_\tau$, des 2×1-Loops (2×1), des räumlichen 2×1-Loops $(2{\times}1)_\sigma$ und des zeitlichen 2×1-Loops $(2{\times}1)_\tau$ der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 24$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $(1 \times 1)$ | $(1 \times 1)_\sigma$ | $(1 \times 1)_\tau$ | $(2 \times 1)$ | $(2 \times 1)_\sigma$ | $(2 \times 1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4.3524** | 0.768484 | 38500 | 0.590909( 60 ) | 0.590766( 49 ) | 0.591052( 71 ) | 0.355056( 109 ) | 0.354697( 82 ) | 0.355415( 135 ) |

Tabelle C.8: Gesamte, räumliche und zeitliche Wirkung der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 24$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **4.3524** | 0.768484 | 38500 | 0.907845( 77 ) | 0.907684( 65 ) | 0.908005( 89 ) |

Tabelle C.9: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 24$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | $\lvert L\rvert$ | $\chi$ |
|---|---|---|---|
| **4.3524** | 0.768484 | 0.068048( 4196 ) | 5.3693( 3839 ) |

Tabelle C.10: Erwartungswerte der Plaquette (1×1), der räumlichen Plaquette $(1{\times}1)_\sigma$, der zeitlichen Plaquette $(1{\times}1)_\tau$, des 2×1-Loops (2×1), des räumlichen 2×1-Loops $(2{\times}1)_\sigma$ und des zeitlichen 2×1-Loops $(2{\times}1)_\tau$ der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 32$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $(1\times1)$ | $(1\times1)_\sigma$ | $(1\times1)_\tau$ | $(2\times1)$ | $(2\times1)_\sigma$ | $(2\times1)_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.3502 | 0.768438 | 23900 | 0.590428( 92 ) | 0.590354( 76 ) | 0.590501( 107 ) | 0.354218( 166 ) | 0.354035( 127 ) | 0.354401( 205 ) |
| **4.3524** | 0.768484 | 59000 | 0.590757( 147 ) | 0.590637( 121 ) | 0.590877( 172 ) | 0.354782( 264 ) | 0.354482( 201 ) | 0.355082( 327 ) |

Tabelle C.11: Erwartungswerte der gesamten, räumlichen und zeitlichen Wirkung der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 32$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.3520 | 0.768438 | 23900 | 0.907220( 117 ) | 0.907137( 99 ) | 0.907302( 134 ) |
| **4.3524** | 0.768484 | 59000 | 0.907651( 187 ) | 0.907515( 159 ) | 0.907786( 216 ) |

Tabelle C.12: Erwartungswerte des Polyakov-Loops und der Suszeptibilität der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 4$ und $N_\sigma = 32$.

| $\beta$ | $u_0^2$ | $\lvert L\rvert$ | $\chi$ |
|---|---|---|---|
| 4.3520 | 0.768438 | 0.034905( 7767 ) | 4.3405( 13387 ) |
| **4.3524** | 0.768484 | 0.056037( 11696 ) | 5.7996( 5637 ) |

Tabelle C.13: Erwartungswerte der gesamten, räumlichen und zeitlichen Wirkung der 2×1-tadpole-verbesserten Theorie für $N_\tau = 16$ und $N_\sigma = 16$

| $\beta$ | $u_0^2$ | Anzahl | $S$ | $S_\sigma$ | $S_\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.0500 | 0.723677 | 2900 | 0.811628( 43 ) | 0.811643( 48 ) | 0.811612( 42 ) |
| 4.1000 | 0.732276 | 3700 | 0.829720( 31 ) | 0.829729( 32 ) | 0.829711( 33 ) |
| 4.1500 | 0.740594 | 2900 | 0.847407( 34 ) | 0.847413( 37 ) | 0.847401( 36 ) |
| 4.1850 | 0.746139 | 3600 | 0.859149( 31 ) | 0.859141( 34 ) | 0.859156( 32 ) |
| 4.2000 | 0.748426 | 2500 | 0.864020( 40 ) | 0.864025( 42 ) | 0.864015( 42 ) |
| 4.2500 | 0.755621 | 3000 | 0.879370( 36 ) | 0.879369( 36 ) | 0.879370( 38 ) |
| 4.3000 | 0.762196 | 3700 | 0.893461( 28 ) | 0.893467( 30 ) | 0.893455( 29 ) |
| 4.3300 | 0.765867 | 2900 | 0.901307( 32 ) | 0.901307( 33 ) | 0.901308( 34 ) |
| 4.3500 | 0.768209 | 3700 | 0.906316( 25 ) | 0.906329( 30 ) | 0.906303( 27 ) |
| 4.3700 | 0.770469 | 3700 | 0.911096( 25 ) | 0.911079( 27 ) | 0.911112( 27 ) |
| 4.3850 | 0.772113 | 2900 | 0.914632( 26 ) | 0.914622( 27 ) | 0.914642( 28 ) |
| 4.4000 | 0.773715 | 3700 | 0.918000( 24 ) | 0.917993( 27 ) | 0.918006( 26 ) |
| 4.4250 | 0.776294 | 2100 | 0.923515( 28 ) | 0.923513( 31 ) | 0.923516( 31 ) |
| 4.4500 | 0.778766 | 2900 | 0.928748( 26 ) | 0.928756( 28 ) | 0.928740( 28 ) |
| 4.5000 | 0.783413 | 3700 | 0.938702( 20 ) | 0.938699( 23 ) | 0.938704( 22 ) |
| 4.6000 | 0.791665 | 3700 | 0.956801( 20 ) | 0.956804( 23 ) | 0.956798( 21 ) |
| 4.8000 | 0.804900 | 3700 | 0.987694( 17 ) | 0.987698( 19 ) | 0.987689( 19 ) |
| 5.1000 | 0.820015 | 3700 | 1.025806( 14 ) | 1.025806( 17 ) | 1.025806( 16 ) |
| 5.4000 | 0.832770 | 2900 | 1.057734( 15 ) | 1.057735( 18 ) | 1.057734( 17 ) |

# Literaturverzeichnis


[1] K.G. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445

[2] H. J. Rothe, *Lattice gauge theories - an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1992).

[3] I. Montvay, G. Münster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge University Press (1994).

[4] J. Engels, F. Karsch und H. Satz, Nucl.Phys. B 205 [FS5] (1982) 239

[5] U. Heller und F. Karsch, Nucl. Phys. B 251 [FS13] (1985) 254

[6] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lütgemeier und B. Petersson, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4169 und Nucl. Phys. B469 (1996) 419

[7] K. Symanzik, Nucl. Phys. B226 (1983) 187 und Nucl. Phys. B226 (1983) 205.

[8] B. Beinlich, F. Karsch und E. Laermann, Nucl. Phys. B462 (1996) 415

[9] P. Hasenfratz und F. Niedermayer, Nucl. Phys. B 414 (1994) 785

[10] T. DeGrand, A. Hasenfratz, P. Hasenfratz und F. Niedermayer, Nucl. Phys. B 454 (1995) 587, 615;
A. Papa, *SU(3) Thermodynamics on Small Computers*, BUTP-96/13 (hep-lat/9605004), May 1996

[11] G.P. Lepage, P.B. Mackenzie, Phys. Rev. D 48, (1993) 2250

[12] A.M. Ferrenberg und R.H. Swendsen, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2635; Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 1195

[13] B. Müller, in: New Aspects of Nuclear Dynamics (1989) 205, *Relativistic Heavy Ion Collisions*, Plenum Press, New York

[14] C.-Y. Wong, *Introduction to High Energy Heavy-Ion Collisions*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1994).

[15] K. Kajantie und H. Kurki-Suonio, Phys. Rev. D 34, 1719 (1986)

[16] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Statistical Physics* (Pergamom, Oxford, 1980), Part , §162

[17] H. Kurki-Suonio, Nucl. Phys. B 255, 231 (1985)

[18] Y. Iwasaki, K. Kanaya, L. Kärkkäinen, K. Rummukainen und T. Yoshie, Phys. Rev. D 49, 3540 (1994)

[19] J.D. Bjorken, Phys. Ref. D 27, 140 (1983)

[20] F. Karsch, Nucl. Phys. B205 (1982) 285

[21] K. Binder, Z. Phys. B - Condensed Matter 43, 119 (1981); K. Binder, Phys. Rev. A 25, 1699 (1982)

[22] B. Grossmann, M.L. Laursen, T. Trappenberg und U.-J. Wiese, Phys. Lett. B 293, 175 (1992)

[23] P. Weisz, Nucl. Phys. B212 (1983) 1; P. Weisz und R. Wohlert, Nucl. Phys. B236 (1984) 397 und Nucl. Phys. B247 (1984) 544; M. Lüscher und P. Weisz, Phys Lett. B158 (1985) 250

[24] B. Beinlich, *Thermodynamik der SU(3) Gittereichtheorie mit verbesserten Wirkungen*, Diplomarbeit, Bi-Theor. Physik, März 1996

[25] M. Lüscher und P. Weisz, Commun. Math. Phys.97 (1985) 59 & Erratum

[26] M. Alford, W. Dimm, G.P. Lepage, G. Hockney und P.B. Mackenzie, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 42 (1995) 787.

[27] N. Cabibbo und E. Marinari, Phys. Lett. B9 (1982) 387

[28] M. Creutz, Phys. Rev. D21 (1980) 2308

[29] A.D. Kennedy and B.J. Pendleton, Phys. Lett. B156 (1985) 393

[30] S.L. Adler, Phys. Rev. D23 (1981), 2901

[31] M. Creutz, Phys. Rev. D36 (1987) 515

[32] A. Cella, G.Curci, A. Viceré und B. Vigna, Phys. Lett. B 333 (1994) 457

[33] Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Yoshié, T. Hoshino, T. Shirakawa, Y. Oyanagi, S. Ichii und T. Kawai, Phys. Rev. D 46 (1992) 4657.

[34] M. Fukugita, M. Okawa und A. Ukawa, Nucl. Phys. B337 (1990) 181

[35] M. Lüscher, K.Symanzik und P. Weisz, Nucl. Phys. B 173 (1980) 365

[36] D.W. Bliss, K. Hornbostel und G.P. Lepage, *The Deconfinement Transition on Coarse Lattices*, SMUHEP-96-05 (hep-lat/9605041), May 1996

[37] Y. Iwasaki und T. Yoshié, Phys. Lett. B 131 (1984) 159;
S. Itoh, Y. Iwasaki und T. Yoshié, Phys. Lett. B 147 (1984) 141

[38] Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Kaneko and T. Yoshié, *Scaling in SU(3) Pure Gauge Theory with a Renormalization Group Improved Action*, UTHEP-348 (hep-lat/9610023), Oktober 1996.

[39] M. Hackel, M. Faber, H. Markum und M. Müller, in: Dynamics of First Order Phase Transitions (1992) 189, *Chiral Interface for QCD with Dynamical Fermions*, World Scientific – Singapore,New Jersey,London, Hong Kong

[40] F. Karsch, B. Beinlich, J. Engels, R. Joswig, E. Laermann, A. Peikert und B. Petersson, *QCD Thermodynamics with Improved Actions*, BI-TP-96-34 (hep-lat/9608047), Aug 1996

[41] B. Beinlich, F. Karsch und A. Peikert, Phys. Lett. B390 (1997) 268

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit mit keinen weiteren als im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Andreas Peikert

# Danksagung

Diese Arbeit wurde unter Anleitung von Prof. Dr. Frithjof Karsch durchgeführt. Ich danke Herrn Karsch für die hervorragende Betreuung meiner Diplomarbeit und seine Bereitschaft, sich jederzeit mit meinen Fragen auseinanderzusetzen und Probleme zu diskutieren. Darüber hinaus möchte ich mich bei allen anderen in der Arbeitsgruppe bedanken, die zu einer angenehmen Atmosphäre beigetragen haben, in der es mir Spaß gemacht hat zu arbeiten.
Besonderer Dank gilt meiner Freundin Anja Finkemeyer und meinen Eltern, die mich während des gesamten Studiums unterstützt haben.