Eichabhängige Korrelationsfunktionen in der Hochtemperaturphase der reinen SU(2)-Gittereichtheorie

Diplomarbeit
an der
Fakultät für Physik
der
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Jörn Rank

31. März 1995

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Schon seit hunderten von Jahren wird versucht, den Aufbau der Materie zu verstehen. Dazu wurden immer wieder Modelle erdacht, die alle bekannten Teilchen als aus Grundbausteinen aufgebaut beschreiben. Diese sollten dann elementar, d.h. unteilbar (griech.: atomos) sein. Ein sehr frühes Modell stammt z.B. von Anaximenes von Milet (ca. 700 v.Chr.), der in den vier Größen Feuer, Wasser, Luft und Erde diese Bausteine sah.

Ab der Mitte des 19. Jahrhunderts häufte sich die Anzahl der von Forschern entdeckten und damals als elementar angenommenen Teilchen. Dimitri Ivanovich Mendeleyev war es , der 1869 durch die Aufstellung des *Periodensystems* Ordnung in die Welt der Wissenschaft brachte. Worauf diese Ordnung basierte, konnte man jedoch erst später mit der Entdeckung des *Elektrons* (Thomson 1897), des *Protons* (Rutherford 1911) und des *Neutrons* (Chadwick 1932) verstehen. Da mit ihnen der Aufbau des Periodensystems sehr gut erklärt werden konnte, gab man sich lange Zeit mit diesen drei Teilchen als *den* Elementarteilchen zufrieden. Im Prinzip mußte man damals schon als viertes Teilchen das *Photon* oder γ-*Quant* ansehen, denn 1905 erklärte Albert Einstein mit dessen Hilfe den photoelektrischen Effekt. Es dauerte aber noch bis zur Akzeptierung der *Quantenmechanik*, wo dem Licht neben seinem Wellen- auch noch Teilchencharakter zuerkannt wurde.

Der Bau und das Betreiben großer Beschleuniger ab der Mitte des 20. Jahrhunderts leitete den nächsten großen Schub in der Entwicklung der Elementarteilchenphysik ein. Die Entdeckung von Teilchen, die sich nicht in das bisherige Erklärungsschema zwängen ließen, nahm in inflationärem Umfang zu, so daß man versuchte, diese neuen Teilchen ähnlich den chemischen Elementen in Klassen mit gleichen Eigenschaften einzuteilen. Dazu schlugen 1964 unabhängig voneinander Murray Gell-Mann und Georg Zweig vor, daß die beobachteten Teilchen selber aus noch kleineren Teilchen aufgebaut sein sollten, für die von Gell-Mann die Bezeichnung *Quarks* eingeführt wurde. Zusammen mit den sogenannten *Leptonen* bilden diese nach heutigem Wissensstand die Grundbausteine der Materie.

Die Natur hat für die Wechselwirkung (WW) aller dieser Teilchen untereinander vier fundamentale Kräfte vorgesehen:

- **die elektromagnetische Kraft**: Sie wirkt auf alle elektrisch geladenen Teilchen und wird in der quantisierten Theorie – der *Quantenelektrodynamik* (QED) – durch Photonen übermittelt. Da das Potential einer Punktladung mit 1/r abfällt, besitzt die elektromagnetische Kraft eine unendliche Reichweite.

  Typische Beispiele für das Auftreten elektromagnetischer Wechselwirkungen sind Coulomb-Streuung oder der Zusammenhalt von Atomen und Molekülen.

- **die Gravitation**: Ebenso wie die elektromagnetische Kraft ist die Gravitation schon seit der klassischen Physik bekannt. Auch sie ist unendlich reichweitig. Die Gravitationskraft zwischen zwei Elementarteilchen ist jedoch gegenüber den anderen drei Kräften bei genügend kleinen Abständen vernachlässigbar klein und muß daher in der Elementarteilchenphysik nicht berücksichtigt werden. Dies ist von enormem Vorteil, da es bislang noch nicht gelungen ist, die von Einstein entwickelte *allgemeine Relativitätstheorie*, die zur Beschreibung der Gravitation dient, in eine *quantisierte Feldtheorie* umzuformulieren. Dies liegt in erster Linie daran, daß die Einsteinschen Feldgleichungen im Gegensatz zu den der QED zugrunde liegenden *Maxwellschen Gleichungen* wegen der Krümmung von Raum und Zeit nicht linear sind. Auch ist es bislang noch nicht gelungen, das Feldquant der Gravitation experimentell nachzuweisen, da das sog. *Graviton*, sofern es denn überhaupt existiert, nur von extrem kurzer Lebensdauer sein kann.

  Beispiele für die Wirkungsweise der Gravitation sind die Bahn des Mondes um die Erde, der Zusammenhalt von Masse in Planeten, Sternen oder Galaxien oder einfach ein vom Baum fallender Apfel.

- **die schwache Kraft**: Im Gegensatz zu den beiden oben erwähnten Kräften liegt die Reichweite der schwachen Kraft nur bei ca. 10^{-18} m. Dies ist einer der Gründe, warum sie erst so spät endeckt wurde. Die Feldquanten der schwachen WW sind die elektrisch geladenen W^+- und W^--Bosonen und das neutrale Z^0-Boson.

  Eine der bekanntesten Reaktionen, die auf der schwachen Kraft basiert, ist der radioaktive β-Zerfall $n \to p + e^- + \overline{\nu}_e$. Da Enrico Fermi 1934 diese Reaktion durch eine 4-Punkt-WW zunächst zufriedenstellend beschreiben konnte, gab es zum damaligen Zeitpunkt keinen Anlaß, hierfür eine Feldtheorie zu formulieren, da ja die gesamte Reaktion an einem Punkt stattfinden sollte.

Insbesondere bedurfte es nach dieser Theorie keiner Quanten, die die WW eines Elementarteilchens mit einem anderen vermitteln sollten. Doch schon bald erkannte man, daß Fermis Theorie fehlerhaft sein mußte, da sie z.B. nicht renormierbar ist. Man gelangte zunächst zu einem Modell mit sog. *intermediären Vektor-Bosonen* (IVB), die später als *W-Bosonen* bezeichnet wurden. Jedoch auch dieses erwies sich als unvollständig, da es nicht imstande ist, Prozesse wie den inversen Myon-Zerfall $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ zu beschreiben. Dies liegt letztlich daran, daß die IVB-Theorie nicht renormierbar ist. Außerdem fehlte zur korrekten Beschreibung einiger Prozesse ein neutrales Eichboson. Alle diese Probleme wurden in den sechziger Jahren durch das sog. *Standardmodell* der elektroschwachen Wechselwirkungen (Glashow 1961, Weinberg 1967 und Salam 1968) gelöst. Es vereinigt die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung und war die erste *vereinheitlichende Theorie*. Leider ist es bis heute noch nicht gelungen, eine Theorie zu formulieren, die die elektroschwache mit der starken WW verknüpft. Eine solche *große vereinheitlichende Theorie* (grand unified theory, GUT) war und ist eines der großen Ziele der theoretischen Elementarteilchenphysik.

- **die starke Kraft**: Sie wirkt nur auf Quarks, d.h. auf Teilchen, die *Farbladung* tragen. Bei den heutzutage in Betrieb befindlichen Teilchen-Beschleunigern geht man von der Existenz sechs verschiedener Quarks (6 versch. *Flavours*) aus. Die Quanten, die die starke WW übertragen, sind die *Gluonen*. Diese tragen ebenfalls Farbladung, wodurch sie befähigt sind, auch untereinander in WW zu treten. Dies stellt *den* entscheidenden Unterschied zur QED dar, bei der die Photonen zwar die WW zwischen elektrisch geladenen Teilchen vermitteln, selber jedoch ungeladen sind, wodurch eine Photon-Photon-WW verhindert wird. Als Folge der Gluon-WW treten in der QCD, der *Quantenchromodynamik*, Phänomene wie *Quark-Confinement* oder *asymptotische Freiheit auf*. Knapp formuliert bedeutet Confinement, daß es Quarks nur in gebundenen, farbneutralen Zuständen – den *Hadronen* - geben kann, während asymptotische Freiheit meint, daß die Quarks bei genügend kleinem Abstand nichts mehr voneinander spüren, sich also wie freie Teilchen verhalten.

  Der mathematische Grund für die Selbstwechselwirkung der Gluonen liegt in der die Theorie beschreibenden *Symmetriegruppe*: Während die QED eine $U(1)$-Eichsymmetrie besitzt, also durch eine abelsche Gruppe beschrieben werden kann, ist die QCD eine $SU(N_c)$-Eichtheorie. Für $N_c \geq 2$ liegt der QCD also eine nicht kommutative Gruppe zugrunde. Mit N_c wird die Anzahl der unterschiedlichen Farbladungen bezeichnet. In der die Natur beschreibenden Physik ist $N_c = 3$. Es ist aber auch von großem theoretischen Interesse, sich auf den Fall $N_c = 2$ zu konzentrieren, da bereits hier die charakteristischen Eigenschaften der QCD (d.h. Confinement, asymptotische Freiheit) auftreten. Da die einfachere Struktur der $SU(2)$ es bei numerischen Simulationen ermöglicht, bei gleicher Rechenleistung zu genaueren Ergebnissen zu gelangen, als dies für

$SU(3)$-Rechnungen möglich ist, kann man so schneller auf neue Erkenntnisse stoßen, die man dann für die $SU(3)$ nachprüfen kann.

Diese Arbeit befaßt sich mit QCD bei hohen Temperaturen. Ein charakteristisches Merkmal für die Temperaturabhängigkeit der Theorie ist der *Deconfinement-Phasenübergang*, der an einer *kritischen Temperatur* T_c einsetzt. Oberhalb von T_c geht das System in die *Plasma-Phase* über. Diese ist charakterisiert durch das Auftreten ungebundener Quarks und Gluonen. Man sagt, die Teilchen seien „deconfined". Ein weiteres Merkmal der Plasma-Phase ist das *Abschirmverhalten*, das (statische) Quarks durch die sie umgebende Materie erfahren. Hierdurch werden Abschirmlängen definiert, die man aus dem *Infrarot-Verhalten* des *Gluon-Propagators* bestimmen kann. Als Folge dieser *Debye-Abschirmung* fällt das Potential zwischen statischen Quarks exponentiell mit dem Abstand ab. Über die zeitliche Komponente des Gluon-Propagators definiert man als inverse Abschirmlänge die *elektrische Masse* m_e. Diese ist in niedrigster Ordnung *Störungstheorie* sehr genau bestimmt worden. Probleme hingegen bereitet die *magnetische Masse* m_m, die man aus den räumlichen Komponenten des Gluon-Propagators erhält. Es gibt eine seit Jahren andauernde Diskussion bezüglich der Größenordnung von m_m. Da es hierzu bislang nur Vermutungen von Seiten der Störungstheorie gibt, ist es besonders interessant, sich diesem Problem auch mit nicht-störungstheoretischen Mitteln, d.h. mit *numerischen Gitterrechnungen* zu nähern. Wegen der *Eichabhängigkeit* des Gluon-Propagators müssen diese Rechnungen in einer festen Eichung durchgeführt werden. In dieser Arbeit wurde hierfür die *Landau-Eichung* gewählt.

In den Kapiteln zwei bis vier werden zunächst die allgemeinen theoretischen Grundkenntnisse zum Verständnis der Gittereichtheorie zusammengefaßt. Dazu werden in Kapitel 2 die relevanten *Kontinuumsgleichungen* zusammengetragen, die in Kapitel 3 *diskretisiert* werden. Kapitel 4 befaßt sich mit dem *Kontinuumslimes*, der den Zusammenhang zwischen der Gitter- und der Kontinuumsformulierung der QCD beschreibt. In Kapitel 5 werden die Hochtemperatureigenschaften der QCD diskutiert und alle numerisch bestimmten Observablen erläutert, insbesondere der Gluon-Propagator und *Polyakov-Loop Korrelationsfunktionen*, aus denen durch ein Quark-Gluon Plasma hervorgerufene Abschirm- oder *Screening-Effekte* bestimmt werden. Im sechsten Kapitel werden verschiedene numerische Algorithmen beschreiben und verglichen, mit denen auf dem Gitter die *Landau-Eichung* fixiert werden kann. Kapitel 7 skizziert den Ablauf der numerischen Rechnungen, ist also eine Kurzbeschreibung der benutzten *Fortran-Programme*. Die Auswertung der erzielten Ergebnisse ist schließlich in Kapitel 8 zusammengetragen und wird dort ausführlich diskutiert.

Die Anhänge befassen sich zum einen mit einigen grundlegenden Themen, die zum Verständnis dieser Arbeit zwar notwendig sind, jedoch als allgemein bekannt vorausgesetzt werden können. Sie sind daher und zur besseren Lesbarkeit der eigentlichen Arbeit von dieser getrennt angegeben. Zum anderen sind in Anhang F die gemessenen Werte tabellarisch aufgelistet.

Kapitel 2

Kontinuumstheorie

2.1 Die Lagrangedichte der starken Wechselwirkung

Wenn man Elementarteilchenphysik bei nicht zu hohen Energien und nicht zu kleinen Abständen theoretisch betreibt, reicht es, lediglich die starke Wechselwirkung zu berücksichtigen, da diese dann deutlich stärker ist als die elektroschwache Kraft oder die Gravitation.

Wir betrachten zunächst ein System von N_f freien, d.h. nicht wechselwirkenden Quarks. N_f gibt die Anzahl der verschiedenen Flavour-Freiheitsgrade an und ist in der QCD sechs. Die *freien Dirac-Gleichungen* im Minkowski-Raum lauten

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m_f)_{\alpha\beta} \psi_\beta^f(x) = 0 \qquad \forall f = 1, \ldots, N_f. \tag{2.1}$$

$\alpha, \beta = 1, \ldots, N_c$ bezeichnen den Farbindex. In der QCD gibt es drei verschiedene *Farbladungen*, die i.a. mit rot, grün und blau bezeichnet werden. Die ψ_β^f kennzeichnen vierkomponentige Spinoren, die die Information über die Fermionen, d.h. über die Quarks enthalten. Die γ_μ sind die sogenannten *Dirac-Matrizen.* Dies sind 4×4-Matrizen, die der Antivertauschungsrelation $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ genügen.

Die Bewegungsgleichungen (2.1) für ψ und die analogen Gleichungen für $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ erhält man durch unabhängige Variation des Wirkungsfunktionals

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int \mathrm{d}^4 x \, \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_\alpha^f(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_f)_{\alpha\beta} \, \psi_\beta^f(x) \tag{2.2}$$

nach den Feldern ψ^f_α und $\bar\psi^f_\alpha$.

Die Wirkung (2.2) ist invariant unter einer *globalen $SU(N_c)$ Eichtransformation*

$$\begin{array}{l}\psi^f(x) \to G\,\psi^f(x) \\ \bar\psi^f(x) \to \bar\psi^f(x)\,G^{-1}\end{array} \qquad \text{mit } G \in SU(N_c)\ . \tag{2.3}$$

Hier ist $\psi^f(x) = \begin{pmatrix} \psi^f_1(x) \\ \vdots \\ \psi^f_{N_c}(x) \end{pmatrix}$ und $\bar\psi^f(x) = \left(\bar\psi^f_1(x), \ldots, \bar\psi^f_{N_c}(x)\right)$.

Um eine *lokale* Theorie zu erhalten, d.h. um die Wirkung (2.2) invariant unter einer lokalen $SU(N_c)$ Eichtransformation (s.u., (2.8) und (2.9)) zu machen, muß man als nächstes die gewöhnliche Vierer-Ableitung $\partial^\mu \delta_{\alpha\beta}$ durch die *kovariante Ableitung*

$$D^\mu_{\alpha\beta} = \partial^\mu \delta_{\alpha\beta} + ig_0 (T^a A^\mu_a(x))_{\alpha\beta}\ . \tag{2.4}$$

ersetzen. g_0 ist die dimensionslose, *nackte Kopplungskonstante*. Die T^a sind die (N_c^2-1) *Generatoren der Gruppe $SU(N_c)$ in der Fundamentaldarstellung*. Für die $SU(2)$ sind dies die *Pauli-Matrizen* ($T^a = \frac{\sigma^a}{2}$, $a = 1, 2, 3$, siehe Gleichung (3.30)), für die $SU(3)$ die *Gell-Mann-Matrizen* ($T^a = \frac{\lambda^a}{2}$, $a = 1, \ldots, 8$). Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen $\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c$. Mit f^{abc} $(a, b, c = 1, \ldots, N_c^2-1)$ werden die *Strukturkonstanten* der Gruppe und mit A^a_μ die *bosonischen Eichfelder* bezeichnet.

Fügt man der Wirkung noch die freie Energie der Eichfelder zu, so erhält man

$$S[A^a_\mu, \psi, \bar\psi] = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(A^a_\mu, \psi, \bar\psi)\ . \tag{2.5}$$

$\mathcal{L}$ ist die *Lagrangedichte* der betrachteten Theorie. Sie setzt sich zusammen aus einem rein gluonischen Anteil $\mathcal{L}_G(A^a_\mu)$ und einem die fermionischen Felder enthaltenden Teil $\mathcal{L}_F(A^a_\mu, \psi, \bar\psi)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A^a_\mu, \psi, \bar\psi) &= \mathcal{L}_G(A^a_\mu) + \mathcal{L}_F(A^a_\mu, \psi, \bar\psi) \\ &= -\frac{1}{4}\, F^a_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}_a(x) + \sum_{f=1}^{N_f} \bar\psi^f_\alpha(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m_f)_{\alpha\beta}\, \psi^f_\beta(x)\end{aligned} \tag{2.6}$$

$F^{\mu\nu}_a(x)$ bezeichnet den *gluonischen Feldstärketensor*:

$$F^{\mu\nu}_a(x) = \partial^\mu A^\nu_a(x) - \partial^\nu A^\mu_a(x) - g_0 f_{abc}\, A^\mu_b(x) A^\nu_c(x)\ . \tag{2.7}$$

Der dritte Summand des gluonischen Feldstärketensors ist verantwortlich für die *Selbstwechselwirkung der Gluonen*. Dies ist *der* entscheidende Unterschied zwischen einer nichtabelschen Feldtheorie und der QED, die wegen ihrer zugrunde liegenden abelschen Eichgruppe *U(1)* eine Wechselwirkung der Photonen untereinander ausschließt. Für den Fall der $SU(N_c)$ Eichtheorie ist eine Wechselwirkung sowohl von drei als auch von vier Gluonen miteinander möglich. Es ist deshalb auch von theoretischem Interesse, Systeme zu betrachten, die auf die Dynamik der Gluonen reduziert sind. In diesem Fall spricht man von *reiner Eichtheorie*. Auf diese wird in Abschnitt 2.3.2 eingegangen.

Die Lagrangedichte (2.6) und somit die Wirkung (2.5) ist jetzt unter einer gleichzeitigen lokalen $SU(N_c)$ Eichtransformation sowohl von den fermionischen Feldern

$$\begin{array}{l} \psi^f(x) \to G(x)\,\psi^f(x) \\ \bar{\psi}^f(x) \to \bar{\psi}^f(x)\,G^{-1}(x) \end{array} \quad \text{mit } G(x) \in SU(N_c) \quad \forall x = (t, \vec{x}) \tag{2.8}$$

als auch von den bosonischen Eichfeldern

$$A_\mu(x) \quad \to \quad G(x)\,A_\mu(x)\,G^{-1}(x) - \frac{i}{g_0} G(x)\,\partial_\mu G^{-1}(x) \tag{2.9}$$

$$\text{mit} \quad A_\mu(x) \quad \equiv \quad T^a A^a_\mu(x) \tag{2.10}$$

invariant. Mittels der sog. *minimalen Substitution* (2.4) ist es also gelungen, die Theorie lokal eichinvariant zu gestalten. Ferner werden auf diese Weise automatisch die Eichbosonen eingeführt, die die Wechselwirkung zwischen den Quarks vermitteln.

Der nächste Schritt in der Entwicklung der Theorie besteht darin, aus den Feldern $\psi, \bar{\psi}$ und A Operatoren zu machen. Um diese zu quantisieren, könnte man die *kanonischen (Anti-)Vertauschungsrelationen* einführen, was auch als *zweite Quantisierung* bezeichnet wird. Wir wollen die Feldtheorie jedoch mit der aus der Quantenmechanik bekannten Pfadintegral Methode (siehe Anhang A) quantisieren.

2.2 Die Pfadintegralformulierung von Feldtheorien

In einer Feldtheorie behandelt man Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden, nämlich die Felder an jedem Raumpunkt $\vec{x}$. Zur Vereinfachung betrachten wir eine skalare Feldtheorie, die durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 - \frac{g}{4!}\phi(x)^4 \tag{2.11}$$

und die Wirkung $S[\phi] = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(\phi)$ gegeben sein soll. Damit berechnet man die *Vakuum-Vakuum Übergangsamplitude* zu

$$\langle \Omega | \Omega \rangle \equiv Z \equiv \int \mathcal{D}\phi \ \exp iS[\phi] \ . \tag{2.12}$$

Hierbei ist $\mathcal{D}\phi = \prod_{\vec{x}} \mathcal{D}\phi(t,\vec{x})$, und jedes Pfadintegralmaß $\mathcal{D}\phi(t,\vec{x})$ ist im Sinne von (A.17) zu verstehen, d.h.

$$\int \mathcal{D}\phi(t,\vec{x}) \ \ldots \ \sim \ \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\phi(t_1,\vec{x}) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\phi(t_{N-1},\vec{x}) \ \ldots \ . \tag{2.13}$$

n-Punkt Funktionen berechnet man aus

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\mathrm{T}\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\right)|\Omega\rangle \ &\equiv \ G(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &\equiv \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi \ \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp\{iS[\phi]\} \ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

T bezeichnet den *Zeitordnungsoperator*. Er ist für bosonische Felder definiert durch

$$\mathrm{T}\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\right) = \begin{cases} \phi(x_1)\phi(x_2) & \text{falls } t_1 \le t_2 \\ \phi(x_2)\phi(x_1) & \text{falls } t_1 > t_2 \end{cases} \ . \tag{2.15}$$

Für fermionische Felder ist bei Vertauschung ein Minuszeichen einzuführen.

Wir wollen jetzt die Pfadintegralformulierung auf die Theorie der starken Wechselwirkung anwenden.

Mit $\mathcal{O}(A^a_\mu,\psi,\bar\psi)$ soll ein Operator bezeichnet werden, der aus einer zeitlich geordneten Kombination der Operatoren A^a_μ, ψ und $\bar\psi$ bestehen soll. Dann ist

$$\langle\Omega|\mathcal{O}(A^a_\mu,\psi,\bar\psi)|\Omega\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi \ \mathcal{O}(A^a_\mu,\psi,\bar\psi)\exp\left\{iS[A^a_\mu,\psi,\bar\psi]\right\} \ . \tag{2.16}$$

$S[A^a_\mu,\psi,\bar\psi]$ ist die in Gleichung (2.5) angegebene Wirkung, und Z ist die Verallgemeinerung von (2.12), d.h.

$$Z = \int \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi \ \exp\left\{iS[A^a_\mu,\psi,\bar\psi]\right\} \ . \tag{2.17}$$

2.3 Quantenchromodynamik bei endlicher Temperatur

2.3.1 Einführung der Temperatur

Um die Temperatur einzuführen, wird die Zeit mittels der sog. *Wick Rotation* analytisch in die komplexe Ebene fortgesetzt:

$$t \to |t|e^{-i\theta} \ . \tag{2.18}$$

Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ erhält man die *Euklidische Formulierung* der betrachteten Feldtheorie. In kovarianter Schreibweise gilt dann

$$t = x^0 \to -ix_4 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \partial_0 \to +i\partial_4 \ . \tag{2.19}$$

Zusätzlich ersetzt man

$$A^0 \to iA_4 \ , \tag{2.20}$$

so daß man als Verallgemeinerung von Gleichung (2.16) für den *Ensemble-Mittelwert des Operators $\mathcal{O}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi})$ bei fester Temperatur T*

$$\langle \mathcal{O}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) \rangle_T = \frac{1}{Z^E} \int_{per} \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \ \mathcal{O}(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) \exp\left\{-S^E[A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}]\right\} \tag{2.21}$$

erhält [10] (siehe auch Anhang B, Gleichung (B.13)). Analog folgt aus Gleichung (2.17) für die *großkanonische Zustandssumme*

$$Z^E = \int_{per} \mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \ \exp\left\{-S^E[A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}]\right\} \ . \tag{2.22}$$

Die Zeitordnung der Operatoren A^a_μ, ψ und $\bar{\psi}$ bezieht sich jetzt nicht mehr auf t sondern auf $|t| = \frac{1}{T} \equiv \beta$. Die Randbedingungen für die bosonischen Felder lauten für jeden Raumpunkt $\vec{x}$

$$A^a_\mu(\vec{x}, 0) = A^a_\mu(\vec{x}, \beta) \ . \tag{2.23}$$

Die fermionischen Felder werden aufgrund des *Pauli-Prinzips* antiperiodisch gewählt:

$$\psi(\vec{x}, 0) = -\psi(\vec{x}, \beta) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}(\vec{x}, 0) = -\bar{\psi}(\vec{x}, \beta) \ . \tag{2.24}$$

Die euklidische Version der Lagrangedichte ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^E(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) &= \mathcal{L}^E_G(A^a_\mu) + \mathcal{L}^E_F(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) \\ &= \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}_a(x) + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f_\alpha(x) (\gamma^E_\mu D^\mu + m_f)_{\alpha\beta} \, \psi^f_\beta(x) \ , \end{aligned} \tag{2.25}$$

so daß man als euklidische Wirkung

$$S^E[A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int_0^{\frac{1}{T}} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}\vec{x} \ \mathcal{L}^E(A^a_\mu, \psi, \bar{\psi}) \tag{2.26}$$

erhält. Die Summen über μ und ν laufen jetzt von 1 bis 4. Die γ^E_μ $(\mu = 1, \ldots, 4)$ bezeichnen die euklidischen γ-Matrizen. Man erhält sie aus den alten γ-Matrizen durch $\gamma^E_4 \equiv \gamma^0$ und $\gamma^E_i \equiv -i\gamma^i$, so daß $\{\gamma^E_\mu, \gamma^E_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ gilt.

Sofern im folgenden Text nicht ausdrücklich darauf hingewiesen wird, soll von der euklidischen Formulierung der QCD die Rede sein. Der Index E wird daher ab jetzt weggelassen.

2.3.2 Reine Eichtheorie

Wir betrachten nochmals den fermionischen Teil der euklidischen Wirkung. Setzt man die kovariante Ableitung (2.4) in (2.25) ein, so folgt

$$S_F[A_\mu^a,\psi,\bar\psi] = \int_0^{\frac{1}{T}} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}\vec{x} \; \sum_{f=1}^{N_f} \bar\psi_\alpha^f(x) \left(\gamma^\mu(\partial_\mu + i g_0 T^a A_\mu^a(x)) + m_f\right)_{\alpha\beta} \psi_\beta^f(x) \; . \tag{2.27}$$

Der fermionische Beitrag zur Wirkung ist bilinear in den Feldern ψ und $\bar\psi$. Benutzt man in (2.21) nur Operatoren, die von den fermionischen Felder unabhängig sind, so kann man die Integration über $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi$ ausführen. Es folgt

$$\langle\mathcal{O}(A_\mu^a)\rangle_T = \frac{\int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a \; \mathcal{O}(A_\mu^a) \det K[A_\mu^a] \; \exp\left\{-S_G[A_\mu^a]\right\}}{\int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a \det K[A_\mu^a] \; \exp\left\{-S_G[A_\mu^a]\right\}} \; . \tag{2.28}$$

Die Matrix $K[A_\mu^a]$ ist diskret in den Dirac-, Farb- und Flavour-Indices und kontinuierlich in räumlichen Indices. Sie ist gegeben durch

$$K_{\alpha,f,x;\beta,g,y}[A_\mu^a] \equiv \left(\gamma^\mu(\partial_\mu + i g_0 T^a A_\mu^a(x)) + m_f\right)_{\alpha\beta} \delta_{fg} \, \delta^{(4)}(x-y) \; . \tag{2.29}$$

Man definiert als *effektive Wirkung*

$$S_{eff}[A_\mu^a] \equiv S_G[A_\mu^a] - \ln\det K[A_\mu^a] \; . \tag{2.30}$$

Damit gilt für den Erwartungswert (2.28)

$$\langle\mathcal{O}(A_\mu^a)\rangle_T = \frac{1}{Z}\int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a \; \mathcal{O}(A_\mu^a) \; \exp\left\{-S_{eff}[A_\mu^a]\right\} \tag{2.31}$$

$$\text{mit} \quad Z = \int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a \; \exp\left\{-S_{eff}[A_\mu^a]\right\} \; . \tag{2.32}$$

Die Bedeutung des Terms $\ln\det K[A_\mu^a]$ ist aus der Störungstheorie bekannt. Er beschreibt Feynman-Diagramme geschlossener Fermion-Loops, an denen beliebig viele äußere Gluon-Felder hängen, dient also zur Beschreibung von *Vakuum-Polarisationseffekten*. Möchte man diese vernachlässigen, so muß man

$$\det K[A_\mu^a] = 1 \tag{2.33}$$

setzen. Damit durchgeführte Rechnungen werden in der englischsprachigen Literatur mit *quenched approximation* bezeichnet. Im Rahmen dieser Näherung gilt

$$\langle\mathcal{O}(A_\mu^a)\rangle_T = \frac{1}{Z}\int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a \; \mathcal{O}(A_\mu^a) \; \exp\left\{-S_G[A_\mu^a]\right\} \tag{2.34}$$

$$\text{mit} \quad Z = \int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a \; \exp\left\{-S_G[A_\mu^a]\right\} \; . \tag{2.35}$$

Der Vollständigkeit halber wird nochmals die gluonische Wirkung angegeben:

$$S_G[A^a_\mu] = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{T}} \mathrm{d}\tau \int_V \mathrm{d}\vec{x}\; F^a_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}_a(x)\ . \tag{2.36}$$

Da die Gleichungen (2.34)-(2.36) nur noch von den Feldern $A^a_\mu(x)$ abhängen, spricht man auch von *reiner Eichtheorie.*

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man Quarks mit unendlich großer Masse betrachtet. Dies bewirkt, daß die Quarks *statisch* werden. Die Dynamik des Systems ist somit auf die Gluonen und die durch sie verursachte Selbst-Wechselwirkung beschränkt. Setzt man in (2.25) $m_f \to \infty\ \forall f = 1,\ldots,N_f$ und betrachtet man wiederum nur einen von den Eichfeldern abhängigen Operator $\mathcal{O}(A)$, so faktorisieren die Integrale in (2.21) und (2.22) und man endet wieder bei den Gleichungen (2.34)-(2.36).

2.3.3 Faddeev-Popov Geistfelder

In Abschnitt 2.3.1 wurde für den Erwartungswert eines Operators $\mathcal{O}(A^a_\mu,\psi,\bar\psi)$ der Ausdruck

$$\langle \mathcal{O}(A^a_\mu,\psi,\bar\psi)\rangle_T = \frac{\int_{per}\mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi\ \mathcal{O}(A^a_\mu,\psi,\bar\psi)\exp\left\{-S[A^a_\mu,\psi,\bar\psi]\right\}}{\int_{per}\mathcal{D}A^a_\mu \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi\ \exp\left\{-S[A^a_\mu,\psi,\bar\psi]\right\}} \tag{2.37}$$

hergeleitet. Dieser ist nur im Rahmen der Gitterformulierung (siehe Kapitel 3) mathematisch wohl definiert. In der Kontinuumstheorie kann man leicht zeigen, daß bei der Berechnung von (2.37) Divergenzen auftreten. Diese werden durch die Invarianz der Wirkung $S[A^a_\mu,\psi,\bar\psi]$ unter lokalen Eichtransformationen verursacht.

Die lokalen Transformationsmatrizen $G(x) \in SU(N_c)$ drücke man durch die Generatoren der Gruppe aus, d.h.

$$G(x) = \exp\left\{-i\theta^a(x)T^a\right\}\ . \tag{2.38}$$

Mit $A^\theta_\mu(x)$, $\psi^\theta(x)$ und $\bar\psi^\theta(x)$ sollen die nach den Gleichungen (2.8), (2.9) und (2.38) transformierten Eich- und Fermionfelder bezeichnet werden, wobei bei den Fermionfeldern der Flavourindex f unterdrückt wurde. Integriert man nun über die Eichfreiheitsgrade $\theta^a(x)$, so erhält man, da $S[A^a_\mu,\psi,\bar\psi]$ von $\theta^a(x)$ unabhängig ist, sowohl im Zähler als auch im Nenner von (2.37) den gleichen unendlichen Faktor. Dieser ist eichinvariant und kann eindeutig abgespaltet werden, so daß er bei der Quotientenbildung herausfällt. Die Technik hierzu wurde 1967 von Faddeev und Popov entwickelt:

Man multipliziert Zähler und Nenner von (2.37) jeweils mit einem konstanten Faktor K, der als Gaußsches Integral über eine Funktion $C^a(x)$ dargestellt wird:

$$K = \int \mathcal{D}C^a \, \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, (C^a(x))^2 \right\} \; . \tag{2.39}$$

Als nächstes betrachtet man $C^a(x)$ als Funktional der Eichfelder $A_\mu(x)$. Dabei wird an $C^a[A_\mu(x)]$ die Bedingung gestellt, die *Eichung bereits vollständig festzulegen*, d.h.

$$C^a[A_\mu^\theta(x)] = C^a[A_\mu^{\theta'}(x)] \;\Rightarrow\; \theta(x) = \theta'(x) \; . \tag{2.40}$$

Man führt nun in (2.39) eine Variablentransformation $C^a[A_\mu^\theta(x)] \to \theta^a(x)$ durch:

$$K = \int_{SU(N_c)} \mathcal{D}\theta^a \, \det\left(\frac{\delta C^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^b(y)} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x \, \left(C^a[A_\mu^\theta(x)] \right)^2 \right\} \; . \tag{2.41}$$

Die Integration $\int_{SU(N_c)} \mathcal{D}\theta^a$ soll sich über die gesamte Eichgruppe erstrecken.

Üblicherweise wird in der Literatur als eichfixierender Term

$$C^a[A_\mu(x)] = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial^\mu A_\mu^a(x) \tag{2.42}$$

gewählt. ξ ist der sog. *Eichparameter*, und eine durch (2.42) festgelegte Eichung heißt *kovariant*. Für $\xi = 0, 1$ erhält man zwei sehr häufig benutzte Eichungen:

$$\xi = 0 \quad : \quad \text{Landau-Eichung} \; , \tag{2.43}$$

$$\xi = 1 \quad : \quad \text{Feynman-Eichung} \; . \tag{2.44}$$

Unter Benutzung der Eichinvarianz der Wirkung (bzw. der Lagrangedichte) und nach Vertauschen der Integrationsreihenfolge folgt als Zwischenergebnis z.B. für den Zähler von (2.37)

$$\begin{aligned} &\int_{SU(N_c)} \mathcal{D}\theta^a \int_{per} \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \, \det\left(\frac{\delta C^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^b(y)} \right) \mathcal{O}(A_\mu^a, \psi, \bar{\psi}) \; \cdot \\ &\quad \cdot \, \exp\left\{ -\int \mathrm{d}^4x \, \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2} \left(C^a[A_\mu^\theta(x)] \right)^2 \right) \right\} \; . \end{aligned} \tag{2.45}$$

$\mathcal{L}$ ist die in (2.25) angegebene Lagrangedichte.

Physikalische Observablen sind als (prinzipiell) beobachtbare Größen eichinvariant. Für deren Berechnung kann man daher ohne Einschränkung $\theta(x) = 0$ setzen. Die Integration über $\int_{SU(N_c)} \mathcal{D}\theta^a$ liefert dann einen konstanten Faktor, der bei der Berechnung von (2.37) wieder herausfällt. Im folgenden wird daher $\int_{SU(N_c)} \mathcal{D}\theta^a$ weggelassen.

Man betrachtet jetzt eine infinitesimale Transformation der Eichfelder $A_\mu(x)$. Dazu setzt man in (2.9) für die Transformationsmatrizen statt $G(x) = \exp\{-i\theta^a(x)T^a\}$

die für kleine $\delta\theta^a(x)$ geltende Näherung $G(x) \simeq 1 - i\delta\theta^a(x)T^a$ ein und vernachlässigt alle Terme der Ordnung $(\delta\theta(x))^2$. Es folgt

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu^\theta(x) = A_\mu(x) + \delta A_\mu^\theta(x) \\ \text{mit}\quad \delta A_\mu^\theta(x) &\equiv \delta A_\mu^{\theta a}(x)T^a = \left[\left(f^{abc}A_\mu^c(x) - \frac{1}{g_0}\delta^{ab}\partial_\mu\right)\delta\theta^b(x)\right]T^a \ . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Daher erhält man für die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\delta C^a[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^b(y)}\right) &= \det\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\partial^\mu\frac{\delta A_\mu^{\theta a}(x)}{\delta\theta^b(y)}\right) \\ &\sim \det K^{ab}(x-y,A) \qquad (2.47) \\ \text{mit}\quad K^{ab}(x-y,A) &\equiv \partial_x^\mu\left(\delta^{ab}\partial_\mu^x - g_0 f^{abc}A_\mu^c(x)\right)\delta^{(4)}(x-y) \ . \qquad (2.48) \end{aligned}$$

Der nächste Schritt besteht darin, Gleichung (2.47) durch eine Funktionalintegration über antivertauschende sog. *Geistfelder* $u^a(x)$ und $\bar{u}^a(x)$ auszudrücken:

$$\det K^{ab}(x-y,A) \sim \int\mathcal{D}u^a\mathcal{D}\bar{u}^a \exp\left\{-\int\mathrm{d}^4x\int\mathrm{d}^4y\ \left(\bar{u}^a(x)K^{ab}(x-y,A)u^b(y)\right)\right\} \ . \tag{2.49}$$

Die Geistfelder $u^a(x)$ und $\bar{u}^a(x)$ entsprechen, obwohl sie antivertauschen, *keinen* fermionischen Feldern, da für ihre Randbedingungen Periodizität gilt (vgl. (2.23) und (2.24)):

$$u^a(\vec{x},0) = u^a(\vec{x},\beta) \quad \text{und} \tag{2.50}$$

$$\bar{u}^a(\vec{x},0) = \bar{u}^a(\vec{x},\beta) \ . \tag{2.51}$$

Man erhält somit als Endergebnis:

$$\langle\mathcal{O}(A_\mu^a,\psi,\bar{\psi})\rangle_T = \frac{\int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}u^a\mathcal{D}\bar{u}^a\ \mathcal{O}(A_\mu^a,\psi,\bar{\psi})\exp\left\{-\int_0^\beta\mathrm{d}\tau\int_V\mathrm{d}\vec{x}\ \mathcal{L}_{ges}\right\}}{\int_{per}\mathcal{D}A_\mu^a\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}u^a\mathcal{D}\bar{u}^a\ \exp\left\{-\int_0^\beta\mathrm{d}\tau\int_V\mathrm{d}\vec{x}\ \mathcal{L}_{ges}\right\}} \tag{2.52}$$

mit der vollen Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{ges} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{Geist} \ , \tag{2.53}$$

$$\mathcal{L} \overset{(2.25)}{=} \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x) + \sum_{f=1}^{N_f}\bar{\psi}_\alpha^f(x)(\gamma_\mu D^\mu + m_f)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta^f(x) \ , \tag{2.54}$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2}\left(C^a[A_\mu(x)]\right)^2 = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial^\mu A_\mu^a(x)\right)^2 \ , \tag{2.55}$$

$$\mathcal{L}_{Geist} = \bar{u}^a(x)\partial^\mu\left(\delta^{ab}\partial_\mu - g_0 f^{abc}A_\mu^c(x)\right)u^b(x) \ . \tag{2.56}$$

Bemerkungen zum Faddeev-Popov Verfahren:

1. Geistzustände haben physikalisch keine Bedeutung. Die Wirkung der Felder $u^a(x)$ und $\bar{u}^a(x)$ spiegelt sich im Rahmen der in der Störungstheorie benutzten Feynman-Regeln nur in Propagatoren virtueller Geist-Teilchen und in Geist-Gluon-Vertices wieder. Insbesondere betrachtet man also keine Feynman-Graphen mit äußeren Geist-Linien.

2. Auch der Ausdruck (2.52) ist mathematisch noch nicht wohldefiniert. In störungstheoretischen Rechnungen treten Divergenzen auf, die mittels Regularisierung beseitigt werden müssen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Technik findet man in [7].

3. In einem Artikel von Gribov [27] wird bezweifelt, ob durch die Wahl des Eichfixierungsterms (2.42) bereits die Struktur der Gesamtheit aller Eichpotentiale einer nichtabelschen Eichtheorie festgelegt ist. Für einen Vier-Torus und somit auch für eine euklidische Eichtheorie mit periodischen Randbedingungen konnte in der Tat die Existenz solcher Gribov-Ambiguitäten bewiesen werden [40]. Erste numerische Resultate hierfür wurden bei Untersuchungen des Photon-Propagators in kompakter $U(1)$-Gittereichtheorie erzielt [54].

   Zur Verdeutlichung wollen wir die Landau-Eichung betrachten: $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$. Trotz dieser Eichbedingung kann man immer noch eine Eichtransformation $A_\mu(x) \to A_\mu^\theta(x)$ mit $\theta(x) \equiv \theta^a(x)T^a$ (siehe Gleichung (2.38)) durchführen, so daß weiterhin $\partial^\mu A_\mu^\theta(x) = 0$ gilt. $\theta(x)$ unterliegt dabei nur der Beschränkung, daß
   $$[\partial_\mu \theta(x), A^\mu(x)] + \frac{i}{g_0}\partial_\mu \partial^\mu \theta(x) = 0 \tag{2.57}$$
   gelten muß. Die Frage ist dann, ob man durch eine derartige Eichtransformation in einen topologisch verschiedenen Eich-Sektor – eine sog. *Gribov-Kopie* – geraten kann, und ob eine nach dem Faddeev-Popov Verfahren berechnete Größe von Gribov-Kopien abhängig ist.

Kapitel 3

Gittereichtheorie

3.1 Einführung

Bis zum Jahr 1974 war die Quantenchromodynamik nur als kontinuierliche Theorie formuliert, d.h. die der QCD zugrunde liegenden Quantenfelder waren für *alle* Raum-Zeitpunkte definiert. Physikalische Vorhersagen waren nur in den störungstheoretisch zugänglichen Bereichen möglich. Insbesondere gab es noch keine aus der Theorie stammende Begründung dafür, daß in Experimenten keine freien Quarks nachgewiesen werden konnten, daß also Quarks nur in gebundenen Zuständen – den Hadronen – existieren.

Diese unbefriedigende Situation änderte sich mit der Veröffentlichung der berühmten Arbeit *Confinement of Quarks* von K.G. Wilson [66]. Darin wurde erstmalig gezeigt, wie man eine Eichfeldtheorie auf einem diskreten *Euklidischen Raum-Zeit Gitter* quantisiert, so daß die lokale Eichinvarianz erhalten bleibt. Wilson konnte im Rahmen dieser Gitterformulierung für den Limes starker Kopplung (g_0^2 groß) zeigen, daß das Potential zwischen einem statischen Quark-Antiquark-Paar linear mit dem Abstand wächst.

Mit der Entwicklung moderner Großrechner erhielt die Gittereichtheorie gegen Ende der 70er Jahre einen weiteren Entwicklungsschub. Observablen, die man weder aus Störungstheorie noch aus analytischen Gitter-Rechnungen erhalten konnte, waren jetzt mit Hilfe stochastischer Methoden, die zum Teil bereits aus der statistischen Physik bekannt waren, numerisch bestimmbar. Diese Sparte der Physik erwies sich als so erfolgreich, daß man heutzutage neben der theoretischen Physik und der Experimentalphysik die *numerische Physik* als den dritten großen Zweig dieser Wissenschaft auffassen könnte.

3.2 Gitterregularisierung einer Feldtheorie

Die Pfadintegralformulierung von Greenschen Funktionen ist nur formal zu verstehen, da man es mit einer überabzählbaren Anzahl von Feldfreiheitsgraden und somit von Integrationsmaßen zu tun hat. Mathematisch wohldefiniert sind Pfadintegrale nur für abzählbar viele Freiheitsgrade, so daß man den einfachen Fall mehrdimensionaler Riemannscher Integrale zurückerhält. Es ist daher erforderlich, sowohl die räumlichen Koordinaten als auch die Euklidische Zeitkoordinate zu diskretisieren, d.h. man muß ein Euklidisches Raum-Zeit Gitter einführen. Die fermionischen Felder und die Eichfelder sollen dann nur noch auf den Gitterpunkten bzw. auf den Verbindungslinien benachbarter Gitterpunkte – den sog. *Links* – definiert sein. Im allgemeinen kann man den *Gitterabstand* in räumlicher und zeitlicher Richtung verschieden wählen. Man spricht dann von einem *anisotropen* Gitter. Damit lassen sich thermodynamische Observablen wie z.B. der Druck ausrechnen. Diese Komplikation ist bei den in dieser Arbeit berechneten Größen nicht nötig. Alle hier vorgestellten Rechnungen wurden daher auf einem *isotropen* Gitter ausgeführt, bei dem also der Gitterabstand, der im folgenden mit a bezeichnet werden soll, in allen vier Raum-Zeit Richtungen gleich groß ist.

Die Einführung eines Gitters entspricht dem *Regularisieren mittels Impuls-Cut-Offs* beim aus der Störungstheorie bekannten *Renormalisierungsverfahren.* Man betrachte dazu die *Heisenbergsche Unschärferelation* $\Delta x \Delta p \geq 1$. Da der kleinstmögliche räumliche Abstand durch a gegeben ist, kann für den maximalen Impuls nur $p \sim \frac{1}{a}$ gelten. Der inverse Gitterabstand spielt also die Rolle des Impuls-Cut-Offs. Im Impulsraum berechnete Feynman Integrale, die ursprünglich ultraviolett divergent waren, werden nun endlich, hängen jetzt aber zusätzlich vom Impuls-Cut-Off ab.

Der zweite Schritt im Renormalisierungsprogramm der Störungstheorie besteht darin, sog. renormalisierte Greensche Funktionen zu definieren. Diese sollen bei der Entfernung des Regularisierungsparameters endlich bleiben. Folglich müssen die sog. *nackten* Parameter der Theorie von dem Regularisierungsparameter abhängen.

Für QCD-Berechnungen auf einem Gitter bedeutet das, daß die mittels der kovarianten Ableitung (Gleichung 2.4) eingeführte nackte Kopplungskonstante g_0 eine Funktion des Gitterabstandes a sein muß, d.h. $g_0 = g_0(a)$. Eine auf dem Gitter berechnete Größe Θ_{Gitter} wird außer von a im allgemeinen auch von $g_0(a)$ abhängig sein. Nach dem oben Gesagten soll dann Θ_{Gitter} für den Limes $a \to 0$ gegen den tatsächlichen physikalischen Wert $\Theta_{phys.}$ streben:

$$\Theta_{Gitter}(g_0(a), a) \xrightarrow{a \to 0} \Theta_{phys.} \; . \tag{3.1}$$

In der Praxis kann man den Grenzwert $a \to 0$ nicht durchführen, da numerische Gitterrechnungen nur im Bereich des sog. *Skalenfensters* Sinn machen. Darauf wird in Abschnitt 4.2 näher eingegangen.

3.3 Transformation der Theorie auf ein Raum-Zeit Gitter

Gegeben sei ein 4-dimensionales isotropes Euklidisches Raum-Zeit Gitter Γ mit dem Gitterabstand a. Γ besteht zum einen aus dem diskreten Satz der Gitterpunkte $n_\mu a \equiv (n_1 a, n_2 a, n_3 a, n_4 a)$. Zum anderen enthält Γ die Verbindungslinien (Links) zwischen benachbarten Gitterpunkten. Bezeichnet man mit $\hat{\nu}$ den Gitter-Einheitsvektor in ν-Richtung, so kann man einen gegebenen Link durch die Angabe des Paares „Aufpunkt und Richtung“ $(n_\mu, \hat{\nu})$ bestimmen. Mit N_x, N_y, N_z und N_τ wird die Anzahl der Gitterpunkte in die jeweilige Richtung bezeichnet. Häufig wählt man die Ausdehnungen in die räumlichen Richtungen gleich groß, also $N_x = N_y = N_z \equiv N_\sigma$. Man spricht dann von einem Gitter der Größe $N_\sigma^3 \times N_\tau$. Das hierdurch repräsentierte statistische System hat die räumliche Ausdehnung

$$V = (N_\sigma a)^3 \tag{3.2}$$

und die Temperatur (siehe Gleichung (2.26))

$$T = \frac{1}{N_\tau a} \ . \tag{3.3}$$

Für die Gitterpunkte n_μ gilt

$$0 \le n_i < N_\sigma \quad \text{für } i = 1,2,3 \ \text{ und} \tag{3.4}$$
$$0 \le n_4 < N_\tau \ . \tag{3.5}$$

Um die Kontinuumstheorie zu diskretisieren, muß man die Ersetzungen

$$\begin{aligned} x_\mu &\to n_\mu a \ , \\ \int \mathrm{d}^4 x &\to a^4 \sum_n \ , \\ \psi^f(x) &\to \psi^f(na) \quad (\bar{\psi}^g \text{ analog}) \ , \\ \mathcal{D}\psi^f \mathcal{D}\bar{\psi}^g &\to \prod_{\alpha,n} \mathrm{d}\psi^f_\alpha(na) \prod_{\beta,m} \mathrm{d}\bar{\psi}^g_\beta(ma) \end{aligned} \tag{3.6}$$

durchführen. Die Diskretisierung der Eichfelder $A^a_\mu(x)$ ist etwas komplizierter. Damit auch die Gitterformulierung der QCD lokal eichinvariant ist, muß bei obiger Diskretisierung der Fermionfelder der diskretisierte Eichfeldanteil *zwischen* den Gitterpunkten sensitiv sein. Dies ist auch anschaulich klar, da ja die Eichfelder die Wechselwirkung zwischen den nur noch auf den Gitterpunkten definierten Fermionen übermitteln sollen.

Das jetzt benötigte Hilfsmittel ist das *Schwingersche Linienintegral*. Es ist definiert durch

$$U(x,y)_C = P\,\exp\left\{ig_0 \oint_x^y \mathrm{d}z^\mu\, A_\mu(z)\right\}\ . \tag{3.7}$$

C ist ein Weg, der die Punkte x und y verbindet. P bezeichnet die *Pfadordnung*. Diese ist folgendermaßen definiert: Man unterteile den Weg C in n infinitesimale Wegstücke $\mathrm{d}x_l$. Dazu führe man Raum-Zeit Punkte $x_1,\ldots,x_{n-1}$ ein, die zwischen x und y auf C liegen, so daß $\mathrm{d}x_l = x_l - x_{l-1}$ für $l = 1,\ldots,n$ gilt. Es werden x mit x_0 und y mit x_n identifiziert. Die Wegintegration in (3.7) führt man jetzt in n Schritten aus, wobei auf jedem infinitesimalen Wegstück die Exponentialfunktion durch die beiden ersten Terme der Taylorentwicklung approximiert wird. Man erhält somit für das Schwingersche Linienintegral

$$U(x,y)_C = \lim_{\mathrm{d}x_l\to 0}\left[(1+ig_0A_\mu(x_0)\mathrm{d}x_1^\mu)\ldots(1+ig_0A_\mu(x_{n-1})\mathrm{d}x_n^\mu)\right]\ . \tag{3.8}$$

Man beachte, daß die einzelnen Klammern in Gleichung (3.8) nicht kommutieren.

x und y sollen jetzt benachbarte Gitterpunkte sein, also $x = na,\ y = ma$ und $|n - m| = 1$. Ferner soll C den direkten Weg von x nach y, also den Link zwischen x und y bezeichnen. Dann gilt für genügend kleinen Gitterabstand a

$$U(na,ma) = \exp\left\{ig_0 a A_\mu(na)\right\}\ . \tag{3.9}$$

μ gibt die Orientierung des betrachteten Links im vierdimensionalen Raum an. Da $A_\mu(x) = T^a A_\mu^a(x)$ ein Element der Lieschen Algebra ist, gilt

$$U(na,ma) \in SU(N_c)\ . \tag{3.10}$$

Aus (3.9) läßt sich auch sofort eine weitere wichtige Eigenschaft ableiten. Es gilt

$$U(na,ma) = U^\dagger(ma,na)\ . \tag{3.11}$$

Als nächstes wollen wir zu jeder dimensionsbehafteten Größe das dimensionslose, durch einen kleinen Hut gekennzeichnete Gegenstück definieren. Es seien

$$\begin{aligned} \hat\psi^f(n) &= a^{3/2}\psi^f(na) \quad (\hat{\bar\psi}^g \text{ analog})\ ,\\ \hat A_\mu(n) &= aA_\mu(na)\ ,\\ \hat m^f &= a\,m^f\ . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Ableitung wird auf dem Gitter durch Differenzenbildung ersetzt, d.h.

$$\partial_\mu\psi^f(x) \ \rightarrow\ \frac{1}{a^{5/2}}\hat\partial_\mu\hat\psi^f(n) \quad \text{mit} \tag{3.13}$$

$$\hat\partial_\mu\hat\psi^f_\alpha(n) \ =\ \frac{1}{2}\left[\hat\psi^f_\alpha(n+\hat\mu) - \hat\psi^f_\alpha(n-\hat\mu)\right]\ . \tag{3.14}$$

Für die in Gleichung (3.9) definierte sog. *Linkvariable* schreiben wir ab jetzt

$$U_\mu(n) = \exp\left\{ig_0 \hat{A}_\mu(n)\right\} \ . \tag{3.15}$$

Aus Gleichung (2.23) folgt die Periodizitätsbedingung

$$U_\mu(\vec{n}, 0) = U_\mu(\vec{n}, N_\tau) \ . \tag{3.16}$$

Um Oberflächeneffekte zu verringern, die insbesondere bei kleinen Gittern sehr deutlich spürbar würden, werden auch in den räumlichen Richtungen periodische Randbedingungen eingeführt, d.h. man setzt

$$U_\mu(0, y, z, \tau) = U_\mu(N_\sigma, y, z, \tau) \ . \tag{3.17}$$

Für die y- und z-Richtungen gelten analoge Gleichungen.

Bei den Linkvariablen handelt es sich um gerichtete Größen. Daher erhalten sie in graphischen Darstellungen stets einen Pfeil zur Angabe der Orientierung. Dies ist in Bild 3.1 verdeutlicht.

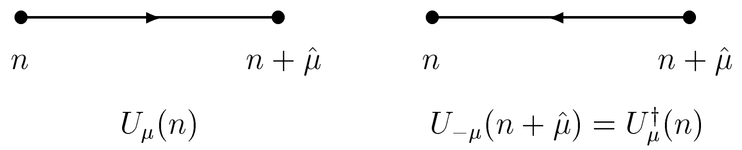

Abbildung 3.1: Die Linkvariablen

Um die Wirkung (2.26) diskret zu formulieren, muß noch der Begriff der *Plaquettevariable* $U_{\mu\nu}(n)$ eingeführt werden. Damit bezeichnet man das orientierte Produkt von Linkvariablen längs einer elementaren Plaquette mit den Eckpunkten $n, n+\hat{\mu}, n+\hat{\nu}, n+\hat{\mu}+\hat{\nu}$, also

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)\, U_\nu(n+\hat{\mu})\, U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})\, U_\nu^\dagger(n) \ . \tag{3.18}$$

Eine Plaquette mit den entsprechenden Größen ist in Bild 3.2 zu sehen.

Damit sind nun alle Größen definiert, um von der Kontinuums-Wirkung (2.26) zu einer möglichen Gitterformulierung der Wirkung zu gelangen. Wie bereits mehrfach erwähnt, soll auch die Gitter-Wirkung lokal eichinvariant sein. Wie eine solche Eichtransformation auf dem Gitter aussieht, wird weiter unten erläutert. Außerdem soll man aus der Gitter-Wirkung für verschwindenden Gitterabstand $a \to 0$ die

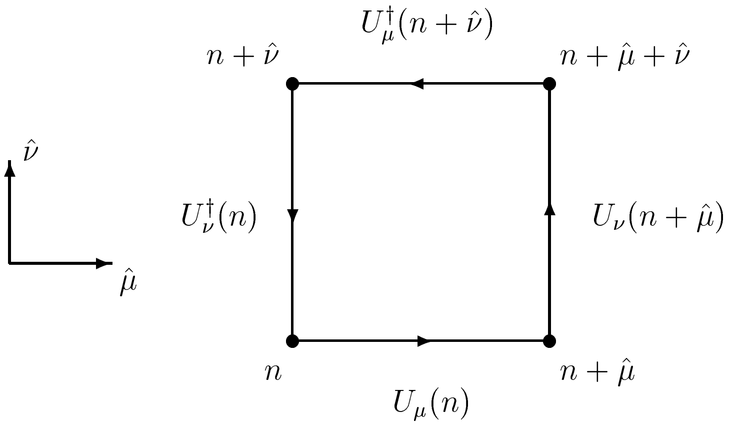

Abbildung 3.2: Die Plaquette

Kontinuums-Wirkung zurückerhalten, die zur Erinnerung noch einmal angegeben wird:

$$\begin{aligned} S^{kont.}[A_\mu,\psi,\bar\psi] &= S_G^{kont.}[A_\mu] + S_F^{kont.}[A_\mu,\psi,\bar\psi] \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{T}}\mathrm{d}\tau\int_V \mathrm{d}\vec{x}\; F^a_{\mu\nu}(x)F_a^{\mu\nu}(x)\; + \\ &\quad \int_0^{\frac{1}{T}}\mathrm{d}\tau\int_V \mathrm{d}\vec{x}\;\sum_{f=1}^{N_f}\bar\psi^f_\alpha(x)(\gamma_\mu D^\mu + m_f)_{\alpha\beta}\,\psi^f_\beta(x)\;. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Da sich diese Arbeit mit reiner Eichtheorie beschäftigt, betrachten wir nur den gluonischen Teil der Wirkung. Es gilt

$$\frac{2N_c}{g_0^2}\left[1-\frac{1}{N_c}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}(n)\right] = \frac{1}{4}\,a^4 F^b_{\mu\nu}(na)F^b_{\mu\nu}(na) + O(a^6)\;. \tag{3.20}$$

Benutzt man

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{U_{\mu\nu}(n)+U^\dagger_{\mu\nu}(n)\right\}\;, \tag{3.21}$$

so gelangt man zu der von Wilson [66] vorgeschlagenen sog. *Plaquette-Wirkung* für die rein gluonische Wirkung:

$$S_G^{diskr.}[U_\mu] = \beta\sum_n\sum_{1\le\mu<\nu\le 4}\left[1-\frac{1}{2N_c}\mathrm{Tr}\left\{U_{\mu\nu}(n)+U^\dagger_{\mu\nu}(n)\right\}\right]\;. \tag{3.22}$$

Hierbei wird die in der Literatur übliche Definition

$$\beta \equiv \frac{2N_c}{g_0^2} \tag{3.23}$$

benutzt, die nicht mit der auf Seite 15 eingeführten gleichnamigen Abkürzung für die inverse Temperatur verwechselt werden sollte.

Nach Gleichung (3.20) gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} S_G^{diskr.}[U_\mu] &= S_G^{kont.}[A_\mu] + O(a^2) \\ \Rightarrow \quad \lim_{a\to 0} S_G^{diskr.}[U_\mu] &= S_G^{kont.}[A_\mu] \; . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Die gluonische Wirkung hat aber nicht nur den richtigen Kontinuumslimes, sie bleibt auch unter lokalen Transformationen

$$\begin{array}{lcl} U_\mu(n) & \to & G(n)\,U_\mu(n)\,G^{-1}(n+\hat\mu) \\ U_\mu^\dagger(n) & \to & G(n+\hat\mu)\,U_\mu^\dagger(n)\,G^{-1}(n) \end{array} \quad \text{mit} \quad G(n) \in SU(N_c)\;\forall\, n \in \Gamma \tag{3.25}$$

unverändert. Gleichung (3.25) ist die Diskretisierung der Eichtransformation (2.9).

Um in der Gitterformulierung Erwartungswerte von Observablen berechnen zu können, müssen schließlich noch die Pfadintegralmaße über die Eichfelder auf das Gitter übertragen werden:

$$\mathcal{D}A_\mu(x) \to \mathrm{d}U_\mu(n) \; . \tag{3.26}$$

Dabei ist erforderlich, daß das Maß $\mathrm{d}U_\mu(n)$ eichinvariant ist, d.h. es soll

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_\mu(n) \to \mathrm{d}U'_\mu(n) &= \mathrm{d}\left(G(n)U_\mu(n)G^{-1}(n+\hat\mu)\right) \\ &\overset{!}{=} \mathrm{d}U_\mu(n) \end{aligned} \tag{3.27}$$

gelten. Daher fordert man, daß es sich bei $\mathrm{d}U_\mu(n)$ oder kurz bei $\mathrm{d}U$ um ein *Haarsches Maß* handeln soll. Dann gilt gerade

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}(UG) = \mathrm{d}(GU) \quad \forall\, G \in SU(N_c) \; . \tag{3.28}$$

Da $U_\mu(n) \in SU(N_c)$ gilt, kann man $U_\mu(n)$ mittels der Gruppen-Generatoren parametrisieren, also $U_\mu(n) = \exp\{i\,\theta_\mu^a(n)T^a\}$. Damit gelangt man zu dem folgenden, relativ allgemein gehaltenen Ausdruck

$$\mathrm{d}U_\mu(n) = J(\{\theta\}) \prod_{a=1}^{N_c^2-1} \mathrm{d}\theta_\mu^a(n) \; . \tag{3.29}$$

Die Funktion J ist durch die Bedingung (3.28) festgelegt.

Zur Veranschaulichung betrachten wir den Fall der $SU(2)$. Da die $SU(2)$ isomorph zur Einheitskugel in vier Dimensionen ist ($SU(2) \cong S_3$), läßt sich jede Matrix $U \in SU(2)$ vermöge der *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

und der Einheitsmatrix in der folgenden Form darstellen:

$$U = a_0 \mathbb{1} + i\,\vec{a}\vec{\sigma} \tag{3.31}$$

mit der Randbedingung

$$\sum_{i=0}^{3} a_i^2 = 1 \ . \tag{3.32}$$

Damit erhält man das Haarsche Maß der $SU(2)$:

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2\pi^2} \prod_{i=0}^{3} \mathrm{d}a_i \ \delta\left(\sum_{j=0}^{3} a_j^2 - 1 \right) \ . \tag{3.33}$$

Hiermit ist jetzt das „Handwerkszeug“ komplett, um eine Observable auf dem Gitter in eichunabhängiger Weise zu bestimmen. Dies wird im folgenden Abschnitt gemacht.

Da es aus den Argumenten der Felder eindeutig hervorgeht, ob es sich um Kontinuums- oder Gitterformulierung handelt, werden ab jetzt die Hüte über den diskretisierten Feldern weggelassen. Die Wirkung wird aus dem gleichen Grund im folgenden ebenfalls nicht extra indiziert.

3.4 Reine Gittereichtheorie

Die Übertragung der Kontinuumsgleichungen der reinen Eichtheorie auf das Gitter bereitet keinerlei Schwierigkeiten. Aus Kapitel (2.3.2) folgt sofort für die *reine Gittereichtheorie*

$$\langle \mathcal{O}(U_\mu) \rangle_T = \frac{1}{Z} \int_{per} \mathcal{D}U \, \mathcal{O}(U_\mu) \exp\left\{ -S_G[U_\mu] \right\} \ , \tag{3.34}$$

$$Z = \int_{per} \mathcal{D}U \exp\left\{ -S_G[U_\mu] \right\} \ . \tag{3.35}$$

Das Integrationsmaß lautet ausgeschrieben

$$\mathcal{D}U = \prod_{n,\mu} \mathrm{d}U_\mu(n) \ . \tag{3.36}$$

$S_G[U_\mu]$ ist die in (3.22) angegebene gluonische Wirkung. Da diese einen konstanten Faktor enthält, der bei der Berechnung von (3.34) herausfällt, ersetzt man sie bei Rechnungen mit reiner Gittereichtheorie durch

$$S_G[U_\mu] = -\frac{1}{g_0^2} \sum_n \sum_{1 \le \mu < \nu \le 4} \mathrm{Tr}\left\{ U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n) \right\} \ . \tag{3.37}$$

Kapitel 4

Der Kontinuumslimes

4.1 Kritisches Verhalten

Bei (numerischen) Rechnungen im Rahmen einer Gittereichtheorie taucht zwangsläufig die Frage auf, inwiefern so erzielte Ergebnisse zur Vorhersage von Kontinuums-Observablen dienen können. Zwar ist es im letzten Kapitel gelungen, für die QCD eine diskrete, ebenfalls lokal eichinvariante Gitterformulierung zu erstellen, die für $a \to 0$ wieder in die QCD übergeht. Doch kann dies nicht das einzige Rechtfertigungskriterium sein, was die folgenden Punkte belegen sollen:

- Eine diskrete Wirkung ist *nicht eindeutig*. Man kann ihr jeden beliebigen, für $a \to 0$ verschwindenden Term hinzufügen, ohne daß man andere Kontinuumsgleichungen erhält. Diese Eigenschaft wird z.B. bei der Behebung des Fermionischen Verdopplungsproblems ausgenutzt. Sie ist auch der Grund für sog. *verbesserte Wirkungen* (improved actions), mit deren Hilfe man hofft, auch schon aus Rechnungen auf relativ groben Gittern für die Kontinuumsphysik relevante Größen bestimmen zu können.

- Auf jedem Gitter mit nichtverschwindendem Abstand a ist die räumliche Rotationssymmetrie verletzt. Diese wird erst für $a \to 0$ wieder hergestellt.

Man muß also genau untersuchen, was es heißt, den Kontinuumslimes zu bilden. Wir betrachten dazu die Zustandssumme der reinen $SU(N_c)$ Gittereichtheorie, Gleichung (3.35):

$$Z = \int_{per} \mathcal{D}U \exp\left\{ \frac{1}{g_0^2} \sum_n \sum_{1\le\mu<\nu\le 4} \mathrm{Tr}\left[U_{\mu\nu}(n) + U^\dagger_{\mu\nu}(n)\right] \right\} \ . \tag{4.1}$$

Im Kontinuum bestimmt man 2-Punkt-Funktionen, indem man geeignete *zusammenhängende Korrelationsfunktionen* für große euklidische Zeiten ausrechnet. Die größte Korrelationslänge ist dann durch den Massen-Gap m gegeben, und es gilt

$$\xi \sim \frac{1}{m} \; . \tag{4.2}$$

Man definiert auf dem Gitter die dimensionslose Korrelationslänge

$$\xi_G \equiv \frac{\xi}{a} \; . \tag{4.3}$$

Der Kontinuumslimes sollte nun so gebildet werden, daß physikalische Größen wie der Massen-Gap m, der z.B. einer Hadron Masse entsprechen kann, konstant bleiben. Man muß daher die Parameter der Theorie so wählen, daß im Kontinuumslimes ξ_G divergiert. Nach Gleichung (4.3) folgt aus $\xi_G \to \infty$ dann $a \to 0$.

Der einzige frei wählbare Parameter in der durch die Zustandssumme (4.1) definierten Theorie ist die dimensionslose, nackte Kopplung g_0. Diese muß daher für den Kontinuumslimes einen kritischen Wert g_0^* annehmen, so daß das durch (4.1) gegebene statistisch mechanische Modell divergiert, d.h.

$$g_0 \to g_0^* \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_G(g_0) \to \infty \\ a \to 0 \end{array} \right. \; . \tag{4.4}$$

Zur Verdeutlichung des gerade Gesagten ist in Bild 4.1 ein Hadron mit physikalischem Radius R skizziert, das durch zwei verschieden feine Gitter beschrieben werden soll. Man sieht, daß die Anzahl der Gitterpunkte und Links für ein gegebenes physikalisches Volumen mit abnehmendem Gitterabstand wächst. Damit die Physik davon unbeeinflußt bleibt, muß man auf Gittern mit unterschiedlichem Abstand a die Parameter der Theorie, also in unserem Fall die nackte Kopplung, unterschiedlich wählen.

Es soll jetzt erläutert werden, wie man eine physikalische Observable $\Theta_{phys.}$ aus einer Gitterrechnung prinzipiell erhält. Auf dem Gitter kann man nur dimensionslose Größen berechnen. Bezeichnet man mit $\hat{\Theta}$ das dimensionslose, auf dem Gitter berechnete Gegenstück von $\Theta_{phys.}$, und ist die Massen-Dimension (= inverse Längen-Dimension) von $\Theta_{phys.}$ gerade d_Θ, so folgt aus der Forderung nach der Existenz eines Kontinuumlimes, daß

$$\Theta(g_0(a), a) \equiv \left(\frac{1}{a}\right)^{d_\Theta} \hat{\Theta}(g_0(a)) \tag{4.5}$$

für $a \to 0$ einen endlichen Grenzwert, nämlich gerade $\Theta_{phys.}$, erreicht:

$$\Theta(g_0(a), a) \stackrel{a \to 0}{\longrightarrow} \Theta_{phys.} \; . \tag{4.6}$$

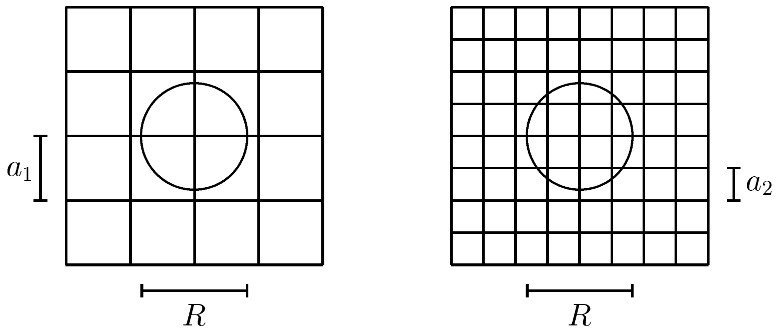

Abbildung 4.1: Zur Abhängigkeit von Gitterobservablen vom Gitterabstand

Für genügend kleines a soll $g_0(a)$ insbesondere unabhängig von der betrachteten Observable sein. Es soll also eine *universelle Funktion* $g_0(a)$ geben, so daß jede physikalische Observable $\Theta_{phys.}$ bei der Grenzwertbildung (4.6) endlich bleibt.

Ziel muß es daher jetzt sein, einen Zusammenhang zwischen der nackten Kopplung g_0 und dem Gitterabstand a zu bestimmen. Darauf wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

4.2 Die Callan-Symanzik β-Funktion

Man betrachte als Beispiel das Potential zwischen einem statischen Quark-Antiquark-Paar. Man kann in reiner Eichtheorie ausrechnen, daß das in Gittereinheiten gemessene Potential nur von der Kopplung g_0 und dem Gitterabstand $\hat{R} = \frac{R}{a}$ abhängt. Aus Gleichung (4.5) folgt

$$V(R, g_0, a) = \frac{1}{a}\hat{V}\left(\frac{R}{a}, g_0\right) \ , \tag{4.7}$$

wobei wegen Gleichung (4.6) g_0 so mit a verändert werden muß, daß Gleichung (4.7) für genügend kleinen Gitterabstand unabhängig von a wird. Es muß also

$$a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}V(R, g_0, a) = 0 \tag{4.8}$$

gelten. Da der physikalische Abstand R von a unabhängig ist, genügt $V(R, g_0, a)$ der sog. *Renormalisierungs-Gruppen Gleichung*

$$\left[a\frac{\partial}{\partial a} - \beta(g_0)\frac{\partial}{\partial g_0}\right] V(R, g_0, a) = 0 \tag{4.9}$$

mit der durch

$$\beta(g_0) = -a\frac{\partial g_0}{\partial a} \tag{4.10}$$

definierten *Callen-Symanzik β-Funktion.* Diese ist aus störungstheoretischen Rechnungen gut bekannt und in 1-Loop Ordnung für ein System mit N_f masselosen Quarks gegeben durch

$$\beta(g_0) = -\beta_0\, g_0^3 \tag{4.11}$$

$$\text{mit} \quad \beta_0 = \frac{1}{16\pi^2}\left[11\frac{N_c}{3} - \frac{2}{3}N_f\right] . \tag{4.12}$$

Integration von (4.10) liefert jetzt den auf 1-Loop Ordnung Störungstheorie basierenden Zusammenhang zwischen dem Gitterabstand und der nackten Kopplung:

$$a = \frac{1}{\Lambda_L}e^{-\frac{1}{2\beta_0 g_0^2}} . \tag{4.13}$$

Λ_L ist eine unbestimmte Integrationskonstante mit der Dimension einer Masse, auf die weiter unten genauer eingegangen wird.

Aus (4.13) folgt

$$g_0^* = \lim_{a\to 0} g_0(a) = 0 , \tag{4.14}$$

d.h. der Kontinuumslimes wird gerade bei *verschwindender Kopplung* erreicht! Man sagt auch, die Theorie sei *asymptotisch frei.*

Es werden nun die störungstheoretischen Ergebnisse der 2-Loop Rechnung angegeben:

$$\beta(g_0) = -\beta_0\, g_0^3 - \beta_1\, g_0^5 , \tag{4.15}$$

$$\beta_1 = \left(\frac{1}{16\pi^2}\right)^2\left[\frac{34}{3}N_c^2 - \left(\frac{10}{3}N_c + \frac{N_c^2-1}{N_c}\right)N_f\right] , \tag{4.16}$$

$$a = \frac{1}{\Lambda_L}R(g_0^2) , \tag{4.17}$$

$$R(g_0^2) = (\beta_0 g_0^2)^{-\beta_1/2\beta_0^2}\, e^{-\frac{1}{2\beta_0 g_0^2}} . \tag{4.18}$$

Man kann zeigen, daß

$$\Lambda_L = \frac{1}{a}\, R(g_0^2) \tag{4.19}$$

eine Renormalisierungsgruppen-invariante Größe ist. Das bedeutet, daß für Λ_L eine zu (4.9) analoge Gleichung gilt. Insbesondere ist Λ_L für genügend kleine Kopplung unabhängig von g_0. Λ_L eignet sich daher als Maß, in dessen Einheiten man physikalische Größen angeben kann, und wird deshalb auch als *Skalierungsparameter* bezeichnet. Um dies zu verdeutlichen, sollen noch einmal die Gleichungen (4.5) und (4.6) betrachtet werden. Zusammen mit (4.17) folgt

$$\Theta(g_0) = (\Lambda_L)^{d_\Theta} \frac{\hat{\Theta}(g_0)}{(R(g_0^2))^{d_\Theta}} \tag{4.20}$$

$$\stackrel{g_0 \to 0}{\longrightarrow} \Theta_{phys.} \; . \tag{4.21}$$

Da Λ_L und natürlich auch $\Theta_{phys.}$ von g_0 unabhängig sind, darf auch der Quotient in Gleichung (4.20) für $g_0 \to 0$ nicht mehr von g_0 abhängen. Es muß also eine dimensionslose Konstante $\hat{C}_\Theta$ geben, so daß

$$\hat{\Theta}(g_0) \stackrel{g_0 \to 0}{=} \hat{C}_\Theta (R(g_0^2))^{d_\Theta} \tag{4.22}$$

gilt. Man sagt auch, daß $\hat{\Theta}$ *asymptotisch skaliert*. Der Bereich im Parameterraum für g_0, für den Gleichung (4.22) gültig ist, ist das sog. *Skalenfenster*. Wählt man g_0 und damit auch a zu groß, wird das Gitter zu *grob*, um noch sensitiv bezüglich kleiner Quantenfluktuationen zu werden. Arbeitet man auf Gittern mit endlicher räumlicher Ausdehnung, was bei numerischen Simulationen stets der Fall ist, darf man g_0 (bzw. a) aber auch *nicht zu klein* wählen, da in diesem Falle die durch das zu kleine räumliche Volumen hervorgerufenen *Finite-Size Effekte* zu unphysikalischen Ergebnissen führen können.

Hat man $\hat{C}_\Theta = \hat{\Theta}(g_0)/(R(g_0^2))^{d_\Theta}$ durch Messungen im Bereich des Skalenfensters bestimmt, so ist es jetzt möglich, mittels

$$\Theta_{phys.} = \hat{C}_\Theta (\Lambda_L)^{d_\Theta} \tag{4.23}$$

die physikalische Observable in Einheiten des (unbestimmten) Skalierungsparameter anzugeben. Gitterrechnungen können daher nur dimensionslose Verhältnisse physikalischer Größen angeben!

4.3 Abweichungen von der Störungstheorie

Die Ergebnisse des letzten Abschnittes beruhen auf störungstheoretischen Rechnungen. Insbesondere kann man zeigen, daß Gleichung (4.17) nur für $g^2 < 1$ gültig ist. (Der Index „0“ an der nackten Kopplung wird ab jetzt weggelassen.) Für $g^2 \geq 1$, was auch den in dieser Arbeit benutzten Kopplungswerten entspricht, wurden jedoch grobe Verletzungen des asymptotischen Skalenverhaltens festgestellt. Engels et al. [23] haben daher (4.17) durch folgenden Ansatz ersetzt:

$$a\Lambda_L = R(g^2)\, \lambda(g^2) \; . \tag{4.24}$$

Für den Korrekturfaktor λ muß $\lambda(0)=1$ gelten, um die Vorhersagen der Störungstheorie zurückzuerhalten. Für den Fall der reinen $SU(2)$ Gittereichtheorie (d.h. $N_f=0$) wurde in der oben genannten Arbeit λ im Bereich $2.15 \le 4/g^2 \le 2.80$ mittels Daten aus Monte-Carlo-Simulationen numerisch bestimmt. Für größere Werte von $\beta = 4/g^2$ kann man λ mit der asymptotischen Formel

$$\lambda_{as}(g^2) = \exp\left[\frac{c\,g^6}{2\beta_0^2}\right] \tag{4.25}$$

bestimmen. Die Konstante c wird mit $c = 5.529(63)\cdot 10^{-4}$ angegeben, β_0 ist aus Gleichung (4.12) bekannt.

Mit diesen Gleichungen ist es auch möglich, sehr genaue Temperaturverhältnisse zu berechnen. Benutzt man (3.3), so folgt

$$T = \frac{\Lambda_L}{N_\tau}\,\frac{1}{R(g^2)\lambda(g^2)}\ . \tag{4.26}$$

Für Gitter mit gleicher zeitlicher Ausdehnung N_τ folgt

$$\frac{T_1}{T_2} = \exp\left[\frac{\beta_1}{2\beta_0^2}\ln\left(\frac{g_1^2}{g_2^2}\right) + \frac{1}{2\beta_0^2}\left(\frac{1}{g_1^2} - \frac{1}{g_2^2}\right)\right]\cdot\frac{\lambda(g_2^2)}{\lambda(g_1^2)}\ . \tag{4.27}$$

Setzt man $N_c=2$, $N_f=0$ und $\beta=\frac{4}{g^2}$ ein, ergibt sich

$$\frac{T_1}{T_2} = \exp\left[\frac{51}{121}\ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) + \frac{3\pi^2}{11}(\beta_1-\beta_2)\right]\cdot\frac{\lambda(\beta_2)}{\lambda(\beta_1)}\ . \tag{4.28}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man jetzt z.B. zu gegebener Kopplung $\beta = \frac{4}{g^2}$ die Temperatur in Einheiten der kritischen Temperatur T_c (siehe Abschnitt 5.3) angeben:

$$T = \left(\exp\left[\frac{51}{121}\ln\left(\frac{\beta_c}{\beta}\right) + \frac{3\pi^2}{11}(\beta-\beta_c)\right]\frac{\lambda(\beta_c)}{\lambda(\beta)}\right)\cdot T_c\ . \tag{4.29}$$

In [24] sind die zu den kritischen Temperaturen gehörenden kritischen Kopplungen für verschiedene Werte von N_τ sehr genau bestimmt worden. Die Werte für λ entnimmt man [23].

Ein weiterer Ansatz, die nur im Bereich der Störungstheorie geltende Gleichung (4.17) auch für große Kopplungswerte noch beizubehalten, besteht darin, in (4.17) die Kopplungskonstante g^2 durch eine *effektive Kopplung* g_E^2 zu ersetzen [19],[4],[24]. g_E kann man z.B. durch numerische Berechnungen der inneren Energie bestimmen [24].

Kapitel 5

QCD bei hohen Temperaturen

5.1 Einführung

Eine der herausragenden Eigenschaften der QCD ist das *Confinement*. Es besagt, daß keine isolierten Quarks existieren können, sondern daß diese stets in farbneutralen Zuständen – den Hadronen – gebunden sein müssen. Dieser Zusammenhalt wird über die Gluonen vermittelt, die ebenfalls nicht frei existieren dürfen.

Die gerade gemachte Aussage kann jedoch nicht für alle Temperaturbereiche richtig sein. Betrachtet man Temperaturen von der Größenordnung der Pionmasse ($T \sim 140$ MeV) [oder entsprechend hohe Baryon-Dichten], dann müßten die einzelnen Hadronen so viel Energie besitzen, daß sich ihre Ausdehnungen überlappen. Die Konstituenten verschiedener Hadronen, d.h. deren Quarks und Gluonen, kommen in die Lage, miteinander wechselwirken zu können: sie sind *deconfined*. Es wird daher heutzutage angenommen, daß die stark wechselwirkende Materie für genügend hohe Temperaturen in ein *Quark-Gluon Plasma* übergeht, auch wenn ein zuverlässiger experimenteller Nachweis für diese Vermutung bislang nicht erbracht werden konnte. Außerdem wird erwartet, daß die Gebiete, in denen Confinement bzw. Deconfinement gelten, durch einen *Phasenübergang* miteinander verbunden sind. Für die reine $SU(N_c)$-Eichtheorie kann man diese Vermutung beweisen, was im folgenden Abschnitt skizziert wird [34],[35].

5.2 Der Deconfinement-Phasenübergang

Phasenübergänge eines Systems sind im allgemeinen mit *spontanen Brechungen* und/oder *Restaurierungen* von *globalen Symmetrien* des Systems verknüpft. Die reine $SU(N_c)$-Eichtheorie besitzt tatsächlich eine solche globale Symmetrie. Um das zu sehen, schreiben wir die gluonische Wirkung $S_G[U_\mu]$ in der Form

$$S_G[U_\mu] = \frac{2N_c}{g^2} \sum_n \sum_{1\leq\mu<\nu\leq 4} \left[1 - \frac{1}{N_c} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\, \left\{U_\mu(n)\, U_\nu(n+\hat{\mu})\, U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})\, U_\nu^\dagger(n)\right\}\right] \ . \tag{5.1}$$

(5.1) ist invariant unter einer *globalen $Z(N_c)$-Symmetrie*: Führt man eine globale $Z(N_c)$-Rotation aller zeitartigen Linkvariablen $U_4(\vec{n}, n_4)$ bei einem festgehaltenen Zeitpunkt n_4 durch,

$$U_4(\vec{n}, n_4) \to U_4'(\vec{n}, n_4) = z\, U_4(\vec{n}, n_4) \quad \text{mit} \quad z \in Z(N_c) \ \text{ und } \ n_4 \text{ fest} \ , \tag{5.2}$$

dann gilt $S_G[U_\mu] = S_G[U_\mu']$. Der durch

$$L(\vec{n}) \equiv \prod_{n_4=1}^{N_\tau} U_4(\vec{n}, n_4) \tag{5.3}$$

definierte *Polyakov-Loop* verändert sich jedoch unter der Transformation (5.2) nach

$$L(\vec{n}) \to zL(\vec{n}) \ , \tag{5.4}$$

wobei z den gleichen Wert wie oben hat. Der Erwartungswert des Polyakov-Loop Mittels

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N_\sigma^3} \frac{1}{N_c} \left\langle \sum_{\vec{n}} \mathrm{Tr}\, L(\vec{n}) \right\rangle \tag{5.5}$$

wird daher in der Phase, in der die globale $Z(N_c)$-Symmetrie erhalten ist, verschwinden, während er in der spontan gebrochenen Phase einen von Null verschiedenen Wert annehmen wird.

Wir zeigen jetzt, daß $\langle L \rangle$ tatsächlich der Ordnungsparameter ist, der den Deconfinement-Phasenübergang beschreibt. Mit Hilfe der Gleichungen (3.7) - (3.9) und (3.15) kann man die zu (5.3) analoge Kontinuums-Größe

$$\Omega(\vec{x}) \equiv P\, \exp\left\{ig \int_0^{\frac{1}{T}} \mathrm{d}\tau\, A_0(\vec{x}, \tau)\right\} \tag{5.6}$$

definieren. (Man beachte, daß hier mit $A_0(x)$ das dimensionsbehaftete Kontinuumsfeld gemeint ist.) Dann gilt [50]

$$\langle \mathrm{Tr}\, \Omega(\vec{x}) \rangle = e^{-F_q(T)/T} \ . \tag{5.7}$$

$F_q(T)$ ist die freie Energie eines Systems mit einem freien Quark. Transformiert auf das Gitter folgt für genügend kleinen Gitterabstand

$$\langle L \rangle = e^{-F_q(T)/T} \ . \tag{5.8}$$

$\langle L \rangle = 0$ entspricht also $F_q(T) = \infty$. Physikalisch bedeutet das, daß ein System mit nur einem freien Quark bei dieser Temperatur T nicht existieren kann. Für $\langle L \rangle > 0 \Leftrightarrow F_q(T) < \infty$ hingegen ist ein isoliertes Quark erlaubt.

Der durch die globale $Z(N_c)$-Symmetrie spontan gebrochene Erwartungswert des Polyakov-Loops ist also der gesuchte Ordnungsparameter für den Deconfinement-Phasenübergang. Es gilt

$$\langle L \rangle = 0 \quad : \quad \text{Confinement} , \tag{5.9}$$

$$\langle L \rangle > 0 \quad : \quad \text{Deconfinement} . \tag{5.10}$$

Nach einem Artikel von Svetitsky und Yaffe [62] sollen die kritischen Eigenschaften einer vierdimensionalen $SU(N_c)$-Gittereichtheorie bei endlicher Temperatur denen eines dreidimensionalen, $Z(N_c)$-symmetrischen Spin Modells mit kurzreichweitiger Wechselwirkung entsprechen. Für die $N_c = 2$ gibt es sehr genaue numerische Untersuchungen über endliches Skalierungsverhalten [21], die zeigen, daß die Theorie im Rahmen der Fehler die gleichen kritischen Exponenten wie das 3-dim. Ising Modell besitzt und daß daher der Deconfinement-Phasenübergang von zweiter Ordnung ist. Ähnliche Untersuchungen kommen für $N_c = 3$ zu dem Schluß, daß der Phasenübergang von erster Ordnung ist [68],[25].

5.3 Das Potential zwischen schweren Quarks

In reiner Eichtheorie haben die Quarks unendlich große Masse (siehe Seite 17). Sie ist daher der geeignete Rahmen, um das Potential eines *statischen* Quark-Antiquark Paares zu bestimmen. Für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur T_c des Deconfinement-Phasenüberganges erwartet man Confinement-Verhalten für große und asymptotische Freiheit für kleine Abstände R:

$$V_{q\bar{q}}(R,T) = V_0 - \frac{\alpha(T)}{R} + \sigma(T)R \quad \text{für} \quad T < T_c \, . \tag{5.11}$$

$\sigma(T)$ ist die *Saitenspannung* (engl. *string tension*), die man aus Rechnungen mit sogenannten *Wilson-Loops* bestimmen kann [61].

Sollte in der uns interessierenden Hochtemperaturphase ein Quark-Gluon Plasma existieren, so erwartet man aufgrund von Polarisationseffekten eine Abschirmung der Farbladung der Quarks durch die sie umgebenden Gluonen. Da es mehrere Quark-Antiquark Zustände gibt, müssen diese klassifiziert werden. Ein $q\bar{q}$-Zustand wird mathematisch durch das Tensorprodukt $SU(N_c) \otimes \overline{SU(N_c)}$ beschrieben. Für $N_c =$

2 [3] bedeutet das, daß sich ein Quark-Antiquark Paar entweder in einem *Singulett-* oder einem *Triplett-* [Oktett-] *Zustand* befindet, kurz $N_c \otimes \overline{N}_c = 1 \oplus (N_c^2 - 1)$. Um die folgende Diskussion zu vereinfachen, beschränken wir uns ab jetzt auf den Fall $N_c = 2$. Man unterscheidet dann zwischen *Singulett-Potential* V_1 und *Triplett-Potential* V_3. Zusätzlich führt man das *farbgemittelte Potential* V_{av} ein. Entsprechend der Entartung des Triplett-Potentials gilt

$$e^{-V_{av}(R,T)/T} = \frac{1}{4}\left(e^{-V_1(R,T)/T} + 3\, e^{-V_3(R,T)/T}\right) \; . \tag{5.12}$$

Man kann diese Potentiale aus Polyakov-Loops enthaltenden Korrelationsfunktionen bestimmen [50]:

$$e^{-V_{av}(R,T)/T} = \frac{\langle \mathrm{Tr}\, L(\vec{R})\ \mathrm{Tr}\, L^\dagger(\vec{0})\rangle}{\langle |L|\rangle^2} \; , \tag{5.13}$$

$$e^{-V_1(R,T)/T} = 2\, \frac{\langle \mathrm{Tr}\, (L(\vec{R})\, L^\dagger(\vec{0}))\rangle}{\langle |L|\rangle^2} . \tag{5.14}$$

V_3 bestimmt man durch die Relation (5.12). Man beachte, daß sich nur das farbgemittelte Potential V_{av} unter der lokalen Eichtransformation (3.25) invariant verhält. Insbesondere ist das *Singulett-Potential eine eichabhängige Größe*. Es ist daher erforderlich, vor der Berechnung des Ausdruckes (5.14) eine Eichung zu fixieren. In dieser Arbeit ist dies die Landau-Eichung $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$.

Die Störungstheorie sagt für das Singulett-Potential ein *Debye abgeschirmtes („gescreentes“) Coulomb Potential* vorher:

$$V_1(R,T) = -\frac{\alpha(T)}{R}\, e^{-m_e(T)R} \quad \text{für} \quad T > T_c \; . \tag{5.15}$$

m_e ist die *elektrische Screeningmasse*. Dies ist eine temperaturabhängige Größe, die die Rolle einer inversen Abschirmlänge R_D spielt, also $R_D = m_e^{-1}$. Die Namensgebung hängt mit der Gestalt des *Gluon-Polarisationstensors* zusammen. Dieser enthält bei hohen Temperaturen einen Term, den man als Massenterm für die Gluonen interpretieren kann. Darauf wird in Abschnitt 5.4 genauer eingegangen. $\alpha(T)$ ist im Singulett-Zustand gegeben durch

$$\alpha(T) = g^2\, \frac{N_c^2 - 1}{8\pi N_c} \; . \tag{5.16}$$

Eine Alternative zur störungstheoretischen Bestimmung des Singulett-Potentials liefert eine Untersuchung des Gluon-Propagators im Rahmen der *linearen Response Theorie*. Dies wird in Anhang C diskutiert.

Weitere störungstheoretische Vorhersagen für nicht zu große Abstände R sind (für $N_c = 2$)

$$\frac{V_1^2(R,T)}{T\,V_{av}(R,T)} = -6 + O(g^2) \;, \tag{5.17}$$

$$\frac{V_1(R,T)}{V_3(R,T)} = -3 + O(g^4) \;. \tag{5.18}$$

Mit Hilfe von (5.17) sieht man, daß die elektrische Screeningmasse m_e in niedrigster Ordnung Störungstheorie eichunabhängig ist, da dann

$$V_{av}(R,T) = -\frac{1}{6}\frac{\alpha^2(T)}{TR^2}\, e^{-2m_e(T)R} \tag{5.19}$$

gilt. Es ist dennoch sinnvoll, m_e aus (5.14) und (5.15) anstatt aus (5.13) und (5.19) zu extrahieren, da sich die „Kosten" eines Eichfixierungsalgorithmus durch eine größere Genauigkeit bei der Bestimmung von m_e bezahlt machen. Das numerische Signal, das man aus (5.19) erhält, wird wegen des Faktors 2 im Exponenten sehr viel stärker unterdrückt sein als das aus (5.15) ermitteltes Gegenstück. Da alle hier aufgeführten Gleichungen insbesondere nur für große Abstände R gelten, wird eine nach (5.19) bestimmte Screeningmasse mit extrem großen Fehlern behaftet sein, da für großes R das Signal in die Größenordnung des statistischen Rauschens abfällt. Um den Fehler zu verkleinern, müßte man daher mehr Messungen machen. Insgesamt ist es effektiver, sich zur Bestimmung von m_e des Singulett-Potentials zu bedienen und die Konfigurationen, die dieser Berechnung zugrunde liegen, vorher in Landau-Eichung zu überführen.

Ein Teil dieser Arbeit beschäftigt sich damit, unter Benutzung von (5.12) - (5.14) mittels Monte-Carlo Rechnungen (siehe Anhang D) die Potentiale V_1, V_3 und V_{av} zu berechnen, die Ergebnisse mit den störungstheoretischen Vorhersagen (5.17) und (5.18) zu vergleichen und mittels (5.15) die elektrische Screeningmasse (in Einheiten der Temperatur) zu bestimmen.

5.4 Der Gluon-Propagator bei hoher Temperatur

5.4.1 1-Loop Störungstheorie

Einen zweiten Zugang zum Screeningverhalten der Gluonen liefert eine nähere Untersuchung des euklidischen Gluon-Propagators

$$i\mathcal{D}^{ab}_{\mu\nu}(x) = \langle A^a_\mu(x) A^b_\nu(0)\rangle \;. \tag{5.20}$$

Da die Felder in euklidischer Zeitrichtung periodisch sind, enthält die Fourier-Transformation von (5.20) eine Summe über diskrete Frequenzen $\omega_n = 2\pi T n$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (*Matsubara-Frequenzen*). Es gilt

$$\mathcal{D}^{ab}_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{q}) = \left[(\omega_n^2 + \vec{q}^{\,2})\, \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{q})\, \delta^{ab} \right]^{-1} . \tag{5.21}$$

$\Pi_{\mu\nu}(\omega_n, \vec{q})$ ist die irreduzible Ein-Teilchen Selbstenergie. Diese wird bis $O(g^2)$ aus denen in Abbildung 5.1 dargestellten 1-Loop Diagrammen berechnet.

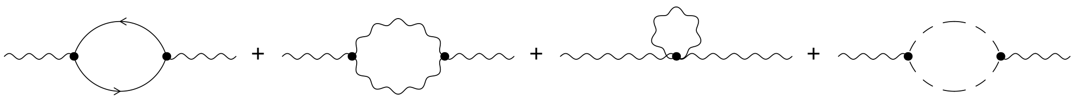

Abbildung 5.1: Gluon-Selbstenergie bis $O(g^2)$

Im statischen Fall $\omega_n = 0$ folgt für die Selbstenergie im Limes $\vec{q} \to 0$ bis $O(g^2)$ [28]

$$\Pi_{\mu\nu}(\omega_n = 0, \vec{q} \to 0) = \frac{1}{3}\, g^2 T^2 \left(N_c + \frac{N_f}{2} \right) \delta_{\mu 4}\, \delta_{\nu 4} . \tag{5.22}$$

In dieser Näherung ähnelt die Π_{44}-Komponente der Selbstenergie einem Massenterm im Propagator (5.21). Diese Masse bezeichnet man als *elektrische Screeningmasse*. Sie ist definiert als

$$m_e^2(T) \equiv \Pi_{44}(\omega_n = 0, \vec{q} \to 0) \tag{5.23}$$

$$= \frac{1}{3}\, g^2 T^2 \left(N_c + \frac{N_f}{2} \right) . \tag{5.24}$$

Für den Propagator folgt damit

$$\langle A_4(x) A_4(y) \rangle \sim e^{-m_e(T)\,|x-y|} \quad \text{für} \quad |x-y| \to \infty . \tag{5.25}$$

Die thermischen Fluktuationen in einem Quark-Gluon Plasma, die für die Entstehung von m_e verantwortlich sind, sorgen also für eine endliche Reichweite des Gluon-Propagators. Da dies den Eigenschhaften von Propagatoren massiver Teilchen entspricht, sagt man auch, die Gluonen verhalten sich für hohe Temperaturen massiv.

Nach Gleichung (5.22) gilt in niedrigster Ordnung Störungstheorie

$$\Pi_{ii}(\omega_n = 0, \vec{q} \to 0) = 0 , \tag{5.26}$$

d.h. die durch

$$m_m^2(T) \equiv \frac{1}{2}\, \Pi_{ii}(\omega_n = 0, \vec{q} \to 0) \tag{5.27}$$

definierte sog. *magnetische Masse* m_m verschwindet. In der 1-Loop Ordnung der Selbstenergie bleiben daher die räumlichen Komponenten des Propagators masselos.

5.4.2 Höhere Ordnungen Störungstheorie

Die elektrische Screeningmasse m_e ist eine prinzipiell beobachtbare Größe. Sie muß daher eichunabhängig sein. Die Definition (5.23) garantiert dieses nur in niedrigster Ordnung Störungstheorie, Gleichung (5.24) [32]. Man kann außerdem zeigen, daß die höheren Ordnungen von m_e vom Renormierungspunkt abhängen. Daher wurde in [59] vorgeschlagen, (5.23) durch eine selbstkonsistente Definition zu ersetzen, bei der m_e durch den relevanten Pol des statischen Gluon-Propagators definiert wird:

$$m_e^2 \equiv \mathrm{Re}\ \Pi_{44}(\omega_n = 0, \vec{q}\,)\Big|_{\vec{q}^{\,2}=-m_e^2} \,. \tag{5.28}$$

Das hierdurch gegebene m_e ist Renormierungsgruppen-invariant, eichunabhängig (in der nächst höheren Ordnung) und liefert in niedrigster Ordnung ebenfalls das Resultat (5.24). Um dies zu sehen, müssen sog. *Hard-Thermal-Loop* Beiträge durch *Resummationstechniken* [11],[12] berechnet werden, was aber weit über das Ziel dieser Arbeit hinausgeht. Die von uns erzielten Ergebnisse werden mit Gleichung (5.24), d.h. dem Resultat niedrigster Ordnung Störungstheorie, verglichen.

Bezüglich der Größenordnung der magnetischen Masse gibt es in der Literatur eine seit Anfang der 80er Jahre anhaltende Diskussion. In [42] und [43] wird ausführlich das *Infrarot-Problem* der QCD bei $T \neq 0$ diskutiert. Dort (wie auch in [28]) gelangt man zu dem Schluß, daß höchstwahrscheinlich

$$m_m(T) \sim g^2 T \tag{5.29}$$

gelten wird. Auch wenn dieses Ergebnis ohne die erst 1990 von E. Braaten und R.D. Pisarski entwickelte Resummationstechnik erhalten wurde, so wird auch in neuesten Arbeiten weiterhin von der Gültigkeit von (5.29) ausgegangen [60].

Kapitel 6

Numerische Fixierung der Landau-Eichung

6.1 Einführung

Wenn man eichabhängige Größen wie das Singulett-Potential (5.14) oder den Gluon-Propagator (5.20) berechnen möchte, muß man zuvor eine Eichung festlegen, innerhalb derer die Rechnungen durchgeführt werden sollen. In dieser Arbeit soll das die in Abschnitt 2.3.3 eingeführte Landau-Eichung sein, die in der Kontinuumstheorie

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \tag{6.1}$$

lautet. Um (6.1) zu diskretisieren, bedient man sich Gleichung (3.15), die den Zusammenhang zwischen Linkvariablen und Gluon-Feld beschreibt:

$$U_\mu(x) = \exp\left\{igA_\mu(x)\right\} \ . \tag{6.2}$$

$A_\mu(x)$ ist das dimensionslose Gluon-Feld, das mit dem Gitterabstand a skaliert wurde, Gleichung (3.12). Für kleines a kann man die Linkvariablen um die $\mathbb{1}$ entwickeln:

$$U_\mu(x) \simeq \mathbb{1} + igA_\mu(x) \ . \tag{6.3}$$

In dieser Näherung gilt

$$A_\mu(x) \simeq \frac{-i}{2g}\left(U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x)\right) \ . \tag{6.4}$$

Approximiert man die Ableitung durch

$$\partial^\mu A_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{4}\left[A_\mu(x) - A_\mu(x-\mu)\right] \ , \tag{6.5}$$

so folgt[1]

$$\partial^\mu A_\mu(x) = \frac{-i}{2g} \sum_{\mu=1}^{4} \left[U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) - \{U_\mu(x-\mu) - U_\mu^\dagger(x-\mu)\} \right] . \tag{6.6}$$

Da es sich bei dem Ausdruck (6.6) nicht mehr um einen Skalar sondern um eine 2×2-Matrix handelt, lautet die Landau-Eichbedingung jetzt

$$|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 = 0 , \tag{6.7}$$

wobei die Matrix-Norm als Wurzel über die Summe der Betragsquadrate der Matrix-Elemente definiert ist.

Für nichtabelsche Eichfelder ist es sehr schwierig, Monte Carlo Rechnungen (siehe Anhang D.6) in einer festen Eichung durchzuführen, so daß neu vorgeschlagene Konfigurationen ebenfalls der Eichbedingung genügen. Es reicht jedoch aus [44], eine Markov-Kette von Konfigurationen ohne Eichbedingung zu erzeugen, diese jeweils in die Landau-Eichung (6.7) zu transformieren und auf den dadurch erhaltenen Konfigurationen die interessierenden Observablen auszurechnen. Man erspart sich dadurch die Berechnung der Faddeev-Popov Determinante (2.48), ohne daß deren Effekte verloren gehen.

Das verbleibende Problem besteht jetzt darin, unter Ausnutzung der Eichfreiheit

$$U_\mu(x) \to U_\mu^g(x) \equiv G(x)\, U_\mu(x)\, G^\dagger(x+\mu) \tag{6.8}$$

(siehe Gleichung (3.25)) auf einer festen Konfiguration die Größe

$$\frac{1}{N_\sigma^3\, N_\tau} \sum_x |\partial^\mu A_\mu(x)|^2 \tag{6.9}$$

zu minimieren. Dazu werden im folgenden Abschnitt mehrere Verfahren vorgestellt und miteinander verglichen.

6.2 Die Algorithmen

6.2.1 Eichfixierung mit und ohne Fourier-Beschleunigung

Für den Fall abelscher Eichfelder kann man leicht zeigen, daß eine Maximierung der Größe

$$\sum_{\mu,x} \mathrm{Tr} \left[U_\mu^g(x) + {U_\mu^g}^\dagger(x) \right] \tag{6.10}$$

[1] Für die $SU(3)$ muß (6.6) spurlos gestaltet werden.

in dem Raum der durch (6.8) gegebenen eich-äquivalenten Felder einer gleichzeitigen Minimierung von $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2$ entspricht. Wie die Erfahrung zeigt, gilt dieses auch für die reine $SU(N_c)$-Gittereichtheorie.

Um (6.10) zu maximieren, wählt man die Transformationsmatrizen zu

$$G(x) = \exp\left\{i\, g\, \alpha\, \partial^\mu A_\mu(x)\right\} \ . \tag{6.11}$$

$\partial^\mu A_\mu(x)$ bezeichnet wiederum die Diskretisierung der Ableitung, Gleichung (6.6). Der Parameter α gibt ein Maß für die Schrittgröße an, mit der (6.10) maximiert wird. Er muß „experimentell" bestimmt bzw. optimiert werden. Testläufe auf $32^3 \times 8$-Gittern haben ergeben, daß auf den meisten der ausgetesteten Konfigurationen die Anzahl der Iterationsschritte für $\alpha = -0.065$ am kleinsten war.

Mit den Matrizen (6.11) transformiert man jetzt alle Linkvariablen gemäß (6.8) und berechnet wiederum (6.6) und (6.9). Dieses Verfahren wiederholt man so lange, bis der Ausdruck (6.9) hinreichend klein ist. Dies kann auf verschiedenen Konfigurationen unterschiedlich lange dauern, da (6.10) zwar mit der Anzahl der Iterationsschritte monoton wächst, (6.9) jedoch in lokale Minima laufen kann und, um diesen wieder zu entweichen, während des Eichfixierungsalgorithmus auch kurzzeitig ansteigen kann (siehe auch Abbildung 6.1).

Da es sich um einen numerischen Algorithmus handelt, kann die Bedingung (6.7) aufgrund der begrenzten Rechnergenauigkeit nicht erreicht werden. Ein Kriterium, das besagt, wann man den Eich-Algorithmus abbrechen kann, wird in Abschnitt 6.4 diskutiert.

Je weiter man sich der Landau-Eichung nähert, desto uneffizienter wird der gerade eingeführte Algorithmus, da sich dann die Transformationsmatrizen (6.11) nur noch wenig von der Einheitsmatrix unterscheiden. In der englischsprachigen Literatur wird ein solches Verhalten mit *critical slowing down* bezeichnet. Abhife schafft die sogenannte *Fourier-Beschleunigung* [17],[18]. Dieser Algorithmus entspricht im wesentlichen dem gerade beschriebenen, nur daß die Transformationsmatrizen (6.11) durch

$$G(x) = \exp\left\{i\, g\, \alpha\, \hat{F}^{-1}\, \frac{p^2_{max}}{p^2}\, \hat{F}\, \partial^\mu A_\mu(x)\right\} \ . \tag{6.12}$$

ersetzt werden. $\hat{F}\,[\hat{F}^{-1}]$ bezeichnet die [inverse] Fourier Transformation auf dem Gitter bzw. deren numerische Optimierung, die sog. „schnelle" Fourier Transformation (engl. *fast Fourier transform*, FFT). p^2 ist gegeben durch

$$p^2 a^2 = 4 \sum_{i=1}^{4} \sin^2\left(\frac{m_i\, \pi}{N_i}\right) \quad \text{mit} \quad m_i = 0, \ldots, N_i - 1 \ . \tag{6.13}$$

Dabei werden $N_1 = N_x, \ldots, N_4 = N_\tau$ miteinander identifiziert. Um numerischen Problemen zuvorzukommen, wählt man für den Fall $m_1 = \ldots = m_4 = 0$ einfach $\frac{p^2_{max}}{p^2} = 0$.

Die Effizienz des Fourier-beschleunigten Algorithmus wird im übernächsten Abschnitt diskutiert.

6.2.2 Eichfixierung mit Overrelaxation

Ein weiterer Algorithmus zur numerischen Fixierung der Landau-Eichung bedient sich der sog. Overrelaxation-Technik [47],[29]. Hierbei soll der Wert von

$$\sum_\mu \mathrm{Tr}\left[U^g_\mu(x) + U^{g\,\dagger}_\mu(x-\mu)\right] \tag{6.14}$$

in dem Raum der durch (6.8) gegebenen eich-äquivalenten Felder maximiert werden. Man beachte, daß aufgrund der periodischen Randbedingungen des Gitters eine Summation der Größe (6.14) über alle Gitterpunkte x wieder den Ausdruck (6.10) liefert.

Wegen (3.31) und (3.32) gilt

$$\sum_\mu \left[U_\mu(x) + U^\dagger_\mu(x-\mu)\right] = k(x)\,\Omega(x) \tag{6.15}$$

mit $\Omega(x) \in SU(2)$ und

$$k(x) = \left(\det \sum_\mu \left[U_\mu(x) + U^\dagger_\mu(x-\mu)\right]\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{6.16}$$

Ein Algorithmusschritt besteht nun aus zwei Teilen. Im ersten Schritt sollen nur die zu geraden Gitterpunkten x (siehe Anhang D.6, Seite 96) gehörenden Linkvariablen $U_\mu(x)$ gemäß (6.8) erneuert werden. Dazu wählt man auf allen ungeraden Gitterpunkten $G(x) = \mathbb{1}$, so daß nach (6.14) auf den geraden Gitterpunkten gelten soll:

$$\mathrm{Tr}\,\left[G(x)\,k(x)\,\Omega(x)\right] \stackrel{!}{\longrightarrow} \max\ . \tag{6.17}$$

Man setzt daher

$$G(x) = \Omega(x)^{-1}\ . \tag{6.18}$$

Im zweiten Schritt vertauscht man die Rollen der geraden und ungeraden Gitterpunkte und verfährt analog.

Um dieses Verfahren zu beschleunigen, baut man zusätzlich die sog. *Overrelaxation-Technik* ein. Da auch $\Omega(x)^{-1} \in SU(2)$ gilt, kann man wiederum wegen (3.31) und (3.32) schreiben:

$$\begin{aligned} \Omega(x)^{-1} &= a_0 \mathbb{1} + i\,\vec{a}\vec{\sigma} \quad \text{mit} \quad a^2 = 1 \\ &= \cos(\theta)\, \mathbb{1} + i\, \sin(\theta)\, \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\, \vec{\sigma}\ . \end{aligned} \tag{6.19}$$

Bei der Wahl der Transformationsmatrizen ersetzt man jetzt (6.18) durch

$$G(x) = \cos(\lambda\theta)\, \mathbb{1} + i\, \sin(\lambda\theta)\, \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\, \vec{\sigma}\ . \tag{6.20}$$

$\lambda \in [1, 2]$ ist der *Overrelaxation-Parameter*. Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurde $\lambda = 1.8$ gewählt.

6.2.3 Vergleich der Eichfixierungsalgorithmen

Es sollen jetzt die auf den letzten Seiten vorgestellten Algorithmen miteinander verglichen werden. Dazu wurden Testläufe auf mehreren Konfigurationen durchgeführt. Ein hierbei erhaltenes, typisches Ergebnis ist in Abbildung 6.1 zu sehen. Man erkennt deutlich die Überlegenheit des Fourier-beschleunigten Algorithmus vor

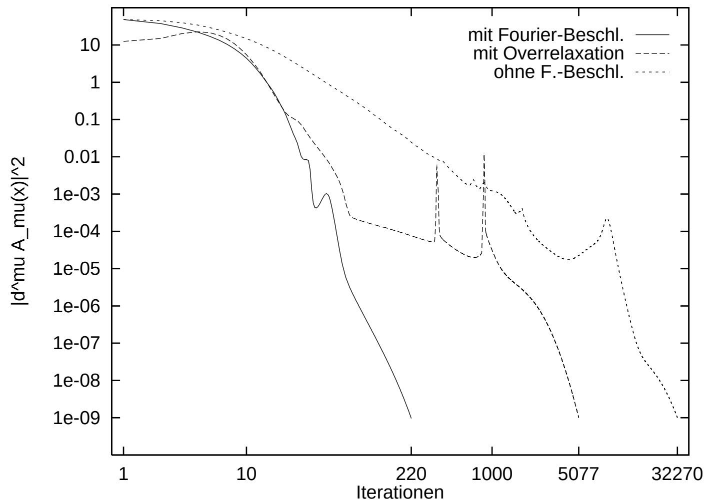

Abbildung 6.1: Doppelt logarithmischer Plot von $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2$, aufgetragen gegen die Anzahl der Iterationen der drei Eichfixierungsalgorithmen

seinen Konkurrenten, wenn man lediglich die Anzahl der Iterationsschritte miteinander vergleicht. Man muß aber zusätzlich den Zeitaufwand für einen einzelnen

Schritt berücksichtigen. Auf einem $32^3 \times 8$-Gitter benötigt der Algorithmus ohne Fourier-Beschleunigung hierfür ca. 0.364 Sekunden, der Algorithmus mit Fourier-Beschleunigung ca. 2.394 Sekunden und der Overrelaxation-Algorithmus ca. 0.641 Sekunden. Da bei allen Testläufen der Overrelaxation-Algorithmus bis zu einer Genauigkeit von $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 \simeq 10^{-3}$ nur unwesentlich mehr Iterationsschritte benötigte als der Fourier-beschleunigte Algorithmus, haben wir zur Minimierung der Rechenzeit die Fixierung der Landau-Eichung in zwei Schritten durchgeführt: Bis $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 \geq 10^{-3}$ wurde der Overrelaxation-Algorithmus benutzt, um danach auf den Fourier-beschleunigten Algorithmus zu wechseln.

6.3 Das Polyakov-Loop Kriterium

Es soll noch einmal die Größe (6.10) betrachtet werden. Schreibt man $U^g_\mu(x)$ in der üblichen Parametrisierung mit den Pauli-Matrizen als $U^g_\mu(x) = a_0 \mathbb{1} + i\,\vec{a}\vec{\sigma}$, so lautet die für die Landau-Eichung erforderliche Maximalitätsbedingung

$$\sum_{\mu.x} a_0(x;\mu) \stackrel{!}{\longrightarrow} \max \ . \tag{6.21}$$

Die Linkvariablen sollen also im Verlauf des Eichfixierungsalgorithmus in die Nähe der Einheitsmatrix gebracht werden. Dies macht auch in Hinblick auf Ansatz (6.3) Sinn, der eine Entwicklung der Linkvariablen um die $\mathbb{1}$ ist.

Wegen der globalen $Z(2)$-Symmetrie der Wirkung (5.1) ist allerdings auch ein Algorithmus denkbar, der die Links in die Nähe der $-\mathbb{1}$ bringen würde, da eine Konfiguration mit $U_\mu(x) = -\mathbb{1}\ \forall x,\mu$ ebenfalls eine denkbare Vakuumkonfiguration ist, um die man eine störungstheoretische Entwicklung ansetzen könnte.

Oberhalb der kritischen Temperatur T_c des Deconfinement-Phasenüberganges ist die $Z(2)$-Symmetrie allerdings spontan gebrochen (siehe Abschnitt 5.2), das System hat einen der zwei Vakuum-Sektoren spontan bevorzugt. Dies wird durch den positiven bzw. negativen Erwartungswert des Polyakov-Loop Mittels (5.5) charakterisiert. Bei der Eichfixierung muß man daher darauf achten, daß sich die gerade betrachtete Konfiguration in dem mit den Algorithmen konformen Sektor befindet. Man muß daher auf jeder Konfiguration zunächst das Polyakov-Loop Mittel

$$L = \frac{1}{N_\sigma^3}\frac{1}{2}\sum_{\vec{x}} \mathrm{Tr}\left\{\prod_{x_4=1}^{N_\tau} U_4(\vec{x},x_4)\right\} \ . \tag{6.22}$$

berechnen. Ist dieses negativ, so muß man vor Anwendung der Eichfixierungsalgorithmen die betrachtete Konfiguration zunächst mittels einer globalen $Z(2)$-Transformation in die Phase mit $L > 0$ transformieren [38]. Dies kann man erreichen, indem man beispielsweise die Ersetzung

$$U_4(\vec{x}, x_4 = 1) \to -U_4(\vec{x}, x_4 = 1) \quad \forall \vec{x} \ , \tag{6.23}$$

durchführt, während die restlichen Linkvariablen ihre Werte beibehalten. Hierdurch bleibt die Wirkung (5.1) unverändert, d.h. die gerade vorgeschlagene Transformation „verändert die Physik nicht".

Die Bedeutung des Polyakov-Loop Kriteriums spiegelt sich an zwei Stellen wieder. Zum einen benötigt der Eichfixierungsalgorithmus auf einer Konfiguration mit $L < 0$ deutlich mehr Iterationsschritte, um den gleichen Wert von $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2$ zu erreichen, als auf einer Konfiguration mit $L > 0$. Zum anderen, und das ist der physikalisch interessante Grund, nehmen die (4,4)-Komponenten des Gluon-Propagators auf Landau-geeichten Konfigurationen mit $L < 0$ deutlich zu hohe Werte an, was wegen (5.23) zu einer falschen Vorhersage für die elektrische Screeningmasse führt.

6.4 Das Abbruch Kriterium

Es ist klar, daß einer numerischen Minimierung von $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2$ durch die Rechnergenauigkeit Grenzen gesetzt sind. Insbesondere ist es nicht möglich, numerisch die „ideale" Landau-Eichung $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 = 0$ zu erreichen. Man muß daher ein Kriterium finden, das besagt, wann man den Eichfixierungsalgorithmus abbrechen darf. Gesucht ist also eine feste Zahl R_L, so daß man die Minimierung von $\partial^\mu A_\mu(x)$ beenden kann, sobald $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 \leq R_L$ gilt. Dazu vergleichen wir die Abhängigkeit einer physikalischen Observable - z.B. der lokalen magnetischen Screeningmasse (siehe Seite 57) in Einheiten der Temperatur beim Abstand $zT = 1$ bei einer Kopplung von $\beta = 2.97$ auf einem Gitter der Größe $32^3 \times 8$ - von R_L. Die auf einer Basis von 42 Konfigurationen gemessenen Werte sind in Tabelle 6.1 eingetragen und in Abbildung 6.2 dargestellt. Man erkennt, daß $m_m(zT = 1)/T$ für $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 \leq 10^{-5}$ nahezu konstant bleibt. Man sollte daher, um zuverlässige Resultate zu erhalten, mindestens $R_L = 10^{-5}$ wählen. Alle in dieser Arbeit diskutierten Simulationen wurden bei $R_L = 10^{-9}$ durchgeführt.

R_L	$m_m(zT=1)/T$	R_L	$m_m(zT=1)/T$
$1.787 \cdot 10^{-2}$	$1.536 +/- 0.182$	$2.278 \cdot 10^{-5}$	$1.173 +/- 0.089$
$6.414 \cdot 10^{-3}$	$1.344 +/- 0.150$	$1.352 \cdot 10^{-5}$	$1.161 +/- 0.088$
$3.850 \cdot 10^{-3}$	$1.301 +/- 0.145$	$8.505 \cdot 10^{-6}$	$1.208 +/- 0.105$
$2.272 \cdot 10^{-3}$	$1.268 +/- 0.170$	$4.247 \cdot 10^{-6}$	$1.207 +/- 0.106$
$1.056 \cdot 10^{-3}$	$1.273 +/- 0.167$	$8.717 \cdot 10^{-7}$	$1.196 +/- 0.102$
$5.900 \cdot 10^{-4}$	$1.133 +/- 0.110$	$4.406 \cdot 10^{-7}$	$1.197 +/- 0.103$
$3.040 \cdot 10^{-4}$	$1.130 +/- 0.095$	$9.013 \cdot 10^{-8}$	$1.200 +/- 0.103$
$1.903 \cdot 10^{-4}$	$1.096 +/- 0.102$	$4.447 \cdot 10^{-8}$	$1.202 +/- 0.104$
$1.163 \cdot 10^{-4}$	$1.105 +/- 0.090$	$9.150 \cdot 10^{-9}$	$1.178 +/- 0.101$
$6.718 \cdot 10^{-5}$	$1.113 +/- 0.081$	$4.586 \cdot 10^{-9}$	$1.178 +/- 0.102$
$3.608 \cdot 10^{-5}$	$1.165 +/- 0.088$	$9.232 \cdot 10^{-10}$	$1.174 +/- 0.101$

Tabelle 6.1: Abhängigkeit von $m_m(zT=1)/T$ von R_L

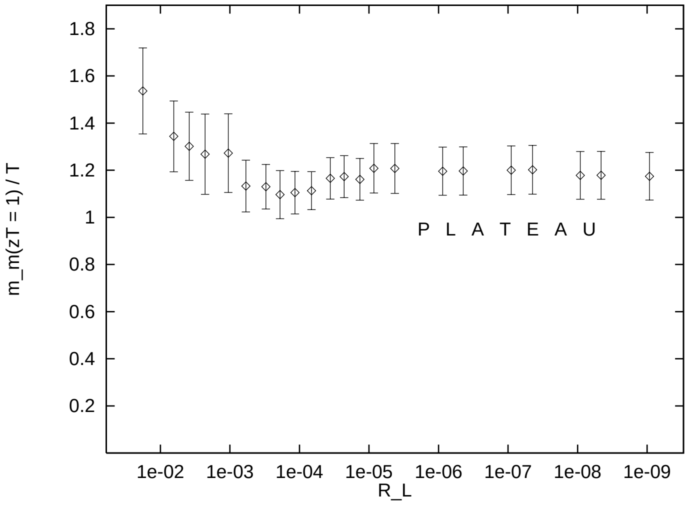

Abbildung 6.2: Abhängigkeit von $m_m(zT=1)/T$ von R_L

Kapitel 7

Programmablauf

Mit den Ergebnissen des letzten Kapitels und denen aus Anhang D.6 kommen wir zu folgendem, auch in Abbildung 7.1 skizzierten Programmablauf:
Eine Simulation beginnt mit einer Startkonfiguration, die aus zufällig erzeugten $SU(2)$-Matrizen besteht. Diese wird mittels ca. 1000 „Big-Sweeps“ (siehe Seite 99) thermalisiert, die jeweils acht Overrelaxation-Sweeps und einen Kennedy-Pendleton Heatbath-Sweep enthalten. Man gelangt somit zu der ersten, mit dem passenden Boltzmann-Gewicht verteilten Konfiguration, die nun dem Polyakov-Loop Kriterium unterzogen und falls nötig durch eine globale $Z(2)$-Transformation in die $(L > 0)$-Phase überführt wird. Von dieser ausgehend werden die weiteren Konfigurationen der Markov-Kette erzeugt, die jeweils durch 24 „Big-Sweeps“ und eventuell einer $Z(2)$-Transformation voneinander getrennt sind. Auf diese Konfigurationen wird bis $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 \geq 10^{-3}$ der Landau-Eichfixierungsalgorithmus mit Overrelaxation angewandt, um dann bis $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2 \leq 10^{-9}$ mit dem Fourier-beschleunigten Algorithmus fortzufahren. Danach werden die interessierenden Observablen auf den jetzt geeichten Konfigurationen berechnet. Abschließend werden die auf den einzelnen Konfigurationen ermittelten Meßwerte der Jackknife-Fehlerrechnung (siehe Anhang E) unterzogen, so daß man als Ergebnis Ensemble-Mittelwerte mit geschätzten, unverzerrten Fehlern erhält.

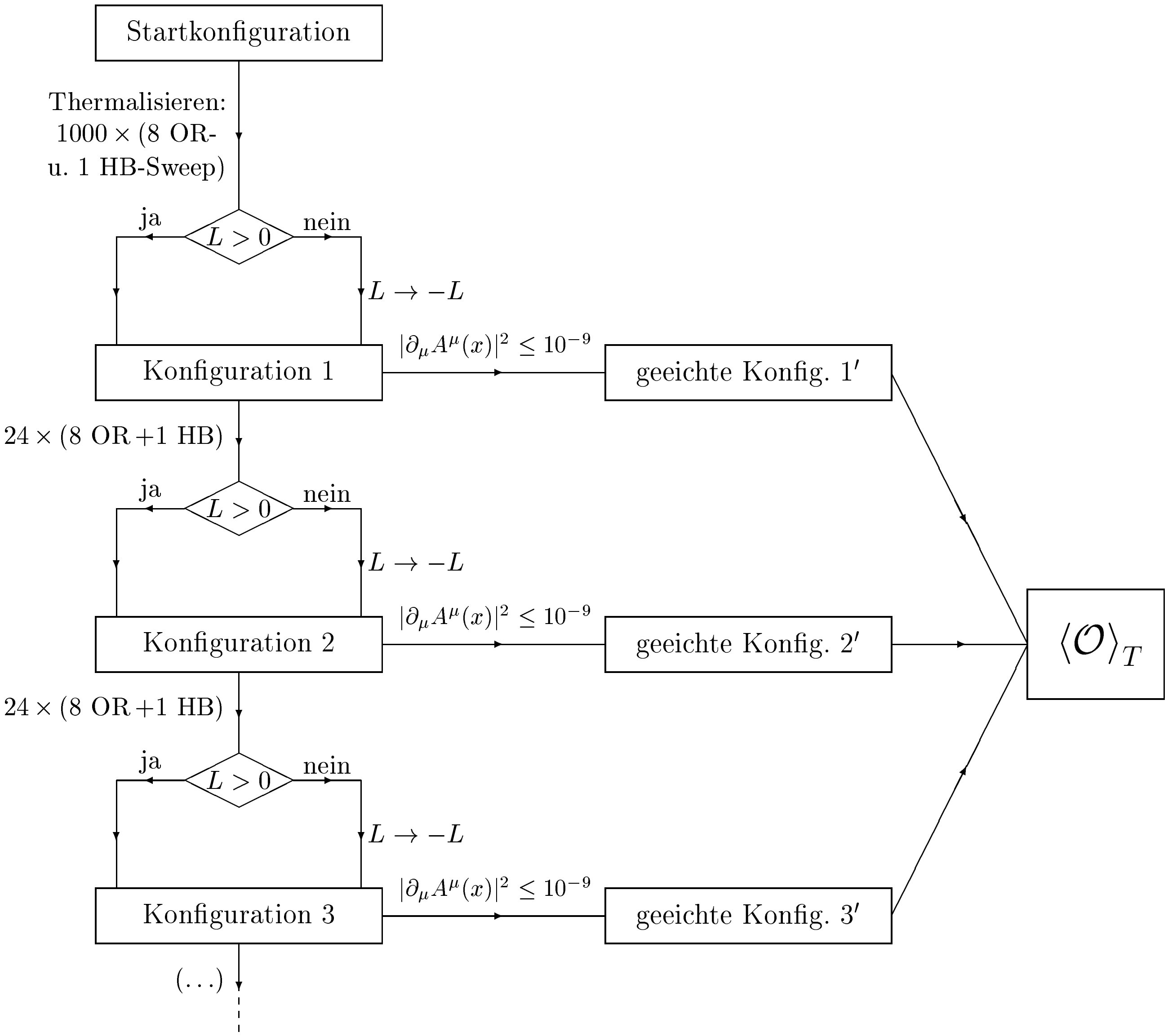

Abbildung 7.1: Programm-Ablaufplan

Kapitel 8

Numerische Ergebnisse

8.1 Benutzte Gittergrößen und Kopplungswerte

Eine Übersicht aller benutzten Gittergrößen und Kopplungswerte mit den entsprechenden Temperaturen (siehe Gleichung (4.29) und [24]) ist in Tabelle 8.1 aufgelistet. Viele der folgenden Diskussionen werden durch Graphiken veranschaulicht, deren Werte auf dem $32^3 \times 8$-Gitter bei $\beta = 2.97$ ermittelt wurden. Die entsprechenden Werte zu den anderen Gittergrößen und Kopplungswerten werden der Vollständigkeit halber dann in Tabellen angegeben, die in Anhang F aufgelistet sind.

$N_x \times N_y \times N_z \times N_\tau$	$\beta = 4/g^2$	T/T_c	$N_x \times N_y \times N_z \times N_\tau$	$\beta = 4/g^2$	T/T_c
$32^3 \times 8$	2.60	1.32	$32^3 \times 8$	2.97	3.93
$32^3 \times 12$	2.74	1.33	$32^3 \times 8$	3.12	6.01
$32^3 \times 8$	2.65	1.53	$32^3 \times 8$	3.20	7.53
$32^2 \times 64 \times 8$	2.74	2.00	$32^3 \times 8$	3.47	15.88
$32^3 \times 8$	2.88	3.03			

Tabelle 8.1: Benutzte Gittergrößen und Kopplungswerte

8.2 Aussagekraft der Störungstheorie

Da viele der gemessenen Größen mit Vorhersagen aus der Störungstheorie verglichen werden sollen, betrachten wir zunächst die Verhältnisse der Potentiale, d.h. (siehe Gleichungen (5.17) und (5.18))

$$\frac{V_1(zT,T)}{V_3(zT,T)} = -3 + O(g^4) \; , \tag{8.1}$$

$$\frac{V_1^2(zT,T)}{T\,V_{av}(zT,T)} = -6 + O(g^2) \; . \tag{8.2}$$

Es soll an dieser Stelle nochmals daran erinnert werden, daß aus Resummationsgründen insbesondere Gleichung (8.2) nur für kleine Abstände gilt.

Bei numerischen Rechnungen wird z in Einheiten des Gitterabstandes a gemessen, d.h. $z = na$ mit $n = 0, 1, \ldots, \frac{N_z}{2}$. Wegen $a^{-1} = N_\tau T$ (siehe Gleichung (3.3)) kann man den Abstand jedoch auch in Einheiten der Temperatur angeben, was im folgenden stets gemacht werden soll:

$$zT = \frac{n}{N_\tau} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N_z}{2} \; . \tag{8.3}$$

Wir überprüfen zunächst die Relation (8.1). Dazu sind in Abbildung 8.1 die zu $\beta = 2.97$ gehörenden Werte eingezeichnet. Abbildung 8.2 enthält für $zT = 1$ die zu allen in Tabelle 8.1 aufgeführten Temperaturen gehörenden Verhältnisse (8.1).

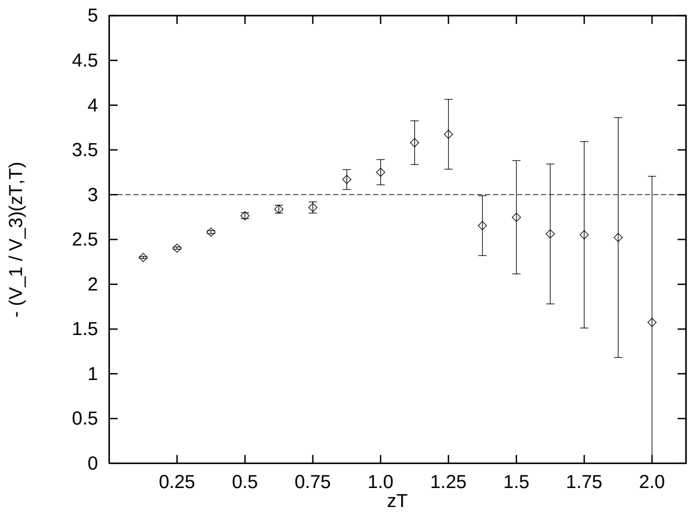

Abbildung 8.1: $-\frac{V_1}{V_3}$ für $\beta = 2.97$

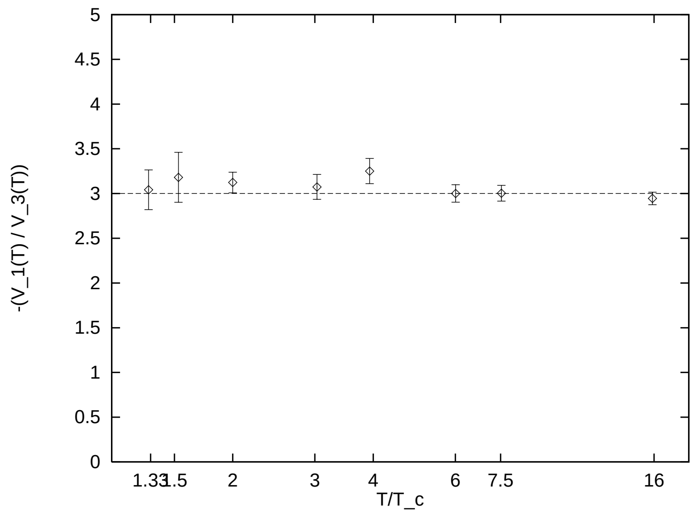

Abbildung 8.2: $-\frac{V_1}{V_3}$ beim Abstand $zT = 1$

Wie man auch an den in Tabelle F.1 aufgeführten Werten sieht, wird das störungstheoretische Ergebnis (8.1) sehr gut bestätigt.

Ein zweiter Test der Störungstheorie ist ein Vergleich der für $-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$ gemessenen Werte (siehe Tabelle F.2) mit Gleichung (8.2). Dazu sind in Abbildung 8.3 die Werte für $\beta = 2.97$ dargestellt. Abbildung 8.4 enthält die zu dem gesamten Temperaturbereich ermittelten Werte, bestimmt beim Abstand $zT = 0.5$.

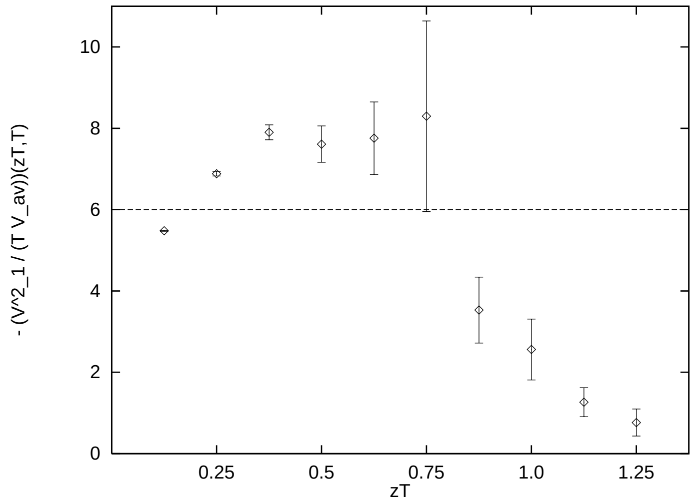

Abbildung 8.3: $-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$ für $\beta = 2.97$

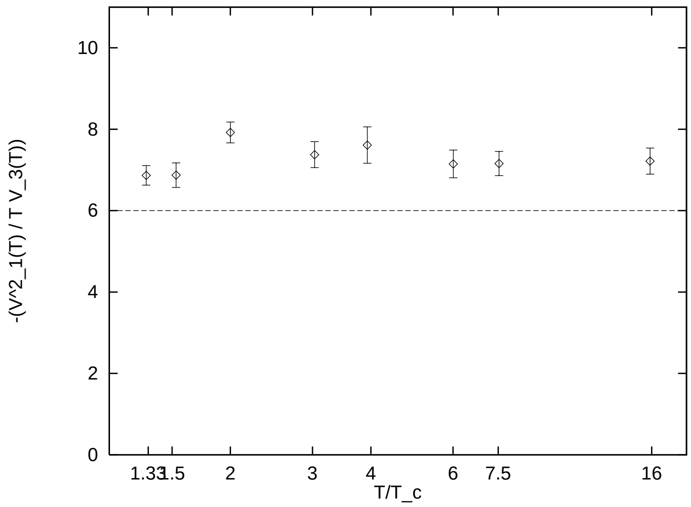

Abbildung 8.4: $-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$ beim Abstand $zT = 0.5$

Auch hier liegen die Werte in der richtigen Größenordnung. Daß die Abweichungen der Meßwerte von (8.2) größer sind als beim Verhältnis zwischen Singulett- und Triplett-Potential, liegt in der Ordnung der nicht berücksichtigten Terme. Hat man bei (8.1) erst Terme von $O(g^4)$ vernachlässigt, so fehlen in (8.2) bereits die Terme $O(g^2)$.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die von uns erzielten Ergebnisse zwar mit Voraussagen der Störungstheorie verglichen werden können, daß die gewählten Temperaturen jedoch nicht so groß sind, um mit Bestimmtheit störungstheoretische Aussagen bestätigen oder verwerfen zu können.

8.3 Berechnung von m_e aus Polyakov-Loop Korrelationsfunktionen

Um die elektrische Masse m_e zu bestimmen, kann man, wie in Kapitel 5 ausführlich erläutert wurde, die Gleichungen (5.3), (5.14) und (5.15) benutzen. Die Berechnung von m_e läßt sich jedoch vereinfachen, wenn man in (5.14) anstelle von (5.3) über Hyperflächen gemittelte Polyakov-Loops betrachtet. Diese sind definiert durch

$$L(z) \equiv \frac{1}{N_x N_y} \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \prod_{\tau=1}^{N_\tau} U_4(x,y,z,\tau) \ . \tag{8.4}$$

Setzt man diesen Wert in (5.14) ein, kann man leicht zeigen, daß dann für das Potential

$$V_1(z,T) \sim e^{-\,m_e(T)\,z} \tag{8.5}$$

gilt. Berücksichtigt man die periodischen Randbedingungen des Gitters, kann man die elektrische Masse m_e schließlich aus folgender Gleichung bestimmen:

$$\frac{V_1(z)}{V_1(z+1)} = \frac{\cosh\left(m_e\left(z - \frac{N_z}{2}\right)\right)}{\cosh\left(m_e\left(z + 1 - \frac{N_z}{2}\right)\right)} \ . \tag{8.6}$$

Da (5.15) und somit auch (8.5) nur für große Abstände gültig sind, ist die aus (8.6) bestimmte elektrische Masse m_e noch explizit z-abhängig: $m_e = m_e(z,T)$. Man spricht auch von einer *lokalen Masse*. Diese soll für große Abstände gegen die gesuchte, z-unabhängige Masse streben, d.h.

$$m_e(z,T) \stackrel{z\,\text{groß}}{\longrightarrow} m_e(T) \ . \tag{8.7}$$

Auf einem Gitter mit periodischen Randbedingungen bedeuten große Abstände, daß

$$z \to \frac{N_z}{2}\,a \stackrel{(3.3)}{=} \frac{N_z}{2\,N_\tau}\,\frac{1}{T} \tag{8.8}$$

gelten soll. Das Betrachten noch größerer Abstände liefert keine neue Information, da die lokalen Massen periodisch um $zT = \frac{N_z}{2\,N_\tau}$ sind.

Für die Kopplung $\beta = 2.97$ ist in Abbildung 8.5 das Potential (8.5) logarithmisch aufgetragen. Für nicht zu große Abstände kann man aus der Steigung der Kurve mittels Gleichung (8.5) die lokale elektrische Masse bestimmen, da sich für kleines zT die periodischen Randbedingungen kaum bemerkbar machen. In Bild 8.6 sind die nach (8.6) bestimmten lokalen elektrischen Massen in Einheiten der Temperatur, d.h. $m_e(zT,T)/T$, zu sehen.

Für $zT \geq 1$ deutet sich ein Plateau für den Wert der elektrischen Masse an, $m_e(T)/T \simeq 2$. Da die Fehler jedoch gerade bei großen Abständen groß sind (siehe auch die Diskussion auf Seite 39), kann man aus den durch die Polyakov-Loop Korrelationen bestimmten lokalen elektrischen Massen nur bei weiterer Verbesserung der Statistik Vorhersagen für die elektrischen Massen machen. Diese unbefriedigende Situation ändert sich jedoch bei Untersuchungen des Gluon-Propagators, deren Ergebnisse im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

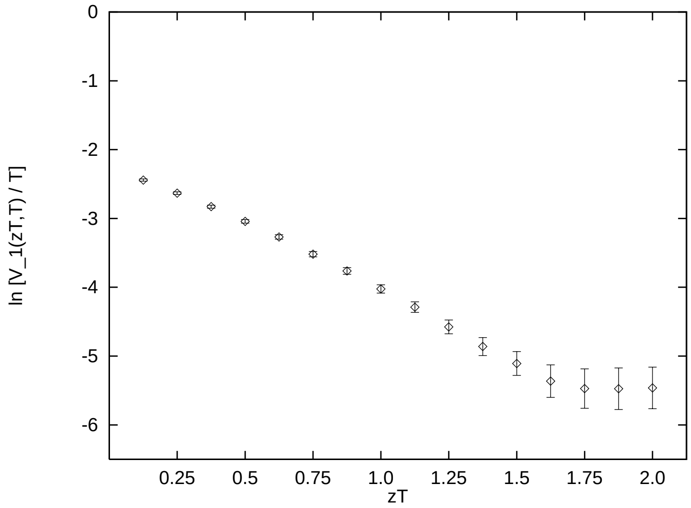

Abbildung 8.5: $\ln V_1(zT,T)$ für $\beta = 2.97$

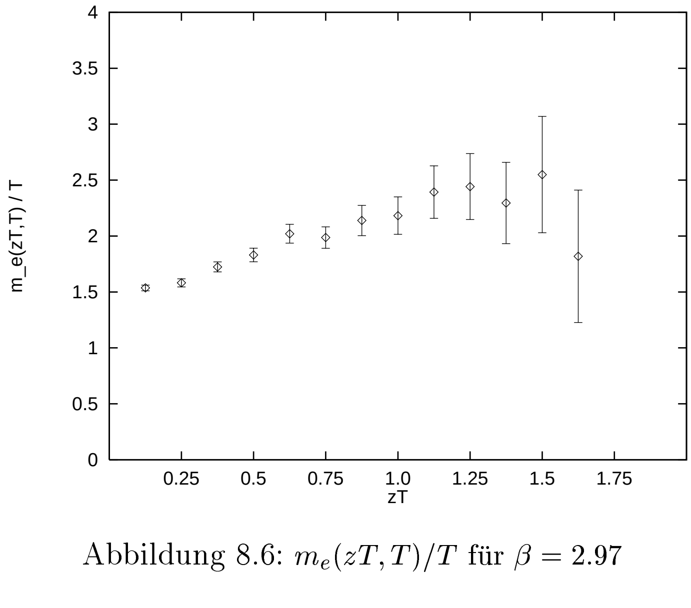

Abbildung 8.6: $m_e(zT,T)/T$ für $\beta = 2.97$

8.4 Berechnung von m_e und m_m aus dem Gluon-Propagator

Analog zum letzten Kapitel bestimmen wir auch hier die lokalen Massen aus über Hyperflächen gemittelten Funktionen. Es sei

$$A_\mu(z) \equiv \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \sum_{\tau=1}^{N_\tau} A_\mu(x,y,z,\tau) \; . \tag{8.9}$$

Definiert man hiermit

$$G_i(z) \equiv \langle \mathrm{Tr}\,(A_i(z) A_i(0)) \rangle \; , \tag{8.10}$$

so folgt aus (5.27) und (5.23) ohne Berücksichtigung der periodischen Randbedingungen

$$\frac{1}{2}\,(G_1(z) + G_2(z)) \quad \sim \quad e^{-\,m_m(T)\,z} \; , \tag{8.11}$$

$$G_4(z) \quad \sim \quad e^{-\,m_e(T)\,z} \; . \tag{8.12}$$

Zieht man die Randbedingungen hinzu, so gilt analog zu Gleichung (8.6)

$$\frac{G_1(z) + G_2(z)}{G_1(z+1) + G_2(z+1)} \quad = \quad \frac{\cosh\left(m_m\left(z - \frac{N_z}{2}\right)\right)}{\cosh\left(m_m\left(z + 1 - \frac{N_z}{2}\right)\right)} \; , \tag{8.13}$$

$$\frac{G_4(z)}{G_4(z+1)} \quad = \quad \frac{\cosh\left(m_e\left(z - \frac{N_z}{2}\right)\right)}{\cosh\left(m_e\left(z + 1 - \frac{N_z}{2}\right)\right)} \; . \tag{8.14}$$

In (8.11) und (8.13) haben wir $G_3(z)$ vernachlässigt. Die Ursache hierfür liegt in der Landau-Eichung. Diese bewirkt, daß

$$G_3(z) \stackrel{!}{=} \text{konstant} \;\; \forall z = 1, \ldots, N_z \tag{8.15}$$

im Falle einer idealen Landau-Eichung gelten muß. Um die magnetische Masse zu berechnen, braucht $G_3(z)$ also nicht berücksichtigt zu werden. Es ist aber dennoch interessant, $G_3(z)$ zu messen, da wir hiermit ein weiteres Kriterium besitzen, um die Güte der Landau-Eichung nachzuprüfen (siehe auch Abschnitt 6.4).

Die Funktionen $G_{av} \equiv \frac{1}{2}(G_1 + G_2)$, G_3 und G_4 sind für $\beta = 2.97$ in Abbildung 8.7 logarithmisch dargestellt. Wie man auch an den Werten in Tabelle F.7 sieht, ist die Konstanz von $G_3(z)$ sehr gut erfüllt. Selbst die größte , für $T = 2.0\,T_c$ gemessenen Abweichung von $1.32 \cdot 10^{-5}\,\%$ ist im Vergleich mit den Fehlern, mit denen $G_3(z)$ behaftet ist, verschwindend gering.

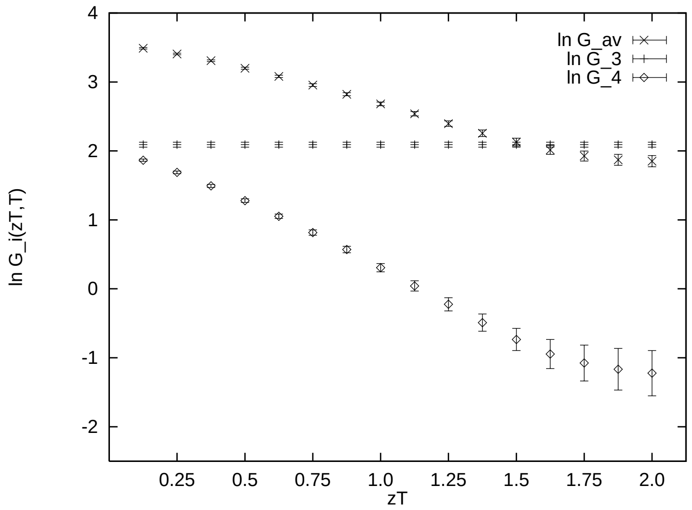

Abbildung 8.7: $G_i(zT, T)$ für $\beta = 2.97$

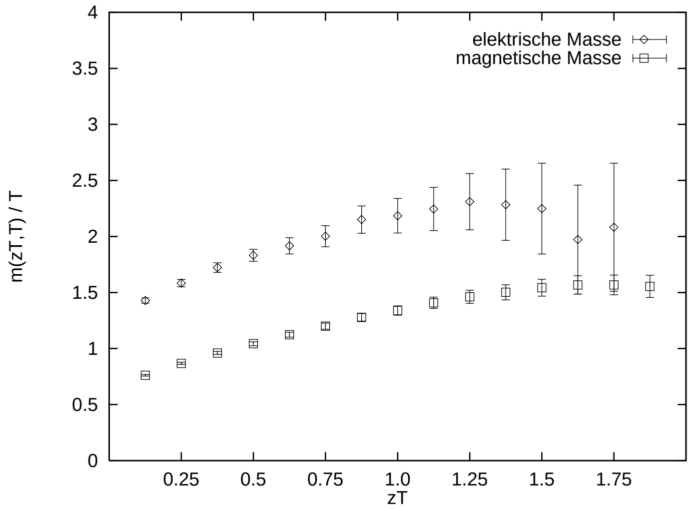

Abbildung 8.8: $m_e(zT, T)/T$ und $m_m(zT, T)/T$ für $\beta = 2.97$

Als ein Beispiel für die nach (8.13) und (8.14) bestimmten lokalen magnetischen und elektrischen Massen sind in Abbildung 8.8 für $\beta = 2.97$ die Werte aus den Tabellen F.9 und F.10 eingezeichnet. Insbesondere die lokale magnetische Masse strebt eindeutig gegen ein Plateau, $m_m(T)/T \simeq 1.55$. Aber auch die Werte für die lokale elektrische Masse bewegen sich im Rahmen der Fehler gegen einen Grenzwert, für den genau wie im letzten Abschnitt $m_e(T)/T \simeq 2$ gilt. Wie man durch Vergleich mit Abbildung 8.6 und den Werten aus Tabelle F.4 sieht, ist diese Tendenz stärker ausgebildet als bei den lokalen elektrischen Massen, die aus den Polyakov-Loop Korrelationsfunktionen extrahiert wurden.

Daß man aus (8.6) und (8.14) die gleiche physikalische Größe bestimmt, soll Abbildung 8.9 unterlegen. Darin sind für $\beta = 2.97$ die nach beiden Verfahren berechneten lokalen elektrischen Massen eingezeichnet. Der Übersicht halber sind die Fehlerbalken nicht mit eingezeichnet.

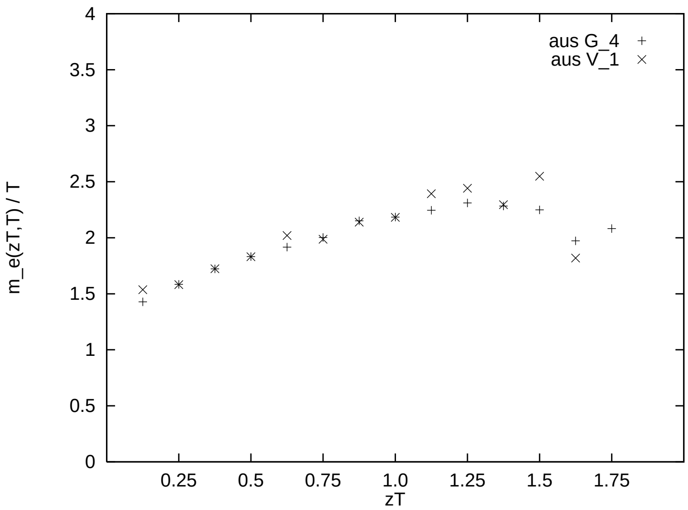

Abbildung 8.9: $m_e(zT,T)/T$ für $\beta = 2.97$ (nach (8.6) und (8.14))

Zur Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der elektrischen und magnetischen Massen sind in Abbildung 8.10 die Werte der lokalen Massen für $zT=1$ eingezeichnet. Für die elektrische Masse soll in niedrigster Ordnung Störungstheorie, also bei hohen Temperaturen,

$$m_e^2(T) \sim g^2(T)\,T^2 \tag{8.16}$$

gelten. Die von uns benutzten Kopplungen liegen bei $\beta \in [2.60, 3.47]$. Dies entspricht einem Temperaturintervall von ungefähr $1.3\,T_c \;-\; 15\,T_c$ (siehe Tabelle 8.1). Nimmt man z.B. an, daß (8.16) oberhalb von $3\,T_c$ gilt, so würde man wegen $g^2(T) \sim 1/\ln\frac{T}{T_c}$ eine Änderung von $m_e(T)/T$ um ca. einen Faktor 2 erwarten. Dieses Verhalten wird

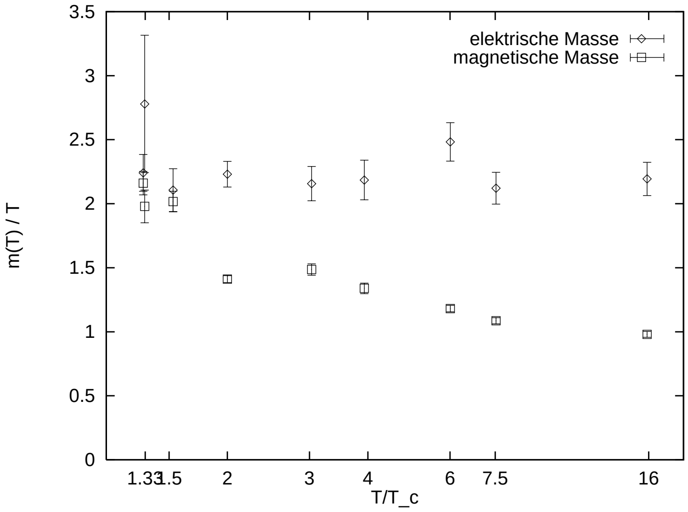

Abbildung 8.10: $m_e(T)/T$ und $m_m(T)/T$ für $zT = 1$

durch unsere Werte nicht bestätigt. Sie lassen vielmehr den Schluß zu, daß $m_e(T)/T$ unabhängig von der Kopplung $g^2(T)$ ist.

Im Gegensatz zur elektrischen Masse sehen wir in der magnetischen Masse einen deutlichen Abfall. In Abbildung 8.11 ist $\left(\frac{m_m(T)}{T}\right)^{-1}$ gegen die logarithmisch aufge-

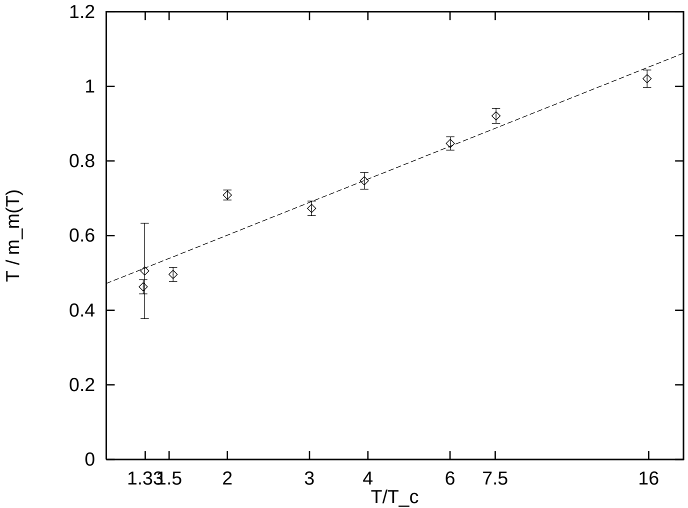

Abbildung 8.11: $\left(\frac{m_m(T)}{T}\right)^{-1}$ für $zT = 1$

tragene Temperatur angegeben. Geht man von der Gültigkeit von (5.29) aus, d.h. $m_m(T) \sim g^2\,T$, so kann man dies als Definition einer T-abhängigen Kopplung interpretieren. Wir machen dazu folgenden Ansatz:

$$\frac{m_m(T)}{T} = c\, g^2(T)\ , \tag{8.17}$$

$$g^2(T) = \left(\frac{11}{12\,\pi^2}\ln\frac{T}{\Lambda_m}\right)^{-1} \tag{8.18}$$

mit einem unbestimmten Skalenparameter Λ_m und einem Proportionalitätsfaktor c. Diese beiden Parameter sollen numerisch bestimmt werden. Dazu schreiben wir (8.17) und (8.18) um zu

$$\left(\frac{m_m(T)}{T}\right)^{-1} = c^{-1}\,\frac{11}{12\,\pi^2}\,\ln\frac{T}{T_c} + c^{-1}\,\frac{11}{12\,\pi^2}\,\ln\frac{T_c}{\Lambda_m}\ . \tag{8.19}$$

Die Werte von $\left(\frac{m_m(T)}{T}\right)^{-1}$ sollen also linear mit $\ln\frac{T}{T_c}$ anwachsen. Im Rahmen der Fehler können wir dieses Verhalten gerade für den höheren Temperaturbereich sehr gut nachweisen. Auf der Basis der zu $T \geq 3\,T_c$ gehörenden fünf Wertepaare liefert ein Geradenfit

$$\left(\frac{m_m(T)}{T}\right)^{-1} = 0.217(17)\,\ln\frac{T}{T_c} + 0.451(31)\ . \tag{8.20}$$

Die Zahlen in Klammern geben den Fehler auf den letzten Stellen an. Man erhält $c = 0.428(34)$. Für Λ_m folgt $\Lambda_m = 0.125(38)\,T_c$. Mit diesen Zahlen kann man jetzt nach Gleichung (8.18) die T-abhängige Kopplung berechnen. Für $T = 3\,T_c$ folgt z.B.

$$g^2(3\,T_c) = 3.39(33)\ . \tag{8.21}$$

In [6] wurde aus Berechnungen zur räumlichen Saitenspannung (RS) hierfür ein Wert von $g^2_{RS}(3\,T_c) = 2.63(14)$ ermittelt. Beide Verfahren liefern also für die T-abhängige Kopplung Werte, die in der gleichen Größenordnung liegen.

8.5 Untersuchung auf Gribov-Kopien

Die Landau-Eichung wird auf dem Gitter durch eine Maximierung der Größe

$$\sum_{\mu,x} \mathrm{Tr}\,\left[U^g_\mu(x) + U^{g\,\dagger}_\mu(x)\right] \tag{8.22}$$

erreicht (siehe Seite 44). Man kann (8.22) daher benutzen, um eine eventuelle Abhängigkeit der elektrischen und magnetischen Massen von Gribov-Kopien (siehe Seite 20) zu studieren [48],[49],[54]. Für $\beta = 3.12$ haben wir dazu 100 Konfigurationen untersucht. Zu jeder dieser Konfigurationen haben wir weitere 25, nur durch *Zufallstransformationen* voneinander getrennte Konfigurationen erzeugt[1]. Dann wurden m_e/T und m_m/T für den Abstand $zT = 1$ folgendermaßen bestimmt: Zuerst wurden beide Observablen auf der Grundlage der 100 ursprünglichen Konfigurationen berechnet. Im zweiten Schritt wurde neben jeder Ursprungskonfiguration auch die erste Zufallskonfigurationen betrachtet. Zur erneuten Berechnung von m_e/T und m_m/T wurde dann aber auf jeder Konfiguration nur diejenige ausgewählt, bei der (8.22) maximal war. Bei jedem weiteren Schritt wurde jeweils eine weitere Zufallskonfiguration berücksichtigt, wobei auf jeder Konfiguration immer nur diejenige mit dem maximalen Wert für (8.22) zur Berechnung von m_e/T und m_m/T herangezogen wurde. m_e/T und m_m/T wurden also jeweils auf einer Grundlage von 100 Konfigurationen gemessen. Die Abhängigkeit von m_e/T und m_m/T von der Anzahl der berücksichtigten Konfigurationen ist in den Bildern 8.12 und 8.13 dargestellt und in F.11 tabelliert. Die magnetische Masse zeigt sich nur wenig sensitiv bezüglich

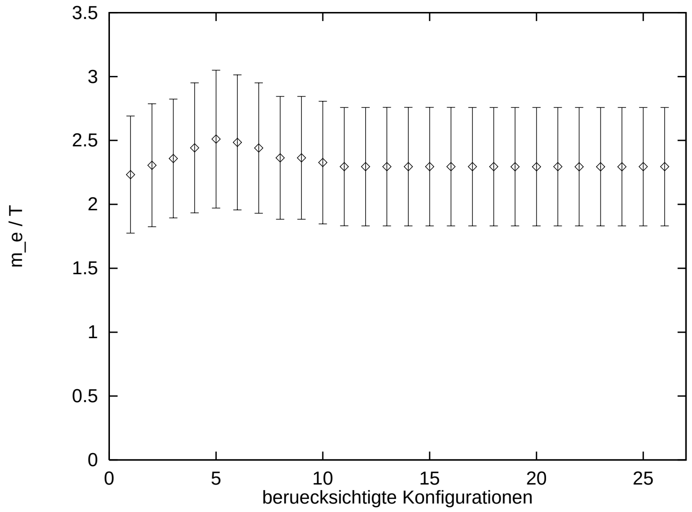

Abbildung 8.12: Gribov-Kopie Untersuchung für $\frac{m_e}{T}$ für $zT = 1$

der Anzahl der berücksichtigten Konfigurationen. Aber auch die Schwankungen der elektrischen Masse sind verglichen mit den geschätzen Fehlern zu gering, als daß man von einer Abhängigkeit von m_e/T von Gribov-Kopien sprechen könnte.

[1]Mit Zufallstransformation wird eine lokale Transformation der Linkvariablen nach Gleichung (3.25) bezeichnet, bei der die Matrizen $G(n)$ zufällig gewählt werden.

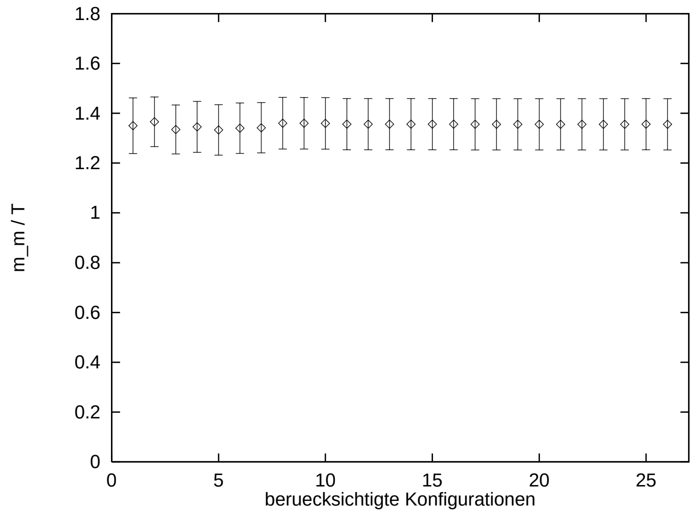

Abbildung 8.13: Gribov-Kopie Untersuchung für $\frac{m_m}{T}$ für $zT = 1$

Kapitel 9

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Hochtemperaturphase der reinen $SU(2)$-Gittereichtheorie untersucht. Alle Rechnungen wurden oberhalb der kritischen Temperatur T_c des Deconfinement-Phasenüberganges durchgeführt.

Ein erster Schwerpunkt lag in der numerischen Fixierung der Landau-Eichung. Dabei wurde festgestellt, daß sich eine Konfiguration, auf die die aus der Literatur bekannten Eichfixierungsalgorithmen ([17],[18],[47]) angewendet werden sollen, in der zu den Algorithmen passenden Phase der spontan gebrochenen $Z(2)$-Symmetrie befinden muß.

Weitere Untersuchungen befaßten sich mit den Verhältnissen von Singulett-, Triplett- und farbgemittelten Potential. Die aus der Störungstheorie bekannten Voraussagen konnten sehr gut bestätigt werden.

Der Hauptteil der Arbeit bestand in der Bestimmung von Abschirm- oder Screeningmassen. Die elektrische Screeningmasse wurde auf zwei Arten ermittelt, zum einen aus Polyakov-Loop Korrelationsfunktionen und zum anderen aus dem Gluon-Propagator. Die von beiden Verfahren gelieferten Ergebnisse haben sich im Rahmen der Fehler als sehr gut miteinander verträglich herausgestellt, wobei die aus dem Gluon-Propagator bestimmten elektrischen Massen die kleineren Fehler aufweisen. Eine Bestätigung des aus niedrigster Ordnung Störungstheorie bekannten Zusammenhanges $m_e(T)/T \sim g$ konnten wir nicht nachweisen. Vielmehr scheinen sich unsere Werte für $m_e(T)/T$ mit zunehmender Temperatur konstant zu verhalten, $m_e(T)/T \simeq 2$.

Die Bestimmung der magnetischen Screeningmasse erfolgte ebenfalls aus Betrachtungen des Gluon-Propagators. Die magnetischen Massen konnten mit sehr kleinen

Fehlern ermittelt werden und scheinen für hohe Temperaturen ($T \geq 3\,T_c$) die Vermutung $m_m(T)/T \sim g^2$ zu bestätigen. Für eine über $m_m(T)/T = c\,g^2(T)$ definierte T-abhängige rennende Kopplung haben wir z.B. $g^2(3\,T_c) = 3.39(33)$ erhalten, was vergleichbar mit Ergebnissen aus Untersuchungen der räumlichen Saitenspannung [6] ist.

Der letzte Teil der Arbeit bestand in einer Untersuchung der elektrischen und magnetischen Massen auf eine mögliche Abhängigkeit von Gribov-Kopien. Eine solche Abhängigkeit konnte nicht nachgewiesen werden. Dies ist befriedigend, da somit die hier in der Landau-Eichung erzielten Meßergebnisse zumindest nicht von der Existenz der Gribov-Kopien abhängig sind.

Inwieweit die hier gefundenen Resultate auch in anderen Eichungen quantitativ gültig bleiben, bedarf weiterer Untersuchungen. Es wäre ebenfalls von großem Interesse, analoge Rechnungen für die $SU(3)$-Eichtheorie durchzuführen.

Anhang A

Das Pfadintegral in der Quantenmechanik

Zur Vereinfachung wird nur ein eindimensionales System betrachtet. Auf dieses wirke ein zeitunabhängiges Potential V, das genügend schnell abfallen soll, d.h.

$$V(q) \to 0 \text{ für } |q| \to \infty \; . \tag{A.1}$$

Der *Hamiltonian*

$$H(p,q) \equiv T + V = \frac{1}{2m} p^2 + V(q) = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 + V(q) \tag{A.2}$$

ist ein hermitescher Operator, der auf dem Hilbertraum der *Zustandsvektoren* $|\psi_n(t)\rangle$ wirkt. Wegen der Eigenschaft (A.1) hat H ein diskretes, nach unten begrenztes *Spektrum*:

$$H|\psi_n(t)\rangle \; = E_n |\psi_n(t)\rangle \text{ mit } E_n < E_{n+1}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{A.3}$$

Die zeitliche Entwicklung der Zustandsvektoren ist gegeben durch den *Zeitentwicklungsoperator* $U(t, t_0)$:

$$|\psi_n(t)\rangle \;\; = \;\; U(t, t_0) \, |\psi_n(t_0)\rangle \tag{A.4}$$

$$\Rightarrow \; U(t_3, t_1) \;\; = \;\; U(t_3, t_2) \, U(t_2, t_1) \; . \tag{A.5}$$

(A.6)

Aus der *Schrödingergleichung* für die Zustandsvektoren folgt, daß auch $U(t, t_0)$ die Schrödingergleichung erfüllt, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = -i \, H \, U(t, t_0) \; . \tag{A.7}$$

Damit erhält man als explizite Darstellung des Zeitentwicklungsoperators

$$U(t,t_0) = \exp\{-iH(t-t_0)\} \ . \tag{A.8}$$

Die Eigenzustände $|q\rangle$ des Ortsoperators $\hat{q}$ sind gegeben durch

$$\hat{q}\,|q\rangle = q|q\rangle \quad \text{mit} \quad \langle q|q'\rangle = \delta(q-q') \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\,|q\rangle\langle q| = 1 \ . \tag{A.9}$$

Definiert man als *Wellenfunktion*

$$\psi_n(q,t) \equiv \langle q|\psi_n(t)\rangle \ , \tag{A.10}$$

so folgt für deren zeitliche Entwicklung

$$\begin{aligned} \psi_n(q,t) &= \langle q|\psi_n(t)\rangle = \langle q|U(t,t_0)|\psi_n(t_0)\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_0\,\langle q|U(t,t_0)|q_0\rangle\langle q_0|\psi_n(t_0)\rangle \ . \end{aligned} \tag{A.11}$$

Man definiert die *Greensche Funktion* $G(q,t;q_0,t_0) \equiv \langle q|U(t,t_0)|q_0\rangle$. Also folgt

$$\psi_n(q,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_0\, G(q,t;q_0,t_0)\langle q_0|\psi_n(t_0)\rangle \ . \tag{A.12}$$

Ist das quantenmechanische System zu einer Zeit t_0 bekannt, so besagt Gleichung (A.12), daß man zur Berechnung der Wellenfunktion zu einem späterem Zeitpunkt $t > t_0$ lediglich Kenntnis der Greenschen Funktion $G(q,t;q_0,t_0)$ haben muß. Diese wird daher auch als *Propagator* bezeichnet.

Es wird jetzt die *Pfadintegraldarstellung* von $G(q,t;q_0,t_0)$ hergeleitet. Man benötigt dazu die *Trottersche Produktformel*

$$e^{-it(T+V)} = \lim_{N\to\infty} \left(e^{-iT\frac{t}{N}} e^{-iV\frac{t}{N}}\right)^N \ , \tag{A.13}$$

die für geeignete Operatoren T und V gilt (V darf z.B. nicht das Coulomb-Potential sein). Damit folgt

$$\begin{aligned} G(q,t;q_0,t_0) &= \langle q|U(t,t_0)|q_0\rangle = \langle q|e^{-iH(t-t_0)}|q_0\rangle \\ &= \langle q|\left(e^{-i(T+V)\frac{(t-t_0)}{N}}\right)^N|q_0\rangle \\ &\overset{N\to\infty}{=} \langle q|\left(e^{-iT\frac{(t-t_0)}{N}} e^{-iV\frac{(t-t_0)}{N}}\right)^N|q_0\rangle \ . \end{aligned} \tag{A.14}$$

Man setzt ohne Einschränkung $t_0 = 0$, unterteilt das Zeitintervall $[0,t]$ in N Teilintervalle der Länge ϵ, d.h. $N\epsilon = t$, und fügt (N-1) mal die Vollständigkeitsrelation $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_j\,|q_j\rangle\langle q_j| = 1$ ein. Mit $q_N \equiv q$ folgt

$$G(q,t;q_0,0) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_{N-1} \prod_{j=1}^{N} \langle q_j|e^{-iT\frac{t}{N}} e^{-iV\frac{t}{N}}|q_{j-1}\rangle \ . \tag{A.15}$$

Mittels Vollständigkeitsrelation im Impulsraum und $\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ipq}$ erhält man

$$\langle q_j|e^{-iT\frac{t}{N}}e^{-iV\frac{t}{N}}|q_{j-1}\rangle = \sqrt{\frac{mN}{2\pi it}}e^{-iV(q_{j-1})\frac{t}{N}}e^{-\frac{mN}{2it}(q_j-q_{j-1})^2} \ . \tag{A.16}$$

Setzt man $\epsilon = \frac{t}{N}$, so endet man bei der gewünschten *Darstellung des Propagators $G(q,t;q_0,0)$ im Pfadintegral-Formalismus*:

$$\begin{aligned} G(q,t;q_0,0) &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q_{N-1} \ \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left\{ i\epsilon\sum_{j=1}^{N}\frac{m}{2}\left(\frac{q_j-q_{j-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(q_{j-1})\right\} \ . \end{aligned} \tag{A.17}$$

Für $N\to\infty$ bzw. $\epsilon\to 0$ erhält man für den Exponenten gerade die Wirkung:

$$\begin{aligned} \epsilon\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{q_j-q_{j-1}}{\epsilon}\right)^2 - V(q_{j-1})\right) &\stackrel{\epsilon\to 0}{=} \int_0^t \mathrm{d}t' \ \left(\frac{m}{2}\dot q(t')^2 - V(q(t'))\right) \\ &= \int_0^t \mathrm{d}t' \ L(q(t'),\dot q(t')) \\ &= S(q,t;q_0,0) \ . \end{aligned} \tag{A.18}$$

Eine in der Literatur häufig benutzte *formale* Schreibweise für das Pfadintegral (A.17) ist

$$G(q,t;q_0,0) = \int_{q(0)=q_0}^{q(t)=q}\mathcal{D}q(t') \ \exp\{iS(q,t;q_0,0)\} \ . \tag{A.19}$$

Die Integralgrenzen in (A.19) bedeuten, daß Anfangs- und Endpunkt fest sind, daß also nicht über $\mathrm{d}q_0 = \mathrm{d}q(t_0=0)$ und $\mathrm{d}q_N = \mathrm{d}q(t_N=t)$ integriert werden soll.

Verallgemeinerung auf mehrere Freiheitsgrade: Für ein quantenmechanisches System mit k Freiheitsgraden lautet der Hamiltonoperator

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{k}\frac{p_i^2}{2m_i} + V(q_1,\dots,q_k) \ . \tag{A.20}$$

Hierbei sind $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ k-dimensionale Vektoren, d.h. $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_k)$ und $\mathbf{q} = (q_1,\dots,q_k)$. Wirkung (A.18) und Propagator (A.19) gehen nun über in

$$S(\mathbf{q},t;\mathbf{q}_0,0) = \int_0^t \mathrm{d}t' \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{2}\dot q_i(t')^2 - V(\mathbf{q}(t'))\right) \ , \tag{A.21}$$

$$G(\mathbf{q},t;\mathbf{q}_0,0) = \int_{\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}}\mathcal{D}\mathbf{q}(t') \ \exp\{iS(\mathbf{q},t;\mathbf{q}_0,0)\} \ . \tag{A.22}$$

Die formale Schreibweise von Gleichung (A.22) deutet an, daß die eindimensionalen Integrale aus Gleichung (A.17) durch k-dimensionale Integrale ersetzt werden sollen.

Anhang B

Statistische Mechanik – das großkanonische Ensemble

Um den Begriff der *Temperatur* in eine Feldtheorie einführen zu können, benötigt man einige Begriffe und Gleichungen aus der statistischen Mechanik.

Den Ausgangspunkt bildet ein *großkanonisches Ensemble*. Damit bezeichnet man ein (kleines) System, daß sich in einem *Wärme-* und *Teilchenbad* befindet, daß also von einem größeren sog. *Reservoir* umgeben ist, mit welchem es Wärme und Teilchen austauschen kann. Dadurch sind in dem kleineren System zusätzlich zum *Volumen* V die *Temperatur* T und das *chemische Potential* μ fest vorgegeben.

Mittels der *statistischen Dichtematrix* $\rho \equiv e^{-\beta(H-\mu N)}$ bestimmt man den *Ensemble-Mittelwert* eines Operators $\mathcal{O}$ bei vorgegebener Temperatur T zu

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\mathrm{Tr}\, \rho\, \mathcal{O}}{\mathrm{Tr}\, \rho} \ . \tag{B.1}$$

Die zentrale Größe, aus der alle thermodynamischen Eigenschaften des Systems abgeleitet werden können, ist die *großkanonische Zustandssumme*. Diese ist definiert durch

$$Z(T, V, \mu) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(H-\mu N)} \ . \tag{B.2}$$

H ist der Hamiltonoperator, N bezeichnet den Teilchenzahloperator und β entspricht der inversen Temperatur, d.h. $\beta = \frac{1}{T}$ (die *Boltzmann-Konstante* wird $k = 1$ gesetzt). Für verschwindendes chemisches Potential erhält man

$$Z(T, V) = \mathrm{Tr}\, e^{-\frac{1}{T}H} \ . \tag{B.3}$$

Man betrachte den in Anhang A eingeführten Propagator $G(q,t;q_0,0)$. Beschränkt man sich auf *periodische Pfade*, bei denen also $q = q_0$ gilt, und definiert man

$$\tilde{Z}(t) \equiv \int \mathrm{d}q\; G(q,t;q,0)\ , \tag{B.4}$$

so folgt

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(t) &= \int \mathrm{d}q\; \langle q|e^{-iHt}|q\rangle = \sum_{n,m}\int \mathrm{d}q\; \langle q|\psi_n\rangle\langle\psi_n|e^{-iHt}|\psi_m\rangle\langle\psi_m|q\rangle \\ &= \sum_n \int \mathrm{d}q\; e^{-iE_n t}\,|\psi_n(q)|^2 = \sum_n e^{-iE_n t} \\ &= Tr\; e^{-iHt}\ .\end{aligned} \tag{B.5}$$

Ersetzt man in (B.5) $it \equiv \tau \to 1/T$, so folgt durch Vergleich mit (B.3)

$$\tilde{Z}\left(-i\frac{1}{T}\right) = Z(T)\ . \tag{B.6}$$

Durch Fortsetzung der Zeit t ins Imaginäre ist es also gelungen, die Temperatur T einzuführen.

Die großkanonische Zustandssumme läßt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}Z(T) &= \tilde{Z}(-i\tau) = \int \mathrm{d}q\; G(q,-i\tau;q,0) \\ &\overset{(A.19)}{=} \int \mathrm{d}q \int_q^q \mathcal{D}q(t')\; \exp\{iS(q,-i\tau;q,0)\}\end{aligned} \tag{B.7}$$

mit

$$S(q,t;q_0,0) \overset{(A.18)}{=} \int_0^t \mathrm{d}t'\; L(q(t'),\dot{q}(t')) = \int_0^t \mathrm{d}t'\; \left(\frac{m}{2}\dot{q}(t')^2 - V(q(t'))\right)\ . \tag{B.8}$$

Wegen $t = -i\tau$ folgt $\frac{\partial}{\partial t} = i\frac{\partial}{\partial \tau}$. Damit kann man die folgenden *euklidischen Größen* definieren:

$$V^E(q) \equiv -V(q) \tag{B.9}$$

$$L^E(q,\dot{q}) \equiv \frac{m}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 - V^E(q) \tag{B.10}$$

$$S^E(q,\frac{1}{T};q,0) \equiv \int_0^{\frac{1}{T}} \mathrm{d}\tau\; L^E(q,\dot{q})\ . \tag{B.11}$$

Man erhält daher für die großkanonische Zustandssumme eine *gewichtete Summe über alle periodischen Pfade*, die an beliebigen Punkten im Ortsraum beginnen und enden:

$$Z(T) = \int_{periodisch} \mathcal{D}q(\tau)\; \exp\{-S^E\}\ . \tag{B.12}$$

Für den Ensemble-Mittelwert des Operators $\mathcal{O}$ (siehe Gleichung (B.1)) folgt

$$\langle\mathcal{O}\rangle_T = \frac{\int_{per}\mathcal{D}q(\tau)\,\mathcal{O}\,\exp\{-S^E\}}{\int_{per}\mathcal{D}q(\tau)\;\exp\{-S^E\}}\ . \tag{B.13}$$

Anhang C

Gluon-Propagator und lineare Response Theorie

C.1 Formalismus der linearen Response Theorie

Man betrachte ein Medium von Teilchen, z.B. ein Quark-Gluon Plasma. Dieses werde einer äußeren Störung ausgesetzt, beispielsweise einem statischen Quark-Antiquark Paar. Ist die Störung schwach genug, dann kann man die Erwiderung des Mediums auf diesen äußeren Einfluß in linearer Näherung angeben. Das mathematische Handwerkszeug hierfür liefert die *lineare Response Theorie*.

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit einem zeitunabhängigen Hamilton-Operator H. Die zeitliche Entwicklung der Zustandsvektoren im Schrödinger-Bild wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_S(t)\rangle = H\,|\psi_S(t)\rangle \tag{C.1}$$

beschrieben. Der Zustandsvektor im Heisenberg-Bild ist

$$|\psi_H\rangle = e^{iHt}\,|\psi_S(t)\rangle\ . \tag{C.2}$$

$V(t)$ sei eine äußere Störung des Systems mit $V(t) = 0$ für $t \leq t_0$. Setzt man für den gestörten Zustandsvektor

$$|\bar{\psi}_S(t)\rangle \equiv e^{-iH(t-t_0)}\,U(t)\,|\psi_S(t_0)\rangle\ , \tag{C.3}$$

so erfüllt dieser die modifizierte Schrödinger-Gleichung

$$i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\bar{\psi}_S(t)\rangle = [H + V(t)]\,|\bar{\psi}_S(t)\rangle\ , \tag{C.4}$$

wenn für den Operator $U(t)$

$$
\begin{aligned}
i\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= V_H(t)\,U(t)\ , && \text{(C.5)}\\
U(t) &= \mathbb{1} \quad \text{für} \quad t \le t_0 && \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

gilt. V_H gibt die Störung im Heisenberg-Bild an,

$$V_H(t) \equiv e^{iHt}\,V(t)\,e^{-iHt}\ . \tag{C.7}$$

Da nach Voraussetzung V_H klein sein soll, integriert man (C.5) und entwickelt U für $t \ge t_0$ in Potenzen von V_H:

$$U(t) = \mathbb{1} - i\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t' V_H(t') \ + \ O((V_H)^2)\ . \tag{C.8}$$

Aus der Definitionsgleichung von $|\bar{\psi}_S(t)\rangle$ folgt

$$|\bar{\psi}_S(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}\,|\psi_S(t_0)\rangle - i\,e^{-iH(t-t_0)}\,\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,V_H(t')\,|\psi_S(t_0)\rangle \ + \ O((V_H)^2)\ . \tag{C.9}$$

Sei jetzt $\mathcal{O}(t)$ ein Operator im Schrödinger-Bild. Dann definiert man die durch $V(t)$ vermittelte *Störung des Erwartungswertes* von $\mathcal{O}(t)$ durch

$$\delta\langle\mathcal{O}(t)\rangle \equiv \langle\bar{\psi}_S(t)|\,\mathcal{O}(t)\,|\bar{\psi}_S(t)\rangle - \langle\psi_S(t)|\,\mathcal{O}(t)\,|\psi_S(t)\rangle\ . \tag{C.10}$$

Aus (C.9) folgt daher in erster Ordnung von V

$$\delta\langle\mathcal{O}(t)\rangle = i\int_{t_0}^{\infty}\mathrm{d}t'\,\langle\psi_H|\,\theta(t-t')\,[V_H(t'),\mathcal{O}_H(t)]\,|\psi_H\rangle\ . \tag{C.11}$$

Man kann diesen Formalismus auch auf Ensemble-Mittelwerte

$$\langle\mathcal{O}(t)\rangle = \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}\,\langle n|\,\mathcal{O}(t)\,|n\rangle \tag{C.12}$$

anwenden. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\delta\langle\mathcal{O}(t)\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}\left(i\int_{t_0}^{\infty}\mathrm{d}t'\,\langle n|\,\theta(t-t')\,[V_H(t'),\mathcal{O}_H(t)]\,|n\rangle\right)\\
&= i\int_{t_0}^{\infty}\mathrm{d}t'\,\theta(t-t')\,\langle\,[V(t'),\mathcal{O}(t)]\,\rangle\ . && \text{(C.13)}
\end{aligned}
$$

C.2 Berechnung des Singulett-Potentials

Wir wollen jetzt die lineare Response Theorie anwenden, um das Screeningverhalten zu bestimmen, das ein Quark-Gluon Plasma auf statische Farbladungen ausübt [31].

Um die Rechnungen möglichst einfach und in Anlehnung an aus der QED bekannte Gleichungen zu halten, wird im folgenden die *temporale axiale Eichung*

$$A_4^a(x) = 0 \tag{C.14}$$

benutzt. Sie hat außerdem den Vorteil, frei von Geist-Termen zu sein und zusätzlich das Ruhesystem des Quark-Gluon Plasmas zu definiern.

Aus (5.20) und (C.14) folgt sofort

$$\mathcal{D}_{44} = \mathcal{D}_{4i} = \mathcal{D}_{i4} = 0 \ , \tag{C.15}$$

so daß nur noch die räumlichen Komponenten des Propagators betrachtet werden müssen. Da die Farbabhängigkeit des Propagators durch δ_{ab} gegeben ist (siehe Gleichung (5.21)), werden die Farbindizes ab jetzt weggelassen. In temporaler axialer Eichung kann man den Propagator in der Form

$$\mathcal{D}_{ij}(\omega_n, \vec{q}\,) = \frac{1}{Q^2 + G(Q)} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{\vec{q}^{\,2}} \right) + \frac{1}{Q^2 + F(Q)} \frac{Q^2}{\omega_n^2} \frac{q_i q_j}{\vec{q}^{\,2}} \tag{C.16}$$

schreiben, wobei

$$Q = (\omega_n, \vec{q}\,) \quad \text{mit} \quad Q^2 = \omega_n^2 + \vec{q}^{\,2} \tag{C.17}$$

gilt. F und G sind zwei zunächst unbekannte Funktionen. Da G an einen zu $\vec{q}$ transversalen Tensor multipliziert wird, kann man G mit *magnetischen* Effekten assoziieren. Analog verbindet man mit F *elektrische* Eigenschaften, da der zugehörige Tensor zu $\vec{q}$ parallel ist. Für $F = G = 0$ erhält man den freien Propagator

$$\mathcal{D}_{ij}^{(0)}(\omega_n, \vec{q}\,) = \frac{1}{Q^2} \left(\delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{\omega_n^2} \right) \ . \tag{C.18}$$

Mit F und G kann man die Selbstenergie in der Form

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = F\, P_{\mu\nu}^L + G\, P_{\mu\nu}^T \tag{C.19}$$

schreiben. Für die longitudinalen und transversalen Projektionsoperatoren $P_{\mu\nu}^L$ und $P_{\mu\nu}^T$ gilt in temporaler axialer Eichung

$$\begin{aligned} P_{44}^T = P_{4i}^T = P_{i4}^T = 0 \ , \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j \ , \\ P_{\mu\nu}^L = \delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} - P_{\mu\nu}^T \ . \end{aligned} \tag{C.20}$$

Dann folgt aus (C.19)

$$F = \frac{Q^2}{\vec{q}^{\,2}}\,\Pi_{44}\ , \quad G = \frac{1}{2}\left(\Pi_{ii} - \frac{\omega_n^2}{\vec{q}^{\,2}}\,\Pi_{44}\right)\ . \tag{C.21}$$

Insbesondere gilt

$$F(\omega_n = 0, \vec{q}) = \Pi_{44}(\omega_n = 0, \vec{q})\ , \quad G(\omega_n = 0, \vec{q}) = \frac{1}{2}\,\Pi_{ii}(\omega_n = 0, \vec{q})\ . \tag{C.22}$$

Man erhält so für die in (5.23) und (5.27) definierten elektrischen und magnetischen Screeningmassen

$$\begin{aligned} m_e^2(T) &= F(\omega_n = 0, \vec{q} \to 0)\ , & \text{(C.23)}\\ m_m^2(T) &= G(\omega_n = 0, \vec{q} \to 0)\ . & \text{(C.24)} \end{aligned}$$

Damit sind die hier relevanten Besonderheiten der temporalen axialen Eichung zusammengefaßt, so daß wir nun das Screeningverhalten im Rahmen der linearen Response Theorie diskutieren können. Wir betrachten dazu *reelle* Zeiten.

Die Hamiltondichte des ungestörten QCD-Plasmas ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N_c}\left(\vec{E}^a(\vec{x}, t)\right)^2 + \left(\vec{B}^a(\vec{x}, t)\right)^2\ , \tag{C.25}$$

wobei $\vec{E}^a$ und $\vec{B}^a$ die Operatoren der farbelektrischen und -magnetischen Felder sind. Das farbelektrische Feld soll nun durch ein klassisches, d.h. nicht Operatorwertiges äußeres farbelektrisches Feld $\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{x}, t)$ ergänzt werden, also $\vec{E}^a_{ges.}(\vec{x}, t) = \vec{E}^a(\vec{x}, t) + \vec{\mathcal{E}}^a(\vec{x}, t)$. Dann ist im Formalismus von Anhang C.1 das Störpotential gegeben durch

$$V(t') = \int \mathrm{d}\vec{x}'\, \vec{E}^a(\vec{x}', t')\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{x}', t') + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\vec{x}'\, \left(\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{x}', t')\right)^2\ . \tag{C.26}$$

Bei Anwendung von Gleichung (C.13) fällt der zweite Summand heraus, und man erhält bei einem Einsetzen der Störung zur Zeit $t_0 \to -\infty$ für die Abweichung des farbelektrischen Feldes in der i-ten Komponente

$$\delta\langle E_i^a(\vec{x}, t)\rangle = i\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t' \int \mathrm{d}\vec{x}'\, \mathcal{E}_j^b(\vec{x}', t')\,\theta(t - t')\,\langle\,[E_j^b(\vec{x}', t'), E_i^a(\vec{x}, t)]\,\rangle\ . \tag{C.27}$$

In der temporalen axialen Eichung ist der Zusammenhang zwischen den Feldern $\vec{E}$ und $\vec{A}$ analog zur QED gegeben durch

$$\begin{aligned} E_i^a &\equiv F_{i0}^a \overset{(2.7)}{=} \partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a - g f^{abc} A_i^b A_0^c \\ &\overset{(C.14)}{=} -\frac{\partial A_i^a}{\partial t}\ . \end{aligned} \tag{C.28}$$

Die *retardierte Greensche Funktion* zu reellen Zeiten ist definiert durch

$$iD^{ab\,R}_{\mu\nu}(\vec{x}-\vec{x}',t-t') \equiv \theta(t-t')\,\langle\,[A^a_\mu(\vec{x},t),A^b_\nu(\vec{x}',t')]\,\rangle \;. \tag{C.29}$$

Man erhält sie aus der Greenschen Funktion zu imaginären Zeiten durch analytische Fortsetzung:

$$D^{ab\,R}_{\mu\nu}(\omega,\vec{q}) = \mathcal{D}^{ab}_{\mu\nu}(\omega_n \to \omega + i\epsilon,\vec{q}) \quad \text{mit} \quad \epsilon \to 0^+ \;. \tag{C.30}$$

Es werden ferner die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[A^a_i(\vec{x},t),E^b_j(\vec{x}',t)] = -i\,\delta_{ij}\,\delta_{ab}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{C.31}$$

benötigt. Definiert man jetzt das gesamte farbelektrische Feld durch

$$E^{a\,total}_i(\vec{x},t) \equiv \mathcal{E}^a_i(\vec{x},t) + \delta\langle E^a_i(\vec{x},t)\rangle \;, \tag{C.32}$$

so folgt aus (C.27) - (C.32)

$$\begin{aligned} E^{a\,total}_i(x) = -i\int \mathrm{d}^4x'\,\mathcal{E}^b_j(x')\Big\{&\partial_i\,\partial'_j\,D^{ab\,R}_{00}(x-x') - \partial_i\,\partial'_0\,D^{ab\,R}_{0j}(x-x') \\ &-\partial_0\,\partial'_j\,D^{ab\,R}_{i0}(x-x') + \partial_0\,\partial'_0\,D^{ab\,R}_{ij}(x-x')\Big\} \;. \end{aligned} \tag{C.33}$$

Fourier-Transformation der letzten Gleichung liefert

$$\begin{aligned} E^{a\,total}_i(\omega,\vec{q}) = -i\,\mathcal{E}^b_j(\omega,\vec{q})\Big\{&q_i\,q_j\,D^{ab\,R}_{00}(\omega,\vec{q}) - q_i\,q_0\,D^{ab\,R}_{0j}(\omega,\vec{q}) \\ &-q_0\,q_j\,D^{ab\,R}_{i0}(\omega,\vec{q}) + q_0\,q_0\,D^{ab\,R}_{ij}(\omega,\vec{q})\Big\} \;. \end{aligned} \tag{C.34}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (C.16) und (C.30) folgt

$$E^{a\,total}_i(\omega,\vec{q}) = \left[\frac{\omega^2}{Q^2-G(Q)}\,(\delta_{ij}-\hat{q}_i\,\hat{q}_j) + \frac{Q^2}{Q^2-F(Q)}\hat{q}_i\,\hat{q}_j\right]\mathcal{E}^a_j(\omega,\vec{q}) \;. \tag{C.35}$$

Da hier reelle Zeiten betrachtet werden, ersetzt man den Ausdruck (C.17) durch

$$Q = (\omega,\vec{q}) \quad \text{mit} \quad Q^2 = \omega^2 - \vec{q}^{\,2} \;. \tag{C.36}$$

Das äußere farbelektrische Feld soll jetzt *statisch* sein, d.h. $\vec{\mathcal{E}}^a = \vec{\mathcal{E}}^a(\vec{x})$. Die Fourier-Transformation liefert dann $\omega = 0$, so daß aus (C.35)

$$E^{a\,total}_i(\vec{q}) = \frac{q_i\,q_j}{\vec{q}^{\,2} + F(\omega=0,\vec{q})}\,\mathcal{E}^a_j(\vec{q}) \tag{C.37}$$

folgt. Die Rotationsinvarianz des Feldes $\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{x})$ liefert zusammen mit Gleichung (C.22) für das gesamte farbelektrische Feld

$$\vec{E}^{a\,total}(\vec{q}\,) = \epsilon(\vec{q}\,)\,\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{q}\,)\ , \tag{C.38}$$

wobei die *statische Dielektrizitätsfunktion* durch

$$\epsilon(\vec{q}\,) = \frac{1}{1 + \Pi_{00}(\omega = 0, \vec{q}\,)/\vec{q}^{\,2}} \tag{C.39}$$

gegeben ist. Diese ist ein Maß für die Stärke, mit der das Quark-Gluon Plasma das Feld $\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{q}\,)$ abschwächt. Man beachte, daß Gleichung (C.38) exakt ist unter der Annahme, daß $\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{q}\,)$ schwach genug ist, um den Ansatz der linearen Response Theorie (Gleichung (C.26)) zu rechtfertigen.

Bildet man den Infrarot-Limes $\vec{q} \to 0$, so kann man nach Gleichung (5.23) die Dämpfung des äußeren farbelektrischen Feldes durch die elektrische Masse m_e ausdrücken:

$$\vec{E}^{a\,total}(\vec{q}\,) = \frac{1}{1 + m_e^2(T)/\vec{q}^{\,2}}\,\vec{\mathcal{E}}^a(\vec{q}\,) \quad \text{für} \quad q \to 0\ . \tag{C.40}$$

Die Gleichungen (C.38) - (C.40) sollen jetzt benutzen werden, um die freie Energie eines statischen Quark-Antiquark Paares zu berechnen. Q_j sei die Farbladung des sich bei $\vec{x}_j$ befindlichen Quarks j, $j = 1, 2$. Nach dem Gaußschen Gesetz gilt

$$\vec{\nabla}\,\vec{\mathcal{E}}_j(\vec{x}) = Q_j\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_j)\ . \tag{C.41}$$

Die Lösung von (C.41) ist

$$\vec{\mathcal{E}}_j(\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}\vec{q}}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{q}\,\vec{x}}\,\vec{\mathcal{E}}_j(\vec{q}) \quad \text{mit} \tag{C.42}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_j(\vec{q}) = -i\,\frac{\vec{q}}{q^2}\,e^{-i\vec{q}\,\vec{x}_j}\,Q_j\ . \tag{C.43}$$

Bringt man die zwei ursprünglich unendlich weit voneinander entfernten Quarks an die Orte $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$, so bewirkt dies eine Änderung in der freien Energie des Gesamtsystems gemäß

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, T) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\vec{x}\,\left[\vec{\mathcal{E}}_1(\vec{x})\,\langle\vec{E}_2(\vec{x})\rangle + \vec{\mathcal{E}}_2(\vec{x})\,\langle\vec{E}_1(\vec{x})\rangle\right]\ , \tag{C.44}$$

wobei der Faktor 1/2 eine Doppelzählung vermeiden soll. $\langle\vec{E}_j(\vec{x})\rangle$ ist das gesamte durch den Quark j vermittelte Feld, also (siehe Gleichung (C.38))

$$\langle\vec{E}_j(\vec{x})\rangle = \vec{E}_j^{a\,total}(\vec{x}\,)\ . \tag{C.45}$$

Es folgt schließlich

$$V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, T) = Q_1\, Q_2 \int \frac{\mathrm{d}\vec{q}}{(2\pi)^3}\, \frac{\epsilon(\vec{q}\,)}{\vec{q}^{\,2}}\, e^{-i\vec{q}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \ . \tag{C.46}$$

Sei $\vec{R} \equiv \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Für genügend großen Abstand $R = |\vec{R}|$ kommen die Hauptbeiträge zum Integral (C.46) von $\vec{q} \sim 0$. Es folgt daher nach Gleichung (C.40)

$$V(R, T) = Q_1\, Q_2\, \frac{e^{-m_e(T)\, R}}{4\pi R} \quad \text{für} \quad R \to \infty \ . \tag{C.47}$$

Im Singulett-Zustand gilt $Q_1\, Q_2 = -g^2\, (N_c^2 - 1)/(2N_c)$, so daß man also auch mittels linearer Response Theorie und Benutzung der temporalen axialen Eichung zu dem aus der Störungstheorie bekannten Resultat (5.15) und (5.16) gelangt.

Anhang D

Monte Carlo Simulation

D.1 Einführung

In reiner Gittereichtheorie gilt es, den in Abschnitt 3.4 angegebenen *Ensemble-Mittelwert*

$$\langle\mathcal{O}\rangle_T = \frac{\int_{per}\mathcal{D}U\,\mathcal{O}(U_\mu)\exp\{-S_G[U_\mu]\}}{\int_{per}\mathcal{D}U\exp\{-S_G[U_\mu]\}} \tag{D.1}$$

auszurechnen. Dieser beinhaltet, wie ausführlich erklärt wurde, zwar mathematisch wohldefinierte Integrale, doch ist es nicht möglich, diese *direkt* mit analytischen oder numerischen Methoden zu bestimmen. Der Grund hierfür liegt in der Hochdimensionalität der Integrale.

Dies soll mit Hilfe einiger Zahlen erläutert werden: Man betrachte ein Gitter der Größe $32^3 \times 8$, wie es in den meisten Rechnungen dieser Arbeit benutzt wurde. Zu jedem Gitterpunkt gehören vier Linkvariablen $U \in SU(2)$, die man jeweils durch die drei Generatoren der $SU(2)$ parametrisieren kann. Folglich haben die beiden Integrale in (D.1) die Dimension

$$32^3 \times 8 \times 4 \times 3 = 3 \times 2^{20} \approx 3.1 \times 10^6\ . \tag{D.2}$$

Wegen der Beschaffenheit der Wirkung (siehe (3.37)) kann man (D.1) analytisch nicht bestimmen. Auch eine numerische Integration wäre in endlicher Zeit nicht möglich. Veranschlagt man pro Integral lediglich 10 Integrationsschritte, so müßten immerhin $10^{3.1\times10^6}$ dieser Schritte ausgeführt werden. Abhilfe aus dieser Situation verschafft man sich mit Hilfe der sog. *Monte Carlo Simulation*, die in den nächsten Abschnitten erläutert wird [22],[61].

D.2 Hit-or-miss Monte Carlo

Gesucht wird der Wert des eindimensionalen Integrals

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ , \tag{D.3}$$

wobei die Stammfunktion von f nicht bekannt sein soll. Als Beispiel wählen wir $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) = \frac{x^2 e^x}{1-x+xe^x}$. Dann entspricht I der schraffierten Fläche in Abbildung D.1.

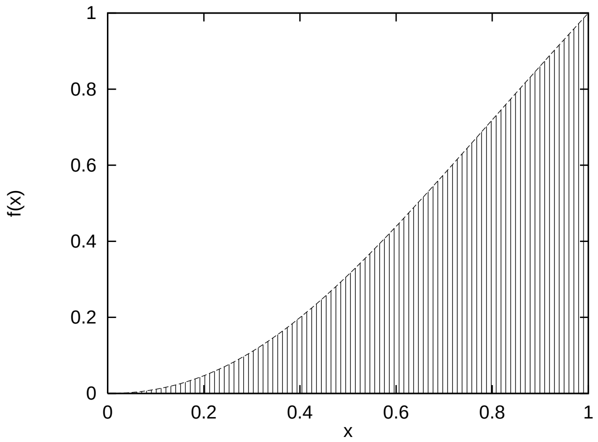

Abbildung D.1: Zum Hit-or-miss Monte Carlo

Aus einem Zufallszahlengenerator entnimmt man zwei zwischen 0 und 1 gleichverteilte (Pseudo-)Zufallszahlen[1] $\underline{r}_1$ und $\underline{r}_2$. Für $\underline{r}_2 \leq f(\underline{r}_1)$ spricht man einen von einem „Treffer", für $\underline{r}_2 > f(\underline{r}_1)$ von einer „Niete". Die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer ist

$$p = \text{schraffierte Fläche / Gesamtfläche} = I \ . \tag{D.4}$$

Führt man n solcher Versuche durch und erzielt man dabei h Treffer, so erhält man $\hat{p} = h/n$ als Schätzung für p bzw. I und

$$\delta = \hat{\sigma}(n) = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} \tag{D.5}$$

als Schätzung für den Fehler.

[1] Bei numerischen Berechnungen werden „Zufalls"zahlen durch einen Computeralgorithmus berechnet. Es handelt sich bei ihnen also strenggenommen um deterministische Größen. Insbesonsere erhält man aus einem Zufallszahlengenerator bei gleichen Anfangsparametern stets die gleiche Sequenz von „Zufalls"zahlen. Man muß daher an einen guten Zufallszahlengenerator die Bedingungen stellen, zum einen die gewünschte Verteilung der Zufallszahlen möglichst gut zu approximieren, zum anderen soll die Periode der erzeugten Zufallszahlen sehr groß sein (da ein Computer nur endlich viele Zahlen darstellen kann, müssen sich irgendwann zwei Parameterpaare des Zufallszahlengenerators gleichen).

D.3 Einfaches Monte Carlo

Eine Verbesserung der Hit-or-miss Methode liefert die einfache Monte Carlo Integration.

Eine unabhängige Schätzung für das Integral I ist bereits durch $f(\underline{r}_i)$ gegeben, wobei $\underline{r}_i$ wiederum eine in $[0, 1]$ gleichverteilte (Pseudo-)Zufallszahl ist. Führt man abermals n Versuche durch, so erhält man $\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\underline{r}_i)$ als Schätzung für I. Die Varianzschätzung für $\bar{f}$ ist $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(f(\underline{r}_i) - \bar{f})^2$, so daß man für den Fehler von $\bar{f}$

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(f(\underline{r}_i) - \bar{f})^2}{n(n-1)}} \tag{D.6}$$

erhält.

Man vergleiche dieses Ergebnis mit (D.5). Während beim Hit-or-miss Monte Carlo die Schätzung für den Fehler mit $1/\sqrt{n}$ abnimmt, verringert sich diese beim einfachen Monte Carlo für eine große Anzahl n von Versuchen mit $1/n$. Ein weiterer Vorteil ist, daß man beim einfachen Monte Carlo statt zwei Zufallszahlen nur eine Zufallszahl pro Versuch erzeugen muß.

D.4 Importance Sampling

Die Idee des Importance Samplings ist, daß *möglichst viele Punkte in das Integrationsgebiet fallen, in dem $f(x)$ groß ist.* Man wählt daher nicht wie beim einfachen Monte Carlo gleichverteilte Zufallszahlen, sondern solche, deren Verteilung den Integranten möglichst gut approximiert.

Die Realisierung dieses Vorhabens sieht folgendermaßen aus: $p(x)$ sei eine Funktion, die $f(x)$ gut approximiere, d.h. die durch

$$F(x) \equiv \frac{f(x)}{p(x)} \tag{D.7}$$

definierte Funktion möge nur wenig variieren. Zusätzlich soll die Integralfunktion von $p(x)$ auf 1 normiert sein:

$$P(x) = \int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \;\; P(1) = 1\ . \tag{D.8}$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{p(x)} p(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}P(x)\ . \qquad \text{(D.9)}
\end{aligned}
$$

Auf Gleichung (D.9) wende man die Methoden des einfachen Monte Carlo an. Man erhält als Schätzung für I jetzt $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(\underline{u}_i)$, wobei die Zufallszahlen $\underline{u}_i$ mit der Wahrscheinlichkeit $p(u)$ verteilt sind. In Analogie zum einfachen Monte Carlo wird auch hier der Fehler wieder die Gestalt von Gleichung (D.6) haben. Da aber nach Konstruktion von F die einzelnen Terme $F(\underline{u}_i)$ nur wenig vom Mittelwert abweichen, wird der Fehler sinken. Der Preis, den man hierfür bezahlen muß, ist eine eventuell aufwendige Konstruktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(u)$. Da auf den meisten Computern nur Generatoren für gleichverteilte Zufallszahlen existieren, muß man sich eventuell aus mehreren dieser Zufallszahlen die geeignete Verteilung konstruieren. Ein Beispiel dafür wird in Abschnitt D.6.3 angegeben.

D.5 Der Wärmebad-Algorithmus

Im allgemeinen will man mit der Monte Carlo Methode nicht eindimensionale Integrale berechnen, da dafür aus dem Bereich der numerischen Mathematik deutlich effizientere Algorithmen (Trapezregel, Simpsonregel) bekannt sind. Das Einsatzgebiet der Monte Carlo Methode ist die Bestimmung von hochdimensionalen Integralen. Man verfahre dazu abwechselnd für jede Integrationsvariable nach dem eindimensionalen Schema, wobei alle übrigen Variablen festgehalten werden sollen. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Integrationsvariable von den übrigen Variablen abhängt, sagt man auch, daß die Letztgenannten ein *Wärme-Reservoir* oder *Wärmebad* für die aktuelle Variable bilden, die bezüglich dieses Reservoirs *thermalisiert* wird (vgl. Anhang B). Dies ist das Grundschema des *Wärmebad Algorithmus*. Dieser ist zwar nur auf wenige physikalische Systeme anwendbar, ist aber gerade für die reine $SU(2)$ Gittereichtheorie extrem effizient. Zwei konkrete Realisierungen dieses Algorithmus werden in den Abschnitten D.6.3 und D.6.4 diskutiert.

D.6 Die Monte Carlo Methode in der statistischen Physik

D.6.1 Markov-Ketten

Zurück zu dem Ensemble-Mittelwert (D.1). Mit $\{U\}$ soll eine *Feldkonfiguration*, d.h. die Gesamtheit aller Linkvariablen $\{U_\mu(n) \,|\, n \in \Gamma \wedge \mu = 1, \ldots, 4\}$, bezeichnet werden. Dann entspricht (D.1) einer (kontinuierlichen) Summe über alle Feldkonfigurationen, und jede Konfiguration $\{U\}$ ist mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu dem sog. Boltzmann-Faktor $\exp\{-S_G[U_\mu]\}$ gewichtet.

Nach der *Ergodentheorie* ist aber auch die Zeit, während der das System in der Konfiguration $\{U\}$ verweilt, durch den gleichen Faktor gegeben. Der Erwartungswert (D.1) läßt sich daher statt durch einen Ensemble-Mittelwert auch durch einen *zeitlichen Mittelwert* bestimmen.

Man könnte also jetzt versucht sein, Importance Sampling mit einer zeitlichen Folge von Konfigurationen $\{U\}_t, t = 1, \ldots, N$ zu betreiben, wobei die Konfigurationen mit

$$P(\{U\}) = \frac{\exp\{-S_G[\{U\}]\}}{\int_{per} \mathcal{D}U \exp\{-S_G[U_\mu]\}} \tag{D.10}$$

verteilt sein müßen. Dies ist offensichtlich nicht möglich, da das Integral im Nenner von (D.10) unbekannt ist. Abhilfe schafft der sogenannte *Metropolis Algorithmus* [51], der die Berechnung dieses Integrals umgeht. Um diesen zu verstehen, werden zunächst einige Definitionen und Sätze aus der Statistik angegeben.

Man betrachte ein System, daß in abzählbar vielen Zuständen $C_1, C_2, \ldots$ vorkommen kann. Diese Zustände entsprechen später den möglichen Konfigurationen $\{U\}$. Übergänge zwischen den C_i's sollen nur zu diskreten Zeiten $t = 1, 2, \ldots$ erlaubt sein. Die Zufallsvariable $\underline{X}_t$ wird definiert als der Zustand, in dem sich das System zur Zeit t befinde. Es sei weiter ein stochastischer Prozeß gegeben, der nacheinander Zustände $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots$ erzeugt. Mit $P(X_t = C_j | X_{t_1} = C_{i_1}, X_{t_2} = C_{i_2}, \ldots, X_{t_n} = C_{i_n})$ wird die bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß sich das System zur Zeit t im Zustand C_j befindet und daß es sich zu den Zeiten t_k in den Zuständen C_{i_k} befunden hat $(k = 1, \ldots, n)$.

<u>Definitionen:</u>

(i) Die Folge $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots$ heißt *Markov-Kette*, wenn die Verteilung von $\underline{X}_t$ nur von dessen unmittelbarem Vorgänger $\underline{X}_{t-1}$ abhängt:

$$\begin{aligned} P(X_t = C_j | X_{t-1} = C_{i_{t-1}}, \ldots, X_2 = C_{i_2}, X_1 = C_{i_1}) \\ = P(X_t = C_j | X_{t-1} = C_{i_{t-1}}) \;. \end{aligned} \tag{D.11}$$

Man sagt auch, eine Markov-Kette habe kein Gedächtnis.

Wir werden nur solche Markov-Ketten betrachten, bei denen die Wahrscheinlichkeiten (D.11) t-unabhängig sind. Man spricht dann von *stationären* Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P_{ij} \equiv P(C_i \to C_j) \equiv P(X_t = C_j | X_{t-1} = C_i) \ . \tag{D.12}$$

(ii) Sind $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots$ die durch einen Markov-Prozeß erzeugten Zustände und ist $\mathcal{O}$ eine Observable, die auf diesen Zuständen berechnet wird, dann kann man den „zeitlichen" Mittelwert von $\mathcal{O}$ über N Elemente der Markov-Kette definieren als

$$\langle \mathcal{O} \rangle_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{O}(C_{i_k}) \ . \tag{D.13}$$

$\langle \mathcal{O} \rangle_N$ ist die Größe, die man in der Praxis ausrechnet. Es muß daher gezeigt werden, wie diese mit dem Ensemble-Mittelwert über alle gewichteten Konfigurationen zusammenhängt.

(iii) *n-Stufen-Übergangswahrscheinlichkeit*

$$P_{ij}^{(n)} \equiv P(X_t = C_j | X_{t-n} = C_i) \tag{D.14}$$

(iv) *Erst-Übergangswahrscheinlichkeit*

$$F_{ij}^{(n)} \equiv P(X_t = C_j, X_{t-1} \neq C_j, \ldots, X_{t-n+1} \neq C_j | X_{t-n} = C_i) \tag{D.15}$$

(v) *Mittlere Erst-Übergangszeit*

$$M_{ij} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n F_{ij}^{(n)} \quad , \text{vorausgesetzt} \quad \sum_{n=1}^{\infty} F_{ij}^{(n)} = 1 \tag{D.16}$$

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} F_{ii}^{(n)} = 1$ gilt, heißt der Zustand C_i *wiederkehrend* und M_{ii} wird als *mittlere Wiederholungszeit* bezeichnet. Ist $M_{ii} < \infty$, so heißt C_i *positiv*, andernfalls ($M_{ii} \to \infty$) *null*.

(vi) Gilt $P_{ii}^{(n)} \neq 0$ nur dann, wenn n ein Vielfaches von d ist, dann hat der Zustand C_i die *Periode d*. Ist $d = 1$, so heißt C_i *aperiodisch*.

(vii) Wenn C_i und C_j gegenseitig zugängig sind, d.h. wenn es Zahlen m und n mit $P_{ij}^{(m)} \neq 0$ und $P_{ji}^{(n)} \neq 0$ gibt, dann gehören C_i und C_j zu *derselben Klasse*.

(viii) Eine Markov-Kette heißt *irreduzibel*, falls alle ihre Zustände zu derselben Klasse gehören.

Mit diesen Definitionen können jetzt die Aussagen der folgenden Sätze verstanden werden.

<u>Sätze:</u>

(i) Zustände einer Klasse sind entweder alle nicht wiederkehrend oder alle positiv oder alle null. Alle Zustände einer Klasse haben dieselbe Periode.

(ii) Für endliche irreduzible Ketten sind alle Zustände positiv.

(iii) Wenn eine Markov-Kette irreduzibel ist und wenn alle ihre Zustände positiv und aperiodisch sind, dann ist

$$\pi_j \equiv \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{1}{M_{jj}} \ . \tag{D.17}$$

Der Satz von Zahlen $\{\pi_j\}$ ist eindeutig und erfüllt die Gleichungen

$$\pi_j > 0 \ , \quad \sum_j \pi_j = 1 \quad \text{und} \quad \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \ . \tag{D.18}$$

Man beachte, daß der Grenzwert π_j in (D.17) unabhängig vom Ausgangszustand C_i ist. Ferner bleibt der Satz $\{\pi_i\}$ unverändert, wenn man auf ihn die Übergangswahrscheinlichkeiten $\{P_{ij}\}$ anwendet. Die Zustände der Markov-Kette können daher als *Gleichgewichtszustände* betrachtet werden, und π_j gibt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Zustand C_j an.

(iv) Gegeben seien eine irreduzible Markov-Kette und ein Satz von Zahlen $\{\pi_j\}$, der die Bedingungen (D.18) erfüllt. Wenn die Zustände der Markov-Kette aperiodisch sind, dann sind die Zahlen $\{\pi_j\}$ eindeutig, die Zustände positiv und Gleichung (D.17) gilt.

(v) Gegeben sei eine irreduzible Markov-Kette mit positiven Zuständen. Wenn

$$M_{ii}^{(2)} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^2 F_{ii}^{(n)} < \infty \tag{D.19}$$

gilt, dann strebt der zeitliche Mittelwert (D.13) gegen den Ensemble-Mittelwert

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \sum_i \pi_i \mathcal{O}(C_i) \ , \tag{D.20}$$

wobei der statistische Fehler mit $O(1/\sqrt{N})$ abnimmt.

Wir verfügen jetzt über den notwendigen Formalismus, um einen Ensemble-Mittelwert durch einen zeitlichen Mittelwert über eine Markov-Kette auszurechnen. Es stellt sich nun die Frage, wie man eine Markov-Kette $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots$ zu konstruieren hat, d.h. wie man die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij} = P(C_i \to C_j)$ zu wählen hat, damit die Markov-Kette die gewünschte Gleichgewichtsverteilung $\{P_{eq}(C_i)\}$ mit $P_{eq}(C_i) \equiv \pi_i$ besitzt.

Bislang haben wir nur einen abzählbaren Satz Zustände zugelassen. Um den gerade eingeführten Formalismus auch auf Systeme mit kontinuierlich vielen Zuständen – insbesondere auf reine Eichtheorie – anwenden zu können, muß man die Wahrscheinlichkeiten zu Wahrscheinlichkeitsdichten transformieren und die Summen durch Integrale ersetzen. Die Bedingungen (D.18) lauten dann

$$P_{eq}(C) > 0\ , \quad \int \mathrm{d}C\, P_{eq}(C) = 1 \quad \text{und} \quad P_{eq}(C) = \int \mathrm{d}C'\, P_{eq}(C')\, P(C \to C')\ . \tag{D.21}$$

Im Hinblick auf die Anwendung in der reinen Eichtheorie wählen wir wegen (D.10) für die Gleichgewichtsverteilung

$$P_{eq}(C) = \frac{e^{-S(C)}}{\int \mathrm{d}C'\, e^{-S(C')}}\ . \tag{D.22}$$

Die beiden ersten Bedingungen von (D.21) sind automatisch erfüllt. Damit auch die dritte Gleichung gilt, reicht es aus, für die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(C \to C')$ zu fordern, daß diese die Bedingungen des *detaillierten Gleichgewichtes* erfüllen sollen, d.h.

$$\begin{aligned} P_{eq}(C)\, P(C \to C') &= P_{eq}(C')\, P(C' \to C) \\ \Rightarrow \quad e^{-S(C)}\, P(C \to C') &= e^{-S(C')}\, P(C' \to C)\ . \end{aligned} \tag{D.23}$$

Die (nicht mögliche) Berechnung des Nenners von (D.22) fällt in der „detailed balance“ Bedingung (D.23) also gerade heraus!

Es folgt bei korrekter Normierung der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P_{eq}(C) &= \frac{e^{-S(C)}}{\int \mathrm{d}C''\, e^{-S(C'')}} \underbrace{\int \mathrm{d}C'\, P(C \to C')}_{=1} \\ &\overset{(D.23)}{=} \int \mathrm{d}C'\, \frac{e^{-S(C')}}{\int \mathrm{d}C''\, e^{-S(C'')}}\, P(C' \to C) \\ &= \int \mathrm{d}C'\, P_{eq}(C')\, P(C' \to C)\ , \end{aligned}$$

d.h. auch die dritte Gleichung von (D.21) gilt.

Um den Ensemble-Mittelwert $\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathrm{d}C\, P_{eq}(C) \mathcal{O}(C)$ zu bestimmen, ist also folgendermaßen vorzugehen: Man konstruiere sich eine Markov-Kette, deren Übergangswahrscheinlichkeiten $P(C \to C')$ der „detailed balance“ Gleichung (D.23) genügen.

Ferner versichere man sich, daß die so erzeugte Markov-Kette irreduzibel ist und nur aus aperiodischen Zuständen besteht. Dann sind die Bedingungen von Satz (iv) erfüllt, und man kann wegen Satz (v) hoffen, daß $\langle \mathcal{O} \rangle$ durch den „zeitlichen" Mittelwert $\langle \mathcal{O} \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{O}(C_{i_k})$ approximiert wird (bei einem Fehler von $O(1/\sqrt{N})$).

Abschließend noch zwei Bemerkungen:

(i) In [15] wird gezeigt, daß die Abweichung der Wahrscheinlichkeit eines durch einen Markov-Prozeß erzeugten Zustandes C von der Gleichgewichtswahrscheinlichkeit mit jedem Markov-Schritt abnimmt. Bezeichnet man mit $P_N(C)$ die Wahrscheinlichkeit, den Zustand C nach dem N-ten Markov-Schritt zu finden, und definiert man $\sigma_N \equiv \sum_C |P_N(C) - P_{eq}(C)|$, dann gilt $\sigma_{N+1} \leq \sigma_N$.

Da man es bei der Erzeugung einer Markov-Kette nicht sofort mit Gleichgewichtszuständen zu tun hat, darf man zur Berechnung des (zeitlichen) Markov-Ketten Erwartungswertes nicht die Anfangszustände in der Kette berücksichtigen. Wieviele Zustände man verwerfen muß, hängt von der gegebenen Situation ab. Man sagt auch, man muß das System erst *thermalisieren*.

(ii) Die Bedingung des detaillierten Gleichgewichtes legt die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(C \to C')$ nicht eindeutig fest. Man kann diese Freiheit nutzen, um einen möglichst effizienten, dem aktuellen Problem angepaßten Algorithmus zur Erzeugung der Markov-Kette zu konstruieren. Als Beispiele werden in den nächsten Abschnitten der Metropolis- und der Wärmebad-Algorithmus besprochen.

D.6.2 Der Metropolis-Algorithmus

Sei C der aktuelle Zustand in der Markov-Kette, der erneuert werden soll. In dem von Metropolis et al. entwickelten Algorithmus [51] wird zunächst ein Test-Zustand C_T mit einer Übergangswahrscheinlichkeit $P_T(C \to C_T)$ vorgeschlagen, für die eine Art *Mikroreversibilität* gelten soll:

$$P_T(C \to C_T) = P_T(C_T \to C) \; . \tag{D.24}$$

Zusätzlich muß man fordern, daß der gesamte Zustandsraum durch P_T erreicht wird, um die Ergodizitätsbedingung $P_{eq}(C) > 0$ zu gewährleisten. Wenn C_T ein größeres Boltzmann-Gewicht als C hat, d.h. wenn $e^{-S(C_T)} > e^{-S(C)}$ gilt, dann wird C_T als neuer Zustand C' gewählt. Gilt andererseits $e^{-S(C_T)} < e^{-S(C)}$, dann ziehe man eine in $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $\underline{r}$ und setze

$$C' = \begin{cases} C_T & \text{falls } \underline{r} \leq \frac{e^{-S(C_T)}}{e^{-S(C)}} \\ C & \text{sonst} \end{cases} \; . \tag{D.25}$$

Die sog. *Akzeptanzwahrscheinlichkeit* für den Test-Zustand ist also

$$P_{Akzept.} = \min\left(1, \frac{e^{-S(C_T)}}{e^{-S(C)}}\right) . \tag{D.26}$$

Man kann sich sehr leicht davon überzeugen, daß die hierdurch definierte Übergangswahrscheinlichkeit $P = P_T \cdot P_{Akzept.}$ die Bedingung (D.23) erfüllt.

Wir kommen daher zu der Interpretation von (D.26). Für $e^{-S(C_T)} > e^{-S(C)} \Leftrightarrow S(C_T) < S(C)$ geht das System immer in den Zustand mit geringerer Wirkung über. Dieses Verhalten entspricht den Prinzipien der klassischen Mechanik, nach denen die Wirkung minimiert werden soll. Für $S(C_T) > S(C)$ gibt es im Metropolis-Algorithmus jedoch auch noch eine Wahrscheinlichkeit dafür, in den Zustand mit größerer Wirkung zu gelangen. Dem Quantensystem ist es also erlaubt, sich von dem klassischen Zustand wegzubewegen. Auf diese Weise bringt der Metropolis-Algorithmus *Quantenfluktuationen* in das System. Diese sind auch nötig, damit der Algorithmus nicht in ein lokales Minimum der Wirkung, welches nicht dem Gleichgewichtszustand entspricht, läuft.

Anwendung des Metropolis-Algorithmus auf die reine Eichtheorie

Die Zustände des Systems sind nun durch die Konfigurationen $\{U\}$ gegeben. Man kann einen Markov-Update $\{U\} \to \{U'\}$ mittels Metropolis-Algorithmus auch *lokal* durchgeführen. Das bedeutet, daß nicht die ganze Konfiguration auf einmal erneuert wird, sondern daß man jeweils nur eine Linkvariable $U_\mu(x)$ gleichzeitig ändert, während man die Werte aller anderen Links festhält. Hat man jeden Link des Gitters auf diese Weise einmal angesprochen, spricht man von einem *Sweep*. Dieser lokale Metropolis-Algorithmus kann in der Regel einfach programmiert werden, ist meistens jedoch (genauso wie der globale Metropolis-Algorithmus) nicht sehr effizient. Der Grund hierfür liegt in Gleichung (D.26). Ist der vorgeschlagene Test-Link $U_\mu^T(x)$ nahe bei dem alten Link $U_\mu(x)$, dann werden die Änderung in der Wirkung klein und die Akzeptanzwahrscheinlichleit groß sein. Ist $U_\mu^T(x)$ jedoch weit von $U_\mu(x)$ entfernt, wird sich i.a. die Wirkung deutlich vergrößern, was zu einem exponentiellen Abfall von $P_{Akzept.}$ führt. Der Konfigurationsraum wird daher nur sehr langsam durchlaufen. Diese Eigenschaft und die Tatsache, daß die neue Konfiguration $\{U'\}$ aus der alten Konfiguration $\{U\}$ berechnet wird, sorgen dafür, daß in der Markov-Kette aufeinanderfolgende Konfigurationen *statistisch nicht unabhängig* sondern stark miteinander *korreliert* sind. Um eine Gitterobservable und den zugehörigen statistischen Fehler dennoch berechnen zu können, kann man zwischen zwei Metropolis-Sweeps (und auch zwischen zwei Heatbath-Sweeps, siehe (D.6.3) und D.6.4)) einen weiteren Algorithmus benutzen, dessen Aufgabe darin besteht, den Konfigurationsraum schneller zu erforschen. Ein solcher Algorithmus ist der in Abschnitt (D.6.5) beschriebene *Overrelaxation-Algorithmus*.

D.6.3 Der Wärmebad-Algorithmus nach Creutz

Die Idee beim *Wärmebad-* oder *Heatbath-Algorithmus* besteht darin, die neuen Links $U'_\mu(x)$ nicht wie beim Metropolis-Algorithmus zufällig zu wählen, sondern mit einer zum Boltzmann-Faktor proportionalen Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathrm{d}P\left(U'_\mu(x)\right) \sim \exp\left\{-S_G[U'_\mu(x)]\right\}\, \mathrm{d}U'_\mu(x)\ . \tag{D.27}$$

Damit wird gewährleistet, daß die Bedingung des detaillierten Gleichgewichtes (D.23) erfüllt ist. Insbesondere muß im Gegensatz zum Metropolis-Algorithmus keine Zeit in die Berechnung von Test-Links investiert werden, die dann eventuell verworfen werden, da nach Konstruktion beim Heatbath-Algorithmus jeder neue Link auch akzeptiert wird.

$S_G[U'_\mu(x)]$ ist die gluonische Wirkung der reinen Gittereichtheorie, Gleichung (3.37), berechnet mit dem neuen Link $U'_\mu(x)$ und den restlichen, nicht veränderten alten Links. Um Schreibarbeit zu sparen, sei im folgenden U der Link, der durch U' erneuert werden soll. Da $S_G[U']$ nicht mehr von U abhängt, ist insbesondere die (lokale) Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(U \to U') \sim \exp\{-S_G[U']\} \tag{D.28}$$

unabhängig von der alten Linkvariable U, was eine schnellere Erforschung des Konfigurationsraumes liefert.

Wie beim lokalen Metropolis-Algorithmus wende man den Heatbath-Algorithmus iterativ auf alle Linkvariablen an. In diesem Sinne ist auch der Heatbath-Algorithmus *lokal*.

Es wird jetzt gezeigt, wie man für die reine $SU(2)$-Gittereichtheorie den Heatbath-Algorithmus realisieren kann [14]. Wir benutzen dazu die Ergebnisse aus Abschnitt (3.3). Für die Linkvariablen und das Gruppenmaß schreiben wir wieder

$$U = a_0 \mathbb{1} + i\,\vec{a}\vec{\sigma} \quad \text{mit} \quad a^2 = a_0^2 + \vec{a}^{\,2} = 1\ , \tag{D.29}$$

$$\mathrm{d}U = \tfrac{1}{2\pi^2}\,\delta(a^2-1)\ \mathrm{d}^4 a\ . \tag{D.30}$$

Als nächstes wollen wir die Wirkung näher untersuchen. Für $U \in SU(2)$ gilt wegen (D.29) $\mathrm{Tr}\,U = 2\,a_0 = \mathrm{Tr}\,U^\dagger$. Da auch die Plaquettevariablen $U_{\mu\nu}(n) \in SU(2)$ sind, folgt aus (3.37) für die Wirkung

$$S_G[U] = -\frac{\beta}{2}\sum_n \sum_{1\le\mu<\nu\le 4} \mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}(n) \tag{D.31}$$

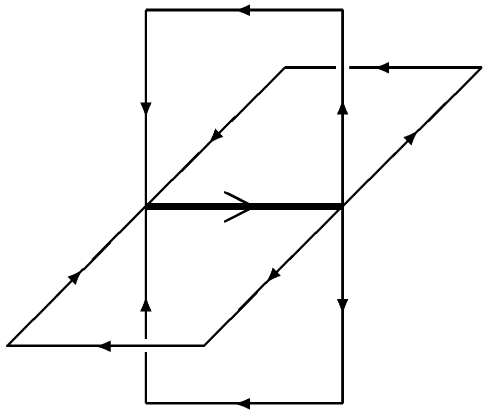

Abbildung D.2: Die zu einem Link gehörenden Plaquetten (3 dim.)

mit $\beta = 4/g^2$ (s. (3.23)). Die Wirkung (D.31) hat die Eigenschaft, lokal zu sein. Ändert man einen einzigen Link U, so betrifft diese Änderung nur die sechs Plaquetten, in denen U enthalten ist. Für drei Dimensionen ist das in Abbildung (D.2) zu sehen.

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte (D.27) folgt daher (der Strich an dem Link U wird aus Gründen, die unten ersichtlich werden, weggelassen)

$$\mathrm{d}P(U) \sim \exp\left\{\frac{\beta}{2}\,\mathrm{Tr}\left(U\sum_{\alpha=1}^{6}\tilde{U}_\alpha\right)\right\}\,\mathrm{d}U\ . \tag{D.32}$$

Die $\tilde{U}_\alpha$'s ($\alpha = 1,\ldots,6$) heißen *Staples* und bezeichnen die sechs Produkte der jeweils drei Linkvariablen, vgl. Abb. D.2. Da auch die Staples Elemente der SU(2) sind, folgt aus (D.29)

$$\sum_{\alpha=1}^{6}\tilde{U}_\alpha = k\,\bar{U} \quad \text{mit} \quad \bar{U}\in SU(2) \quad \text{und} \quad k = \left(\det\sum_{\alpha=1}^{6}\tilde{U}_\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{D.33}$$

In Gleichung (D.32) ersetze man U durch $U\bar{U}^{-1}$. Benutzt man zusätzlich die Invarianz des Haarschen Maßes (3.28), erhält man

$$\mathrm{d}P(U\bar{U}^{-1}) \quad \sim \quad \exp\left\{\frac{1}{2}\,\beta k\,\mathrm{Tr}\,U\right\}\,\mathrm{d}U' \tag{D.34}$$

$$\overset{(D.29),(D.30)}{=} \quad \frac{1}{2\pi^2}\,\delta\Big(a^2-1\Big)\,\mathrm{d}^4a\,e^{\beta k a_0}\ . \tag{D.35}$$

Es wird jetzt die Integration über $|\vec{a}|$ ausgeführt. Wegen

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^4 a\, \delta\Big(a^2-1\Big)\, e^{\beta k a_0} &= \int \mathrm{d}a_0\, e^{\beta k a_0} \int \mathrm{d}\Omega \int \mathrm{d}|\vec{a}|\, |\vec{a}|^2\, \delta\Big(|\vec{a}|^2-(1-a_0^2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}a_0\, (1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{\beta k a_0} \int \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{D.36}$$

gilt

$$\mathrm{d}P(U\bar{U}^{-1}) \sim \mathrm{d}a_0\, (1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}\, e^{\beta k a_0}\, \mathrm{d}\Omega\ . \tag{D.37}$$

Ein Link-Update wird also folgendermaßen durchgeführt: Zuerst berechnet man die sechs Staples U_α, die zu dem zu erneuernden Link gehören. Daraus extrahiert man mittels Gleichung (D.33) den Wert von k. Dann erzeugt man ein Element $U = a_0 \mathbb{1} + i\,\vec{a}\vec{\sigma} \in SU(2)$, wobei a_0 im Intervall $[-1,1]$ mit einer Wahrscheinlichkeit

$$P(a_0) \sim \sqrt{1-a_0^2}\, e^{\beta k a_0} \tag{D.38}$$

verteilt sein muß. Die Richtung von $\vec{a}$ wird zufällig erzeugt, während die Länge durch $|\vec{a}| = (1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}$ festgelegt ist. Ist dieses geschehen, ersetzt man die alte Linkvariable durch $U' = U\bar{U}^{-1}$.

Das verbleibende Problem besteht jetzt darin, die Verteilung (D.38) für a_0 auf einem Computer zu realisieren, d.h. aus gleichverteilten Zufallsvariablen zusammen zu setzen. Dies geschieht in zwei Schritten. Zuerst zieht man eine in $[e^{-2\beta k}, 1]$ gleichmäßig verteilte Zufallszahl $\underline{r}_1$ und wählt als Test-Wert für a_0

$$a_0^T = 1 + \frac{1}{\beta k}\ln \underline{r}_1\ . \tag{D.39}$$

Wie man leicht sieht, ist a_0^T proportional zu $e^{\beta k a_0^T}$ verteilt. Um dem Faktor $\sqrt{1-a_0^2}$ gerecht zu werden, zieht man eine zweite, jetzt in $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl $\underline{r}_2$ und akzeptiert a_0^T, wenn

$$\underline{r}_2 \le \sqrt{1-(a_0^T)^2} \tag{D.40}$$

gilt. Andernfalls verwirft man a_0^T und wiederholt den Vorgang, bis ein a_0^T schließlich akzeptiert wird.

Die Erzeugung von $\vec{a}$ bereitet weniger Umstände. Dazu müssen lediglich zwei gleichverteilte Zufallszahlen $\underline{r}_3 \in [-1,1]$ und $\underline{r}_4 \in [0,1]$ erzeugt werden, und dann setzt man

$$a_1 = \sqrt{1-a_0^2}\,\sqrt{1-\underline{r}_3^2}\,\cos(2\pi \underline{r}_4)\ , \tag{D.41}$$

$$a_2 = \sqrt{1-a_0^2}\,\sqrt{1-\underline{r}_3^2}\,\sin(2\pi \underline{r}_4)\ , \tag{D.42}$$

$$a_3 = \sqrt{1-a_0^2}\,\underline{r}_3\ . \tag{D.43}$$

Der Heatbath-Algorithmus hat neben seiner einfachen Struktur auch den großen Vorteil, daß man ihn auf einem *Parallelrechner* sehr effizient implementieren kann. Obwohl der Algorithmus lokal ist, kann man doch in einem parallelen Rechenschritt die Hälfte aller Linkvariablen zu gegebener Raum-Zeit Richtung gleichzeitig erneuern. Am einfachsten unterteile man dazu die Gitterpunkte analog zu einem Schachbrett in weiß und schwarz bzw. gerade und ungerade. Wegen der einfachen Struktur der Wirkung (siehe auch die Diskussion bzgl. Abb. (D.2)) bleibt die Wahrscheinlichkeitsdichte (D.32) für einen geraden (ungeraden) Link in $\hat{\mu}$-Richtung unverändert, wenn man für einen weitern geraden (ungeraden) Link in derselben Richtung einen lokalen Heatbath-Update durchführt. Bei einem vierdimensionalen Raum-Zeit Gitter benötigt man daher nur acht parallele Rechenschritte für einen vollständigen Heatbath-Sweep. Zur Verdeutlichung sind in Abb. (D.3) für ein zweidimensionales Gitter die Schachbrettstruktur und ein Satz von gleichzeitig erneuerbaren Links eingezeichnet.

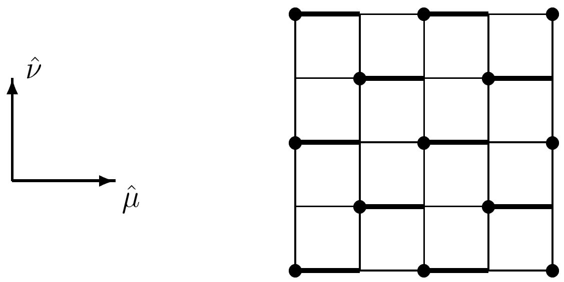

Abbildung D.3: Schachbrett Unterteilung eines 2-dim. Gitters

An dieser Stelle soll nochmals auf die periodischen Randbedingungen der Links auch in den räumlichen Richtungen (Gleichung (3.17)) hingewiesen werden, die ursprünglich eingeführt wurden, um Endlichkeitseffekte des Gitters zu minimieren. Sie erweisen sich bei der Übertragung des gerade beschriebenen Heatbath-Algotithmus auf einen Computer als überaus hilfreich, da so im Programm viele zeitaufwendige Abfragen bzgl. der Gitterränder entfallen.

D.6.4 Der Wärmebad-Algorithmus nach Kennedy und Pendleton

In dem von Creutz vorgeschlagenen und im letzten Abschnitt ausführlich beschriebenen Heatbath-Algorithmus wird zur Erzeugung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

(D.38) zunächst eine mit

$$P(a_0^T) \sim e^{\beta k a_0^T} \tag{D.44}$$

verteilte Test-Größe $a_0^T \in [-1,1]$ erzeugt, die in einem Annahme-Ablehnungs Schritt mit einer Wahrscheinlichkeit $\sqrt{1-(a_0^T)^2}$ akzeptiert wird. Diese Akzeptanzrate sinkt mit wachsendem $c \equiv \beta k$, da sich die für a_0^T wahrscheinlichsten Werte dann nahe bei 1 befinden. Für $c = 1$,3,5 und 10 ist dieses Verhalten in Abb. (D.4) zu sehen. Bei Rechnungen mit hohen Temperaturen und somit großen Werten für β wird die

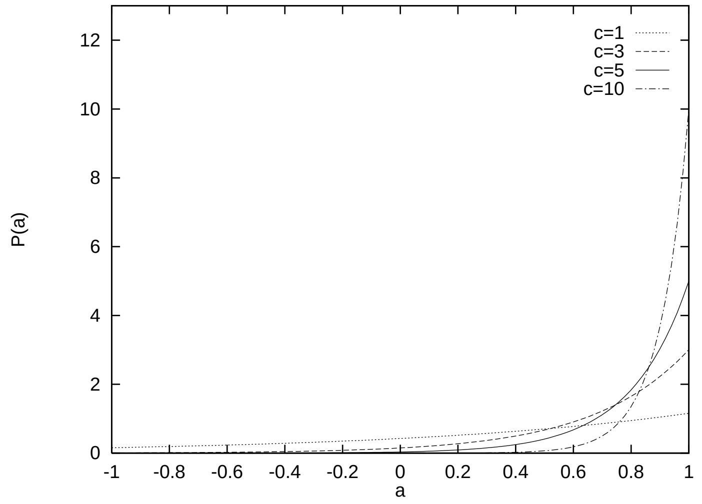

Abbildung D.4: Verteilung von a_0^T bei verschiedenen Werten für $c = \beta k$

Akzeptanzrate sehr klein sein. Es wurde daher in [39] ein Algorithmus vorgeschlagen, der für große Werte von $\beta k a_0^T$ die Verteilung (D.38) sehr gut approximiert, aber wesentlich effizienter ist als das Creutzsche Verfahren.

Man führt in (D.38) eine Variablentransformation $\delta = \sqrt{(1-a_0)}$ durch. Dann ist δ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(\delta) = \frac{1}{N}\sqrt{1-\frac{1}{2}\delta^2}\,\delta^2 e^{-c\delta^2} \quad \text{mit} \quad \delta \in [0,\sqrt{2}] \tag{D.45}$$

verteilt. Für große Werte der Konstanten c ist diese Verteilung sehr stark bei Null gepeakt und kann daher durch

$$P'(\delta) = \frac{1}{N'}\sqrt{1-\frac{1}{2}\delta^2}\,\delta^2 e^{-c\delta^2} \quad \text{mit} \quad \delta \in [0,\infty[\tag{D.46}$$

approximiert werden. Man erzeugt jetzt eine Testvariable δ^T mit der Verteilung

$$P^T(\delta^T) = \frac{1}{N''}(\delta^T)^2 e^{-c(\delta^T)^2}\ . \tag{D.47}$$

Falls $\delta^T \leq \sqrt{2}$ ist, akzeptiert man δ^T mit einer Wahrscheinlichkeit $\sqrt{1-\frac{1}{2}(\delta^T)^2}$ und setzt $a_0 = 1 - (\delta^T)^2$. Andernfalls wird δ^T verworfen und das Verfahren wiederholt. Drückt man die Akzeptanzwahrscheinlichkeit durch die Variable a_0^T aus, erhält man $\sqrt{\frac{1}{2}(1+a_0^T)}$. Für a_0^T nahe bei 1 liegt somit die Akzeptanzrate deutlich höher als beim Creutz-Algorithmus, Gleichung (D.40).

Zur Erzeugung der Verteilung (D.47) benutzt man die *Box-Muller-Methode*. Sind $\underline{u}$ und $\underline{v}$ zwei in [0,1] gleichverteilte Zufallszahlen, dann sind

$$\underline{x} = \sqrt{-\frac{1}{c}\ln\underline{u}}\ \cos(2\pi\underline{v}) \quad \text{und} \tag{D.48}$$

$$\underline{y} = \sqrt{-\frac{1}{c}\ln\underline{u}}\ \sin(2\pi\underline{v}) \tag{D.49}$$

zwei unabhängige, Gaußverteilte Zufallszahlen mit Varianz $\sigma^2 = \frac{1}{2c}$. $\underline{w} \in [0,1]$ sei eine weitere, gleichverteilte Zufallszahl. Setzt man $\underline{z} = \sqrt{-\frac{1}{c}\ln\underline{w}}$, dann hat

$$\delta_1^T \equiv \sqrt{\underline{x}^2 + \underline{z}^2} \tag{D.50}$$

die gewünschte Verteilung (D.47). Sollte das so erzeugte δ_1^T abgelehnt werden, was bei den in dieser Arbeit benutzten Kopplungswerten nur in ca. 3% aller Fälle zutraf, so hat man mit

$$\delta_2^T \equiv \sqrt{\underline{y}^2 + \underline{z}^2} \tag{D.51}$$

eine zweite, von δ_1^T unabhängige und wiederum nach (D.47) verteilte Zufallszahl, auf die man dann ebenfalls die Annahme-Ablehnungsentscheidung anwendet.

Der Kennedy-Pendleton Algorithmus weist für große β-Werte eine deutlich höhere Akzeptanzrate auf als der Creutz-Algorithmus. Er ist jedoch (geringfügig) rechenintensiver, da mehr Logarithmen und zusätzlich ein Cosinus (und evtl. ein Sinus) berechnet werden müssen. Außerdem werden pro Iterationsschritt vier statt zwei Zufallszahlen benötigt. In der Summe ist der Kennedy-Pendleton Algorithmus jedoch *für große β-Werte effizienter* als der Creutz-Algorithmus.

D.6.5 Der Overrelaxation-Algorithmus

Obwohl beim (lokalen) Heatbath-Algorithmus der erneuerte Link U' nicht mehr vom Wert des alten Links U abhängt, ist eine durch einen Heatbath-Sweep erzeugte Konfiguration sehr stark mit ihrer Vorgänger-Konfiguration korreliert. Dies liegt daran, daß zu der Berechnung von U' die Staple-Summe $\sum_{\alpha=1}^{6} \tilde{U}_\alpha$ (siehe S. 94) herangezogen wird, und diese beinhaltet die Information der zu U benachbarten Links. Man könnte versuchen, diesen Korrelationen gerecht zu werden, indem man nicht alle Konfigurationen in der Markov-Kette zur Berechnung einer Observable heranzieht, sondern z.B. nur jede fünfte Konfiguration als *neu*, d.h. *statistisch unabhängig* betrachtet. Die restlichen Konfigurationen verwirft man, da sie keine wirklich neue Information über das System enthalten. Diese Methode ist jedoch nicht sinnvoll, da die Berechnung einzelner Konfigurationen numerisch sehr aufwendig ist.

Eine elegante, d.h. einfach zu programmierende und nicht sehr rechenintensive Abhilfe bietet der Overrelaxation-Algorithmus ([1],[2],[13],[16]). Dieser ist ein Spezialfall des lokalen Metropolis-Algorithmus. Um den Link U zu ersetzen, wird ein Test-Link

$$U^T = U_0\, U^{-1} U_0 \tag{D.52}$$

vorgeschlagen. Da auch $U = U_0\,(U^T)^{-1} U_0$ ist, gilt für die Übergangswahrscheinlichkeit die geforderte Mikroreversibilität $P_T(U \to U^T) = P_T(U^T \to U)$. An $U_0 \in SU(N_c)$ stellt man die Bedingung, die Wirkung $S_G[U]$ zu minimieren. Wie man an (D.31) - (D.33) sieht, wird das für die $SU(2)$ gerade durch $U_0 = \bar{U}^{-1}$ erreicht. Wegen

$$\mathrm{Tr}\,(U^T \bar{U}) = \mathrm{Tr}\,(\bar{U}^{-1} U^{-1} \bar{U}^{-1} \bar{U}) = \mathrm{Tr}\,\left((U\bar{U})^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,(U\bar{U})$$

bleibt die Wirkung unverändert,

$$S_G[U^T] = S_G[U]\ , \tag{D.53}$$

so daß für die Akzeptanzwahrscheinlichkeit (D.26) $P_{Akzept.} = 1$ gilt. U^T wird also stets als der neue Link U' gewählt, d.h. der $SU(2)$-Overrelaxation-Algorithmus ist *deterministisch*. Wegen (D.52) und (D.53) sagt man, der neue Link $U' = U^T$ liege auf der U gegenüberliegenden Seite (bzgl. U_0).

Für die $SU(2)$ ist der Algorithmus aber auch unabhängig von der Kopplung und daher von der Temperatur, so daß er nur in Verbindung mit einem Heatbath-Algorithmus Sinn macht. Sorgt der letztgenannte für das Thermalisieren der Konfigurationen in der Markov-Kette, so liefert der Overrelaxation-Algorithmus eine Dekorrelation der Konfigurationen.

Alle zu dieser Arbeit angefertigten numerischen Berechnungen basieren auf Markov-Ketten, bei denen aufeinanderfolgende Konfigurationen durch 24 „Big-Sweeps“ voneinander getrennt sind. Diese bestehen jeweils aus acht Overrelaxation-Sweeps, gefolgt von einem Kennedy-Pendleton Heatbath-Sweep.

Anhang E

Jackknife-Fehlerrechnung

Alle in dieser Arbeit angegebenen Fehler wurden nach der *Jackknife Methode* berechnet [22].

Zur Bestimmung der Observablen θ sei eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ vom Umfang n gegeben. $\underline{T} = \underline{T}(x_1, \ldots, x_n)$ sei eine Schätzung für θ. $\underline{T}$ heißt *erwartungstreu*, wenn für den Erwartungswert $E(\underline{T}) = \theta \ \forall n$ gilt. Im allgemeinen wird $\underline{T}$ mit einer *Verzerrung* (engl. *bias*)

$$B(\underline{T}) \equiv E(\underline{T}) - \theta \neq 0 \tag{E.1}$$

behaftet sein. Diese zu minimieren, ist die Aufgabe des Jackknife-Algorithmus. Es wird jetzt die *Methode von Quenouille* vorgestellt:

Man unterteilt die Stichprobe in N Sätze des Umfangs M, also $n = NM$. Durch Weglassen des i-ten Satzes aus der Original-Stichprobe verschafft man sich N neue Stichproben $\underline{T}_i, i = 1, \ldots, N$. Man definiert die *Pseudowerte des Jackknife* als

$$\underline{J}_i \equiv N\underline{T} - (N-1)\,\underline{T}_i \ . \tag{E.2}$$

Der sog. *Jackknife* oder die Jackknife-Schätzung ist dann

$$\underline{J} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{J}_i \tag{E.3}$$

$$= N\underline{T} - (N-1)\,\overline{\underline{T}} \tag{E.4}$$

mit

$$\overline{\underline{T}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{T}_i \ . \tag{E.5}$$

Den Unterschied zwischen $\overline{\underline{T}}$ und $\underline{T}$ wählt man als Schätzung für die Verzerrung:

$$\underline{B} = (N-1)\,(\overline{\underline{T}} - \underline{T}) \ . \tag{E.6}$$

Dann folgt für die Jackknife-Schätzung

$$\underline{J} = \underline{T} - \underline{B} \; . \tag{E.7}$$

Durch dieses Verfahren wurde erreicht, daß in der Verzerrung von $\underline{J}$ höchstens Terme der Ordnung $O(1/n^2)$ auftreten. Es gilt

$$E(\underline{J}) = \theta + O(1/n^2) \; , \tag{E.8}$$

während $E(\underline{T})$ durch Terme der Ordnung $O(1/n)$ von θ abweicht.

Als nächstes schreibe man die Pseudowerte des Jackknife um:

$$\underline{J}_i = \underline{T} - (N-1)\,(\underline{T}_i - \underline{T}) \; . \tag{E.9}$$

Man kann daher die $\underline{J}_i$ auch als bias-korrigierte Meßwerte betrachten. Die Varianz des Mittelwertes $\underline{J}$ schätzt man dann durch die empirische Varianz, also

$$\underline{s}^2(\underline{J}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (\underline{J}_i - \underline{J})^2 \; . \tag{E.10}$$

Benutzt man (E.2) und (E.4), so folgt

$$\underline{s}^2(\underline{J}) = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\underline{T}_i - \overline{\underline{T}}\right)^2 \; . \tag{E.11}$$

Anhang F

Die tabellierten Meßwerte

Auf den folgenden Seiten befinden sich die numerisch bestimmten Meßwerte der untersuchten Observablen. Es werden nur Werte bis zu einem Abstand z/a angegeben, bis zu dem der geschätzte Fehler nicht größer als ca. 20 Prozent des Meßwertes ist.

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	$-\frac{V_1}{V_3}$	$-\frac{V_1}{V_3}$	$-\frac{V_1}{V_3}$
1	1.128 +/– 0.026		1.478 +/– 0.021
2	1.546 +/– 0.020	0.974 +/– 0.183	1.765 +/– 0.021
3	2.031 +/– 0.027	1.442 +/– 0.162	2.183 +/– 0.033
4	2.472 +/– 0.047	1.610 +/– 0.185	2.596 +/– 0.051
5	2.706 +/– 0.071	1.862 +/– 0.284	2.846 +/– 0.078
6	2.844 +/– 0.101	1.596 +/– 0.222	2.749 +/– 0.097
7	3.144 +/– 0.193		3.353 +/– 0.204
8	3.041 +/– 0.221		3.180 +/– 0.278
9	2.849 +/– 0.270		3.465 +/– 0.522
10	3.237 +/– 0.411		
11	2.505 +/– 0.416		

Tabelle F.1: $-\frac{V_1}{V_3}$ für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	$-\frac{V_1}{V_3}$	$-\frac{V_1}{V_3}$	$-\frac{V_1}{V_3}$
1	1.851 +/– 0.009	2.135 +/– 0.010	2.298 +/– 0.010
2	2.061 +/– 0.010	2.298 +/– 0.013	2.403 +/– 0.012
3	2.370 +/– 0.014	2.567 +/– 0.020	2.581 +/– 0.017
4	2.591 +/– 0.024	2.743 +/– 0.030	2.765 +/– 0.033
5	2.775 +/– 0.031	2.831 +/– 0.038	2.838 +/– 0.044
6	2.885 +/– 0.051	3.005 +/– 0.068	2.856 +/– 0.062
7	3.062 +/– 0.078	3.121 +/– 0.078	3.169 +/– 0.111
8	3.123 +/– 0.115	3.073 +/– 0.138	3.251 +/– 0.140
9	2.870 +/– 0.136	3.160 +/– 0.189	3.581 +/– 0.244
10	2.649 +/– 0.192	2.833 +/– 0.240	3.674 +/– 0.390
11	2.774 +/– 0.280	3.172 +/– 0.409	2.654 +/– 0.333
12	3.374 +/– 0.512	2.674 +/– 0.411	

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	$-\frac{V_1}{V_3}$	$-\frac{V_1}{V_3}$	$-\frac{V_1}{V_3}$
1	2.443 +/– 0.006	2.498 +/– 0.006	2.635 +/– 0.005
2	2.540 +/– 0.010	2.588 +/– 0.009	2.699 +/– 0.008
3	2.696 +/– 0.016	2.743 +/– 0.014	2.808 +/– 0.011
4	2.836 +/– 0.024	2.856 +/– 0.020	2.887 +/– 0.017
5	2.866 +/– 0.029	2.917 +/– 0.026	2.935 +/– 0.024
6	3.012 +/– 0.042	3.010 +/– 0.046	2.994 +/– 0.035
7	3.076 +/– 0.067	3.013 +/– 0.063	3.067 +/– 0.053
8	2.983 +/– 0.086	3.003 +/– 0.087	2.945 +/– 0.069
9	3.045 +/– 0.141	3.291 +/– 0.131	2.936 +/– 0.091
10	3.200 +/– 0.179	3.470 +/– 0.261	3.160 +/– 0.135
11	2.952 +/– 0.275	3.162 +/– 0.266	3.037 +/– 0.143
12	2.977 +/– 0.364	3.454 +/– 0.482	2.667 +/– 0.204
13	3.110 +/– 0.598	3.786 +/– 0.604	2.996 +/– 0.313
14			2.947 +/– 0.348

Tabelle F.1: $-\frac{V_1}{V_3}$ für $1.32\,T_c \le T \le 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$
1	5.524 +/– 0.008	5.794 +/– 0.023	5.495 +/– 0.009
2	6.600 +/– 0.048	6.011 +/– 0.170	6.788 +/– 0.059
3	7.259 +/– 0.126	6.994 +/– 0.551	7.554 +/– 0.187
4	6.865 +/– 0.240	8.182 +/– 1.262	6.871 +/– 0.301
5	6.609 +/– 0.430		6.208 +/– 0.488
6	6.368 +/– 0.794		

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$
1	5.468 +/– 0.005	5.494 +/– 0.008	5.479 +/– 0.010
2	6.811 +/– 0.033	6.861 +/– 0.052	6.883 +/– 0.058
3	7.651 +/– 0.101	7.388 +/– 0.150	7.901 +/– 0.184
4	7.919 +/– 0.255	7.375 +/– 0.320	7.610 +/– 0.447
5	7.366 +/– 0.370	7.447 +/– 0.605	7.756 +/– 0.891
6	6.852 +/– 0.743	5.545 +/– 0.789	8.295 +/– 2.342
7	4.922 +/– 0.742	4.166 +/– 0.686	

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$	$-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$
1	5.519 +/– 0.007	5.537 +/– 0.008	5.598 +/– 0.008
2	6.819 +/– 0.050	6.800 +/– 0.050	6.774 +/– 0.050
3	7.522 +/– 0.164	7.296 +/– 0.151	7.271 +/– 0.135
4	7.239 +/– 0.327	7.156 +/– 0.298	7.215 +/– 0.321
5	7.845 +/– 0.692	6.956 +/– 0.512	6.990 +/– 0.601
6	5.423 +/– 0.619	5.502 +/– 0.766	5.850 +/– 0.849
7	4.271 +/– 0.897		4.127 +/– 0.892

Tabelle F.2: $-\frac{V_1^2}{T\,V_{av}}$ für $1.32\,T_c \le T \le 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	$-\frac{V_1}{T}$	$-\frac{V_1}{T}$	$-\frac{V_1}{T}$
1	0.20560 +/– 0.00323	0.41611 +/– 0.01341	0.16315 +/– 0.00248
2	0.17007 +/– 0.00309	0.36572 +/– 0.01273	0.13392 +/– 0.00235
3	0.13921 +/– 0.00295	0.31603 +/– 0.01259	0.10878 +/– 0.00224
4	0.11156 +/– 0.00276	0.27689 +/– 0.01215	0.08652 +/– 0.00215
5	0.08790 +/– 0.00260	0.23450 +/– 0.01187	0.06867 +/– 0.00215
6	0.06820 +/– 0.00241	0.20214 +/– 0.01146	0.05389 +/– 0.00217
7	0.05310 +/– 0.00225	0.16772 +/– 0.01130	0.04203 +/– 0.00218
8	0.04104 +/– 0.00213	0.14256 +/– 0.01140	0.03313 +/– 0.00220
9	0.03155 +/– 0.00210	0.11546 +/– 0.01189	0.02567 +/– 0.00218
10	0.02444 +/– 0.00210	0.09520 +/– 0.01190	0.01995 +/– 0.00214
11	0.01912 +/– 0.00213	0.07798 +/– 0.01255	0.01542 +/– 0.00216
12	0.01492 +/– 0.00223	0.06815 +/– 0.01315	0.01162 +/– 0.00215
13	0.01192 +/– 0.00237	0.05407 +/– 0.01381	0.00959 +/– 0.00227
14	0.00986 +/– 0.00252	0.05169 +/– 0.01397	0.00830 +/– 0.00236
15	0.00873 +/– 0.00262	0.04472 +/– 0.01425	0.00731 +/– 0.00255
16	0.00811 +/– 0.00273	0.04135 +/– 0.01451	0.00718 +/– 0.00257

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	$-\frac{V_1}{T}$	$-\frac{V_1}{T}$	$-\frac{V_1}{T}$
1	0.12694 +/– 0.00118	0.09782 +/– 0.00139	0.08693 +/– 0.00144
2	0.10464 +/– 0.00114	0.08086 +/– 0.00135	0.07184 +/– 0.00137
3	0.08572 +/– 0.00107	0.06641 +/– 0.00129	0.05906 +/– 0.00131
4	0.06916 +/– 0.00102	0.05357 +/– 0.00125	0.04770 +/– 0.00126
5	0.05485 +/– 0.00092	0.04299 +/– 0.00118	0.03802 +/– 0.00121
6	0.04307 +/– 0.00087	0.03387 +/– 0.00113	0.02960 +/– 0.00115
7	0.03359 +/– 0.00083	0.02660 +/– 0.00107	0.02318 +/– 0.00110
8	0.02566 +/– 0.00080	0.02100 +/– 0.00104	0.01783 +/– 0.00107
9	0.01945 +/– 0.00078	0.01632 +/– 0.00104	0.01368 +/– 0.00104
10	0.01462 +/– 0.00081	0.01269 +/– 0.00106	0.01024 +/– 0.00102
11	0.01078 +/– 0.00081	0.00940 +/– 0.00108	0.00767 +/– 0.00100
12	0.00774 +/– 0.00079	0.00736 +/– 0.00113	0.00596 +/– 0.00102
13	0.00563 +/– 0.00083	0.00580 +/– 0.00121	0.00455 +/– 0.00107
14	0.00391 +/– 0.00083	0.00481 +/– 0.00129	0.00403 +/– 0.00114
15	0.00277 +/– 0.00087	0.00417 +/– 0.00137	0.00400 +/– 0.00120
16	0.00179 +/– 0.00087	0.00399 +/– 0.00141	0.00405 +/– 0.00121

Tabelle F.3: $-\frac{V_1}{T}$ (über Hyperflächen summiert) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	$-\frac{V_1}{T}$	$-\frac{V_1}{T}$	$-\frac{V_1}{T}$
1	0.07171 +/– 0.00102	0.06832 +/– 0.00108	0.05448 +/– 0.00084
2	0.05940 +/– 0.00098	0.05715 +/– 0.00104	0.04581 +/– 0.00080
3	0.04854 +/– 0.00091	0.04748 +/– 0.00097	0.03815 +/– 0.00075
4	0.03903 +/– 0.00083	0.03897 +/– 0.00090	0.03142 +/– 0.00071
5	0.03104 +/– 0.00078	0.03191 +/– 0.00085	0.02552 +/– 0.00067
6	0.02437 +/– 0.00071	0.02562 +/– 0.00081	0.02047 +/– 0.00064
7	0.01883 +/– 0.00068	0.02013 +/– 0.00078	0.01614 +/– 0.00062
8	0.01419 +/– 0.00065	0.01566 +/– 0.00076	0.01267 +/– 0.00059
9	0.01043 +/– 0.00064	0.01211 +/– 0.00074	0.00973 +/– 0.00058
10	0.00762 +/– 0.00067	0.00924 +/– 0.00075	0.00743 +/– 0.00058
11	0.00544 +/– 0.00072	0.00699 +/– 0.00078	0.00546 +/– 0.00060
12	0.00363 +/– 0.00076	0.00527 +/– 0.00082	0.00399 +/– 0.00063
13	0.00234 +/– 0.00082	0.00406 +/– 0.00087	0.00294 +/– 0.00066
14	0.00150 +/– 0.00085	0.00301 +/– 0.00092	0.00214 +/– 0.00070
15	0.00087 +/– 0.00087	0.00256 +/– 0.00096	0.00169 +/– 0.00073
16	0.00079 +/– 0.00090	0.00237 +/– 0.00098	0.00155 +/– 0.00074

Tabelle F.3: $-\frac{V_1}{T}$ (über Hyperflächen summiert) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$
1	1.529 +/– 0.025	1.611 +/– 0.068	1.588 +/– 0.026
2	1.615 +/– 0.033	1.810 +/– 0.096	1.674 +/– 0.040
3	1.784 +/– 0.041	1.682 +/– 0.103	1.842 +/– 0.050
4	1.920 +/– 0.054	2.066 +/– 0.143	1.864 +/– 0.072
5	2.047 +/– 0.069	1.907 +/– 0.167	1.959 +/– 0.095
6	2.032 +/– 0.089	2.341 +/– 0.217	2.016 +/– 0.121
7	2.104 +/– 0.109	2.135 +/– 0.234	1.955 +/– 0.153
8	2.168 +/– 0.151	2.681 +/– 0.345	2.108 +/– 0.188
9	2.156 +/– 0.188	2.579 +/– 0.378	2.126 +/– 0.212
10	2.154 +/– 0.238	2.742 +/– 0.513	2.225 +/– 0.304
11	2.273 +/– 0.326		2.485 +/– 0.420
12	2.280 +/– 0.434		
13	2.329 +/– 0.557		
14	2.308 +/– 0.691		

Tabelle F.4: $\frac{m_e(T)}{T}$ (aus V_1) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$
1	1.544 +/– 0.018	1.535 +/– 0.025	1.536 +/– 0.025
2	1.596 +/– 0.021	1.589 +/– 0.030	1.581 +/– 0.036
3	1.717 +/– 0.028	1.732 +/– 0.039	1.724 +/– 0.044
4	1.854 +/– 0.031	1.781 +/– 0.044	1.831 +/– 0.061
5	1.933 +/– 0.043	1.929 +/– 0.062	2.020 +/– 0.083
6	1.987 +/– 0.055	1.967 +/– 0.076	1.986 +/– 0.095
7	2.152 +/– 0.081	1.947 +/– 0.106	2.138 +/– 0.135
8	2.214 +/– 0.109	2.090 +/– 0.142	2.182 +/– 0.167
9	2.276 +/– 0.154	2.130 +/– 0.182	2.393 +/– 0.234
10	2.422 +/– 0.206	2.524 +/– 0.273	2.442 +/– 0.294
11	2.634 +/– 0.278	2.244 +/– 0.315	2.295 +/– 0.363
12	2.498 +/– 0.460	2.369 +/– 0.434	2.549 +/– 0.519
13		2.302 +/– 0.538	

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$
1	1.518 +/– 0.021	1.443 +/– 0.021	1.403 +/– 0.019
2	1.629 +/– 0.026	1.501 +/– 0.024	1.483 +/– 0.024
3	1.757 +/– 0.031	1.601 +/– 0.029	1.574 +/– 0.030
4	1.850 +/– 0.043	1.627 +/– 0.040	1.690 +/– 0.038
5	1.956 +/– 0.052	1.787 +/– 0.055	1.792 +/– 0.052
6	2.091 +/– 0.076	1.962 +/– 0.074	1.937 +/– 0.064
7	2.293 +/– 0.103	2.058 +/– 0.098	1.989 +/– 0.084
8	2.498 +/– 0.155	2.124 +/– 0.123	2.176 +/– 0.131
9	2.575 +/– 0.253	2.262 +/– 0.183	2.264 +/– 0.175
10	2.773 +/– 0.363	2.383 +/– 0.254	2.581 +/– 0.263
11		2.490 +/– 0.352	2.696 +/– 0.372
12		2.513 +/– 0.446	2.795 +/– 0.494

Tabelle F.4: $\frac{m_e(T)}{T}$ (aus V_1) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	G_1	G_1	G_1
1	10.555 +/– 0.115	20.578 +/– 0.694	11.609 +/– 0.168
2	9.107 +/– 0.111	19.072 +/– 0.689	10.179 +/– 0.162
3	7.651 +/– 0.107	17.437 +/– 0.679	8.720 +/– 0.154
4	6.299 +/– 0.102	15.757 +/– 0.668	7.327 +/– 0.150
5	5.101 +/– 0.097	14.112 +/– 0.657	6.064 +/– 0.149
6	4.068 +/– 0.093	12.558 +/– 0.647	4.962 +/– 0.148
7	3.210 +/– 0.091	11.128 +/– 0.640	4.027 +/– 0.148
8	2.502 +/– 0.093	9.813 +/– 0.637	3.224 +/– 0.151
9	1.935 +/– 0.098	8.638 +/– 0.640	2.547 +/– 0.155
10	1.478 +/– 0.106	7.584 +/– 0.644	1.992 +/– 0.159
11	1.116 +/– 0.115	6.672 +/– 0.651	1.544 +/– 0.167
12	0.858 +/– 0.127	5.921 +/– 0.658	1.191 +/– 0.176
13	0.690 +/– 0.138	5.353 +/– 0.664	0.935 +/– 0.185
14	0.585 +/– 0.148	4.939 +/– 0.668	0.764 +/– 0.193
15	0.518 +/– 0.155	4.708 +/– 0.671	0.670 +/– 0.199
16	0.497 +/– 0.158	4.632 +/– 0.672	0.642 +/– 0.203

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	G_1	G_1	G_1
1	13.084 +/– 0.116	14.669 +/– 0.212	16.513 +/– 0.337
2	11.744 +/– 0.114	13.322 +/– 0.209	15.176 +/– 0.331
3	10.374 +/– 0.113	11.890 +/– 0.205	13.749 +/– 0.324
4	9.034 +/– 0.112	10.455 +/– 0.200	12.304 +/– 0.317
5	7.779 +/– 0.110	9.076 +/– 0.197	10.899 +/– 0.312
6	6.628 +/– 0.109	7.781 +/– 0.197	9.564 +/– 0.308
7	5.603 +/– 0.108	6.591 +/– 0.199	8.315 +/– 0.307
8	4.711 +/– 0.107	5.534 +/– 0.203	7.177 +/– 0.311
9	3.938 +/– 0.106	4.604 +/– 0.209	6.172 +/– 0.317
10	3.277 +/– 0.104	3.814 +/– 0.217	5.291 +/– 0.323
11	2.714 +/– 0.102	3.168 +/– 0.227	4.540 +/– 0.331
12	2.236 +/– 0.101	2.641 +/– 0.235	3.938 +/– 0.341
13	1.830 +/– 0.101	2.231 +/– 0.243	3.469 +/– 0.349
14	1.487 +/– 0.101	1.938 +/– 0.251	3.143 +/– 0.355
15	1.200 +/– 0.103	1.764 +/– 0.256	2.954 +/– 0.361
16	0.968 +/– 0.105	1.709 +/– 0.258	2.894 +/– 0.362

Tabelle F.5: G_1 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	G_1	G_1	G_1
1	18.054 +/– 0.287	19.153 +/– 0.308	21.856 +/– 0.449
2	16.770 +/– 0.286	17.894 +/– 0.304	20.638 +/– 0.446
3	15.393 +/– 0.286	16.541 +/– 0.300	19.322 +/– 0.442
4	13.992 +/– 0.284	15.170 +/– 0.294	17.969 +/– 0.438
5	12.607 +/– 0.283	13.799 +/– 0.289	16.602 +/– 0.434
6	11.283 +/– 0.282	12.477 +/– 0.285	15.263 +/– 0.434
7	10.043 +/– 0.280	11.235 +/– 0.283	13.982 +/– 0.435
8	8.898 +/– 0.281	10.091 +/– 0.284	12.784 +/– 0.437
9	7.863 +/– 0.283	9.059 +/– 0.289	11.687 +/– 0.441
10	6.964 +/– 0.287	8.149 +/– 0.298	10.703 +/– 0.447
11	6.197 +/– 0.294	7.365 +/– 0.310	9.840 +/– 0.454
12	5.577 +/– 0.301	6.722 +/– 0.322	9.113 +/– 0.463
13	5.093 +/– 0.310	6.211 +/– 0.331	8.545 +/– 0.471
14	4.744 +/– 0.318	5.837 +/– 0.339	8.142 +/– 0.478
15	4.524 +/– 0.323	5.604 +/– 0.345	7.899 +/– 0.482
16	4.447 +/– 0.325	5.528 +/– 0.347	7.821 +/– 0.484

Tabelle F.5: G_1 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	G_2	G_2	G_2
1	10.813 +/– 0.132	21.001 +/– 0.711	12.042 +/– 0.231
2	9.359 +/– 0.127	19.531 +/– 0.708	10.594 +/– 0.224
3	7.879 +/– 0.123	17.955 +/– 0.703	9.100 +/– 0.213
4	6.492 +/– 0.121	16.372 +/– 0.700	7.668 +/– 0.202
5	5.250 +/– 0.117	14.815 +/– 0.698	6.354 +/– 0.190
6	4.177 +/– 0.115	13.325 +/– 0.704	5.189 +/– 0.180
7	3.275 +/– 0.114	11.924 +/– 0.717	4.184 +/– 0.172
8	2.534 +/– 0.114	10.650 +/– 0.736	3.318 +/– 0.167
9	1.943 +/– 0.115	9.530 +/– 0.759	2.592 +/– 0.163
10	1.464 +/– 0.121	8.572 +/– 0.780	2.000 +/– 0.164
11	1.085 +/– 0.128	7.772 +/– 0.801	1.536 +/– 0.171
12	0.789 +/– 0.136	7.113 +/– 0.822	1.198 +/– 0.180
13	0.570 +/– 0.144	6.604 +/– 0.844	0.947 +/– 0.193
14	0.418 +/– 0.150	6.250 +/– 0.862	0.784 +/– 0.204
15	0.324 +/– 0.154	6.035 +/– 0.874	0.682 +/– 0.213
16	0.290 +/– 0.156	5.972 +/– 0.878	0.645 +/– 0.217

Tabelle F.6: G_2 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	G_2	G_2	G_2
1	12.944 +/− 0.115	14.817 +/− 0.254	16.247 +/− 0.312
2	11.615 +/− 0.113	13.478 +/− 0.251	14.949 +/− 0.308
3	10.251 +/− 0.110	12.075 +/− 0.246	13.579 +/− 0.302
4	8.932 +/− 0.109	10.700 +/− 0.239	12.210 +/− 0.295
5	7.708 +/− 0.108	9.395 +/− 0.232	10.887 +/− 0.288
6	6.596 +/− 0.107	8.193 +/− 0.226	9.635 +/− 0.283
7	5.600 +/− 0.106	7.103 +/− 0.222	8.484 +/− 0.280
8	4.729 +/− 0.105	6.144 +/− 0.221	7.426 +/− 0.281
9	3.976 +/− 0.105	5.305 +/− 0.221	6.493 +/− 0.286
10	3.328 +/− 0.104	4.593 +/− 0.225	5.679 +/− 0.293
11	2.774 +/− 0.103	3.985 +/− 0.231	4.999 +/− 0.302
12	2.309 +/− 0.104	3.490 +/− 0.238	4.444 +/− 0.310
13	1.927 +/− 0.106	3.103 +/− 0.246	4.013 +/− 0.319
14	1.595 +/− 0.108	2.822 +/− 0.254	3.701 +/− 0.327
15	1.314 +/− 0.111	2.654 +/− 0.259	3.516 +/− 0.333
16	1.078 +/− 0.113	2.600 +/− 0.261	3.455 +/− 0.335

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	G_2	G_2	G_2
1	18.156 +/− 0.301	20.127 +/− 0.346	23.037 +/− 0.473
2	16.890 +/− 0.299	18.861 +/− 0.345	21.792 +/− 0.470
3	15.539 +/− 0.295	17.501 +/− 0.342	20.433 +/− 0.467
4	14.165 +/− 0.292	16.108 +/− 0.339	19.025 +/− 0.464
5	12.813 +/− 0.288	14.735 +/− 0.336	17.605 +/− 0.461
6	11.517 +/− 0.286	13.407 +/− 0.334	16.203 +/− 0.459
7	10.307 +/− 0.285	12.138 +/− 0.333	14.860 +/− 0.459
8	9.202 +/− 0.288	10.962 +/− 0.335	13.606 +/− 0.460
9	8.213 +/− 0.293	9.908 +/− 0.338	12.461 +/− 0.464
10	7.352 +/− 0.301	8.978 +/− 0.345	11.442 +/− 0.468
11	6.625 +/− 0.311	8.179 +/− 0.354	10.561 +/− 0.474
12	6.036 +/− 0.322	7.519 +/− 0.364	9.824 +/− 0.481
13	5.583 +/− 0.331	6.996 +/− 0.373	9.240 +/− 0.488
14	5.264 +/− 0.338	6.613 +/− 0.382	8.815 +/− 0.495
15	5.080 +/− 0.343	6.378 +/− 0.388	8.556 +/− 0.499
16	5.017 +/− 0.345	6.292 +/− 0.390	8.458 +/− 0.500

Tabelle F.6: G_2 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	G_3	G_3	G_3
1	4.1507910 +/– 0.1208702	10.2964003 +/– 0.5425614	4.2877641 +/– 0.1494059
2	4.1507910 +/– 0.1208702	10.2964003 +/– 0.5425614	4.2877641 +/– 0.1494059
3	4.1507910 +/– 0.1208702	10.2964003 +/– 0.5425614	4.2877641 +/– 0.1494059
4	4.1507909 +/– 0.1208702	10.2964003 +/– 0.5425614	4.2877641 +/– 0.1494059
5	4.1507909 +/– 0.1208702	10.2964003 +/– 0.5425614	4.2877640 +/– 0.1494059
6	4.1507909 +/– 0.1208702	10.2964002 +/– 0.5425614	4.2877640 +/– 0.1494059
7	4.1507909 +/– 0.1208702	10.2964002 +/– 0.5425614	4.2877640 +/– 0.1494059
8	4.1507909 +/– 0.1208702	10.2964001 +/– 0.5425614	4.2877640 +/– 0.1494059
9	4.1507909 +/– 0.1208702	10.2964001 +/– 0.5425614	4.2877640 +/– 0.1494059
10	4.1507909 +/– 0.1208702	10.2964001 +/– 0.5425614	4.2877639 +/– 0.1494059
11	4.1507908 +/– 0.1208702	10.2964001 +/– 0.5425614	4.2877639 +/– 0.1494059
12	4.1507908 +/– 0.1208702	10.2964000 +/– 0.5425614	4.2877639 +/– 0.1494059
13	4.1507908 +/– 0.1208702	10.2964000 +/– 0.5425614	4.2877639 +/– 0.1494059
14	4.1507908 +/– 0.1208702	10.2964000 +/– 0.5425614	4.2877639 +/– 0.1494059
15	4.1507908 +/– 0.1208702	10.2964000 +/– 0.5425614	4.2877639 +/– 0.1494059
16	4.1507908 +/– 0.1208702	10.2964000 +/– 0.5425614	4.2877639 +/– 0.1494059

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	G_3	G_3	G_3
1	1.5126451 +/– 0.0371408	7.3775644 +/– 0.1932378	8.0869557 +/– 0.2866903
2	1.5126451 +/– 0.0371408	7.3775644 +/– 0.1932378	8.0869557 +/– 0.2866903
3	1.5126451 +/– 0.0371408	7.3775643 +/– 0.1932378	8.0869557 +/– 0.2866903
4	1.5126451 +/– 0.0371408	7.3775643 +/– 0.1932378	8.0869556 +/– 0.2866903
5	1.5126451 +/– 0.0371408	7.3775643 +/– 0.1932378	8.0869556 +/– 0.2866903
6	1.5126451 +/– 0.0371408	7.3775643 +/– 0.1932378	8.0869556 +/– 0.2866903
7	1.5126450 +/– 0.0371408	7.3775642 +/– 0.1932378	8.0869555 +/– 0.2866903
8	1.5126450 +/– 0.0371408	7.3775642 +/– 0.1932378	8.0869555 +/– 0.2866903
9	1.5126450 +/– 0.0371408	7.3775642 +/– 0.1932378	8.0869555 +/– 0.2866903
10	1.5126450 +/– 0.0371408	7.3775641 +/– 0.1932378	8.0869554 +/– 0.2866903
11	1.5126450 +/– 0.0371408	7.3775641 +/– 0.1932378	8.0869554 +/– 0.2866903
12	1.5126450 +/– 0.0371408	7.3775641 +/– 0.1932378	8.0869554 +/– 0.2866903
13	1.5126450 +/– 0.0371408	7.3775641 +/– 0.1932378	8.0869554 +/– 0.2866903
14	1.5126449 +/– 0.0371408	7.3775640 +/– 0.1932378	8.0869553 +/– 0.2866903
15	1.5126449 +/– 0.0371408	7.3775640 +/– 0.1932378	8.0869553 +/– 0.2866903
16	1.5126449 +/– 0.0371408	7.3775640 +/– 0.1932378	8.0869553 +/– 0.2866903

Tabelle F.7: G_3 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	G_3	G_3	G_3
1	10.5270772 +/– 0.2793706	10.7155912 +/– 0.3508855	14.6200844 +/– 0.4761298
2	10.5270772 +/– 0.2793706	10.7155912 +/– 0.3508855	14.6200843 +/– 0.4761298
3	10.5270772 +/– 0.2793706	10.7155911 +/– 0.3508855	14.6200843 +/– 0.4761298
4	10.5270771 +/– 0.2793706	10.7155911 +/– 0.3508855	14.6200842 +/– 0.4761298
5	10.5270771 +/– 0.2793706	10.7155911 +/– 0.3508855	14.6200842 +/– 0.4761298
6	10.5270770 +/– 0.2793706	10.7155910 +/– 0.3508855	14.6200841 +/– 0.4761298
7	10.5270770 +/– 0.2793706	10.7155910 +/– 0.3508855	14.6200841 +/– 0.4761298
8	10.5270769 +/– 0.2793706	10.7155909 +/– 0.3508855	14.6200840 +/– 0.4761298
9	10.5270769 +/– 0.2793706	10.7155909 +/– 0.3508855	14.6200839 +/– 0.4761298
10	10.5270768 +/– 0.2793706	10.7155908 +/– 0.3508855	14.6200839 +/– 0.4761297
11	10.5270768 +/– 0.2793706	10.7155908 +/– 0.3508855	14.6200838 +/– 0.4761297
12	10.5270768 +/– 0.2793706	10.7155907 +/– 0.3508855	14.6200838 +/– 0.4761297
13	10.5270767 +/– 0.2793706	10.7155907 +/– 0.3508855	14.6200837 +/– 0.4761297
14	10.5270767 +/– 0.2793706	10.7155907 +/– 0.3508855	14.6200837 +/– 0.4761297
15	10.5270767 +/– 0.2793706	10.7155907 +/– 0.3508855	14.6200837 +/– 0.4761297
16	10.5270767 +/– 0.2793706	10.7155907 +/– 0.3508855	14.6200837 +/– 0.4761297

Tabelle F.7: G_3 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	G_4	G_4	G_4
1	8.112 +/– 0.131	11.659 +/– 0.387	7.362 +/– 0.113
2	6.807 +/– 0.125	10.327 +/– 0.377	6.152 +/– 0.108
3	5.556 +/– 0.118	9.018 +/– 0.365	5.002 +/– 0.101
4	4.445 +/– 0.110	7.738 +/– 0.352	3.989 +/– 0.095
5	3.493 +/– 0.102	6.562 +/– 0.339	3.148 +/– 0.092
6	2.715 +/– 0.095	5.496 +/– 0.328	2.462 +/– 0.091
7	2.080 +/– 0.090	4.537 +/– 0.320	1.910 +/– 0.092
8	1.586 +/– 0.086	3.712 +/– 0.317	1.483 +/– 0.091
9	1.207 +/– 0.085	3.005 +/– 0.315	1.150 +/– 0.092
10	0.929 +/– 0.086	2.431 +/– 0.318	0.892 +/– 0.094
11	0.728 +/– 0.089	1.976 +/– 0.326	0.684 +/– 0.095
12	0.575 +/– 0.093	1.625 +/– 0.338	0.530 +/– 0.097
13	0.453 +/– 0.097	1.379 +/– 0.349	0.423 +/– 0.102
14	0.365 +/– 0.102	1.221 +/– 0.360	0.353 +/– 0.108
15	0.314 +/– 0.105	1.135 +/– 0.369	0.313 +/– 0.114
16	0.294 +/– 0.107	1.118 +/– 0.375	0.298 +/– 0.117

Tabelle F.8: G_4 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	G_4	G_4	G_4
1	6.897 +/– 0.066	6.521 +/– 0.094	6.456 +/– 0.107
2	5.776 +/– 0.063	5.466 +/– 0.091	5.411 +/– 0.103
3	4.738 +/– 0.059	4.487 +/– 0.088	4.447 +/– 0.099
4	3.815 +/– 0.055	3.624 +/– 0.084	3.592 +/– 0.095
5	3.031 +/– 0.051	2.885 +/– 0.080	2.863 +/– 0.090
6	2.381 +/– 0.048	2.279 +/– 0.075	2.259 +/– 0.086
7	1.847 +/– 0.045	1.786 +/– 0.072	1.766 +/– 0.082
8	1.412 +/– 0.044	1.394 +/– 0.069	1.356 +/– 0.080
9	1.068 +/– 0.044	1.073 +/– 0.068	1.040 +/– 0.077
10	0.804 +/– 0.044	0.825 +/– 0.068	0.795 +/– 0.076
11	0.597 +/– 0.045	0.625 +/– 0.070	0.607 +/– 0.075
12	0.435 +/– 0.046	0.476 +/– 0.073	0.473 +/– 0.076
13	0.315 +/– 0.046	0.369 +/– 0.077	0.380 +/– 0.079
14	0.219 +/– 0.047	0.298 +/– 0.082	0.329 +/– 0.085
15	0.152 +/– 0.047	0.254 +/– 0.086	0.297 +/– 0.089
16	0.099 +/– 0.047	0.239 +/– 0.088	0.278 +/– 0.090

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	G_4	G_4	G_4
1	6.129 +/– 0.087	6.286 +/– 0.104	6.103 +/– 0.095
2	5.131 +/– 0.083	5.321 +/– 0.099	5.173 +/– 0.091
3	4.208 +/– 0.077	4.434 +/– 0.092	4.316 +/– 0.085
4	3.388 +/– 0.071	3.650 +/– 0.086	3.550 +/– 0.080
5	2.688 +/– 0.066	2.975 +/– 0.080	2.882 +/– 0.075
6	2.102 +/– 0.061	2.380 +/– 0.076	2.306 +/– 0.072
7	1.618 +/– 0.058	1.875 +/– 0.075	1.820 +/– 0.069
8	1.218 +/– 0.056	1.463 +/– 0.073	1.424 +/– 0.066
9	0.898 +/– 0.055	1.132 +/– 0.072	1.091 +/– 0.065
10	0.654 +/– 0.057	0.869 +/– 0.072	0.827 +/– 0.067
11	0.463 +/– 0.060	0.661 +/– 0.075	0.615 +/– 0.070
12	0.323 +/– 0.064	0.507 +/– 0.080	0.446 +/– 0.073
13	0.215 +/– 0.068	0.380 +/– 0.085	0.323 +/– 0.076
14	0.140 +/– 0.070	0.292 +/– 0.089	0.234 +/– 0.081
15	0.098 +/– 0.072	0.241 +/– 0.093	0.178 +/– 0.084
16	0.088 +/– 0.074	0.218 +/– 0.094	0.161 +/– 0.086

Tabelle F.8: G_4 für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$
1	1.419 +/– 0.021	1.528 +/– 0.039	1.451 +/– 0.021
2	1.636 +/– 0.027	1.698 +/– 0.054	1.666 +/– 0.031
3	1.797 +/– 0.036	1.904 +/– 0.072	1.822 +/– 0.043
4	1.941 +/– 0.049	2.053 +/– 0.089	1.908 +/– 0.057
5	2.034 +/– 0.060	2.211 +/– 0.113	1.983 +/– 0.077
6	2.151 +/– 0.080	2.395 +/– 0.147	2.058 +/– 0.103
7	2.204 +/– 0.103	2.530 +/– 0.192	2.065 +/– 0.128
8	2.241 +/– 0.143	2.690 +/– 0.247	2.106 +/– 0.167
9	2.202 +/– 0.192	2.766 +/– 0.310	2.136 +/– 0.218
10	2.131 +/– 0.240	2.822 +/– 0.394	2.280 +/– 0.287
11	2.194 +/– 0.310	2.854 +/– 0.482	2.301 +/– 0.364
12	2.359 +/– 0.413	2.779 +/– 0.536	2.266 +/– 0.474
13	2.492 +/– 0.537	2.688 +/– 0.596	2.219 +/– 0.578
14	2.521 +/– 0.624	2.592 +/– 0.679	2.235 +/– 0.707

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$
1	1.419 +/– 0.013	1.428 +/– 0.020	1.428 +/– 0.023
2	1.584 +/– 0.018	1.592 +/– 0.028	1.583 +/– 0.032
3	1.732 +/– 0.022	1.723 +/– 0.034	1.722 +/– 0.042
4	1.840 +/– 0.030	1.842 +/– 0.043	1.832 +/– 0.053
5	1.928 +/– 0.039	1.911 +/– 0.056	1.916 +/– 0.072
6	2.032 +/– 0.050	1.983 +/– 0.071	2.002 +/– 0.093
7	2.142 +/– 0.072	2.032 +/– 0.095	2.150 +/– 0.122
8	2.230 +/– 0.100	2.156 +/– 0.133	2.185 +/– 0.154
9	2.270 +/– 0.137	2.211 +/– 0.175	2.245 +/– 0.192
10	2.369 +/– 0.194	2.371 +/– 0.241	2.310 +/– 0.251
11	2.503 +/– 0.271	2.434 +/– 0.329	2.283 +/– 0.318
12	2.541 +/– 0.383	2.458 +/– 0.422	2.248 +/– 0.404
13	2.807 +/– 0.588	2.481 +/– 0.533	1.972 +/– 0.485
14	2.680 +/– 0.835		2.082 +/– 0.572

Tabelle F.9: $\frac{m_e(T)}{T}$ (aus G_4) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_e(T)}{T}$
1	1.437 +/– 0.019	1.352 +/– 0.018	1.343 +/– 0.018
2	1.601 +/– 0.023	1.477 +/– 0.023	1.468 +/– 0.023
3	1.747 +/– 0.031	1.579 +/– 0.029	1.585 +/– 0.029
4	1.866 +/– 0.041	1.661 +/– 0.041	1.691 +/– 0.037
5	1.988 +/– 0.053	1.813 +/– 0.056	1.813 +/– 0.050
6	2.117 +/– 0.070	1.945 +/– 0.076	1.930 +/– 0.063
7	2.300 +/– 0.100	2.033 +/– 0.093	2.013 +/– 0.088
8	2.482 +/– 0.150	2.121 +/– 0.124	2.193 +/– 0.129
9	2.596 +/– 0.233	2.221 +/– 0.176	2.314 +/– 0.187
10	2.825 +/– 0.352	2.341 +/– 0.248	2.497 +/– 0.263
11	2.981 +/– 0.519	2.377 +/– 0.330	2.751 +/– 0.390
12		2.676 +/– 0.470	2.878 +/– 0.528

Tabelle F.9: $\frac{m_e(T)}{T}$ (aus G_4) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

	$T/T_c = 1.32$	$T/T_c = 1.33$	$T/T_c = 1.53$
z/a	$\frac{m_m(T)}{T}$	$\frac{m_m(T)}{T}$	$\frac{m_m(T)}{T}$
1	1.198 +/– 0.009	1.045 +/– 0.019	1.080 +/– 0.011
2	1.409 +/– 0.014	1.193 +/– 0.024	1.261 +/– 0.015
3	1.575 +/– 0.019	1.319 +/– 0.032	1.414 +/– 0.021
4	1.716 +/– 0.026	1.431 +/– 0.040	1.544 +/– 0.028
5	1.847 +/– 0.035	1.529 +/– 0.049	1.653 +/– 0.035
6	1.957 +/– 0.050	1.620 +/– 0.059	1.749 +/– 0.046
7	2.070 +/– 0.068	1.706 +/– 0.069	1.885 +/– 0.061
8	2.160 +/– 0.092	1.772 +/– 0.080	2.016 +/– 0.079
9	2.310 +/– 0.133	1.844 +/– 0.089	2.144 +/– 0.109
10	2.467 +/– 0.188	1.905 +/– 0.100	2.258 +/– 0.149
11	2.562 +/– 0.260	1.960 +/– 0.114	2.333 +/– 0.195
12	2.583 +/– 0.331	1.978 +/– 0.128	2.404 +/– 0.254
13	2.618 +/– 0.406	2.005 +/– 0.137	2.407 +/– 0.293
14	2.778 +/– 0.477	1.990 +/– 0.145	2.456 +/– 0.355
15	2.873 +/– 0.545	1.941 +/– 0.172	2.488 +/– 0.435

Tabelle F.10: $\frac{m_m(T)}{T}$ (aus $\frac{1}{2}(G_1 + G_2)$) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$

	$T/T_c = 2.00$	$T/T_c = 3.03$	$T/T_c = 3.93$
z/a	$\frac{m_m(T)}{T}$	$\frac{m_m(T)}{T}$	$\frac{m_m(T)}{T}$
1	0.867 +/– 0.005	0.840 +/– 0.007	0.761 +/– 0.007
2	0.997 +/– 0.007	0.966 +/– 0.009	0.867 +/– 0.010
3	1.104 +/– 0.009	1.070 +/– 0.012	0.960 +/– 0.013
4	1.188 +/– 0.011	1.164 +/– 0.017	1.043 +/– 0.017
5	1.264 +/– 0.014	1.251 +/– 0.021	1.122 +/– 0.021
6	1.326 +/– 0.017	1.339 +/– 0.027	1.199 +/– 0.027
7	1.370 +/– 0.022	1.408 +/– 0.035	1.278 +/– 0.033
8	1.411 +/– 0.027	1.485 +/– 0.043	1.338 +/– 0.041
9	1.447 +/– 0.032	1.545 +/– 0.052	1.408 +/– 0.050
10	1.482 +/– 0.041	1.608 +/– 0.064	1.461 +/– 0.058
11	1.506 +/– 0.052	1.673 +/– 0.077	1.501 +/– 0.067
12	1.524 +/– 0.066	1.735 +/– 0.091	1.542 +/– 0.075
13	1.582 +/– 0.086	1.790 +/– 0.102	1.567 +/– 0.081
14	1.625 +/– 0.110	1.812 +/– 0.112	1.567 +/– 0.088
15	1.644 +/– 0.134	1.791 +/– 0.118	1.554 +/– 0.099

	$T/T_c = 6.01$	$T/T_c = 7.53$	$T/T_c = 15.88$
z/a	$\frac{m_m(T)}{T}$	$\frac{m_m(T)}{T}$	$\frac{m_m(T)}{T}$
1	0.688 +/– 0.005	0.645 +/– 0.004	0.578 +/– 0.005
2	0.780 +/– 0.007	0.728 +/– 0.006	0.651 +/– 0.007
3	0.861 +/– 0.009	0.798 +/– 0.008	0.714 +/– 0.009
4	0.936 +/– 0.011	0.867 +/– 0.010	0.777 +/– 0.011
5	1.004 +/– 0.014	0.928 +/– 0.013	0.835 +/– 0.014
6	1.066 +/– 0.017	0.988 +/– 0.016	0.888 +/– 0.017
7	1.126 +/– 0.021	1.041 +/– 0.020	0.936 +/– 0.020
8	1.180 +/– 0.025	1.085 +/– 0.024	0.979 +/– 0.023
9	1.222 +/– 0.029	1.127 +/– 0.028	1.019 +/– 0.025
10	1.260 +/– 0.034	1.166 +/– 0.032	1.056 +/– 0.028
11	1.282 +/– 0.038	1.195 +/– 0.037	1.090 +/– 0.031
12	1.305 +/– 0.043	1.227 +/– 0.040	1.111 +/– 0.033
13	1.321 +/– 0.048	1.260 +/– 0.043	1.127 +/– 0.037
14	1.339 +/– 0.052	1.290 +/– 0.048	1.140 +/– 0.038
15	1.375 +/– 0.062	1.326 +/– 0.051	1.175 +/– 0.045

Tabelle F.10: $\frac{m_m(T)}{T}$ (aus $\frac{1}{2}(G_1 + G_2)$) für $1.32\,T_c \leq T \leq 15.88\,T_c$ (Fortsetzung)

Ber. Kfg.	$\sum_{\mu,x}$ Tr $\left[U_\mu^g(x) + U_\mu^{g\,\dagger}(x)\right]$	$\frac{m_e(T)}{T}$	$\frac{m_m(T)}{T}$
1	3.6971982002 +/− 0.0001177477	2.233031 +/− 0.458225	1.350040 +/− 0.111677
2	3.6972732168 +/− 0.0001081774	2.305954 +/− 0.480961	1.365856 +/− 0.099913
3	3.6972906995 +/− 0.0001081797	2.358525 +/− 0.465040	1.334923 +/− 0.098487
4	3.6972981346 +/− 0.0001085970	2.442099 +/− 0.508343	1.345326 +/− 0.102249
5	3.6973023623 +/− 0.0001079375	2.510531 +/− 0.539295	1.333235 +/− 0.101372
6	3.6973079640 +/− 0.0001065047	2.484969 +/− 0.528313	1.340048 +/− 0.101267
7	3.6973080173 +/− 0.0001065064	2.440866 +/− 0.510248	1.341881 +/− 0.100995
8	3.6973091221 +/− 0.0001065869	2.363779 +/− 0.480255	1.360179 +/− 0.103504
9	3.6973091275 +/− 0.0001065868	2.364075 +/− 0.480328	1.360129 +/− 0.103499
10	3.6973105681 +/− 0.0001070093	2.326935 +/− 0.479758	1.359418 +/− 0.103391
11	3.6973121727 +/− 0.0001068950	2.295092 +/− 0.463227	1.356182 +/− 0.102996
12	3.6973121789 +/− 0.0001068942	2.295047 +/− 0.463270	1.356275 +/− 0.103061
13	3.6973121831 +/− 0.0001068943	2.295194 +/− 0.463482	1.356194 +/− 0.103053
14	3.6973121846 +/− 0.0001068940	2.295116 +/− 0.463494	1.356024 +/− 0.103001
15	3.6973121849 +/− 0.0001068941	2.295114 +/− 0.463494	1.356016 +/− 0.103001
16	3.6973121852 +/− 0.0001068942	2.295029 +/− 0.463476	1.356017 +/− 0.103000
17	3.6973121876 +/− 0.0001068946	2.294813 +/− 0.463454	1.355810 +/− 0.102912
18	3.6973121896 +/− 0.0001068947	2.294623 +/− 0.463344	1.355821 +/− 0.102914
19	3.6973121908 +/− 0.0001068949	2.294594 +/− 0.463352	1.355849 +/− 0.102923
20	3.6973121935 +/− 0.0001068952	2.294591 +/− 0.463356	1.355850 +/− 0.102922
21	3.6973121941 +/− 0.0001068952	2.294602 +/− 0.463357	1.355849 +/− 0.102922
22	3.6973121950 +/− 0.0001068950	2.294504 +/− 0.463255	1.355851 +/− 0.102918
23	3.6973121956 +/− 0.0001068951	2.294494 +/− 0.463256	1.355851 +/− 0.102918
24	3.6973121992 +/− 0.0001068940	2.294538 +/− 0.463266	1.355852 +/− 0.102919
25	3.6973122010 +/− 0.0001068940	2.294853 +/− 0.463386	1.355919 +/− 0.102913
26	3.6973122013 +/− 0.0001068940	2.294719 +/− 0.463342	1.355860 +/− 0.102918

Tabelle F.11: Zur Abhängigkeit von $\frac{m_e(T)}{T}$ und $\frac{m_m(T)}{T}$ von Gribov-Kopien (alle Werte bei $\beta = 3.12$ und $zT = 1$)

Literaturverzeichnis

[1] S.L. Adler, *Over-relaxation Method for the Monte Carlo Evaluation of the Partition Function for multiquadratic Actions*, Phys. Rev. **D23** (1981) 2901.

[2] S.L. Adler, *Algorithms for Pure Gauge Theory*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **9** (1989) 437.

[3] H. Aiso, M. Fukuda, T. Iwamiya, M. Mizutani, A. Nakamura, T. Nakamura, M. Yoshida, *QCD on a Highly Parallel Vector Computer*, erscheint in Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) (1995).

[4] K. Akemi, M. Fujisaki, M. Okuda, Y. Tago, Ph. de Forcrand, T. Hashimoto, S. Hioki, O. Miyamura, T. Takaishi, A. Nakamura, I.O. Stamatescu, *Scaling Study of Pure Gauge Lattice QCD by Monte Carlo Renormalization Group Method*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3063.

[5] N. Attig, F. Karsch, B. Petersson, H. Satz, M. Wolff, *Polyakov Loop Correlations in Landau Gauge and the Heavy Quark Potential*, Phys. Lett. **209B** (1988) 65.

[6] G. Bali, J. Fingberg, U.M. Heller, F. Karsch, K. Schilling, *Spatial String Tension in the Deconfined Phase of (3+1)-Dimensional SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3059.

[7] P. Becher, M. Böhm, H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, Teubner Taschenbücher Physik, B.G. Teubner Stuttgart (1983).

[8] C. Bernard, C. Parrinello, A. Soni, *The Gluon Propagator in Momentum Space*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **30** (1993) 535.

[9] C. Bernard, C. Parrinello, A. Soni, *Lattice Study of the Gluon Propagator in Momentum Space*, Phys. Rev. **D49** (1994) 1585.

[10] C. Bernard, *Feynman Rules for Gauge Theories at Finite Temperature*, Phys. Rev. **D9** (1974) 3312.

[11] E. Braaten, R.D. Pisarski, *Resummation and Gauge Invariance of the Gluon Damping Rate in Hot QCD*, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1338.

[12] E. Braaten, R.D. Pisarski, *Soft Amplitudes in Hot Gauge Theories: A General Analysis*, Nucl. Phys. **B337** (1990) 569.

[13] F.R. Brown, T.J. Woch, *Overrelaxed Heat-Bath and Metropolis Algorithms for Accelerating Pure Gauge Monte Carlo Calculations*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 2394.

[14] M. Creutz, *Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. **D21** (1980) 2308.

[15] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press (1983).

[16] M. Creutz, *Overrelaxation and Monte Carlo Simulation*, Phys. Rev. **D36** (1987) 515.

[17] C.T.H. Davies, *Fourier Acceleration and Lattice Gauge Theories*, in Lattice Gauge Theory '86, Hrsg. H. Satz, I. Harrity, J. Potvin, NATO ASI Series, Vol. B 159 (Plenum Press, New York, 1986) 63.

[18] C.T.H. Davies, G.G. Batrouni, G.R. Katz, A.S. Kronfeld, G.P. Lepage, K.G. Wilson, P. Rossi, B. Svetitsky, *Fourier Acceleration and Lattice Gauge Theories. I. Landau Gauge Fixing*, Phys. Rev. **D37** (1988) 1581.

[19] A.X. El-Khadra, G. Hockney, A.S. Kronfeld, P.B. Mackenzie, *Determination of the Strong Coupling Constant from the Charmonium Spectrum*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 729.

[20] J. Engels, F. Karsch, H. Satz, *A Finite Size Analysis of the Heavy Quark Potential in a Deconfining Medium*, Nucl. Phys. **B315** (1989) 419.

[21] J. Engels, J. Fingberg, M. Weber, *Finite Size Scaling Analysis of SU(2) Lattice Gauge Theory in (3+1) Dimensions*, Nucl. Phys. **B332** (1990) 737.

[22] J. Engels, *Stochastische Methoden in der Physik*, Vorlesung an der Universität Bielefeld im WS 1992/93.

[23] J. Engels, F. Karsch, K. Redlich, *Scaling Properties of the Energy Density in SU(2) Lattice Gauge Theory*, Nucl. Phys. **B435** (1995) 295.

[24] J. Fingberg, U.M. Heller, F. Karsch, *Scaling and Asymptotic Scaling in the SU(2) Gauge Theory*, Nucl. Phys. **B392** (1993) 493.

[25] M. Fukugita, M. Okawa, A. Ukawa, *Finite-Size Scaling Study of the Deconfining Phase Transition in Pure SU(3) Lattice Gauge Theory*, Nucl. Phys. **B337** (1990) 181.

[26] C. Gale, J. Kapusta, *Modification of Debye Screening in Gluon Plasma*, Phys. Lett. **B198** (1987) 89.

[27] V.N. Gribov, *Quantization of Non-Abelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1.

[28] D.J. Gross, R.D. Pisarski, L.G. Yaffe, *QCD and Instantons at Finite Temperature*, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 43.

[29] U.M. Heller, *Private Mitteilung.*

[30] A. Hulsebos, *Gribov Copies and Other Gauge Fixing Beasties on the Lattice*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **30** (1993) 539.

[31] K. Kajantie, J. Kapusta, *Behaviour of Gluons at High Temperature*, Ann. Phys. **160** (1985) 477.

[32] J. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1989).

[33] F. Karsch, *Lattice QCD at Finite Temperature: A Status Report*, Z. Phys. **C38** (1988) 147.

[34] F. Karsch, *Simulating the Quark-Gluon Plasma on the Lattice*, in *Quark-Gluon Plasma*, Hrsg. R.C. Hwa, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 6 (World Scientific, Singapore, 1990) 61.

[35] F. Karsch, E. Laermann, *Numerical Simulations in Particle Physics*, Bielefeld Preprint, BI-TP 93/10 (1993).

[36] F. Karsch, *New Results and Long-standing Questions in Finite Temperature QCD*, Bielefeld Preprint, BI-TP 93/68 (1993).

[37] F. Karsch, *Nicht-störungstheoretische Quantenfeldtheorie*, Vorlesung an der Universität Bielefeld im WS 1993/94.

[38] F. Karsch, J. Rank, *Landau Gauge Fixing and Finite Temperature Gluon Propagator in SU(2) Lattice Gauge Theory*, to be published in Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) (1995).

[39] A.D. Kennedy, B.J. Pendleton, *Improved Heatbath Method for Monte Carlo Calculations in Lattice Gauge Theories*, Phys. Lett. **B156** (1985) 393.

[40] T.P. Killingback, *The Gribov Ambiguity in Gauge Theories on the Four-Torus*, Phys. Lett. **B138** (1984) 87.

[41] J.B. Kogut, L. Susskind, *Hamiltonian Formulation of Wilson's Lattice Gauge Theory*, Phys. Rev. **D11** (1975) 395.

[42] A.D. Linde, *Phase Transitions in Gauge Theories and Cosmology*, Rep. Prog. Phys. **42** (1979) 389.

[43] A.D. Linde, *Infrared Problem in the Thermodynamics of the Yang-Mills Gas*, Phys. Lett. **96B** (1980) 289.

[44] J.E. Mandula, M. Ogilvie, *The Gluon is Massive: A Lattice Calculation of the Gluon Propagator in the Landau Gauge*, Phys. Lett. **185B** (1987) 127.

[45] J.E. Mandula, M. Ogilvie, *The Gluon Propagator at Finite Temperature*, Phys. Lett. **201B** (1988) 117.

[46] J.E. Mandula, M. Ogilvie, *Possible Resolution of the Lattice Gribov Ambiguity*, Phys. Rev. **D41** (1990) 2586.

[47] J.E. Mandula, M. Ogilvie, *Efficient Gauge Fixing via Overrelaxation*, Phys. Lett. **248B** (1990) 156.

[48] E. Marinari, R. Ricci, *Gauge Fixing Ambiguities in SU(3) Lattice Gauge Theory*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **20** (1991) 199.

[49] E. Marinari, C. Parrinello, R. Ricci, *Evidence for the Existence of Gribov Copies in Landau Gauge Lattice QCD*, Nucl. Phys. **B362** (1991) 487.

[50] L.D. McLerran, B. Svetitsky, *Quark Liberation at High Temperature: A Monte Carlo Study of SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. **D24** (1981) 450.

[51] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, E. Teller, *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*, J. Chem. Phys. **21** (1953) 1087.

[52] S. Nadkarni, *Non-Abelian Debye Screening: The Color-averaged Potential*, Phys. Rev. **D33** (1986) 3738.

[53] S. Nadkarni, *Non-Abelian Debye Screening. II. The Singlet Potential*, Phys. Rev. **D34** (1986) 3904.

[54] A. Nakamura, M. Plewnia, *Gauge Fixing Ambiguity and Photon Prpagators in Compact U(1) Lattice Gauge Theory*, Phys. Lett. **255B** (1991) 274.

[55] M.L. Paciello, C. Parrinello, S. Petrarca, B. Taglienti, A. Vladikas, *SU(3) Lattice Gauge Fixing with Overrelaxation and Gribov Copies*, Phys. Lett. **276B** (1992) 163, **281B** (1992) 417 (Erratum).

[56] M.L. Paciello, C. Parrinello, S. Petrarca, B. Taglienti, A. Vladikas, *Gribov Copies and Smeared Correlation Functions in Lattice QCD*, Phys. Lett. **289B** (1992) 405.

[57] S. Petrarca, *Numerical Results on Gribov Copies in Lattice SU(3) Theory*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **26** (1992) 435.

[58] S. Petrarca, *Experiencing Gribov Copies in SU(3) Lattice Gauge Theory*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **30** (1993) 543.

[59] A.K. Rebhan, *Non-Abelian Debye Mass at Next-to Leading Order*, Phys. Rev. **D48** (1993) 3967.

[60] A.K. Rebhan, *Nonabelian Debye Screening in One-Loop Resummed Pertubation Theory*, DESY Preprint, DESY 94-132 (1994).

[61] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories - An Introduction*, World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol.43 (1992).

[62] B. Svetitsky, L.G. Yaffe, *Critical Behavior at Finite-Temperature Confinement Transitions*, Nucl. Phys. **B210** (1982) 423.

[63] D. Toussaint, *Introduction to Algorithms for Monte Carlo Simulations and their Application to QCD*, Comp. Phys. Comm. **56** (1989) 69.

[64] J.C. Vink, U.-J. Wiese, *Gauge Fixing on the Lattice Without Ambiguity*, Phys. Lett. **289B** (1992) 122.

[65] J.C. Vink, *Investigation of Laplacian Gauge Fixing for U(1) and SU(2) Gauge Fields*, San Diego Preprint, UCSD/PTH 94-3 (1994).

[66] K.G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445.

[67] K.G. Wilson, in *New Phenomena in Subnuclear Physics*, Hrsg. A. Zichichi, Plenum, New York, 1975.

[68] L.G. Yaffe, B. Svetitsky, *First-Order Phase Transition in the SU(3) Gauge Theory at Finite Temperature*, Phys. Rev. **D26** (1982) 963.