Quarks, Diquarks und Hadronen in der Gitter QCD

Diplomarbeit

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

vorgelegt von
Ines Wetzorke

4. Juni 1998

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

In der modernen Elementarteilchenphysik wird die Vielzahl der heute bekannten Teilchen im Rahmen des Standardmodells auf wenige fundamentale Teilchen und ihre Wechselwirkungen zurückgeführt. Die Grundbausteine der Theorie sind die Quarks und Leptonen, die als Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen zu den Fermionen gehören. Die Quarks existieren in sechs verschiedenen Arten mit dem *Flavor* (u)p, (d)own, (s)trange, (c)harme, (b)ottom sowie (t)op und unterscheiden sich durch Masse und Ladung. Zu den Leptonen gehören das Elektron, das Myon und das Tau mit ihren entsprechenden Neutrinos. Unter fundamententalen Wechselwirkungen versteht man die Gravitation, die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Die Kräfte zwischen den elementaren Teilchen werden durch den Austausch von Eichbosonen mit Spin 1 vermittelt. Dabei ist die Wechselwirkungsstärke der Gravitation im Vergleich zu den anderen Kräften so gering, daß sie in der Elementarteilchenphysik vernachlässigt werden kann.

Die verbleibenden drei fundamentalen Wechselwirkungen können erfolgreich durch Eichfeldtheorien beschrieben werden. Für den Elektromagnetismus ist dies die Quantenelektrodynamik (QED), die unter Transformationen mit der Symmetriegruppe U(1) eichinvariant ist. In den 60er Jahren wurde von Glashow, Salam und Weinberg gezeigt, daß die Theorie der schwachen Kräfte gemeinsam mit der QED durch die vereinheitlichte Theorie der elektro-schwachen Wechselwirkung beschrieben werden kann. Für die starke Wechselwirkung wurde die Quantenchromodynamik (QCD) entwickelt. Diese Theorie besitzt eine lokale Eichinvarianz unter der Farbladungsgruppe $\mathrm{SU}(3)_c$. Die Quarks erhalten dabei zusätzlich zu ihrem Flavor den Freiheitsgrad *Color*, die Farbladung. Experimentell werden nur farbneutrale Bindungszustände beobachtet: Die aus einem Quark und einem Antiquark bestehenden Mesonen und die aus drei Quarks verschiedener Farbe zusammengesetzten Baryonen werden insgesamt als Hadronen bezeichnet.

Aufgrund des nicht-abelschen Charakters der QCD können die Gluonen als Eichbosonen der Theorie zusätzlich untereinander wechselwirken, da sie selbst Farbladungen tragen. Damit bewirken sie eine Anti-Abschirmung der Farbladung, die sich in der Abstandsabhängigkeit der starken Kopplung widerspiegelt. Möchte man zwei

Quarks voneinander trennen, so wächst das Potential zunächst Coulomb-artig mit dem Faktor der Kopplungsstärke α_s, die in diesem Fall sehr klein ist. Bei Abständen größer als ein Fermi steigt das Potential schließlich linear an, wobei der Proportionalitätsfaktor σ als Saitenspannung (*String tension*) bezeichnet wird. Dieses Verhalten beschreibt die beiden wesentlichen Eigenschaften der QCD, die asymptotische Freiheit bei kleinen Abständen und den Einschluß in Bindungszustände (*Confinement*) für den langreichweitigen Bereich.

Mit der Störungstheorie konnten sehr gute Voraussagen für kleine Kopplungen α_s getroffen werden, die durch Streuexperimente bei großen Impulsüberträgen (kleinen Abständen) bestätigt wurden. Dieses Verfahren versagt allerdings im Confinement-Bereich, wo die Kopplungstärke sehr stark zunimmt. Wilson entwickelte in den 70er Jahren einen nicht-störungstheoretischen Zugang zur QCD [3]. Dabei handelt es sich um die Gittereichtheorie, die auch für große Abstände ihre Gültigkeit behält. Die kontinuierliche Raum-Zeit wird durch ein diskretes euklidisches Raum-Zeit Gitter mit einem festen Gitterabstand a ersetzt. Dadurch erhält das zur Berechnung von Observablen benötigte Pfadintegral eine endliche Dimension und kann durch statistische Integrationsmethoden (Monte-Carlo Simulation) bestimmt werden.

Allerdings treten bei der Diskretisierung der Theorie systematische Fehler auf, die auf den endlichen Gitterabstand zurückzuführen sind. Die naive Diskretisierung der Eichwirkung liefert im Kontinuumlimes ($a \to 0$) Korrekturen der Ordnung a^2. An die Art der Diskretisierung ist nur die Bedingung geknüpft, daß sie im Limes $a \to 0$ den Kontinuumausdruck reproduzieren muß. Deshalb lassen sich durch Addition weiterer Terme verbesserte Wirkungen konstruieren, bei denen sich die Abweichungen in führender Ordung a gegenseitg wegheben. In dieser Arbeit wird die in niedrigster Ordnung der Kopplung (*tree-level*) verbesserte (1,2)-Eichwirkung verwendet, die im Rahmen des *Symanzik Improvement Scheme* [5, 6] entwickelt wurde. Bei dieser Wirkung beginnen die Korrekturen erst bei der Ordnung a^4. Für die Fermionwirkung läßt sich ebenfalls eine verbesserte Diskretisierung erreichen. Die O(a) verbesserte Clover (Kleeblatt) Wirkung für Wilson Fermionen enthält nur noch Korrekturen in Ordnung a^2 und wurde daher in dieser Arbeit benutzt. Außerdem wurde die sogenannte Valenzquark-Approximation (*Quenched Approximation*) angewandt, bei der die Dynamik der Quarks vernachlässigt wird. Es werden also die Beiträge virtueller Quark-Loops unterdrückt. Damit kann das Pfadintegral wie in der reinen Eichtheorie ohne Fermionen berechnet werden.

Betrachtet man das Phasendiagramm der QCD, dann ist der Bereich kleiner Temperaturen und geringer Dichten durch hadronische Materie gekennzeichnet. Geht man zu immer höheren Temperaturen, so kommt es schließlich bei der kritischen Temperatur T_c zum Deconfinement-Phasenübergang, bei dem die Materie in das Quark-Gluon Plasma (QGP) übergeht. Bei geringer Temperatur und hohen Dichten spielt die Quantenstatistik eine entscheidende Rolle, so daß sich in diesem Bereich eine interessante Phasenstruktur beim Übergang zum Plasma ausbilden kann. In Analogie zum Phänomen der Supraleitung bei tiefen Temperaturen läßt sich hier der Begriff der Farb-Supraleitung [25, 26] einführen. Man geht davon aus, daß bei einer kritischen Baryondichte die Symmetrie der Farbladungsgruppe $SU(3)_c$ spontan gebrochen wird, so daß sich gebundene Zustände aus zwei Quarks ähnlich den Cooper Paaren bilden könnten. Diese Diquark Zustände tragen nun eine resultierende Farbladung. Die Störungstheorie liefert ebenso wie Berechnungen mit dem Instanton Modell [27, 28] Hinweise auf einen gebundenes Diquark mit zwei verschiedenfarbigen Quarks und Spin 0 aufgrund von Wechselwirkungen zwischen Color und Spin bzw. Flavor und Spin der Quarks. Betrachtet man ein Baryon, so könnte statt einer gleichmäßigen Bindung der drei Quarks auch ein stark gebundener Diquark Zustand mit einem daran nur leicht gekoppelten dritten Quark die Bindung korrekt beschreiben. Dies sind nur einige Aspekte, bei denen Diquarks eine wichtige Rolle spielen würden.

In dieser Arbeit soll nun die mögliche Bildung von Diquark Zuständen in einer ersten Gittersimulation untersucht werden. Diese wird aufgrund der Probleme einer Monte-Carlo Simulation bei endlicher Dichte bei der Temperatur $T = 0$ und einer mittleren Baryondichte von Null durchgeführt. Bereits in diesem Bereich sind interessante Ergebnisse zu erwarten. Neben den Diquarkmassen wird auch die Konstituenten-Quarkmasse auf dem Gitter bestimmt, um durch den Vergleich auf die Stärke der Bindung schließen zu können. Da es sich bei diesen Observablen um Objekte mit resultierender Farbladung handelt, stellen sie eichvariante Größen dar, deren Erwartungswert sich zu Null ergeben würde. Deshalb wird die Landau-Eichung festgelegt, in der nun alle Observablen berechnet werden können. Um die Massenaufspaltung der Diquarks aufgrund der Spinwechselwirkungen mit bekannten Ergebnissen vergleichen zu können, werden zusätzlich die Baryonen Nukleon und Delta auf dem Gitter untersucht. Zur Bestimmung der Massenskala sind schließlich auch die Mesonen Pion und Rho entscheidend. Dieses Teilchenspektrum wird daher in der vorliegenden Arbeit durch Monte-Carlo Simulation mit verbesserter Eich- und Fermionwirkung in Landau-Eichung berechnet.

Im ersten Kapitel wird zunächst die Quantenchromodynamik als Kontinuumtheorie beschrieben. Dabei wird auf die Darstellung als SU(3)-Eichtheorie eingegangen und der Pfadintegralformalismus eingeführt.

Das zweite Kapitel stellt die Diskretisierung der QCD als Gittereichtheorie vor. Außerdem werden die Eich- und Fermionwirkungen in der Gitterversion formuliert, sowie mögliche Verbesserungen diskutiert. Anschließend wird die Bildung des Kontinuumlimes eingehend erläutert.

Die numerische Methoden werden im dritten Kapitel behandelt. Es beschäftigt sich mit der statistischen Lösung des Pfadintegrals durch Monte-Carlo Simulationen. Im folgenden Abschnitt wird die Fixierung der Landau-Eichung für die verwendeten Eichfeldkonfigurationen erklärt. Darüber hinaus wird die Fehleranalyse für korrelierte Daten durch die Jackknife Methode dargelegt.

Darauf folgt das vierte Kapitel mit der Einführung der Operatoren und Korrelationsfunktionen des Teilchenspektrums. Die berechneten Diquarkzustände werden präsentiert und der Zusammenhang mit einfachen Potentialmodellen veranschaulicht. Weiterhin wird die explizite Berechnung der Teilchenmassen und das Fitverfahren erläutert. Abschließend wird auf die Bildung des chiralen Limes eingegangen.

Das Kapitel fünf liefert eine detailierte Beschreibung der wichtigsten Programmroutine, die Invertierung der Fermionmatrix. Es werden verschiedene Algorithmen vorgestellt und deren Effizienz beurteilt. Außerdem wird die Preconditioning Methode behandelt, mit der das Invertierungsverfahren eine schnelle Konvergenz erreicht.

Mit der Leistung des verwendeten Parallelrechners, sowie der benötigten Zeit der Simulation befaßt sich der erste Abschnitt des sechsten Kapitels. Danach werden die Ergebnisse graphisch dargestellt, ausführlich diskutiert und mit bisher bekannten Daten aus Gittersimulationen und experimentellen Werten verglichen. Es folgt eine Zusammenfassung der Resultate, bevor die verwendeten Konventionen bezüglich der Dirac-Matrizen im Anhang A aufgezeigt werden. Den Abschluß bildet die tabellarische Darstellung der numerischen Daten der Monte-Carlo Simulation in Teil B des Anhangs.

Kapitel 1

QCD im Kontinuum

Die Theorie der **Quantenchromodynamik** (QCD) beschreibt die starke Wechselwirkung der Quarks und Gluonen als nicht-abelsche $SU(3)_c$ Eichtheorie. Die Quarks besitzen außer ihrem *flavor* noch einen weiteren Freiheitsgrad *color*, die Farbladung. Die Einführung dieser Eigenschaft wurde notwendig, um unter anderem das Spin-Statistik-Problem zu lösen. Das Δ^{++}-Teilchen besteht aus drei u-Quarks mit gleicher Spinrichtung. Damit das Pauli-Prinzip nicht verletzt wird, muß die Wellenfunktion aber total antisymmetrisch sein. Dies wird erreicht, wenn jedes der Quarks eine der drei Farbladungen *rot*, *blau* oder *grün* trägt.

Die Lagrangedichte der QCD für freie Quarks lautet

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\Psi}_{\alpha}^{c,f}(x)(i\not{\partial} - m_f)_{\alpha\beta}\Psi_{\beta}^{c,f}(x) \tag{1.1}$$

Dabei haben die Quarkfelder Ψ die Color-Indizes $c = 0 \ldots 2$ und die Spinor-Indizes $\alpha, \beta = 0 \ldots 3$, so daß es sich insgesamt um einen Vektor mit 12 Einträgen handelt. Ebenso stellt der Ausdruck $(i\not{\partial} - m)_{\alpha\beta}$ eine 12x12 Matrix dar. Das Feld $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\gamma_0$ beschreibt wie üblich das Antiteilchen.

Aus der Lagrangedichte erhält man schließlich durch Funktionalableitung nach den Feldern die relativistische Bewegungsgleichung der Fermionen, die **Dirac-Gleichung**

$$(i\not{\partial} - m_f)\Psi^{c,f}(x) = 0 \tag{1.2}$$

1.1 QCD als Eichtheorie

Die Lagrangedichte der freien Quarks ist nicht eichinvariant unter lokalen $SU(3)_c$ Transformationen wie es von der QCD als Eichtheorie gefordert wird. Dieses Problem läßt sich durch die folgende Ersetzung, die *minimale Substitution*, lösen:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu(x) \tag{1.3}$$

Dabei ist g die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. Die $A_\mu(x)$ beschreiben die Gluonfelder, die Eichbosonen der $\mathrm{SU}(3)_c$. Sie sind durch die folgende Relation mit den acht Generatoren der Gruppe, den Gell-Mann Matrizen λ_k, verknüpft:

$$A_\mu(x) = \sum_k A_\mu^k(x)\frac{\lambda_k}{2} \tag{1.4}$$

Damit transformieren sich die Felder der Fermionen und Eichbosonen unter einer Matrix $G(x) = \exp[\, i\, A_\mu(x)] \in \mathrm{SU}(3)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &\longrightarrow G(x)\Psi(x) \\
\bar{\Psi}(x) &\longrightarrow \bar{\Psi}(x)G^\dagger(x) \\
A_\mu(x) &\longrightarrow G(x)A_\mu(x)G^\dagger(x) - \frac{i}{g}G(x)\partial_\mu(x)G^\dagger(x)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Damit die Gluonfelder nicht nur ein äußeres Feld darstellen, sondern auch in der Dynamik der Theorie berücksichtigt werden, benötigt man noch einen weiteren Term in der Lagrangedichte. Er beschreibt die Selbstwechselwirkung der Gluonfelder, die in einer abelschen Eichtheorie wie der QED nicht auftritt.

$$\mathcal{L}_G(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(x)F_a^{\mu\nu}(x) \tag{1.6}$$

mit dem Gluon-Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_n(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig\,[A_\mu(x), A_\nu(x)] \tag{1.7}$$

Die eichinvariante Lagrangedichte der QCD läßt sich also insgesamt darstellen als:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G = \bar{\Psi}^{c,f}_\alpha(x)(i\not{D} - m_f)_{\alpha\beta}\Psi^{c,f}_\beta(x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \tag{1.8}$$

Durch den Kommutator in (1.7) erhält man im Vergleich zur QED zusätzlich die Wechselwirkung von drei und vier Gluonen untereinander. In Folge der gluonischen Selbstwechselwirkung wird die effektive Kopplung der QCD bei großen Abständen sehr stark. Dies ist ein Indiz für **Confinement**, also den Einschluß von Quarks in Bindungszustände. Bei kleinen Abständen geht die Kopplung gegen Null, so daß sich die Quarks fast wie freie Teilchen bewegen können **(Asymptotische Freiheit)**.

Störungstheoretische Rechnungen liefern eine renormierte Kopplung, die vom Impulsübertrag Q^2 abhängig ist:

$$\alpha(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\log(\frac{Q^2}{\Lambda^2})} \tag{1.9}$$

N_f bezeichnet dabei die Anzahl der Quarkflavors. Der Parameter Λ markiert die Grenze zwischen gebundenen und quasifreien Quarks und wurde experimentell zu etwa 250 MeV bestimmt.

Da bei der Störungstheorie im Limes kleiner Kopplung gerechnet wird, ist sie im Confinement-Bereich nicht anwendbar. In diesem Fall kann man aber durch Computersimulationen auf einem vierdimensionalen diskreten Raum-Zeit-Gitter wichtige Erkenntnisse gewinnen.

1.2 Pfadintegralformalismus

In der Feldtheorie kann die Quantisierung ebenso wie in der Quantenmechanik durch Pfadintegrale erfolgen. Erwartungswerte von Operatoren, die aus dem zeitgeordneten Produkt ihrer Felder bestehen, werden durch das unendlich-dimensionale Integral über alle Felder berechnet.

$$\langle 0|\mathcal{O}(A,\Psi,\bar{\Psi})|0\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\ \mathcal{O}(A,\Psi,\bar{\Psi})\ e^{iS_{QCD}(A,\Psi,\bar{\Psi})} \tag{1.10}$$

Dabei beschreibt Z die Zustandssumme, also die Vakuum-Übergangsamplitude,

$$Z = \langle 0|0\rangle = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\ e^{iS_{QCD}(A,\Psi,\bar{\Psi})} \tag{1.11}$$

die Wirkung $S_{QCD} = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}$ ist durch die Lagrangedichte bestimmt.

Der Ausdruck (1.10) besitzt einen stark oszillierenden und komplexen Integranden. Aus diesem Grund geht man zur **euklidischen Formulierung** der Pfadintegrale über. Dazu wird eine Drehung der Integrationsebene, die **Wick-Rotation**, durchgeführt, wobei die Zeit analytisch ins Komplexe fortgesetzt wird.
Insgesamt ergeben sich folgende Ersetzungen ausgehend von der Minkowski-Metrik zu reellen Größen im euklischen Raum $\mathcal{R}^4$:

$$\begin{aligned} t \ &= \ x_0 \ \rightarrow -ix_4 \\ \partial_t \ &= \ \partial_0 \ \rightarrow \ i\partial_4 \\ & \quad\ A_0 \ \rightarrow \ iA_4 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Außerdem müssen die Dirac-γ-Matrizen transformiert werden, die dann eine ebenfalls veränderte Vertauschungsrelation erfüllen:

$$\gamma_4^E = \gamma_0 \quad \text{und} \quad \gamma_k^E = -i\gamma_k \qquad \Longrightarrow \qquad \{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{1.13}$$

Dadurch ergibt sich die euklidische Version der Lagrangedichte, aus der die euklidische Wirkung berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^E_{QCD} &= \mathcal{L}^E_F + \mathcal{L}^E_G = \bar{\Psi}^{c,f}_\alpha (\gamma^E_\mu D_\mu + m_f)_{\alpha\beta} \Psi^{c,f}_\beta + \frac{1}{2} \,\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ S^E_{QCD} &= \int d^4x \mathcal{L}^E_{QCD} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Somit erhält man für die Erwartungswerte in euklidischer Darstellung einen reellen Integranden, der mit der Wirkung exponentiell abfällt.

$$\langle 0|\mathcal{O}(A,\Psi,\bar{\Psi})|0\rangle = \frac{1}{Z^E} \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\; \mathcal{O}(A,\Psi,\bar{\Psi})\; e^{-S^E_{QCD}(A,\Psi,\bar{\Psi})} \tag{1.15}$$

Allerdings ist dieses unendlich-dimensionale Integral mathematisch nicht wohl definiert. Erst durch die **Gitterregularisierung** erhält der Ausdruck eine sinnvolle Bedeutung. Die Berechnung von physikalischen Operatoren auf dem diskreten Raum-Zeit-Gitter wird im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben.

In allen folgenden Kapiteln werden nur noch euklidische Größen benutzt, so daß in Zukunft der Index E entfällt.

Kapitel 2

Gittereichtheorie

2.1 QCD auf dem Gitter

Im Gegensatz zur Störungstheorie, wo die Größe der Impulse durch den Cut-off-Parameter Λ begrenzt wird, führt man bei der Regularisierung im Ortsraum ein diskretes Raum-Zeitgitter mit kleinem, aber endlichem Gitterabstand a ein. Jeder Gitterpunkt entspricht nun einem Vektor $n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbf{N}^4$ auf einem endlichen Gitter der Größe $N_\sigma^3 \times N_\tau$, wobei N_σ und N_τ die Anzahl der Punkte in Raum- bzw. Zeitrichtung kennzeichnen. Die Berechnungen auf einem solchen Gitter sind also auf ein endliches Volumen der Ausdehnung $V = (N_\sigma a)^3 \times (N_\tau a)$ beschränkt.

Beim Übergang von der kontinuierlichen euklidischen Raumzeit zur Gitterformulierung ist außerdem die Diskretisierung der Integrale und Ableitungen nötig. Sie transformieren sich in endliche Summen ($\int d^4x \longrightarrow a^4 \sum_n$) und Differenzenquotienten ($\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Psi \longrightarrow \frac{1}{a}[\Psi(na+\hat{\mu}a) - \Psi(na)]$). Dadurch wird das unendlich-dimensionale Pfadintegral (1.15) endlich und erhält eine mathematisch sinnvolle Bedeutung.

Die Fermionfelder, die auf den Gitterpunkten positioniert sind, können durch Renormierung mit dem Gitterabstand a in dimensionslose Größen umgewandelt werden.

$$
\begin{aligned}
\hat{\Psi}_n &= a^{3/2}\,\Psi(na) \\
\hat{m} &= a\,m
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Dies läßt sich ebenso für die Masse durchführen, so daß der Pfadintegralausdruck keine dimensionsbehafteten Variablen mehr enthält. Allgemein wird die Renormierung durch die Gleichung $\hat{\mathcal{O}} = a^{dim(\mathcal{O})}\mathcal{O}(a)$ definiert. Die damit verknüpfte Renormierungsgruppengleichung wird in Abschnitt 2.3 in Zusammenhang mit dem Kontinuumlimes noch genauer beschrieben.

Um die SU(3)-Eichsymmetrie zu bewahren, erfolgt die Identifikation der Gluonfelder A_μ mit den Verbindungslinien (Links) des Gitters. Dies geschieht mit Hilfe des Schwinger'schen Linienintegrals:

$$U_\mu(n) = \exp\left[ig \int_n^{n+a\hat{\mu}} dz^\mu A_\mu(z)\right] = \exp\left[igaA_\mu(n)\right] \tag{2.2}$$

Die Linkvariable $U_\mu(n)$ wird durch eine SU(3)-Matrix dargestellt und beschreibt die Verbindung vom Gitterpunkt n zum Nachbar $n + \hat{\mu}$ in $\hat{\mu}$-Richtung. In entgegengesetzter Richtung ist der Link zwischen diesen beiden Punkten definiert als $U_\mu^\dagger(n) \equiv U_{-\mu}(n + \hat{\mu})$.

Es soll nun im folgenden Teil zunächst nur der gluonische Anteil der Wirkung dargestellt werden, mit dem bereits Aussagen über Phasenübergänge und die Stringtension möglich sind. In Abschnitt **2.2** wird dann auf die speziellen Eigenschaften der Fermionen auf dem Gitter eingegangen.

2.1.1 Reine Eichwirkung

An die Gitterversion der Wirkung wird die Bedingung gestellt, daß sie ebenso wie die Kontinuumwirkung eichinvariant sein muß. Außerdem soll im Limes $a \to 0$ die ursprüngliche Form $S_G = \frac{1}{2} \int d^4x \; \mathrm{Tr}\; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ erhalten bleiben.

Trotz dieser Einschränkungen gibt es viele Möglichkeiten, die gluonische Wirkung auf dem Gitter zu parametrisieren. Die Plaquette $U_{\mu\nu} = U_{\mu,n}U_{\nu,n+a\hat{\mu}}U^\dagger_{\mu,n+a\hat{\nu}}U^\dagger_{\nu,n}$ in Abbildung (2.1) bildet mit dem Produkt aus vier Linkvariablen den kleinsten abgeschlossen Weg auf den Gitterverbindungen, der damit gleichzeitig eine eichinvariante Größe darstellt. Die Plaqutte-Wirkung ist also die einfachste Form, die die obigen Bedingungen an die Eichwirkung erfüllt. Hierbei ist die Kopplung β ein freier Parameter, der durch die Anzahl der Farben der Theorie N_c und die reine Kopplung g festgelegt werden kann.

$$\begin{aligned} S_G^{Gitter}(U) &= \beta \sum_{n,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{N_c}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,U_{\mu\nu}(n)\right) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{2N_c}{g^2} \\ &= \beta \sum_{n,\mu<\nu} \left(1 - \frac{1}{2N_c}\,\mathrm{Tr}\,\left\{U_{\mu\nu}(n) + U^\dagger_{\mu\nu}(n)\right\}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jetzt bleibt noch zu zeigen, daß diese Wirkung im Kontinuumlimes die Gluonwirkung reproduziert. Zunächst werden die vier zur Plaquette beitragenden Links durch die jeweiligen Schwinger'schen Linienintegrale mit der Baker-Hausdorff-Formel zusammengefaßt.

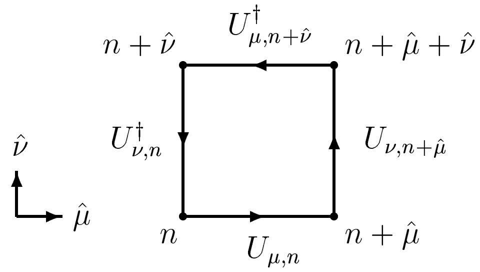

Abbildung 2.1: Plaquette

$$U_{\mu\nu}(n) = \exp\left\{ ig \left[\int_n^{n+a\hat\nu} \left[A_\nu(y+a\hat\mu) - A_\nu(y)\right]\, dy - \int_n^{n+a\hat\mu} \left[A_\mu(y+a\hat\nu) - A_\mu(y)\right]\, dy \right] + \mathcal{O}(g^2) \right\} \tag{2.4}$$

Nun wird eine Taylorentwicklung der Exponentialfunktion in niedrigster Ordnung g um den Mittelpunkt der Plaquette durchgeführt. Dabei werden die Differenzen der Felder zu kontinuierlichen Ableitungen, die über $F^{(0)}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu A_\nu$ mit dem Feldstärketensor in nullter Näherung zusammenhängen. Setzt man dieses Ergebnis in die Plaquette-Wirkung ein, so erhält man die Kontinuumwirkung.

$$\begin{aligned} S_G &= \lim_{a\to 0} \sum_{n,\mu<\nu} \mathrm{Tr}\, \left[a^4 F^{(0)}_{\mu\nu} F^{(0)}_{\mu\nu} + a^6 \frac{1}{12} F^{(0)}_{\mu\nu} (\partial^{(2)}_\mu + \partial^{(2)}_\nu) F^{(0)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^8) \right] + \mathcal{O}(g^4) \\ &= \lim_{a\to 0} a^4 \sum_{n,\mu<\nu} \left[\mathrm{Tr}\, F^{(0)}_{\mu\nu} F^{(0)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^2) \right] + \mathcal{O}(g^2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x\ \mathrm{Tr}\, F^{(0)}_{\mu\nu} F^{(0)}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(g^2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Führt man die Entwicklung in der nächsten Ordnung durch, so wird im Kontinuumlimes der vollständige Feldstärketensor mit dem Term $ig[A_\mu, A_\nu]$ reproduziert.

An der Gleichung (2.5) erkennt man, daß es auf dem Gitter noch Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ gibt. Sie verschwinden zwar im Limes $a \to 0$, allerdings beeinflussen sie die Ergebnisse der Gittersimulationen bei endlichem Gitterabstand a.

2.1.2 Verbesserte Eichwirkungen

Folgt man dem Symanzik Improvement Scheme [4], so lassen sich die Abweichungen in Ordnung a^2 und höher durch Hinzufügen von weiteren eichinvarianten Termen zur Gitterwirkung eliminieren. Die **tree-level improved actions** [5, 6] sind auf diese Weise in niedrigster Ordnung g in schwacher Kopplungsentwicklung verbessert. Nach der Plaquette sind der 1x2- und der 2x1-Loop die nächstgrößeren eichinvarianten

Objekte auf dem Gitter. Sie bestehen jeweils aus sechs planar aneinandergefügten Links und bilden zusammen mit der bisherigen Plaquette-Wirkung die **(1,2)-verbesserte Wirkung** in Formel (2.6). Die Koeffizienten der Terme sind so gewählt, daß sich die Abweichungen in $\mathcal{O}(a^2)$ gegenseitig wegheben und somit die Wirkung bis zur Ordnung a^4 korrekt ist.

$$\begin{aligned} S^{(1,2)} &= \beta \sum_{n,\mu<\nu} \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{N} \,\mathrm{Re\,Tr}\, \square_{\mu\nu}(n)\right) \\ &\quad -\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2N} \,\mathrm{Re\,Tr} \left\{ \boxed{}_{\mu\nu}(n) + \boxed{\begin{matrix}\\ \end{matrix}}_{\mu\nu}(n) \right\}\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die Eichfeld-Konfigurationen für diese Arbeit wurden mit der (1,2)-verbesserten Wirkung erzeugt. In Abschnitt 3.1 wird dies noch intensiver behandelt. Es sei außerdem darauf hingewiesen, daß sich die Korrekturterme der Ordnung a^2 auch durch 2x2-Loops eliminieren lassen. Das Auftreten von $\mathcal{O}(a^4)$ Termen in der Wirkung kann man durch das Hinzufügen von 3x3-Loops mit den entsprechenden Koeffizienten verhindern. So läßt sich das von Symanzik entwickelte Verbesserungsschema bis zu beliebigen Ordnungen anwenden.

Eine weitere Möglichkeit, die Eichwirkung im Kontinuumlimes zu verbessern, wurde Anfang der neunziger Jahre von Lepage und Mackenzie [7] entwickelt, die **tadpole verbesserte Wirkung**. Die Gitteroperatoren gehen bei Betrachtung der niedrigsten Ordnung g und im Limes $a \to 0$ in den Kontinuumausdruck über. Für die Linkvariablen entspricht dies der Entwicklung der Exponentialfunktion bis zu Termen linear in g.

$$U_\mu(n) = \exp\left[igaA_\mu(n)\right] = 1 + igaA_\mu(n) + \ldots \tag{2.7}$$

Der nächste Term wird allerdings nicht wie erwartet mit einem Faktor $(ag)^2$ unterdrückt, sondern durch Beiträge aus den Feldern $A_\mu(n)$ nur mit g^2. Daraus resultieren zusätzliche Loops, unter anderem die tadpole Loops, die im Kontinuum nicht auftreten. Sie verursachen erhebliche Unterschiede in der Gitter- und Kontinuumformulierung. Ein Beispiel dafür ist der Linkerwartungswert u_0 in Landau-Eichung (siehe 3.2), der nicht den erwarteten Wert von Eins liefert. Teilt man nun jeden Link durch den auf dem Gitter bestimmten Wert von u_0, so ist der Beitrag der tadpole Diagramme eliminiert. Diese Renormierung kann mit Hilfe des eichinvarianten Plaquette-Erwartungswertes ohne die Landau-Eichung wesentlich einfacher durchgeführt werden. Da die Linkvariable viermal in die Plaquette eingeht, besteht der tadpole Faktor nun aus der vierten Wurzel des Plaquette-Erwartungswertes.

$$U_\mu(n) \longrightarrow \tilde{U}_\mu(n) = \frac{U_\mu(n)}{u_0} \qquad \text{mit} \qquad u_0 = \langle \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\, U_{\mu\nu}(n)\rangle^{\frac{1}{4}} \tag{2.8}$$

In der Eichwirkung drückt sich die Renormierung der Eichfelder allein durch eine Reskalierung der Kopplung $\beta \longrightarrow \tilde{\beta} = u_0^{-4}\beta$ aus.

2.2 Fermionwirkung

Der fermionische Anteil der Kontinuumwirkung (1.14) kann nun ebenso wie der gluonische Teil diskretisiert werden. Zunächst erhält man dadurch die sogenannte naive Diskretisierung der Fermionwirkung, die im Limes $a \to 0$ keine Korrekturen $\mathcal{O}(a)$ liefert.

$$S_F^{naiv} = \sum_{x,y,i,j,\alpha,\beta} \bar{\Psi}^i_\alpha(x) M^{ij}_{\alpha\beta}(x,y) \Psi^j_\beta(y) \tag{2.9}$$

Die Gitterpunkte werden hier wieder wie üblich mit x und y statt mit n und m bezeichnet, um Verwechslungen mit der Fermionmasse m zu vermeiden. Die Elemente der Fermionmatrix M werden durch die Spinor-Indizes α und β sowie durch die Color-Indizes i und j gekennzeichnet. Die Matrix ist durch die folgende Formel bestimmt.

$$\begin{aligned} M^{ij}_{\alpha\beta}(x,y) &= \sum_\mu \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \, [\, U^{ij}_\mu(x) \, \delta_{x+\hat{\mu},y} - \, U^{\dagger ij}_\mu(x-\hat{\mu}) \, \delta_{x-\hat{\mu},y}] \\ &\quad + m \, \delta_{xy}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Möchte man Erwartungswerte von Observablen berechnen, so muß bei der Auswertung des Pfadintegrals beachtet werden, daß die Fermionfelder die Antivertauschungsrelation erfüllen. Sie werden daher durch Grassmann-Variablen dargestellt, die diese Eigenschaft berücksichtigen. Mit diesen speziellen Variablen läßt sich die Integration über die Fermionfelder relativ einfach ausführen.

$$\int D\bar{\Psi} D\Psi DU \;\; e^{-(\bar{\Psi}M(U)\Psi + S_G)} = \int DU \det(M(U)) \;\; e^{-S_G} = \int DU \; e^{-S_{eff}} \tag{2.11}$$

Dabei wird die effektive Wirkung durch $S_{eff} = S_G - \ln(\det M)$ beschrieben.

In dieser Arbeit wird die spezielle Näherung $\det M = const. = 1$ verwendet, die **Quenched Approximation**. Dabei werden die Beiträge virtueller Quark-Loops durch Vakuumpolarisation und somit die Effekte dynamischer Fermionen vernachlässigt. Daher ist es in dieser Approximation möglich, das Pfadintegral wie in der reinen Eichtheorie ohne Fermionbeiträge zu bestimmen (siehe auch 3.1).

Allerdings hat man damit nicht das einzige Problem bei der Simulation von Fermionen auf dem Gitter beseitigt. Betrachtet man bei naiver Diskretisierung der Fermionmatix die Korrelationsfunktion für den Quarkpropagator im Impulsraum [1], so erhält man den folgenden Ausdruck:

$$< \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y) >= \lim_{a\to 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \; e^{ip(x-y)} \; \frac{[\, m - \frac{i}{a}\sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a)\,]_{\alpha\beta}}{m^2 + \frac{1}{a^2}\sum_\mu \sin^2(p_\mu a)} \tag{2.12}$$

Betrachtet man Formel (2.12), so kann man erkennen, daß die Sinus-Funktion im Nenner gerade an den Integrationsgrenzen Nullstellen aufweist. Für $p = (0,0,0,0)$, $(0,0,0,\pi/a), \ldots, (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a)$ ergeben sich also $2^{dim} = 16$ Polstellen, die den simulierten Fermionen auf dem Gitter entsprechen. Dieses Phänomen der **Fermionverdopplung** kann nicht umgangen werden, ohne die chirale Symmetrie im Limes $m \to 0$ zu brechen, wie 1981 von Nielsen und Ninomiya [8] gezeigt wurde.

Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Situation ist die Formulierung mit **staggered Fermionen** nach Kogut-Susskind [9]. Dabei wird eine unitäre Transformation der Fermionfelder durchführt, so daß eine Theorie mit nur vier Fermionen entsteht, die eine $U(1) \otimes U(1)$ Symmerie als Überbleibsel der chiralen Symmetrie aufweist. Man erhält die folgende staggered Fermionwirkung mit der Fermionmatrix M^{KS} und den Phasenfaktoren η_μ :

$$\begin{aligned} S_F^{KS} &= \sum_{x,y} \bar{\chi}(x)\, M^{KS}(x,y)\, \chi(y) \\ M^{KS}(x,y) &= \frac{1}{2} \sum_{\mu} \eta_\mu(x) \left[U_\mu(x)\, \delta_{x+\hat{\mu},y} - U_\mu^\dagger(x-\hat{\mu})\, \delta_{x-\hat{\mu},y} \right] + m\, \delta_{x,y} \end{aligned} \tag{2.13}$$

In dieser Arbeit wird allerdings eine andere Formulierung für die Fermionwirkung verwendet, die **Wilson Wirkung** mit der Verbesserung durch den **Clover Term**. Dies wird in den nächsten beiden Abschnitten ausführlich beschrieben. Hier sei nur so viel gesagt, daß bei dieser Art der Wirkung zwar die chirale Symmetrie explizit gebrochen ist, aber dafür das Problem der Fermionverdopplung nicht mehr auftritt.

2.2.1 Wilson Fermionen

Die Idee bei der Wilson Formulierung der Fermionwirkung besteht darin, daß die Masse der unerwünschten Fermiondoppler im Limes $a \to 0$ divergiert. Dies wird durch die Ergänzung eines Terms proportional zu a^{-1} erreicht, so daß schließlich nur der physikalische Zustand bei $p = (0,0,0,0)$ übrig bleibt. Bei diesem Verfahren wird die explizite Brechung der chiralen Symmetrie durch die Einführung des zweiten Terms mit dem D'Alembert Operator in Kauf genommen.

$$\begin{aligned} S_F^{Wilson} &= S_F^{naiv} - \frac{r}{2} \sum_{x,\alpha,i} \bar{\Psi}_\alpha^i(x) \Box \Psi_\alpha^i(x) \\ &= \sum_{xy,\alpha\beta,ij} \bar{\Psi}_\alpha^i(x) M_{\alpha\beta,ij}^{Wilson}(x,y) \Psi_\beta^j(y) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Der Wilson Parameter r kennzeichnet die Stärke des Zusatzterms, so daß man für $r = 0$ wieder die naive Diskretisierung der Fermionmatrix (2.10) bekommt. Wählt man $r = 1$, so erhält man in der Formel für die Fermionmatrix (2.15) die Projektionsoperatoren $(\mathbb{1} \pm \gamma_\mu)$ auf den zweidimensionalen Spinorraum. Diese führen zu einer Vereinfachung der Matrixinvertierung, die in Kapitel 5 genauer erläutert wird.

$$\begin{aligned} M^{Wilson}_{\alpha\beta,ij}(x,y) &= (m+4r)\ \delta_{xy}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\sum_\mu \left[\ (r\mathbb{1} - \gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ U^{ij}_\mu(x)\ \delta_{x+\hat{\mu},y} \right. \\ &\qquad \left. + (r\mathbb{1} + \gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ U^{\dagger ij}_\mu(x-\hat{\mu})\ \delta_{x-\hat{\mu},y}\right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

Betrachtet man nun wie bei der naiven Diskretisierung die Impulsraumdarstellung der Korrelationsfunktion, so erhält man den Ausdruck:

$$\begin{aligned} < \Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y) > &= \lim_{a\to 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ e^{ip(x-y)} \\ &\quad \frac{\left[m + \frac{1}{a}\ \sum_\mu \left[\ r\,(1-\cos(p_\mu a)) - i\gamma_\mu \sin(p_\mu a)\ \right]\right]_{\alpha\beta}}{\left(m + \frac{r}{a}\ \sum_\mu (1-\cos(p_\mu a))\right)^2 + \frac{1}{a^2}\ \sum_\mu \sin^2(p_\mu a)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Der Zustand $p = (0,0,0,\pi/a)$ beispielsweise bekommt hier als Pol des Nenners die Masse $M = m + 2\frac{r}{a}$, die für kleine a sehr groß wird. Ebenso divergieren im Limes $a \to 0$ die Massen aller anderen Zustände, außer bei $p = (0,0,0,0)$, wo man wie gewünscht die Masse m des physikalischen Teilchens erhält.

Die Masse der Wilson Fermionen wird auf dem Gitter durch den Hopping Parameter κ festgelegt:

$$m = \frac{1}{2}\ (\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c}) \tag{2.17}$$

Dabei beschreibt κ_c den kritischen Wert, an dem die Pionmasse verschwindet. Diese ist über die Relation $m_\pi^2 \sim m_q$ mit der Quarkmasse verknüpft, so daß durch die Bestimmung von κ_c eine Massenskala definiert wird (siehe auch Abschnitt 4.4). Betrachtet man die freie Theorie ($g^2 \to 0$) und setzt den Wilson Parameter $r = 1$, so gilt $\kappa_c = \frac{1}{8}$, wogegen $\kappa \to \kappa_c = \frac{1}{4}$ für eine wechselwirkenden Theorie mit starker Kopplung ($g^2 \to \infty$) den korrekten Wert darstellt. In dem dazwischenliegenden Bereich ist $\frac{1}{8} < \kappa_c(g^2) < \frac{1}{4}$ abhängig von der Kopplungsstärke.

Außerdem sei bemerkt, daß die Wilson Wirkung nun im Gegensatz zur naiven Diskretisierung Korrekturen $\mathcal{O}(a)$ zur Fermionwirkung im Kontinuum aufweist. Die ursprüngliche Situation kann durch die Clover (Kleeblatt) Wirkung wieder hergestellt werden.

2.2.2 Clover Wirkung

Von Sheikholeslami und Wohlert [10] wurde eine verbesserte Fermionwirkung entwickelt, die wie die naive Wirkung nur noch Korrekturen $\mathcal{O}(a^2)$ enthält. Ausgehend von der Wilson Wirkung bekommt man durch Addition eines Terms proportional zu dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ die übliche Form der **Clover Wirkung**

$$\begin{aligned} S_C &= S_{Wilson} + i\,\frac{\kappa}{2}\sum_{x,\alpha,i}\bar{\Psi}^i_\alpha(x)F_{\mu\nu}(x)\sigma_{\mu\nu}\Psi^i_\alpha(x) \\ &= \frac{1}{2\kappa}\sum_{xy,\alpha\beta,ij}\bar{\Psi}^i_\alpha(x)M^{ij}_{\alpha\beta}(x,y)\Psi^j_\beta(y) \end{aligned} \tag{2.18}$$

mit der Fermionmatrix

$$M^{ij}_{\alpha\beta}(x,y) = A^{ij}_{\alpha\beta}(x)\,\delta_{xy} - \kappa\,\Delta^{ij}_{\alpha\beta}(x,y) \tag{2.19}$$

$$A^{ij}_{\alpha\beta}(x) = \mathbb{1} - \frac{\kappa r}{2}\,g\,F_{\mu\nu}(x)\,\sigma_{\mu\nu} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{ij}_{\alpha\beta}(x,y) &= \sum_\mu \left[\,(r\mathbb{1}-\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,U^{ij}_\mu(x)\,\delta_{x+\hat{\mu},y}\right. \\ &\quad \left. +\;(r\mathbb{1}+\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,U^{\dagger ij}_\mu(y)\,\delta_{x-\hat{\mu},y}\,\right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ kann auf dem Gitter ausgehend vom Punkt x durch die vier umliegenden Plaquetten $U^k_{\mu\nu}$ in der $\mu\nu$-Ebene dargestellt werden. Dies wird in Abbildung 2.2 genauer veranschaulicht.

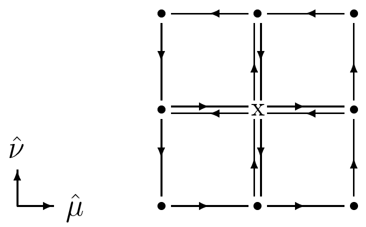

Abbildung 2.2: Clover-Term

Die folgende Formel gibt die symmetrisierte Variante von $F_{\mu\nu}$ an, bei der keine Richtung bevorzugt wird:

$$g\,F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{8i}\sum_k \left(U^k_{\mu\nu}(x) - U^{\dagger\,k}_{\mu\nu}(x)\right) \tag{2.22}$$

Außerdem gilt die Relation $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu] = -\sigma_{\nu\mu}$, wobei das Produkt von $\sigma_{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}(x)$ explizit berechnet werden muß. Hier sei nur eine vereinfachte Schreibweise der Komponenten aufgeführt, die sich bei der Programmierung der Clover Wirkung als nützlich erweist.

$$\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} W_0 & W_1 & W_2 & W_3 \\ W_1^\dagger & -W_0 & W_3^\dagger & -W_2 \\ W_2 & W_3 & W_0 & W_1 \\ W_3^\dagger & -W_2 & W_1^\dagger & -W_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rcl} W_0 & = & F_{21} \\ W_1 & = & F_{32} + iF_{31} \\ W_2 & = & F_{30} \\ W_3 & = & F_{10} + iF_{02} \end{array} \tag{2.23}$$

Insgesamt läßt sich die $\mathcal{O}(a)$ verbesserte Clover Wirkung also auf die folgende Weise symbolisch dargestellen:

$$\begin{aligned} S_C \;=\; & \frac{1}{2\kappa}\sum_{x,y}\bar{\Psi}(x)\Bigg\{\Bigg[\mathbb{1} - \frac{\kappa}{2}\sum_{\mu,\nu}\mathrm{Im}\;\;{}_{\mu\nu}(x)\,\sigma_{\mu\nu}\Bigg]\delta_{x,y} \\ & - \kappa\sum_{\mu}\Bigg[(\mathbb{1}-\gamma_\mu)\,\delta_{x+\hat{\mu},y}\;\bullet\!\longrightarrow\!\bullet_{\mu}(x) + (\mathbb{1}+\gamma_\mu)\,\delta_{x-\hat{\mu},y}\;\bullet\!\longleftarrow\!\bullet_{\mu}(y)\Bigg]\Bigg\}\Psi(y) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Renormiert man bei der Fermionwirkung wie im Fall der Eichwirkung die Eichfelder mit dem Faktor u_0 (siehe 2.1.2), so erhält man auch hier eine **tadpole verbesserte Wirkung**. Dadurch tritt in der Formel für Δ (2.21) ein zusätzliches u_0^{-1} und bei der Clovermatrix A (2.20) ein Faktor u_0^{-4} auf. Durch die Renormierung des Hopping Parameters $\kappa \longrightarrow \tilde{\kappa} = u_0^{-1}\kappa$ kann ein u_0 absorbiert werden. Übrig bleibt der Faktor u_0^{-3}, der als Clover Koeffizient c_{SW} zusammengefaßt werden kann. Somit ergibt sich für die Clovermatix die neue Form:

$$A^{ij}_{\alpha\beta}(x) = \mathbb{1} - c_{SW}\frac{\kappa r}{2}\, g\, F_{\mu\nu}(x)\,\sigma_{\mu\nu} \tag{2.25}$$

Bereits von Sheikholeslami und Wohlert wurde berechnet, daß der Clover Koeffizient für die **tree-level** verbesserte Eichwirkung gleich Eins ist. Da in dieser Arbeit die (1,2)-verbesserte Eichwirkung verwendet wurde, gilt also $c_{SW} = 1$. Später wurde von Wohlert [11] gezeigt, daß bei der **1-loop** verbesserten Wirkung die Abhängigkeit von der Kopplung g bercksichtigt werden muß:

$$c_{SW} = 1 + 0.2659\, g^2 + \mathcal{O}(g^4) \tag{2.26}$$

Inzwischen wurden bereits neue Strategien entwickelt, um diesen Koeffizienten nichtstörungstheoretisch zu bestimmen. Dabei werden Simulationen mit beliebigem Clover Koeffizienten bei verschiedenen Kopplungen g durchgeführt, wobei jeweils die PCAC-Relation ($\partial_\mu A_\mu = 2m\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$) in der Gitterversion (4.30) bis auf Korrekturen der Ordnung a erhalten bleiben soll. Auf diese Weise wurde der Clover Koeffizient in Abhängigkeit von der Kopplung bereits in der Quenched Approximation [12] und in der vollen QCD mit dynamischen Fermionen [13] für die Wilson

Eichwirkung bestimmt. Für die in dieser Arbeit benutzte (1,2)-verbesserte Eichwirkung wurde diese nicht-störungstheoretische Methode bisher leider noch nicht angewandt, so daß die Simulation ohne tadpole Verbesserung mit dem tree-level Clover Koeffizienten durchgeführt wurde.

2.3 Kontinuumlimes

Alle in der Gittereichtheorie verwendeten Größen werden in Einheiten des Gitterabstandes a angegeben und sollen im Grenzwert $a \to 0$ in ihre äquivalente Kontinuumgröße übergehen. Andererseits ist die Kopplung g die einzige freie Parameter in der Wirkung. Man muß also einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Variablen herstellen. Im Vergleich mit statistischen Modellen läßt sich erkennen, daß die Korrelationslänge ξ im Kontinuumlimes divergieren muß. An diesem Punkt definiert man die kritische Kopplung g^*, so daß die folgende Relation eine Beziehung zur Kopplung $g(a)$ auf dem Gitter herstellt:

$$g(a) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} g^* \tag{2.27}$$

Für eine beliebige Observable $\mathcal{O}$ mit der Massendimension $dim(\mathcal{O})$ ergibt sich daraus der Zusammenhang zwischen der Gitterobservablen $\hat{\mathcal{O}}$ und der von Gitterabstand und Kopplung unabhängigen Kontinuumgröße $\mathcal{O}_{phys}$.

$$\mathcal{O}\left(g(a),a\right) = a^{-dim(\mathcal{O})}\hat{\mathcal{O}}\left(g(a),a\right) \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{phys} \tag{2.28}$$

Damit eine Observable für kleine Gitterabstände unabhängig von a wird, muß gelten:

$$\begin{aligned} a\frac{d}{da}\mathcal{O}\left(g(a),a\right) &= 0 \\ \left(a\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{\partial g}{\partial a}\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O} &= 0 \\ \left(a\frac{\partial}{\partial a} - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\mathcal{O} &= 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Diese Formel wird **Renormierungsgruppengleichung** genannt und enthält die Callan-Symanzik β-Funktion mit $\beta(g) = -a(\frac{\partial g}{\partial a})$.

Im Rahmen der Störungstheorie kann nun beispielsweise das Potential zwischen schweren Quarks in der schwachen Kopplungsentwicklung als Observable in die Gleichung eingesetzt werden. Die asymptotisch freie Theorie der QCD liefert eine kritische Kopplung $g^* = 0$. Daraus ergibt sich die folgende Relation:

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \mathcal{O}(g^6) \tag{2.30}$$

mit den universellen Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f\right) \\ b_1 &= \frac{1}{(16\pi^2)^2}\left(\frac{34}{3}N_c^2 - N_f[\frac{10}{3}N_c + \frac{N_c^2-1}{N_c}]\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Durch die Integration von $\beta(g) = -a(\frac{\partial g}{\partial a})$ ergibt sich der direkte Zusammenhang zwischen Gitterabstand und Kopplung im Limes $g \to 0$.

$$a(g) = \frac{1}{\Lambda}(b_0 g^2)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}} \exp\{-\frac{1}{2b_0 g^2}\} \tag{2.32}$$

Dabei ist Λ eine Integrationskonstante, die experimentell bestimmt werden kann (siehe 1.1). Es sei außerdem bemerkt, daß die β-Funktion ebenso durch nicht-störungstheoretische Methoden ermittelt werden kann. Dabei wird beispielsweise die Stringtension in Abhängigkeit von der Kopplung gemessen und eine Interpolation zwischen diesen Meßpunkten durchgeführt. Daraus läßt sich schließlich die inverse β-Funktion berechnen.

Kapitel 3

Numerische Methoden

3.1 Monte-Carlo Simulation zur Erzeugung von Konfigurationen

In Abschnitt 2.2 wurde bereits beschrieben, daß das Pfadintegral der QCD mit Fermionfeldern in der Quenched Approximation durch die Nährerung $\det M = 1$ wie in der reinen Eichtheorie berechnet werden kann. Allerdings handelt es sich bei diesem Ausdruck

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \mathcal{O}[U] e^{-S_G[U]} \tag{3.1}$$

um ein sehr hoch-dimensionales Integral. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten $16^3 \times 32$ Gitter müßten z. B. über vier Millionen Integrale gelöst werden. Für diese Berechnung sind die üblichen analytischen und numerischen Methoden ungeeignet, da die Rechenzeit exponentiell mit der Dimension ansteigt. Einen Ausweg bietet die **Monte-Carlo Methode**, bei der das Pfadintegral statistisch angenähert wird. Erzeugt man N zufällige Eichfeldkonfigurationen, so ergibt sich der Erwartungswert der Observablen zu:

$$\langle \mathcal{O} \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z} \mathcal{O}[U] e^{-S_G[U]} \tag{3.2}$$

Tatsächlich liefert nur eine geringe Anzahl von Konfigurationen mit kleiner Wirkung S_G einen signifikanten Beitrag zu diesem Ausdruck. Dieser Tatsache wird durch das **Importance Sampling** Rechnung getragen, bei dem die Konfigurationen mit der Boltzmann-Verteilung im thermischen Gleichgewicht $P_{eq}(U_i) = \frac{1}{Z} \exp(-S(U_i))$ generiert werden. Die Konfigurationen werden durch sogenannte **Markov-Ketten** erzeugt. Dabei entwickelt man eine neue Konfiguration U_i mit einer Übergangswahrscheinlichkeit $P(U_{i-1} \to U_i)$ aus der vorherigen U_{i-1}. Jede mögliche Konfiguration sollte mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit erreichbar sein (Ergodizität). Damit die so generierten Konfigurationen die gewünschte Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweisen, muß die **Detailed Balance** Bedingung erfüllt sein:

$$e^{-S(U_{i-1})}P(U_{i-1} \to U_i) = e^{-S(U_i)}P(U_i \to U_{i-1}) \tag{3.3}$$

Es gibt verschiedene Algorithmen, die diese Voraussetzungen erfüllen. Zunächst wurde 1953 von Metropolis et. al. [14] eine Methode entwickelt, bei der jeweils lokal ein Link verändert wird. Verringert sich die Wirkung, so wird diese Änderung übernommen. Andernfalls wird durch eine Zufallszahl entschieden, ob der neue Wert der Linkvariablen auch bei erhöhter Wirkung akzeptiert wird. Ein Sweep über alle Links des Gitters liefert dann eine neue Konfiguration.

Für die SU(2) entstand 1980 der Heatbath Algorithmus von Creutz [15]. Daraufhin entwickelten Cabibbo und Marinari [16] den Pseudo-Heatbath Algorithmus für die SU(3) bzw. SU(N), der später von Kennedy und Pendleton [17] noch verbessert wurde. Hierbei wird der Heatbath Algorithmus auf die SU(2) Untergruppen der SU(N) angewandt. Zunächst wird ein Link mit seiner Umgebung ins thermische Gleichgewicht gebracht, während alle anderen Links festgehalten werden. Bei einem Sweep durch das gesamte Gitter entsteht auf diese Weise eine neue Konfiguration, die von der vorherigen aber nicht unabhängig ist. Deshalb werden nur solche Konfigurationen zur Berechnung von Observablen auf dem Gitter verwendet, die durch eine genügende Anzahl von Sweeps voneinander getrennt sind, so daß sie als nahezu unabhängig betrachtet werden können. Durch die zusätzliche Anwendung eines Overrelaxation-Algorithmus [18, 19], der die Korrelation zwischen den Konfigurationen verringert, erhält man eine effektive Methode zur Erzeugung von Eichfeldkonfigurationen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Konfigurationen wurden durch eine Kombination von vier Overrelaxation-Schritten und einem Heatbath-Schritt mit der (1,2)-verbesserten Eichwirkung bei einer Kopplung von $\beta = 4.1$ generiert. Sie sind durch 100 Sweeps getrennt und können somit als beinahe unabhängig angesehen werden.

3.2 Landau Eichung

Möchte man eichvariante Observablen wie Quark und Diquark Propagatoren (siehe Kapitel 4) auf dem Gitter simulieren, so müssen die Korrelationsfunktionen für diese Teilchen in einer festen Eichung berechnet werden. Dabei benutzt man die Invarianz der gluonischen Wirkung unter Eichtransformation mit einer Matrix G(x) $\in$ SU(3):

$$U_\mu^{gauged} = G(x)U_\mu(x)G^\dagger(x+\mu) \tag{3.4}$$

In dieser Arbeit wurde die **Landau-Eichung** verwendet, die von Mandula und Ogilvie [20] bereits zur Berechnung von Gluon Propagatoren auf dem Gitter angewandt wurde. In neueren Arbeiten wird dieses Verfahren auch zur Berechnung von Quark Propagatoren benutzt [21, 22]. Dabei werden die Eichfeldkonfigurationen zunächst durch Monte-Carlo Simulationen erzeugt und anschließend in die Landau-Eichung transformiert. In der Kontinuumtheorie muß dafür die Bedingung $\partial^\mu A_\mu(x) = 0$ erfüllt sein. Die Diskretisierung auf dem Gitter wird über die Linkvariablen realisiert:

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &= \exp\left[igA_\mu(x)\right] \simeq \mathbb{1} + igA_\mu(x) \\ \text{und daher} \quad A_\mu(x) &\simeq -\frac{i}{2g}\left[U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x)\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Somit erhält man für den Ausdruck $\partial^\mu A_\mu(x)$ in der Gitterversion mit diskretisierter Ableitung

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu(x) &= \sum_\mu \left[A_\mu(x) - A_\mu(x-\mu)\right] \\ &= -\frac{i}{2g}\sum_\mu \left[U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) - (U_\mu(x-\mu) - U_\mu^\dagger(x-\mu))\right], \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei dieser Ausdruck für die SU(3) spurlos gestaltet werden muß. Da das Gluonfeld $A_\mu(x)$ durch die Relation (1.4) über die Generatoren der SU(3) definiert ist, handelt es sich um eine Matrix. Daher wird die Eichbedingung auf dem Gitter durch die Summe der Betragsquadrate der einzelnen Matrixeinträge $(\sum_k \frac{1}{2}\partial_\mu A_\mu^k(x)\lambda_k)_{ij}$ definiert. Die Minimierung dieser Größe entspricht in der reinen SU(3) Eichtheorie der Maximierung des Ausdrucks

$$\sum_{\mu,x} \mathrm{Tr}\left[U_\mu^{gauged}(x) + U_\mu^{\dagger gauged}(x)\right], \tag{3.7}$$

während die Transformationsmatrizen als $G(x) = \exp\left[ig\alpha\, \partial^\mu A_\mu(x)\right]$ parametrisiert werden. Hierbei stellt α eine Variable dar, mit der Anzahl der Iterationsschritte bei der Maximierung optimiert werden kann. Allerdings muß bei der Wahl von α auch darauf geachtet werden, daß der Algorithmus nicht instabil wird.

Durch ein solches Verfahren wird $|\partial^\mu A_\mu(x)|^2$ bis zu einem festgelegten Abbruchkriterium minimiert. Je weiter man sich der Landau-Eichung nähert, desto stärker steigt die Anzahl der Iterationsschritte und damit die benötigte Rechenzeit (*critical slowing down*). Einen Ausweg dafür bietet die Fourier-Beschleunigung [23], mit der die gewünschte Genauigkeit der Landau-Eichung durch wesentlich weniger Iterationen erreicht werden kann. Hierbei werden die Transformationsmatrizen durch den Ausdruck

$$G(x) = \exp\left[ig\alpha\, \hat{F}^{-1}\frac{p_{max}^2}{p^2}\hat{F}\, \partial^\mu A_\mu(x)\right] \tag{3.8}$$

ersetzt. Das Symbol $\hat{F}$ beschreibt die Fourier-Transformation und $\hat{F}^{-1}$ die inverse Prozedur, wobei ebenso die numerisch optimierte *fast fourier transformation* (FFT) verwendet werden kann. Der Parameter p^2 kennzeichnet die Eigenwerte des diskretisierten Ableitungsoperators $-\partial^2$, sowie p^2_{max} den maximalen Eigenwert.

3.3 Jackknife-Fehleranalyse

Da die durch die Monte-Carlo Simulation erzeugten Eichfeldkonfigurationen nicht völlig unabhängig voneinander sind, können auch die darauf berechneten Observablen nicht vollständig unkorreliert sein. Deshalb verwendet man für die Analyse der Daten die **Jackknife Methode**, die diese Korrelationen berücksichtigt.

Dafür wird die gesamte Datenmenge in N gleichlange Blöcke eingeteilt. Man bildet nun N reduzierte Datensätze, bei denen jeweils ein Block bei der Analyse nicht berücksichtigt wird. $\bar{T}$ bezeichnet den üblicherweise berechneten Erwartungswert der gesamten Daten und T_i den Erwartungswert der Observablen auf dem jeweiligen reduzierten Datensatz. Die statistisch unabhängigen Pseudowerte des Jackknife lassen sich mit der Relation $J_i = N\bar{T} - (N-1)\,T_i$ berechnen. Schließlich liefert das statistische Mittel über diese Werte

$$\bar{\mathcal{O}} \simeq \bar{J} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} J_i \tag{3.9}$$

mit dem Fehler

$$\Delta\mathcal{O} \simeq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(J_i - \bar{J})^2}{N(N-1)}}\,. \tag{3.10}$$

Dies ist eine verbesserte Schätzung des Erwartungswertes und des zugehörigen Fehlers. Alle in dieser Arbeit erzeugten Daten wurden mit dieser Methode analysiert.

Kapitel 4

Teilchenspektrum

4.1 Diquarks und Potentialmodelle

Zunächst könnte man denken, daß aus zwei Quarks bestehende Zustände nicht von Interesse sind, da sie eine resultierende Farbladung tragen und deshalb nach der Confinement Hypothese nicht als gebundene Zustände beobachtbar sind. Allerdings könnte die QCD im Bereich hoher Baryondichte und Temperatur T=0 eine sehr reiche Phasenstruktur aufweisen, weil hier die Quantenstatistik eine wesentlich größere Rolle spielt als bei großen Temperaturen. Während im Hochtemperaturbereich oberhalb des Deconfinement-Phasenübergangs die Materie in Form des Quark-Gluon-Plasmas vorliegt, wird im Gebiet $T = 0$ die Bildung von bosonischer Materie energetisch bevorzugt, so daß sich Diquark- und sogar größere Quark-Cluster bilden können [24].

Neuere Veröffentlichungen regen an, die Bildung von Diquark Zuständen in Analogie zur Supraleitung bei tiefen Temperaturen als Farb-Supraleitung (*color superconductivity*) zu beschreiben [25, 26]. Dabei nimmt man an, daß die Farbsymmetrie der $SU(3)_c$ bei einer kritischen Baryon-Dichte spontan gebrochen wird und sich ein Bose-Kondensat aus Quark Cooper Paaren bilden kann. Diese Diquark Phase könnte möglicherweise mit der Phase gebrochener chiraler Symmetrie koexistieren.

In der Störungstheorie liefert der Mechanismus des Ein-Gluon-Austausch eine anziehende Wechselwirkung zwischen zwei Quarks mit anti-parallelem Spin und verschiedenen Farbquantenzahlen, so daß diese einen Diquark-Zustand bilden könnten. Ebenso gibt es bei Berechnungen mit dem *Instanton Liquid Modell* [27, 28] Hinweise darauf, daß ein leicht gebundenes Diquark mit Spin 0 existieren könnte. Dabei wird im Gegensatz zum Ein-Gluon-Austausch angenommen, daß die anziehende Kraft

(F,S,C)	Diquark Zustand	F-S Kopplung	C-S Kopplung
$(\bar{3}, 0, \bar{3})$	$\epsilon_{abc}(C\gamma_5)_{\alpha\beta}\ u^\dagger_{a,\alpha} d^\dagger_{b,\beta}$	-2	-2
$(6, 1, \bar{3})$	$\epsilon_{abc}\ u^\dagger_{a,\alpha} u^\dagger_{b,\alpha}$	-1/3	2/3
$(\bar{3}, 1, 6)$	$u^\dagger_{c,\alpha} d^\dagger_{c,\alpha}$	2/3	-1/3
$(6, 0, 6)$	$(C\gamma_5)_{\alpha\beta}\ u^\dagger_{c,\alpha} u^\dagger_{c,\beta}$	1	1

Tabelle 4.1: Diquark Zustände in der $\bar{3}$ und 6 Farb-Darstellung mit (**F**)lavor u und d, sowie α, β als (**S**)pinor- und a, b, c als (**C**)olor-Indizes

durch Flavor-Spin Wechselwirkung entsteht. In dieser Arbeit soll nun überprüft werden, ob solche Resultate auch bei Monte-Carlo Simulationen auf dem Gitter bestätigt werden können.

Außerdem spielt die Bindung von zwei Quarks beim Aufbau von Baryonen eine Rolle. Man kann sich vorstellen, daß sich in einem System aus drei Quarks ein energetisch günstiger Diquarkzustand bildet, an den das dritte (möglicherweise schwerere) Quark nur leicht gebunden ist. Bei hohen Dichten könnte dieses dann gemeinsam mit einem anderen ungepaarten Quark ein weiteres Diquark bilden.

Die Diquark-Zustände können im Rahmen der $SU(3)_c$ nicht als Farbsinglett auftreten, sondern nur als Color-Anti-Triplett (verschiedene Farbe) oder Sextett (gleiche Farbe). Kombiniert man diese beiden Möglichkeiten mit einem Spin 0 oder 1, so erhält man die Zustände in der Tabelle 4.1. Aufgrund der Fermi-Statistik müssen der erste und dritte Zustand aus verschiedenen Quark-Flavors aufgebaut sein, damit die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch bleibt. Die letzten beiden Spalten geben die relative Stärke der Wechselwirkung durch Flavor-Spin und Color-Spin Kopplung an. Sie läßt sich aus den Zwei-Körper Matrixelementen mit dem entsprechenden Potentialterm $V \sim (\lambda_1^a \lambda_2^a)(s_1 s_2)$ berechnen [24, 29]. Dabei kennzeichnen die λ_i^a die Generatoren der $SU(3)_f$ bzw. $SU(3)_c$.

Anhand des Massenspektrums der Diquark-Zustände kann festgestellt werden, welche der Kopplungsarten bei der Simulation die dominante Rolle spielt. Dies äußert sich in der Reihenfolge der Diquarkmassen mit den Quantenzahlen 613 und 316, die gerade umgekehrt in der Wechselwirkungsstärke auftreten. Möchte man nun ein Gefühl für die möglichen Massen der Diquarks bekommen, so kann man einfache **Potentialmodelle** [29] betrachten. In erster Näherung können die verschiedenen Beiträge addiert werden:

$$m_{F,S,C} = 2\bar{m}_q + V_{conf} + V_S \tag{4.1}$$

Dabei beschreibt $\bar{m}_q \simeq 300$ MeV die Konstituenten-Quarkmasse und $V_{conf} \simeq 200$ MeV den durch Confinement verursachten Anteil der Quark-Quark-Bindung. V_S kennzeichnet die spin-abhängige Wechselwirkung, die sowohl Beiträge von der Flavor-Spin als auch von der Color-Spin Kopplung enthält.

Für baryonische Zustände wie Nukleon und Delta, die aus drei Quarks bestehen, gilt eine ganz ähnliche Relation:

$$\begin{aligned} m_N &= 3\bar{m}_q + \tilde{V}_{conf} + 2V_0 + V_1 \quad \text{mit} \quad \tilde{V}_{conf} = 3V_{conf} \\ m_\Delta &= 3\bar{m}_q + \tilde{V}_{conf} + 3V_1 \end{aligned}$$

Der Confinement-Anteil ist in diesem Fall dreimal so groß wie im Vergleich mit den Diquarks, da in einfachen Potentialmodellen angenommen wird, daß dieser Beitrag durch die Wechselwirkung zweier Quarks entsteht.

Betrachtet man nun die Differenz der Massen von Delta und Nukleon und vergleicht sie mit der Massenaufspaltung der Diquarks mit Spin 0 und 1 in der $\bar{3}$-Farbdarstellung, so kommt man zu der Beziehung:

$$m_\Delta - m_N = 2\ (m_{613} - m_{303}) = 2\ (V_1 - V_0) \tag{4.2}$$

Das Splitting der Massen ist also allein durch die spinabhängigen Anteile des Potentials bestimmt. Diese Relation soll unter anderem in dieser Arbeit überprüft werden.

4.2 Hadronoperatoren und Korrelationsfunktionen

Auf dem Gitter lassen sich die Massen der diversen Teilchen durch ihre Zweipunktkorrelationsfunktion bestimmen. Sie beschreibt ein Teilchen, welches sich vom Ort $y = 0$ zur Zeit $t = 0$ zum Ort x zum Zeitpunkt t bewegt, durch die Quarkpropagatoren $G^{ab}_{\alpha\beta}(x, t; 0)$. Dabei sind a und b die Farben, sowie α und β die Spins des Anfangs- bzw. Endzustandes. Es werden nur *flavor non-singlet* Terme betrachtet, also die Kombinationen mit gleichem Flavor, da diese den signifikanten Beitrag liefern. Jeder Propagator kann daher mit genau einem Massenwert $\kappa_u, \kappa_d, \kappa_s, ...$ berechnet werden. Dabei werden die Massen der u- und d-Quarks als entartet angenommen ($\kappa_u \equiv \kappa_d$). Der Quarkpropagator ist durch die inverse Fermionmatrix M^{-1} bestimmt. Die Invertierung von M wird in Kapitel 5 ausführlich beschrieben. Bei der Berechnung der Korrelationsfunktionen wird die Quenched Approximation verwendet und somit die Determinante der Fermionmatrix gleich Eins gesetzt.

Für die Bestimmung der Massen von einzelnen Quarks und Diquarks, also Teilchen mit Farbladung, wurde auf den verwendeten Konfigurationen eine Landau-Eichung nach (3.2) durchgeführt, da die Operatoren selbst nicht eichinvariant sind.

In diesem Abschnitt gelten folgende Notationen:

Spinor Indizes $(0\dots3)$: $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\tau$ sowie s_1, s_2
Color Indizes $(0\dots2)$: $a,b,c,\dots,l$ und c_1,c_2
Propagatoren: $U \equiv M^{-1}(\kappa_u,x,0) = D \equiv M^{-1}(\kappa_d,x,0)$

4.2.1 Quarkpropagator und Mesonen

Obwohl einzelne Quarks im Experiment aufgrund des Confinement nicht direkt beobachtbar sind, ist ihre Konstituenten-Masse ein wichtiger Baustein in der grundlegenden Theorie des Aufbaus der Mesonen und Baryonen. Der Operator für ein Quark mit Spin s und Farbe c ist einfach gegeben durch das Fermionfeld $\Psi_s^c(x) \equiv u_s^c(x)$.

Zur Berechnung der Korrelationsfunktion auf dem Gitter muß das Pfadintegral in (4.3) gelöst werden. Man erhält die inverse Fermionmatrix in Abhängigkeit von der Masse κ_u. Die Spur wird über sämtliche Spinor- und Colorindizes gebildet, außerdem wird über die Eichfelder U gemittelt. Schließlich folgt noch die Summation über alle räumlichen Koordinaten einer Zeitschicht, um die Teilchenmasse im Grundzustand durch die Projektion auf den Impuls $p=0$ zu erhalten (siehe 4.3.1).

$$\begin{aligned}
C^{Quark}(x,t) &= \langle 0|\Psi_{s_1}^{c_1}(x,t)\bar{\Psi}_{s_2}^{c_2}(0)|0\rangle \\
&= \frac{1}{Z}\int DUD\bar{\Psi}D\Psi \;\; \Psi(x,t)\bar{\Psi}(0)\; e^{-(\bar{\Psi}M\Psi+S_G)} \\
&= \frac{1}{Z}\int DU \det\,[M(U)] \;\; \mathrm{Tr}\; M^{-1}(x,t;0)\; e^{-S_G} \\
&= \langle\; \mathrm{Tr}\;[M_{s_1s_2}^{-1\;c_1c_2}(\kappa_u,x,t;0)]_{s_1s_2,c_1c_2}\;\rangle_U \\
&\equiv \langle\; \mathrm{Tr}\;[U_{s_1s_2}^{c_1c_2}]_{s_1s_2,c_1c_2}\;\rangle_U
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Die aus einem Quark und einem Antiquark bestehenden **Mesonen** lassen sich je nach ihren Quantenzahlen in skalare und pseudoskalare sowie Vektor-, Pseudovektor- und Tensor-Mesonen unterteilen. Allgemein läßt sich der Mesonoperator schreiben als:

$$\mathcal{M}(x) = \bar{\Psi}_\alpha^{c,f_1}(x)\Gamma_{\alpha\beta}\Psi_\beta^{c,f_2}(x) \tag{4.4}$$

$$\text{mit } \Gamma_{\alpha\beta} = \mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu \text{ oder } \sigma_{\mu\nu} \tag{4.5}$$

In dieser Arbeit wurden die Massen der π- und ρ-Mesonen berechnet, da diese zur Bestimmung der Kontinuummasse eine wichtige Rolle spielen. Dies wird in Abschnitt (4.4) genauer erläutert.

Pion (Pseudoskalares Meson $J^{PC} = 0^{-+}$)

Der Pion-Operator hat daher die folgende Form:

$$\Pi(x) = \bar{d}^c_\alpha(x)(\gamma_5)_{\alpha\beta}u^c_\beta(x) \tag{4.6}$$

Die Korrelationsfunktion berechnet sich dann ebenso wie in (4.3), allerdings müssen zusätzlich die Vertauschungsrelationen der Fermionfelder und der γ-Matrizen berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} C^{\Pi}(x,t) &= \langle 0|\Pi(x,t)\Pi^\dagger(0)|0\rangle \\ &= -\langle 0|\bar{d}^{c_1}_\alpha(x,t)(\gamma_5)_{\alpha\beta}u^{c_1}_\beta(x,t)\bar{u}^{c_2}_\gamma(0)(\gamma_5)_{\gamma\delta}d^{c_2}_\delta(0)|0\rangle \\ &= \langle\ \mathrm{Tr}\ [U^{c_1c_2}_{\beta\gamma}(\gamma_5)_{\gamma\delta}D^{c_2c_1}_{\delta\alpha}(\gamma_5)_{\alpha\beta}]_{\beta\gamma,c_1c_2}\ \rangle_U \\ &= \langle\ \mathrm{Tr}\ [U^{c_1c_2}_{\beta\gamma}D^{\dagger c_1c_2}_{\beta\gamma}]_{\beta\gamma,c_1c_2}\ \rangle_U \\ &= \langle\ |U^{c_1c_2}_{\beta\gamma}|^2\ \rangle_U \end{aligned} \tag{4.7}$$

unter Verwendung der Relation $D^{\dagger c_1c_2}_{\beta\gamma} = (\gamma_5)_{\gamma\delta}D^{c_2c_1}_{\delta\alpha}(\gamma_5)_{\alpha\beta}$ und $U \equiv D$

Rho (Vektormeson $J^{PC} = 1^{--}$)

Für das ρ-Meson ergibt sich der Operator zu:

$$\mathcal{R}_k(x) = \bar{d}^c_\alpha(x)(\gamma_k)_{\alpha\beta}u^c_\beta(x) \tag{4.8}$$

In diesem Fall läßt sich die Korrelationsfunktion darstellen als:

$$C^{\mathcal{R}}_k(x,t) = \langle\ \mathrm{Tr}\ [(\gamma_k\gamma_5)_{\alpha\beta}U^{c_1c_2}_{\beta\gamma}(\gamma_k\gamma_5)_{\gamma\delta}D^{\dagger c_1c_2}_{\alpha\delta}]_{\alpha\delta,c_1c_2}\ \rangle_U \tag{4.9}$$

4.2.2 Diquarks und Baryonen

Die untersuchten Diquarkzustände wurden bereits in Abschnitt 4.1 beschrieben und werden hier nun in der Operatorschreibweise aufgelistet. Dabei ist der Operator der Ladungskonjugation $C = \gamma_0\gamma_2 = -\gamma_1\gamma_3\gamma_5$. Die zugehörigen Korrelationsfunktionen wurden in Analogie zu den Mesonen in (4.7) und den Baryonen in [2] berechnet.

Diquark (Flavor $\bar{3}$, Spin 0, Color $\bar{3}$)

$$\mathcal{D}i^{303}_c(x) = \epsilon_{abc}(C\gamma_5)_{\alpha\beta}u^a_\alpha(x)d^b_\beta(x) \tag{4.10}$$

$$C^{Di_{303}}(x,t) = \langle\ \mathrm{Tr}\ [\epsilon_{abc}\epsilon_{def}(C\gamma_5)_{\alpha\beta}(C\gamma_5)_{\gamma\delta}U^{ad}_{\alpha\gamma}U^{be}_{\beta\delta}]_{cf}\ \rangle_U \tag{4.11}$$

Diquark (Flavor 6, Spin 1, Color $\bar{3}$)

$$\mathcal{D}i_c^{613}(x) = \sum_{s=0..3} \epsilon_{abc} u_s^a(x) u_s^b(x) \tag{4.12}$$

$$C^{Di_{613}}(x,t) = \langle \text{ Tr } [\sum_{s_1=0..3} \sum_{s_2=0..3} \epsilon_{abc}\epsilon_{def}(U^{ad}_{s_1 s_2} U^{be}_{s_1 s_2} - U^{ae}_{s_1 s_2} U^{bd}_{s_1 s_2})]_{cf} \rangle_U \tag{4.13}$$

Diquark (Flavor $\bar{3}$, Spin 1, Color 6)

$$\mathcal{D}i_c^{316}(x) = \sum_{s=0..3} u_s^c(x) d_s^c(x) \tag{4.14}$$

$$C^{Di_{316}}(x,t) = \langle \text{ Tr } [\sum_{s_1=0..3} \sum_{s_2=0..3} (U^{c_1 c_2}_{s_1 s_2})^2]_{c_1 c_2} \rangle_U \tag{4.15}$$

Diquark (Flavor 6, Spin 0, Color 6)

$$\mathcal{D}i_c^{606}(x) = (C\gamma_5)_{\alpha\beta} u_\alpha^c(x) u_\beta^c(x) \tag{4.16}$$

$$C^{Di_{606}}(x,t) = \langle \text{ Tr } [(C\gamma_5)_{\alpha\beta}(C\gamma_5)_{\gamma\delta}(U^{c_1c_2}_{\alpha\gamma} U^{c_1c_2}_{\beta\delta} - U^{c_1c_2}_{\alpha\delta} U^{c_1c_2}_{\beta\gamma})]_{c_1 c_2} \rangle_U \tag{4.17}$$

Allgemein läßt sich ein **Baryon**-Operator durch die Kombination von drei Fermionfeldern darstellen. Der ϵ-Tensor sorgt wie bei den Diquarks für die richtige Farbkombination und die $(C\Gamma)$-Matrix für die passende Stellung der Spinorkomponenten der Quarkfelder.

$$\mathcal{B}(x) = \epsilon_{abc} \Psi_\alpha^{a,f_1}(x)[\Psi_\beta^{b,f_2}(x)(C\Gamma)_{\beta\gamma} \Psi_\gamma^{c,f_2}(x)] \tag{4.18}$$

In dieser Arbeit wurden zwei Baryonen untersucht, das Nukleon (uud/udd) mit Spin $\frac{1}{2}$ und das Delta-Teilchens (uuu) mit Spin $\frac{3}{2}$. Für die verwendeten Baryonen werden nun die Operatoren und die daraus berechneten Korrelationsfunktionen [2] präsentiert:

Nukleon

$$\mathcal{N}_\alpha(x) = \epsilon_{abc} u_\alpha^a(x)[u_\beta^b(x)(C\gamma_5)_{\beta\gamma} d_\gamma^c(x)] \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} C^N(x,t) = \langle \text{ Tr } [&\epsilon_{abc}\epsilon_{def}(C\gamma_5)_{\beta\gamma}(C\gamma_5)_{\epsilon\phi} \\ &* (U^{ad}_{\alpha\delta} U^{be}_{\beta\epsilon} D^{cf}_{\gamma\phi} + U^{ad}_{\alpha\epsilon} U^{be}_{\beta\delta} D^{cf}_{\gamma\phi})]_{\alpha\delta} \rangle_U \end{aligned} \tag{4.20}$$

Delta

$$\Delta_{k,\alpha}(x) = \epsilon_{abc} u_\alpha^a(x)[u_\beta^b(x)(C\gamma_k)_{\beta\gamma} u_\gamma^c(x)] \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} C_k^\Delta(x,t) = \langle \text{ Tr } [&\epsilon_{abc}\epsilon_{def}(C\gamma_k)_{\beta\gamma}(C\gamma_k)_{\epsilon\phi} \\ &* (U^{ad}_{\alpha\delta} U^{be}_{\beta\epsilon} U^{cf}_{\gamma\phi} + 2U^{ad}_{\alpha\epsilon} U^{be}_{\beta\delta} U^{cf}_{\gamma\phi})]_{\alpha\delta} \rangle_U \end{aligned} \tag{4.22}$$

4.3 Berechnung der Massen

4.3.1 Korrelationsfunktion im Impulsraum

Mit einer Fourier-Transformation kann man einen analytischen Ausdruck für die Korrelationsfunktion im Impulsraum erhalten, in dem man über alle Ortspunkte einer Zeitschicht summiert. Auf dem Gitter erhält man in (4.23) jeweils einen Term für den vorwärts und den rückwärts propagierenden Zustand.

$$\begin{aligned} C(p,t) &= \sum_x C(x,t) e^{-ipx} \\ &= \sum_n \left(A_n(p) e^{-E_n(p)t} + B_n(p) e^{-E_n(p)(N_\tau - t)} \right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Diese Summe wird für große Zeiten ($t \to \infty$) vom Grundzustand mit der Energie $E_0(p)$ dominiert. Man betrachtet nun zusätzlich die Projektion auf den Impuls $p = 0$, so daß sich $E_0(0)$ auf die Masse des Grundzustandes m_0 reduziert.

Außerdem gilt für die Amplituden $A_n(p)$ und $B_n(p)$ die folgende Relation:

$$B_n(p) = \begin{cases} A_n(p) \text{ für Teilchen mit gerader Anzahl Quarks} \\ \qquad (Mesonen, Diquarks) \\ -A_n(p) \text{ für Teilchen mit ungerader Anzahl Quarks} \\ \qquad (Quark, Baryonen) \end{cases} \tag{4.24}$$

Die Korrelationsfunktion für $p = 0$ ist nun je nach obiger Unterscheidung symmetrisch oder antisymmetrisch um $\frac{N_\tau}{2}$, so daß sich für die beiden Fälle verschiedene hyperbolische Funktionen ergeben.

$$C_{even}(t) = 2A_0 \, e^{-m_0 \frac{N_\tau}{2}} \cosh\left(m_0 \left(\frac{N_\tau}{2} - t \right) \right) \tag{4.25}$$

$$C_{odd}(t) = 2A_0 \, e^{-m_0 \frac{N_\tau}{2}} \sinh\left(m_0 \left(\frac{N_\tau}{2} - t \right) \right) \tag{4.26}$$

4.3.2 Fitverfahren

Da man es bei Gitterrechnungen immer mit einer endlichen Zeitausdehnung N_τ zu tun hat, ist bei kleinen Zeitabständen noch eine Verunreinigung durch angeregte Zustände vorhanden. Einen ersten Überblick von dem Bereich der konstanten Grundzustandsmasse kann man gewinnen, wenn man die **effektive Masse** betrachtet.

$$m_{eff}(t) = \ln\left(\frac{C(t)}{C(t{+}1)} \right) \tag{4.27}$$

Die Masse des Grundzustandes in Gittereinheiten erhält man durch eine mehrfache Ausführung von Cosh- bzw. Sinh-Fits, bei denen jeweils von außen nach innen symmetrisch die Punkte zu kleinen Zeiten weggelassen werden. So bekommt man schließlich einen Bereich, in dem die Masse konstant ist. Die Fehler der so berechneten Massen entstammen dabei einer Jackknife-Analyse (siehe 3.3).

Um den Einfluß der angeregten Zustände im Fit zu verringern, kann man einen Ansatz für zwei Massen m_0 und m_1 mit den entsprechenden Amplituden machen:

$$\begin{aligned} C_{odd}(t) &= 2A_0\, e^{-m_0 \frac{N_\tau}{2}} \sinh\left(m_0 \left(\frac{N_\tau}{2} - t\right)\right) \\ &\quad +2A_1\, e^{-m_1 \frac{N_\tau}{2}} \sinh\left(m_1 \left(\frac{N_\tau}{2} - t\right)\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Durch diesen Fit mit vier Parametern bekommt man ein wesentlich breiteres Plateau, was sich in Abbildung (4.1) deutlich erkennen läßt.

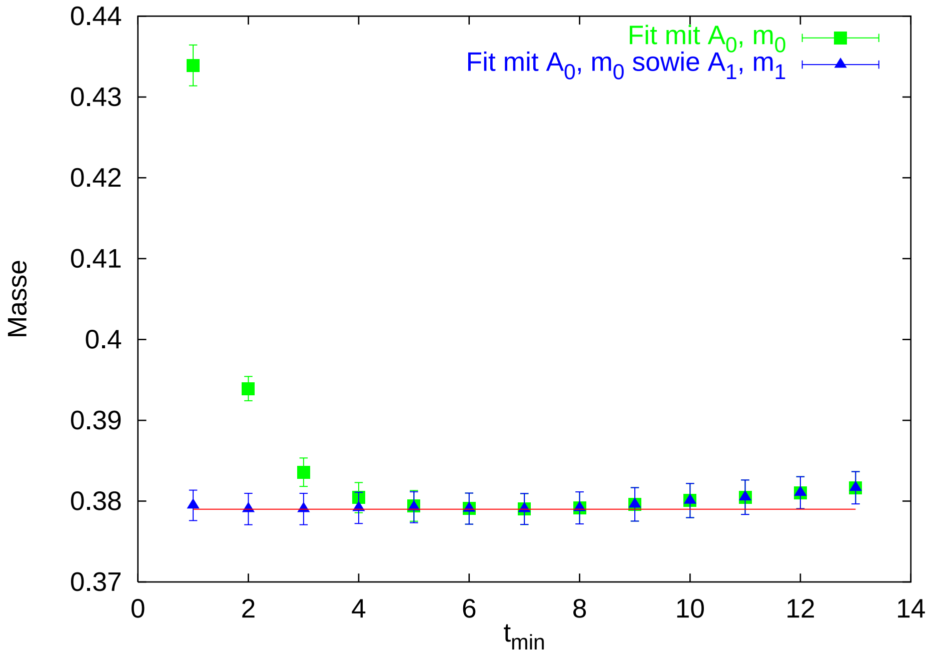

Abbildung 4.1: Vergleich der Fitversuche für die Masse des Pions bei $\kappa = 0.1475$ im Intervall $[t_{min}, 32 - t_{min}]$

Eine weitere Möglichkeit der Auswertung ist der Fit von Quotienten der Korrelationsfunktionen. In der Fitfunktion tritt nun die Differenz der Massen der beiden Teilchen als Parameter auf. Für Baryonen A und B ergibt sich beispielsweise

$$\frac{C_A(t)}{C_B(t)} = A\, e^{-(m_A - m_B)\, t}\, \frac{1 - e^{-m_A(N_\tau - 2t)}}{1 - e^{-m_B(N_\tau - 2t)}} \tag{4.29}$$

Die Quotienten werden mit einem Jackknife-Fehler berechnet und liefern als Ergebnis Massen mit sehr geringen Fehlern. Da allerdings jeweils nur die Grundzustandsmasse der Teilchen berücksichtigt wird, ist das Plateau sehr klein und damit der Konstanten-Fit sehr ungenau. Außerdem konnte der Fit nur durch Vorgabe der Masse m_A stabilisiert werden, die wiederum durch einen Zwei-Massen-Fit der Korrelationsfunktion bestimmt wurde.

4.4 Chiraler Limes

Die u- und d-Quarks haben eine sehr geringe Valenz-Quarkmasse von etwa 5 MeV, so daß sie im Vergleich mit allen anderen Teilchenmassen in guter Näherung als masselos angesehen werden kann. Bei einer Temperatur von $T = 0$ ist die chirale Symmetrie der Theorie spontan gebrochenen, so daß das Pion zum masselosen Goldstone-Boson wird. Bei Wilson Fermionen ist die chirale Symmetrie aber selbst bei verschwindender Quarkmasse explizit gebrochen. Die Masse erfährt durch den Zusatzterm in der Fermionwirkung eine additive Renormierung. Dies verursacht ein Tuning-Problem, da die Quarkmasse nun für unterschiedliche Kopplung β bei verschiedenen Werten des Hopping Parameters κ verschwindet. Bei einer geringen Quarkmasse erhält auch das Pion eine kleine Masse $m_\pi^2 \sim m_q$, so daß die Bildung des chiralen Limes durch die Extrapolation zur verschwindenden Pionmasse durchgeführt werden kann. Durch den Punkt $m_\pi^2 = 0$ wird der kritische Wert $\kappa_c(\beta)$ festgelegt, bei dem nun alle Teilchenmassen im chiralen Grenzwert bestimmt werden können. Betrachtet man das $\kappa - \beta$ Phasendiagramm, so gibt $\kappa_c(\beta)$ die kritsche Linie verschwindender Quarkmasse an.

Die Masse des Pions kann bei sehr geringer Quarkmasse ($\kappa \to \kappa_c$) auf dem Gitter nicht berechnet werden, da die Rechenzeit für die Invertierung der Fermionmatrix divergiert. Deshalb wird von größeren Quarkmassen aus der Wert verschwindender Pionmasse extrapoliert. Dabei gilt die in der chiralen Störungstheorie entwickelte PCAC-Relation, hier in der Gitterversion:

$$m_\pi^2(\kappa) = b_\pi \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right) \tag{4.30}$$

Für das Rho-Meson und alle anderen Teilchen ergibt sich eine ganz ähnliche Beziehung:

$$m_\rho(\kappa) = a_\rho + b_\rho \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right) \tag{4.31}$$

So lassen sich nun alle Massen bestimmen, allerdings bisher nur in Gittereinheiten. Um daraus die Massen der Kontinuumphysik zu erhalten, benötigt man eine Skala, die durch den Gitterabstand a gegeben ist. Diese kann durch verschiedene Möglichkeiten festgelegt werden:

- Man berechnet die Masse des ρ-Mesons $m_\rho a$ auf dem Gitter und dividiert sie durch den experimentellen Wert von 770 MeV, so daß man den Gitterabstand a erhält.

- Eine Bestimmung der Saitenspannung liefert im Vergleich mit der physikalischen Größe von $\sqrt{\sigma} = 420$ MeV ebenfalls einen Wert für den Gitterabstand.

Für die in dieser Arbeit verwendeten Konfigurationen wurde bereits in [30] die Saitenspannung auf dem Gitter zu $a\sqrt{\sigma} = 0.3773(22)$ bestimmt. Daraus ergibt sich für den Gitterabstand $a = 0.177(8)$ fm. Die erwartete Gittermasse des ρ-Mesons liegt daher bei $m_\rho a = 0.691(33)$, wobei die gemessenen Werte etwas darunter liegen. Die genauen Daten befinden sich in Anhang B.

Kapitel 5

Invertierung der Fermionmatrix

5.1 Invertierungsverfahren

Bereits in Kapitel 4 wurde gezeigt, daß man zur Berechnung von Teilchenmassen den Propagator $G^{ij}_{\alpha\beta}(x,t;0) = M^{-1\,ij}_{\alpha\beta}(x,t;0)$ benötigt, also das Inverse der Fermionmatrix. Dazu ist explizit die folgende Gleichung zu lösen:

$$M^{ij}_{\alpha\beta}(x,y)\Psi^{j}_{\beta}(y) = \Phi^{i}_{\alpha}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow x{-}te\ Zeile \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (5.1)$$

Der Lösungsvektor ergibt sich dann aus $\Psi^{j}_{\beta}(y) = M^{-1\,ji}_{\beta\alpha}(y,x)\ \Phi^{i}_{\alpha}(x)$.

Das Problem der Invertierung liegt darin, daß es sich bei der Fermionmatrix um eine sehr große $N \times N$ Matrix ($N =$ Gittergröße $\times$ 3 Farben $\times$ 4 Spinoren) handelt. Betrachtet man allerdings nur Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen, so verschwinden die meisten Matrixelemente. Erst dadurch wird die Invertierung möglich.

Das Inverse der Fermionmatrix wird durch iterative Verfahren berechnet. Wie schnell der Algorithmus konvergiert, wird durch die Verteilung der Eigenwerte der Matrix beeinflußt. Die sogenannte Konditionszahl beschreibt das Verhältnis von kleinstem zu größtem Eigenwert und ist proportional zur inversen Anzahl der Iterationsschritte:

$$\#(Iterationen)^{-1} \sim \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$$

Für die Simulation immer kleinerer Quarkmassen steigt die Rechenzeit für die Invertierung sehr stark an, da der Quotient von $\lambda_{min} \approx 1 - \frac{\kappa}{\kappa_c}$ und $\lambda_{max} \approx const.$ für $\kappa \to \kappa_c$ gegen Null geht und somit die Zahl der Iterationen divergiert.

Um die Berechnung der inversen Matrix möglichst effizient zu gestalten, gibt es zwei Ansatzmöglichkeiten:

- Beschleunigung der Konvergenz durch die Verwendung von verbesserten Algorithmen
- Optimierung der Konditionszahl der Matrix

Diesen Punkten sind die nächsten beiden Abschnitte gewidmet, in denen verschiedene Algorithmen und das Even-Odd-Preconditioning der Fermionmatrix beschrieben werden.

5.2 Algorithmen zur Matrixinvertierung

Da die Invertierung der Fermionmatrix die meiste Rechenzeit beansprucht, sollte insbesondere auf die passende Wahl des Algorithmus geachtet werden. Es werden nun einige geeignete Algorithmen vorgestellt, die alle auf der **Conjugate Residual Methode** von Eisenstat [31] und Oyanagi [32] basieren.

Generell bei allen Varianten beginnt man mit einem beliebigen Vektor, meist dem Nullvektor, der dann iterativ verbessert wird. Das Ziel ist es, den Fehler zum tatsächlichen Lösungsvektor, das Residuum $|r_n|$, zu minimieren. Die Algorithmen unterscheiden sich im wesentlichen darin, wie die neue Minimierungsrichtung r_n bestimmt wird. Die Suche nach dem optimalen Vektor geschieht in k konjugiert orthogonalen Richtungen, so daß ein Verbleiben in lokalen Minima der Fehlerfunktion vermieden wird. Der Iterationszyklus wird beendet, wenn ein geeignetes Abbruchkriterium für den Fehler des Lösungsvektors erfüllt ist. Bei den implementierten Minimal Residual und BiCGstab Algorithmen wurde die Bedingung

$$|r_{final}|^2 \leq 10^{-14} \; oder \; 500 \text{ Iterationsschritte}$$

verwendet.

Minimal Residual Algorithmus

Bei diesem Algorithmus handelt es sich um den Spezialfall $k = 0$ der Conjugate Residual Methode, so daß bei jeder Iteration eine Verbesserung von Ψ in Richtung r_n erfolgt. Es muß jeweils nur eine Multiplikation mit M ausgeführt und der konjugierte Vektor r_n gespeichert werden. Durch die Einführung eines Overrelaxationsfaktors ω kann die Konvergenz des Algorithmus noch beschleunigt werden. Dann wird in (5.2) α_n durch $\omega\alpha_n$ ersetzt. Trotzdem benötigt dieses Verfahren besonders bei der Simulation kleiner Massen ($\kappa \to \kappa_c$) sehr viel Rechenzeit.

Der Anfangsvektor ist $r_0 = \Phi - M\Psi_0$. Dann folgt die Iteration:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{< Mr_n, r_n >}{< Mr_n, Mr_n >} \\ \Psi_{n+1} &= \Psi_n + \alpha_n r_n \\ r_{n+1} &= r_n - \alpha_n M r_n \end{aligned} \tag{5.2}$$

Conjugate Gradient Algorithmus

Für dieses von Hestenes und Stiefel [33] entwickelte Verfahren benötigt man eine positive, hermitesche Matrix, so daß man hier die Gleichung $M^\dagger M\Psi = M^\dagger\Phi = \tilde{\Phi}$ zu lösen hat. Für jede Iteration müssen also zwei zeitintensive Matrixmultiplikationen durchgeführt werden. Die Minimierung erfolgt in der zu allen bisherigen Iterationsschritten konjugiert orthogonalen Richtung. Dadurch konvergiert dieser Algorithmus für eine $N \times N$-Matrix automatisch in N Schritten bei perfekter Arithmetik.

Den Anfang der Iteration bildet $p_0 = r_0 = \tilde{\Phi} - M^\dagger M\Psi_0$. Nun wird iteriert:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{|r_n|^2}{< p_n, M^\dagger M p_n >} \\ \Psi_{n+1} &= \Psi_n + \alpha_n p_n \\ r_{n+1} &= r_n - \alpha_n M^\dagger M p_n \\ \gamma_n &= \frac{|r_{n+1}|^2}{|r_n|^2} \\ p_{n+1} &= r_{n+1} + \gamma_n p_n \end{aligned} \tag{5.3}$$

BiCGstab Algorithmus

Der Conjugate Gradient Algorithmus wurde stetig weiterentwickelt und verbessert. Darauf aufbauend wurde der stabilisierte Biconjugate Gradient Algorithmus (BiCGstab) durch van der Vorst [34] vorgeschlagen. Auch bei diesem Iterationsverfahren sind zwei Multiplikationen mit M nötig, es zeigt allerdings insbesondere bei kleinen Massen ein wesentlich besseres Konvergenzverhalten als die bisher beschriebenen Algorithmen. Daher wurde dieses in jedem Massenbereich schnelle Verfahren bei allen Messungen verwendet.

Hierbei beginnt man mit $r_0 = \Phi - M\Psi_0$ und $\hat{r}_0 = r_0$, sowie $\rho_0 = \alpha = \gamma_0 = 1$ und $v_0 = p_0 = 0$. Nun folgen die Iterationsschritte:

$$\begin{aligned}
\rho_{n+1} &= < \hat{r}_0, r_n > \\
\delta &= \frac{\rho_{n+1}\alpha}{\rho_n \gamma_n} \\
p_{n+1} &= r_n + \delta(p_n - \gamma_n v_n) \\
v_{n+1} &= M p_{n+1} \\
\alpha &= \frac{\rho_{n+1}}{< \hat{r}_0, v_{n+1} >} \\
s &= r_n - \alpha v_{n+1} \\
t &= Ms \\
\gamma_{n+1} &= \frac{< t, s >}{< t, t >} \\
\Psi_{n+1} &= \Psi_n + \gamma_{n+1} s + \alpha p_{n+1} \\
r_{n+1} &= s - \gamma_{n+1} t
\end{aligned} \tag{5.4}$$

5.3 Preconditioning

Um die Eigenschaften der Fermionmatrix für die Invertierung optimal zu nutzen, kann man das Gitter in gerade und ungerade Punkte (x,y,z,t) aufteilen:

$$(x + y + z + t)\ mod\ 2 = \begin{cases} 0 & gerade \\ 1 & ungerade \end{cases}$$

Dieses Verfahren nennt man **Even-Odd Preconditioning** [35]. Dabei läßt sich die ursprünglich zu lösende Gleichung (5.1) $M\Psi = \Phi$ umschreiben in:

$$\begin{pmatrix} A_{ee} & -\kappa\Delta_{eo} \\ -\kappa\Delta_{oe} & A_{oo} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_e \\ \Psi_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_e \\ \Phi_o \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Die Clovermatrix A und der Δ-Operator wurden bereits in (2.20) und (2.21) definiert. Löst man nun dieses Gleichungssystem, so berechnet sich der gerade Anteil aus:

$$(A_{ee} - \kappa^2\ \Delta_{eo}\ A_{oo}^{-1}\ \Delta_{oe}\ )\ \Psi_e = \Phi_e + \kappa\ \Delta_{eo}\ A_{oo}^{-1}\ \Phi_o = \tilde{\Phi}_e \tag{5.6}$$

Man hat also nur noch die Gleichung $\tilde{M}_{ee}\ \Psi_e = \tilde{\Phi}_e$ für die geraden Punkte zu lösen, so daß lediglich eine $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$-Matrix zu invertieren ist. Da man jetzt die Lösung für Ψ_e kennt, läßt sich auch Ψ_o folgendermaßen berechnen:

$$\Psi_o = A_{oo}^{-1}\ (\Phi_o + \kappa\ \Delta_{oe}\Psi_e) \tag{5.7}$$

Allerdings sind auch beim Even-Odd-Preconditioning zwei zeitaufwendige Multiplikationen mit dem Δ-Operator notwendig, so daß dies keine Verbesserung bedeutet. Der Vorteil liegt darin, daß nun ein Faktor κ^2 in der neuen Matrix $\tilde{M}_{ee}$ auftritt. Dieser bewirkt, daß der kleinste Eigenwert für $\kappa \to \kappa_c$ nun $\lambda_{min} \approx 1 - \frac{\kappa^2}{\kappa_c^2}$ ist und damit die Anzahl der Iterationsschritte langsamer divergiert. Durch das Preconditioning wird also nicht das generelle Problem der Divergenz gelöst, sondern nur um etwa einen Faktor 2 verlangsamt.

5.3.1 Multiplikation mit dem Δ-Operator

Da es sich bei dieser Rechenoperation um den zeitintensivsten Teil der Invertierung handelt, soll dieser hier noch etwas genauer betrachtet werden. Sieht man sich den Δ-Operator für $r = 1$ an, so erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta^{ij}_{\alpha\beta}(x,y) &= \sum_\mu [\ (\mathbb{1} - \gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ \delta_{y,x+\hat{\mu}}\ U^{ij}_\mu(x) \\ &\quad + (\mathbb{1} + \gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ \delta_{y,x-\hat{\mu}}\ U^{\dagger ij}_\mu(y)\ ]\ , \end{aligned} \tag{5.8}$$

in dem die Projektionsoperatoren $(\mathbb{1} \pm \gamma_\mu)_{\alpha\beta}$ auf den zweidimensionalen Spinorraum auftauchen. Deshalb geht man auf die folgende Weise vor:

1. Die Viererspinoren $\Psi_\nu(x)$ werden in geeignete Zweierspinoren

   $$\chi^\pm_{\mu,\alpha}(x) = (\mathbb{1} \pm \gamma_\mu)_{\alpha,\nu}\Psi(x)_\nu$$

   transformiert. Diese enthalten die gleiche Information, da die $\Psi_\nu(x)$ nur zwei unabhängige Komponenten besitzen.

2. Anschließend werden die Zweierspinoren mit den Eichfeldern multipliziert.

   $$\begin{aligned} \tilde{\chi}^-_{\mu,\alpha} &= U_\mu(x)\chi^-_{\mu,\alpha}(x+\hat{\mu}) \\ \tilde{\chi}^+_{\mu,\alpha} &= U^\dagger_\mu(x-\hat{\mu})\chi^+_{\mu,\alpha}(x-\hat{\mu}) \end{aligned}$$

3. Zum Abschluß werden die resultierenden Viererspinoren wieder aus den Zweierspinoren $\tilde{\chi}^\pm_{\mu,\alpha}$ rekonstruiert. Genauere Angaben dazu findet man in [36].

5.3.2 Invertierung der Clover-Matrix

Schaut man sich die Formel (5.6) genauer an, so erkennt man, daß man die Clovermatrix A_{ee} auf den geraden und das Inverse A_{oo}^{-1} nur auf den ungeraden Punkten benötigt wird. Da die Matrix mit $A = A^\dagger$ hermitesch ist, läßt sie sich zerlegen in

$$A = L^\dagger D L \; , \tag{5.9}$$

wobei L eine untere Dreiecksmatix und D eine Diagonalmatrix ist. Statt mit A_{oo}^{-1} wird daher nun mit $L^{-1}D^{-1}L^{\dagger -1}$ multipliziert. Die Matrizen L und D werden auf den ungeraden Punkten gespeichert, wogegen A nur auf den geraden Punkten gesichert wird.

Die genaue Dekomposition und anschließende Multiplikation der inversen Matrizen wird ebenfalls in [36] ausführlich dargestellt.

Kapitel 6

Auswertung und Resultate

6.1 Verfahren und Performance

Die Simulationen in dieser Arbeit wurden auf einem QUADRICS-Parallelrechner (QH2) mit 256 Prozessoren (Knoten) durchgeführt. Die Knoten sind in Form eines Quaders mit periodischen Randbedingungen in der Geometrie $8 \times 8 \times 4$ verknüpft. Ordnet man nun ein $16^3 \times 32$ Gitter auf dem Rechner an, so liegt auf jedem Knoten nur noch ein lokales Gitter der Größe $2 \times 2 \times 4 \times 32$. Der Rechner arbeitet besonders effektiv, wenn die Rechenoperationen auf das lokale Gitter beschränkt bleiben, bzw. Informationen nur von Nachbarknoten benötigt werden, wie es in dieser Simulation der Fall ist. Wesentlich aufwendiger ist dagegen die Kommunikation zwischen nicht benachbarten Knoten, die über mehrere Schritte zum jeweiligen Nachbarknoten erfolgen muß.

Alle in dieser Arbeit benutzten Eichfeldkonfigurationen wurden durch Monte-Carlo Simulationen mit der (1,2)-verbesserten Eichwirkung bei einer Kopplung $\beta = 4.1$ erzeugt. Sie sind durch 100 Sweeps getrennt, die jeweils aus vier Overrelaxation-Schritten und einem Heatbath-Schritt bestanden. Für die Fermionwirkung wurde bei allen Messungen die Clover-Wirkung mit einem tree-level Clover Koeffizienten verwendet.

Zunächst wurden probeweise die Korrelationsfunktionen für das Pion, Rho und Proton auf 57 ungeeichten Konfigurationen der Größe $16^3 \times 30$ berechnet. Die Fermionmatrix wurde dabei für acht verschiedenen Hopping Parameter mit einer Quelle bei $t = 0$ invertiert. Die Auswertung erfolgte hierbei noch nicht mit der Jackknife-Analyse. Die Daten werden also nur zum Vergleich angeführt, da sie trotz der geringen Statistik sinnvolle Ergebnisse liefern.

kappa	Zeit(sec/Konf)	#Iterationen
0.140	614	35
0.142	793	44
0.144	1020	60
0.145	1195	74
0.146	1445	96
0.147	1990	137
0.1475	2482	175
0.148	3389	244

Tabelle 6.1: Performance (16^3x32 Gitter)

Die Diquark- und Hadronmessungen wurden schließlich mit 73 Konfigurationen der Größe $16^3 \times 32$ in Landau-Eichung durchgeführt. Hier wurde die Fermionmatix mit vier verschiedenen Quellen bei t = 0, 8, 16 und 24 invertiert, so daß für jede der acht Quarkmassen $\kappa = 0.140, \ldots, 0.148$ effektiv 292 Quarkpropagatoren analysiert wurden. Daraus wurden die Korrelationsfunktionen berechnet und anschließend durch 1- und 2-Massen-Fits im Rahmen der Jackknife-Fehleranalyse die Teilchenmassen extrahiert. Schließlich wurde das Fitverfahren zusätzlich auf die Quotienten der Korrelationsfunktionen der Baryonen und Diquarks angewandt.

Die Tabelle 6.1 zeigt die Rechner-Performance für den jeweiligen Hopping Parameter κ. Die Zeit für die Matrixinvertierung bezieht sich auf eine Konfiguration, wogegen die Anzahl der Interationen bereits durch die Invertierung für eine der zwölf Kombinationen der Color- und Spinorindizes des Quellvektors festgelegt ist. Bei den Werten können Schwankungen bis zu 10% auftreten, insbesonderen bei den größeren Hopping Parametern. Insgesamt resultiert daraus eine reine CPU-Rechenzeit von 1050 Stunden für alle 73 Konfigurationen bei vier Quellen und acht Quarkmassen.

6.2 Ergebnisse der Hadron- und Diquarkmessungen

Zunächst erhält man bei der Simulation die Korrelationsfunktionen für die untersuchten Teilchen, die über alle Konfigurationen und Quellen gemittelt werden. Die Ergebnisse befinden sich im Anhang B in Tabelle B.4 bis B.12 und sind in der Abbildung 6.1 für die Hadronen und in 6.2 für die Quark und Diquark Korrelationsfunktionen dargestellt. Dabei ist jeweils der Absolutbetrag der Werte in einer

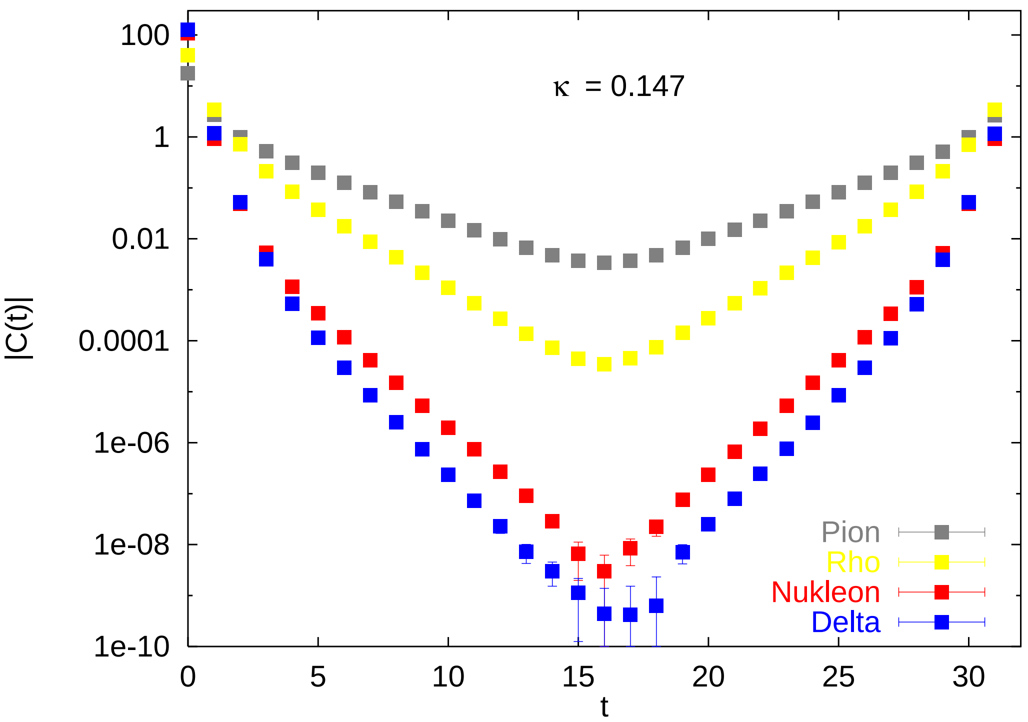

Abbildung 6.1: Korrelationsfunktionen der Hadronen

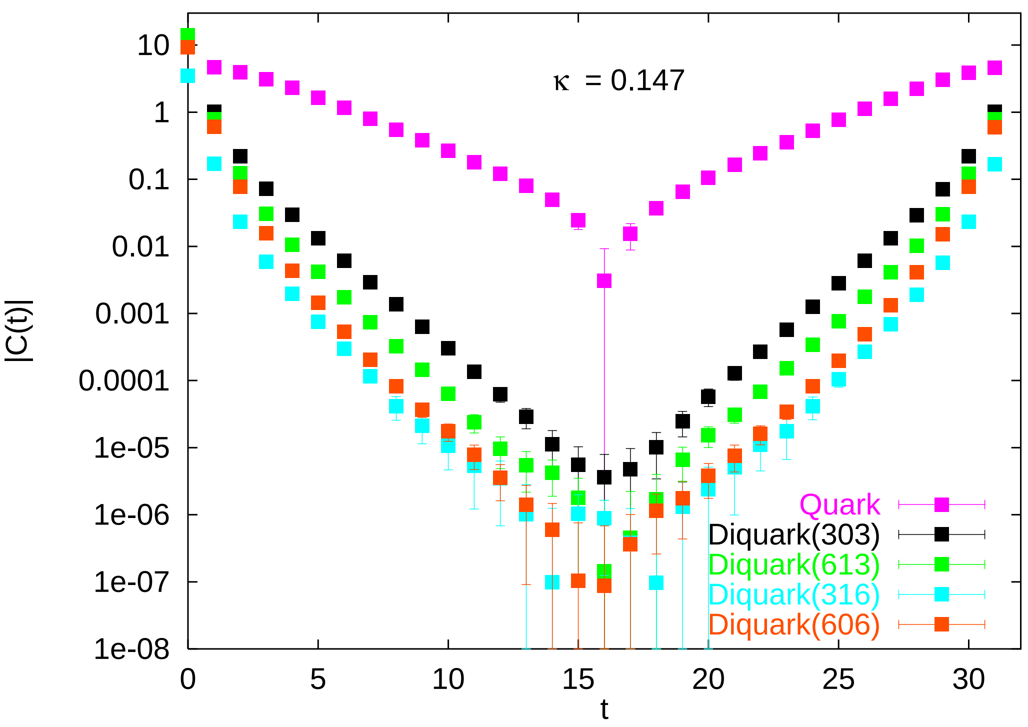

Abbildung 6.2: Quark und Diquark Korrelationsfunktionen

logarithmischen Skala aufgetragen, da sonst der negative Teil der antisymmetrischen Korrelationsfunktionen des Quarks und der Baryonen nicht berücksichtigt würde.

Man kann erkennen, daß die Daten für die Mesonen Pion und Rho einen sehr klaren exponentiellen Abfall mit geringem Fehler zeigen. Da die Steigung in der logarithmischen Darstellung charakteristisch für die Masse des Teilchens ist, sind bei den Mesonen gute Ergebnisse der Fitversuche zu erwarten. Bei den Baryonen Nukleon und Delta läßt sich feststellen, daß bei kleinen Zeiten noch Verunreinigungen durch angeregte Zustände vorhanden sind. Für den Bereich um $t = 15$ wird der Fehler der Datenpunkte sehr groß, da die Sinus hyperbolicus Funktion der Baryonen im Gegensatz zu der Cosinus hyperbolicus Funktion der Mesonen an dieser Stelle eine wirkliche Nullstelle aufweisen muß. Für die Korrelationsfunktion des Quarks gilt dies ebenso. Die Darstellung liefert außerdem, daß die Steigung für das Quark zu größeren Zeiten hin zunimmt, im Gegensatz zu allen anderen Korrelationsfunktionen. Die Color $\bar{3}$ Diquarks zeigen genau wie die Hadronen einen sauberen exponentiellen Abfall mit geringen Beträgen von angeregten Zuständen. Dies ist bei den Color Sextett Diquarks leider nicht der Fall. Ihre Korrelationsfunktionen weisen bei kleinen Zeiten eine relativ große Krümmung auf. In dem Bereich konstanter Steigung ist der Fehler auf den Daten schließlich schon so groß, daß die Fitversuche keine verläßlichen Ergebnisse mehr liefern können.

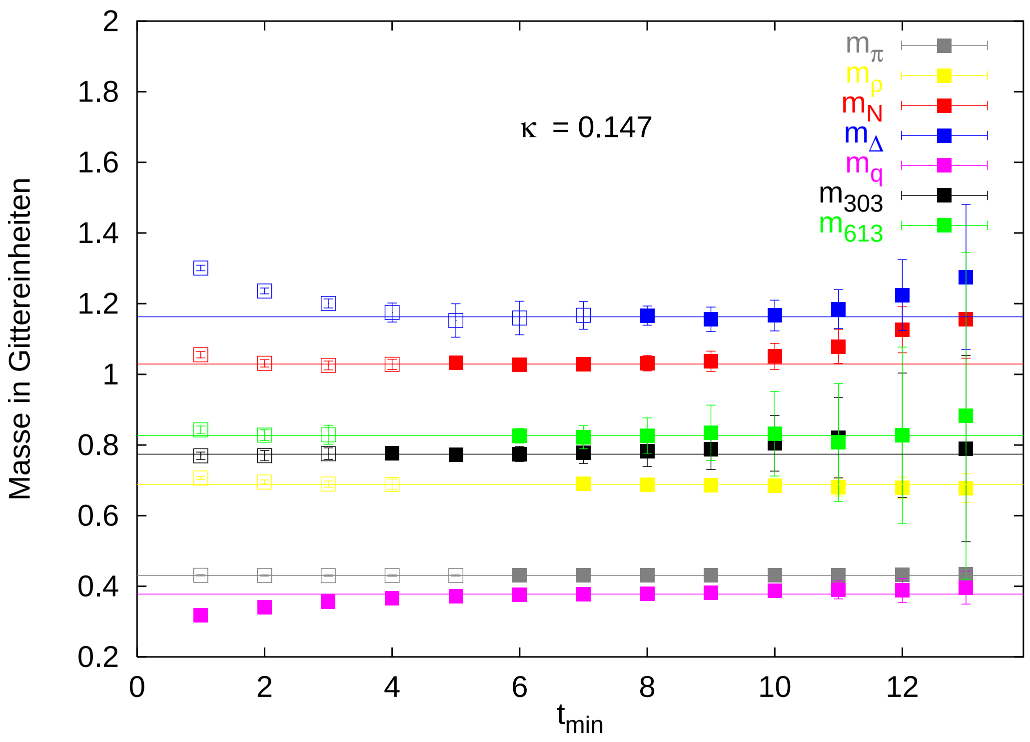

Abbildung 6.3: Teilchenmassen durch Kombination von 1- und 2-Massen-Fit

Die Abbildung 6.3 zeigt nun die Teilchenmassen, die durch mehrere sinh- bzw. cosh-Fits an die Daten der jeweiligen Korrelationsfunktion gewonnen wurden. Es handelt sich dabei um aufeinanderfolgende Fits, bei denen nur Punkte im Intervall $[t_{min}, 32 - t_{min}]$ berücksichtigt wurden, so daß schließlich ein stabiler Wert (Plateau) für die Masse erreicht wird. Die Datenpunkte bei kleinen Zeiten t_{min} (offene Symbole) stammen von einem Zwei-Massen Fit, der die Beiträge der angeregten Zustände eliminiert. Der Fit mit einem Massenparameter liefert alle weiteren Punkte (volle Symbole). Dabei kann es passieren, daß die jeweiligen Plateaus der beiden unterschiedlichen Fitansätze nicht genau ineinander übergehen, wie es bei Diquark(613) und Rho der Fall ist. Allerdings stimmen die Massenwerte der beiden Plateaus sehr gut überein, so daß ein gemeinsamer Konstanten-Fit möglich ist. Es werden dabei nur die Datenpunkte in der Graphik dargestellt, die in den Fit eingegangen sind. Für das Quark wurden nur die Daten des Ein-Massen Fit verwendet, da der Zwei-Massen Fit hier keine verläßlichen Werte mit geringem Fehlern liefert.

Wie man bereits anhand der Korrelationsfunktionen feststellen konnte, erhält man für die Mesonen und Color $\bar{3}$ Diquarks ein breites Plateau mit geringem Fehler. Es wird für den Zwei-Massen Fit bereits bei $t_{min} \simeq 1$ erreicht, wogegen sich bei dem Ein-Massen Fit erst bei $t_{min} \simeq 4$ (Diquark(303)) bis $t_{min} \simeq 7$ (Rho) ein konstanter Wert stabilisiert. Bei den Baryonen und dem Quark ist das Plateau etwas schmaler, aber die jeweiligen Teilchenmassen lassen sich immer noch gut durch einen Fit mit einer Konstanten bestimmen. Auch hier stellt man fest, daß sich die Quarkmasse anders als alle anderen Massen von unten an den stabilen Wert annähert, verursacht durch die konvexe Krümmung der Korrelationsfunktion.

Um ein Gefühl für die Einordnung der so extrahierten Teilchenmassen zu bekommen, kann man zunächst einen Edinburgh-Plot (Abbildung 6.4) erzeugen. Dabei wird das Massenverhältnis von Nukleon zu Rho gegen das von Pion zu Rho bei den jeweiligen Hopping Parametern aufgetragen. Die genauen Daten befinden sich in den Tabellen B.1 und B.2 im Anhang B. Die rote Line beschreibt den Kurvenverlauf bei Anwendung eines einfachen Potentialmodells. Die beiden roten Punkte kennzeichnen das experimentelle Verhältnis und den Wert bei der vereinfachten Betrachtung mit zwei bzw. drei Konstituenten-Quarks bei den Mesonen und Baryonen.

Generell zeigt die Abbildung, daß die Datenpunkte dem Kurvenverlauf folgen. Im rechten Bereich der Graphik sind die Fehler sehr klein, allerdings befinden sich diese Punkte am weitesten von dem experimentellen Wert entfernt. Deshalb sollten bei der Auswertung besser die weiter links angesiedelten Daten verwendet werden, obwohl sie mit einem größeren Fehler behaftet sind. Man kann erkennen, daß die Werte der $16^3 \times 32$ Konfigurationen einen wesentlich geringeren Fehler aufweisen als die der Größe $16^3 \times 30$, so daß der Einfluß der entscheidend höheren Statistik deutlich bemerkbar ist. Selbst bei den $16^3 \times 32$ Konfigurationen reicht die Statistik für den

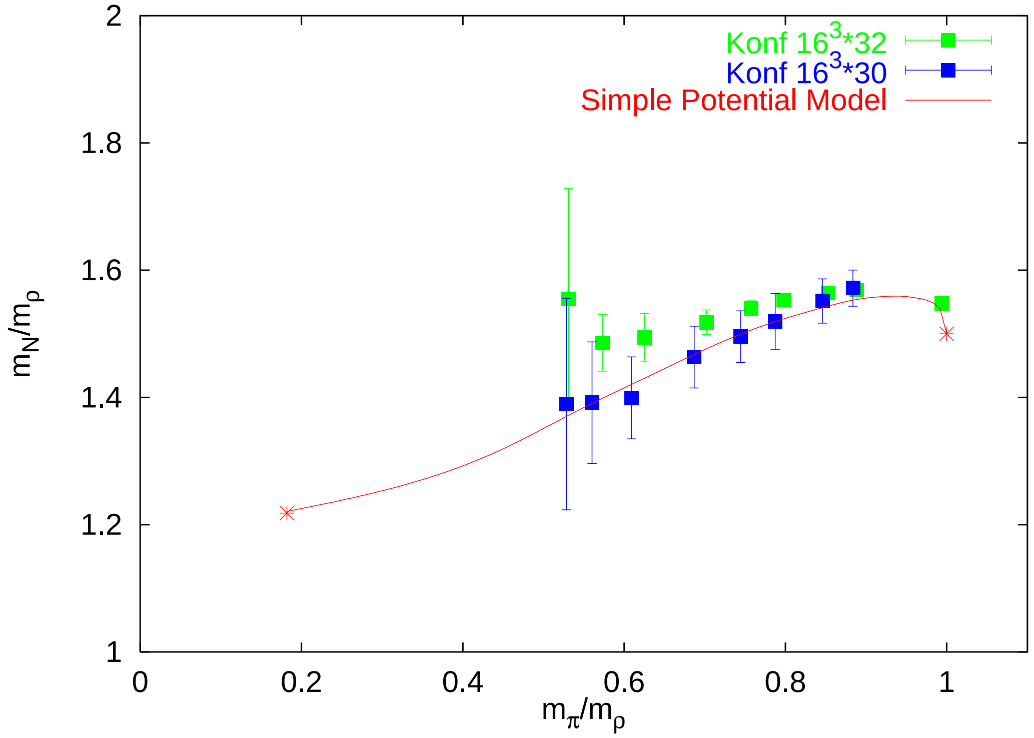

Abbildung 6.4: Edinburgh-Plot

linken Datenpunkt bei der kleinsten berechneten Quarkmasse ($\kappa = 0.148$) noch nicht aus, um verläßliche Ergebnisse zu liefern. Möchte man nun näher an den experimentellen Wert herankommen, müsste man noch kleinere Quarkmassen wählen. Dabei würde allerdings die Zeit für die Matrixinvertierung und die benötigte Statistik sehr stark ansteigen. Für eine erste Untersuchung von Diquarkmassen, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt wird, ist aber die korrekte Reproduktion des experimentellen Nukleon–Rho Massenverhälnisses nicht von zentraler Bedeutung. Wichtiger ist, daß für die gewählten Quarkmassen eine deutliche Aufspaltung der Nukleon und Delta Massen sichtbar wird, so daß die Rechnungen sensitiv zum spinabhängigen Anteil der Quark-Quark Wechselwirkung sind. Es stellt sich heraus, daß sich diesbezüglich mit den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen bereits gute Vorhersagen treffen lassen.

In den nächsten beiden Abbildungen 6.5 und 6.6 sind nun alle auf dem $16^3 \times 32$ Gitter berechneten Teilchenmassen in Gittereinheiten in Bezug zum inversen Hopping Parameter κ^{-1} dargestellt. Die zugrunde liegenden Daten können in Tabelle B.2 und B.3 im Anhang B nachgschlagen werden. Zunächst wurde der Punkt der verschwindenden Pionmasse und damit der Wert von $\kappa_c = 0.14923(2)$ durch einen linearen Fit der quadrierten Massenwerte bestimmt. Alle weiteren Teilchenmassen im chiralen Limes lassen sich damit durch einen Geraden-Fit proportinal zu $\kappa^{-1} - \kappa_c^{-1}$

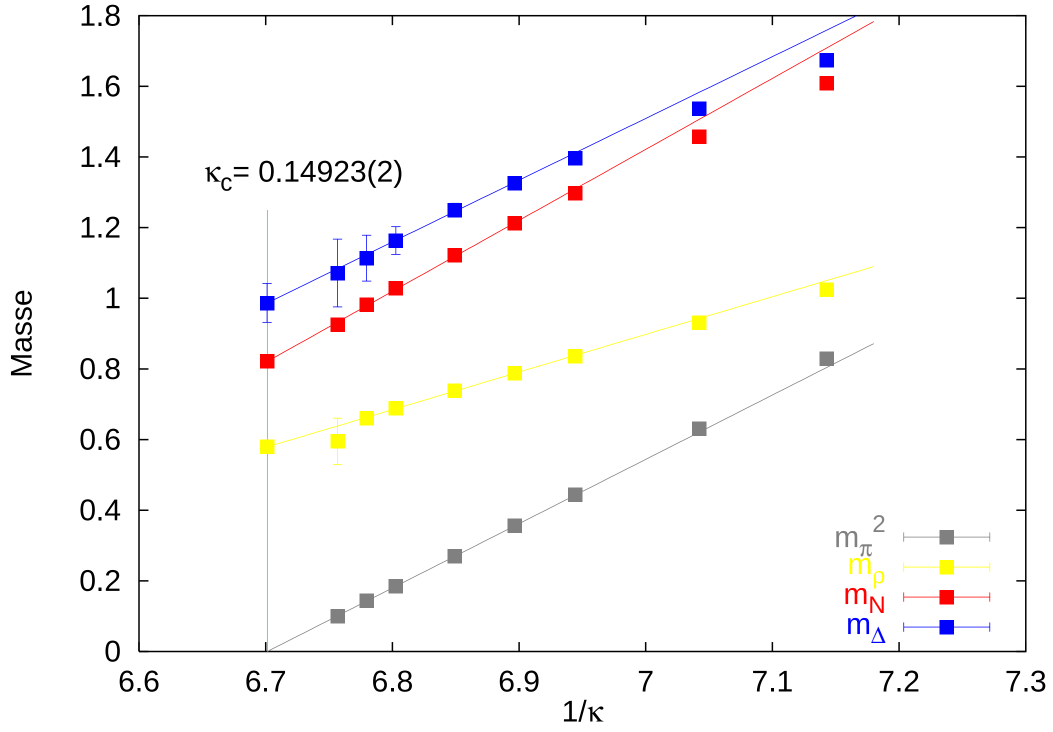

Abbildung 6.5: Hadronmassen im chiralen Limes

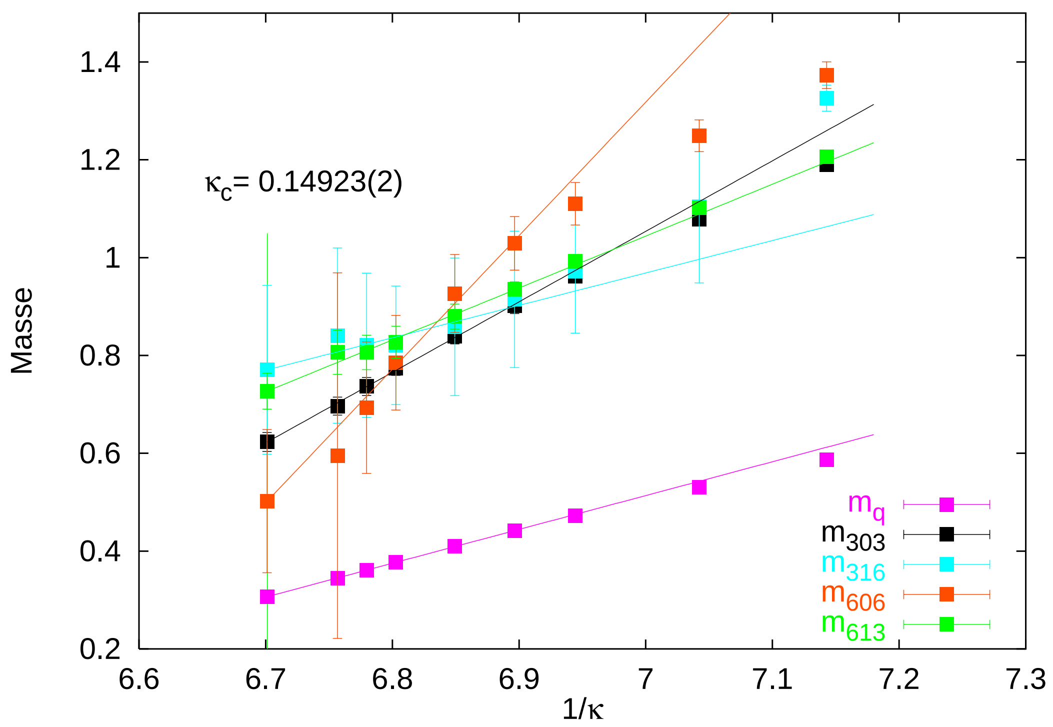

Abbildung 6.6: Quark- und Diquarkmassen im chiralen Limes

berechnen, wobei nur die Daten für die fünf leichtesten Quarkmassen einbezogen wurden. Die extrapolierten Werte wurden auf der κ_c-Linie ebenfalls eingezeichnet.

Die Extrapolation zum chiralen Limes kann bei den Mesonen und Baryonen, dem Quark und den Color $\bar{3}$ Diquarks problemlos und mit einem sehr geringen Fehler durchgeführt werden. In den Graphiken wird außerdem deutlich, daß nur der jeweilige Datenpunkt bei der kleinsten Quarkmasse ($\kappa = 0.148$) für das Rho und das Diquark(613) merklich von der Fit-Geraden abweicht, was sich durch die noch nicht ausreichende Statistik an diesem Punkt erklären läßt. Im Rahmen des entsprechenden Fehlers lassen sich die Werte allerdings problemlos mit der Extrapolation vereinbaren. Anders ist der Fall bei den Color Sextett Diquarks gelagert. Die extrahierten Massen weisen bei fast allen κ-Werten einen so großen Fehler auf, daß der in Abbildung 6.6 eingezeichneten Extrapolationen keine wirklich sinnvolle Bedeutung beigemessen werden kann. Allerdings erkennt man über weite Teile des Parameterbereiches gut, daß die Reihenfolge der Diquarkmassen in dieser Simulation durch die Flavor-Spin Kopplung (siehe Tabelle 4.1) richtig beschrieben wird.

Weiterhin kann man für die Baryonen wie für die Color $\bar{3}$ Diquarks feststellen, daß die Aufspaltung der Massen mit sich verringender Quarkmasse zunimmt. Dieses Verhalten ist in Abbildung 6.7 noch einmal deutlicher dargestellt. Das Massen-Splitting

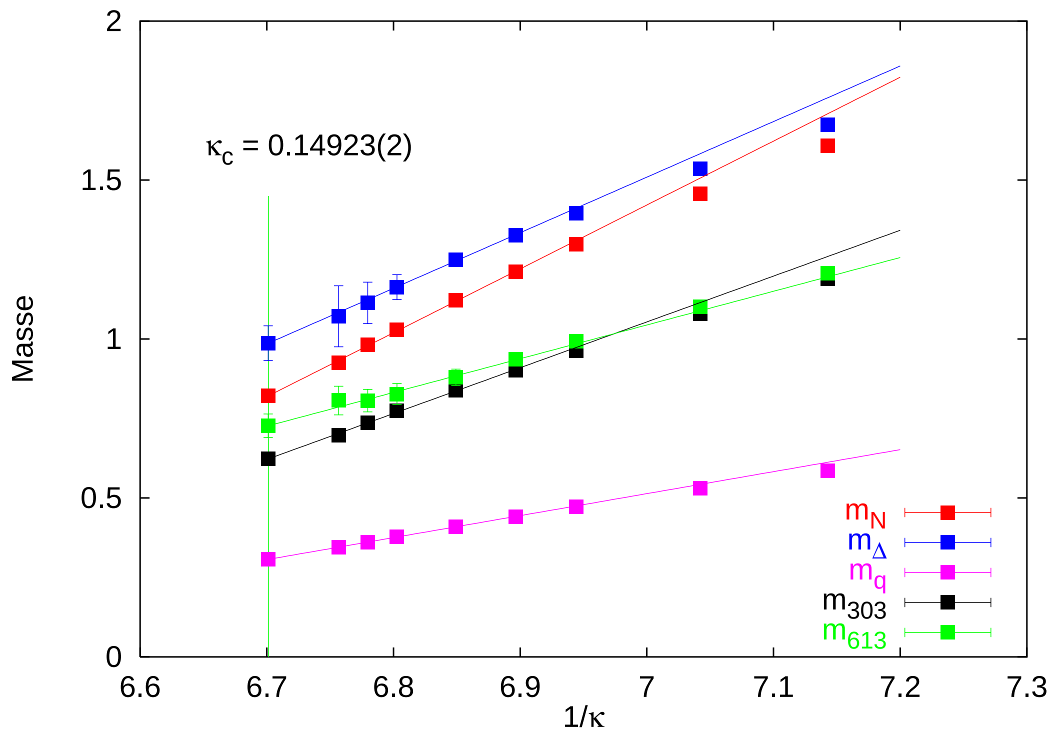

Abbildung 6.7: Vergleich der Massenaufspaltung von Baryonen und Diquarks

wird durch die spin-abhängigen Kräfte der Quark-Quark-Bindung verursacht, die mit sinkender Quarkmasse immer mehr an Bedeutung gewinnen. Die Größe der Aufspaltung im chiralen Limes kann nun über den bereits in [30] aus der Saitenspannung bestimmten Gitterabstand von $a = 0.177(8)$ fm in physikalische Einheiten umgerechnet und mit dem experimentellen Wert von $m_\Delta - m_N = 293$ MeV verglichen werden. Bei einem Wert von 0.166(56) in Gittereinheiten berechnet sich das Splitting zu 184(63) MeV. Dies liegt 37% unter dem experimentellen Wert, deckt sich aber mit früheren Messungen [37, 38] bei ähnlich großem Gitterabstand. Wie bereits vorher beschrieben, ist es vor allem wichtig, daß eine deutlich meßbare Aufspaltung zu beobachten ist, so daß das Spin-Splitting der Baryonen mit dem der Diquarks verglichen werden kann. Für die Aufspaltung der Color $\bar{3}$ Diquarks erhält man einen Wert von $m_{613} - m_{303} = 0.104(42)\ a^{-1} = 116(47)$ MeV. Dies entspricht etwa 60% des Delta-Nukleon Splittings und stützt damit die Aussagekraft der Relation (4.2). Außerdem ist in Abbildung 6.7 zusätzlich die Extrapolation zum chiralen Limes für das Quark eingezeichnet. Hier erhält man ebenfalls über den Gitterabstand den physikalischen Wert der Konstituenten-Quarkmasse von $m_q = 342(13)$ MeV. Damit befindet sich das Ergebnis in guter Übereinstimmung mit vorherigen Messungen des Quarkpropagators in Landau-Eichung [21, 22], die einen Wert von 300-350 MeV lieferten.

Doch nun zu der grundlegenden Fragestellung dieser Arbeit. Existiert ein stark gebundener Diquark-Zustand? Zur Beantwortung dieser Frage müssen die extrahierten Teilchenmassen zunächst auf eine gemeinsame Skala gebracht werden. In Abbildung 6.8 und 6.9 werden deshalb die Hadron- und Diquarkmassen durch die Anzahl ihrer Konstituenten-Quarks geteilt und können so mit der ermittelten Quarkmasse im chiralen Limes verglichen werden. In der Graphik für die Mesonen und Baryonen läßt sich erkennen, daß die Definition der Konstituenten-Quarkmasse in naiven Quark-Modellen $\frac{1}{6}(m_\Delta + m_N)$ mit 335(11) MeV im Rahmen des geringen Fehlers sehr gut mit dem Wert der Quarkmasse übereinstimmt. Die Spinaufspaltung der Baryonen ist in dieser Darstellung klar sichtbar. Das aufgrund der stark anziehenden Spin-Wechselwirkung gebundene Nukleon ist deutlich unterhalb des Quarks angesiedelt, wogegen das Delta durch die abstoßende Wechselwirkung merklich überhalb des Quarks liegt.

In Abbildung 6.9 ist die äquivalente Darstellung für das leichteste Diquark(303) zu sehen. Dieser Kandidat für einen gebundenen Diquark-Zustand liegt allerdings etwas über dem zweifachen Wert für das Konstituenten-Quark. Mit einer Masse von $m_{303} = 694(22)$ MeV ist der Color $\bar{3}$ Diquark Zustand mit Spin 0 also auch deutlich schwerer als der Wert für zwei Drittel der Nukleonmasse (626 MeV). Es gibt demnach in dieser Simulation keinen Hinweis darauf, daß ein stark gebundener Diquark-Zustand existiert. Daher widerspricht dieses Ergebnis gleichermaßen der These, daß die Baryonen aus einem Diquark und einem nur lose gebundenen dritten Quark aufgebaut sind.

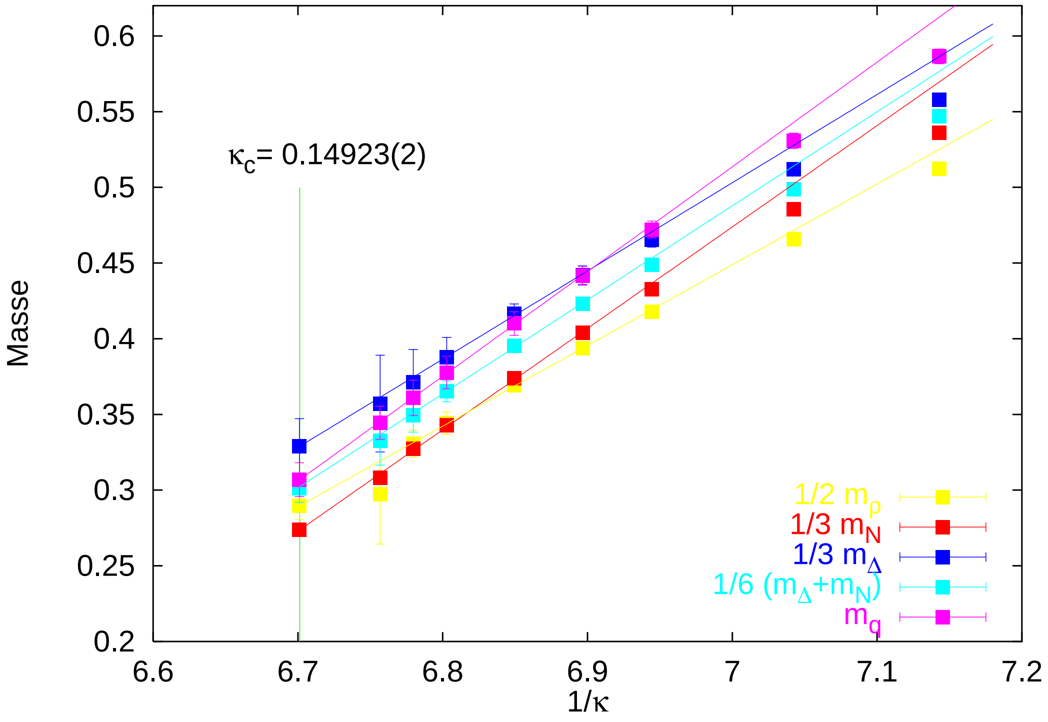

Abbildung 6.8: Hadronmassen im Vergleich mit der Quarkmasse

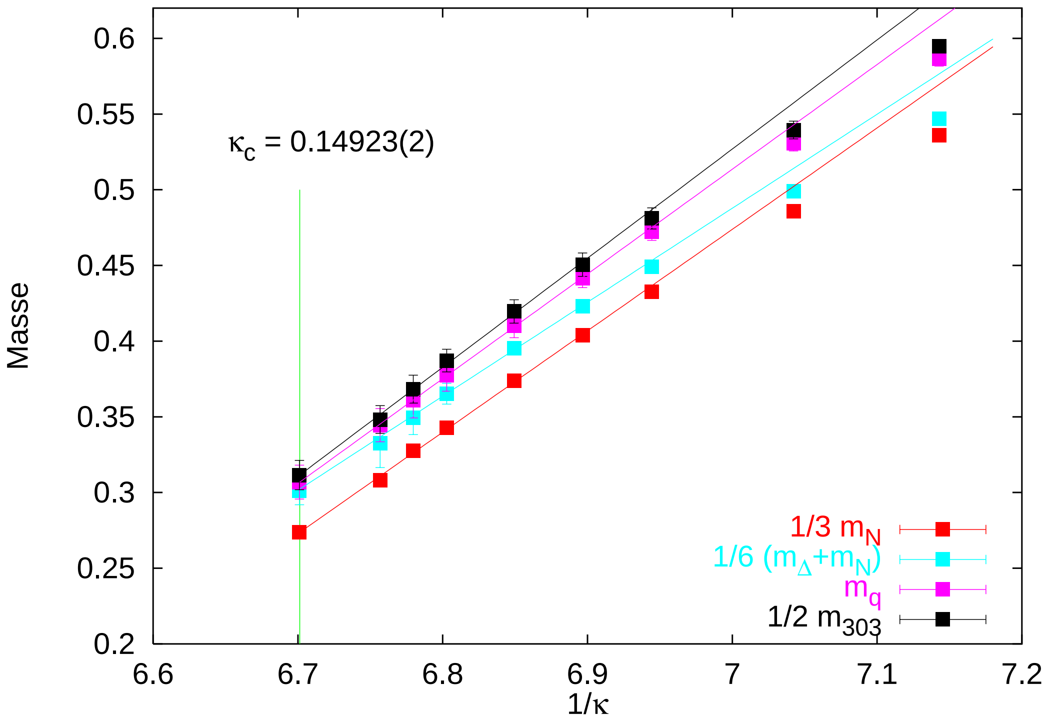

Abbildung 6.9: Vergleich der Masse des Diquark(303) mit der Quarkmasse

Allerdings bleibt zu bemerken, daß die Simulation in dieser Arbeit bei der Temperatur $T = 0$ im Confinement-Bereich der QCD durchgeführt wurde. Da eine endliche Baryondichte aufgrund der in diesem Fall komplexen Wirkung nicht einfach in die Simulation einbezogen werden kann, muß man auf die Ergebnisse bei einer mittleren Baryondichte von Null zurückgreifen. In diesem Bereich ist das Teilchenspektrum im wesentlichen durch die Flavor-Spin Wechselwirkung des Instanton Modells bestimmt, wogegen bei höherer Baryondichten der Ein-Gluon-Austausch immer gößere Bedeutung gewinnt. Daher ist es durch die Ergebnisse dieser Simulation nicht ausgeschlossen, daß im Bereich sehr hoher Dichte ein gebundener Diquark-Zustand in Form einer Farb-Supraleitungs-Phase existieren könnte.

In Abschnitt 4.3.2 wurde noch eine weitere Methode zur Auswertung der Daten vorgestellt. Die Quotienten der Korrelationsfunktionen der Baryonen und Color $\bar{3}$ Diquarks sind in Abbildung 6.10 und 6.11 für alle Werte des Hoppingparameters gegen die Zeit aufgetragen. Dabei wurde vor der Berechnung des Quotienten jeweils über die symmetrischen Punkte der beiden Äste der Korrelationsfunktionen gemittelt, so daß die resultierenden Werte auf das Zeitintervall $t \in [1, 15]$ beschränkt sind. Die den Abbildungen zugrunde liegenden Daten sind in Tabelle B.13 und B.14 im Anhang B aufgeführt. Man erkennt in der logarithmischen Darstellung deutlich, daß das Verhältnis zu größeren Zeiten linear ansteigt. Im Vergleich zu den Diquarks ist die konstante Steigung bei den Baryonen und damit das Splitting etwa doppelt so groß, wie bereits durch die Massenaufspaltung in Abbildung 6.7 mit den Ein- und Zwei-Massen Fits gezeigt wurde. Außerdem ist an den Graphiken festzustellen, daß der Bereich konstanter Steigung mit steigendem κ-Wert merklich abnimmt. Daher erwies es sich als äußerst schwierig, aus den Quotienten der Korrelationsfunktionen die Teilchenmassen zu extrahieren. Aufgrund der bereits in 4.3.2 beschriebenen Probleme war mit dieser Methode insbesondere für große κ-Werte keine verläßliche Bestimmung der Teilchenmassen möglich.

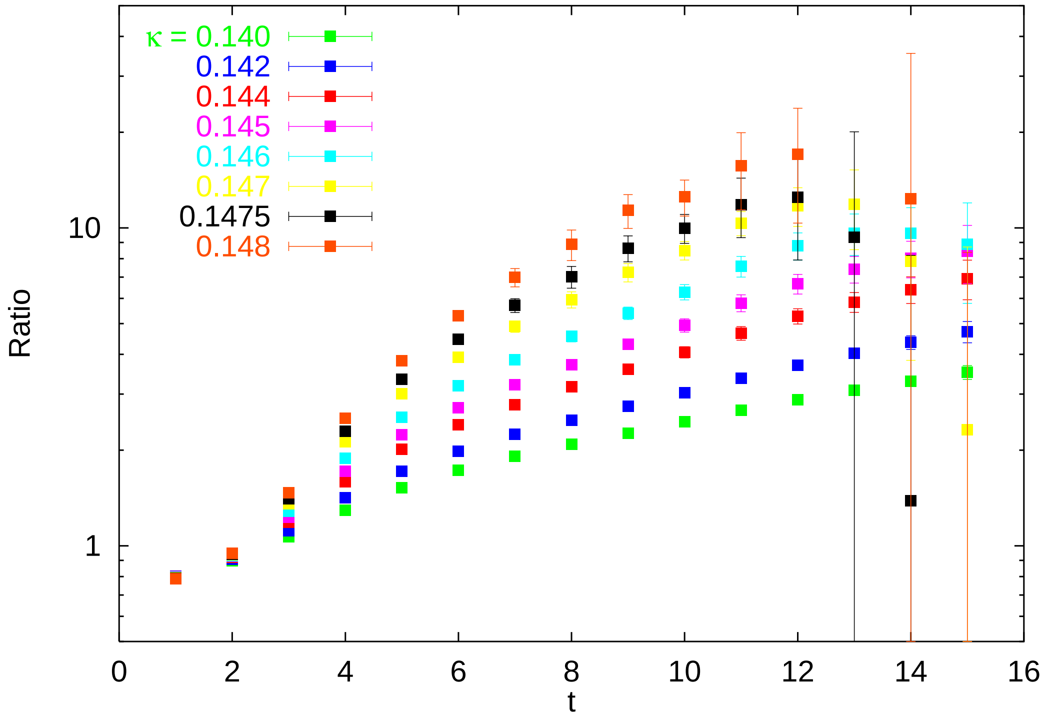

Abbildung 6.10: Quotient der Korrelationsfunktionen von Nukleon und Delta

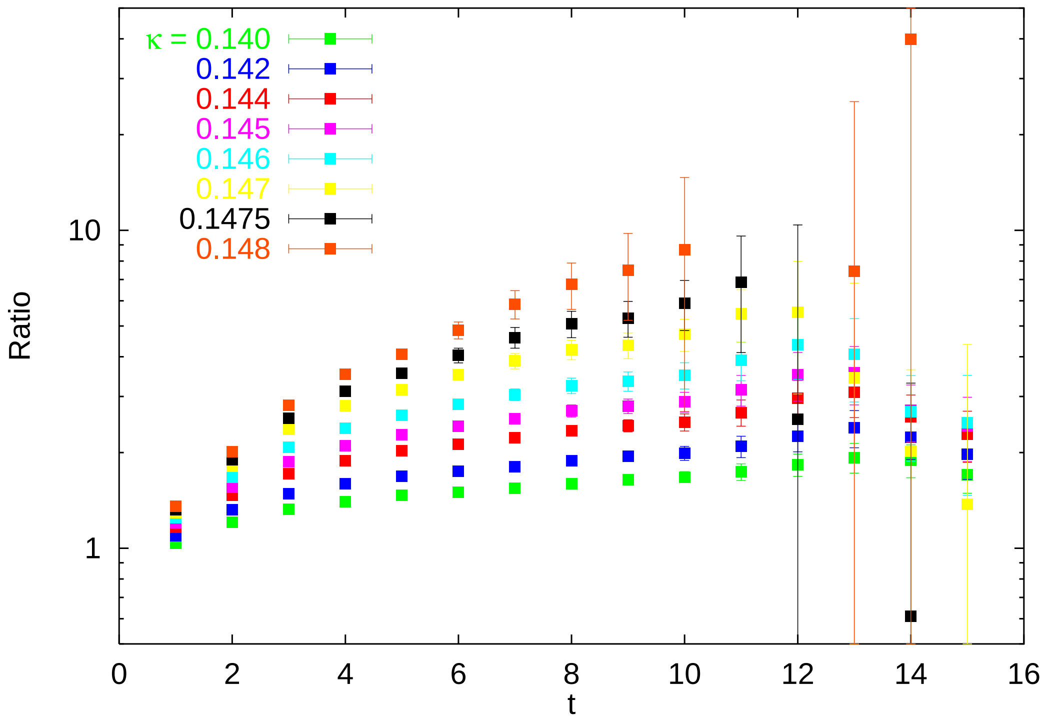

Abbildung 6.11: Quotient der Korreltationsfunktionen von Diquark(303) und Diquark(613)

Zusammenfassung

Die QCD weist bei Temperatur $T = 0$ und hoher Baryondichte möglicherweise eine sehr reiche Phasenstruktur auf. In [25, 26] und [27, 28] wird aufgrund der Wechselwirkung von Quarks durch Instantonen eine farb-supraleitende Phase aus gebundenen Diquark-Zuständen vorhergesagt. Außerdem könnte eine starke Diquark-Bindung beim Aufbau der Baryonen eine entscheidende Rolle spielen [24]. Bei dieser Arbeit handelt es sich um eine erste Gittersimulation zu diesem Thema. Aufgrund der numerischen Schwierigkeiten bei einer endlichen Baryondichte wurde die Simulation im Confinement-Bereich bei $T = 0$ und einer mittleren Baryondichte von Null realisiert.

Es wurden Diquark-Zustände in der Anti-Triplett und Sextett Farb-Darstellung mit Spin 0 und 1 sowie der Quark-Propagator in Landau-Eichung betrachtet. Darüberhinaus wurden die Mesonen Pion und Rho untersucht, ebenso wie die Baryonen Nukleon und Delta. Die Berechnung der Korrelationsfunktionen wurde in der Quenched Approximation mit der (1,2)-verbesserten Eichwirkung und der Clover Fermionwirkung mit einem tree-level Clover-Koeffizienten durchgeführt.

Die beobachtete Massenaufspaltung der Baryonen und Color $\bar{3}$ Diquarks aufgrund ihrer unterschiedlichen Spinstruktur lieferte eine Bestätigung der Relation

$$m_\Delta - m_N = 2\ (m_{613} - m_{303})\ .$$

Im Vergleich mit experimentellen Werten erwies sich die gemessene Aufspaltung zwischen Delta und Nukleon als zu gering. Das Massenverhältnis m_N/m_ρ ist dagegen noch zu groß, wie sich im Edinburgh-Plot 6.4 gut erkennen läßt. Eine bessere Übereinstimmung wäre durch das tadpole Improvement der Clover Wirkung, einen kleineren Gitterabstand sowie näher am kritischen Wert κ_c liegende Hopping Parameter zu erwarten.

Die ermittelte Konstituenten-Quarkmasse von 342(13) MeV stimmt sehr gut mit früheren Messungen in Landau-Eichung überein. Die in naiven Quarkmodellen definierte Größe $\frac{1}{6}(m_\Delta - m_N)$ für die Quarkmasse liefert in der Simulation fast exakt den gleichen Wert. Die Masse des leichtesten Color $\bar{3}$ Diquarks mit Spin 0 liegt mit 694(22) MeV etwas höher als die zweifache Quarkmasse und sehr deutlich über zwei Drittel der Nukleonmasse. Daher lassen sich keine Anzeichen für einen stark gebundenen Diquark-Zustand feststellen. Allerdings sollte die Abhängigkeit der Diquarkmassen und insbesondere auch der Konstituenten-Quarkmasse von der verwendeten Eichung noch genauer untersucht werden.

Die in dieser Arbeit durchgeführten Gittersimulationen geben keinen Hinweis auf eine besonders starke Bindung zweier Quarks mit anti-parallelem Spin, so daß dieses Ergebnis für den Aufbau der Baryonen aus einem Diquark und einem locker gebundenen dritten Quark keine Bestätigung liefert. Ebenso wird die Möglichkeit der Koexistenz einer farb-supraleitenden Phase aus Diquark-Zuständen mit der Phase gebrochener chiraler Symmetrie sehr unwahrscheinlich.

Die berechneten Diquarkmassen haben bestätigt, daß das Teilchenspektrum im Bereich der Temperatur $T = 0$ durch die Flavor-Spin Wechselwirkung des Instanton Modells beschrieben werden kann. Da bei zunehmender Baryondichte die anziehende Color-Spin Wechselwirkung durch den Ein-Gluon-Austausch immer mehr an Bedeutung gewinnt, können die Ergebnisse dieser Simulation einen Hinweis auf die Existenz einer farb-supraleitenden Diquark-Phase bei sehr hohen Dichten liefern. Eine endgültige Aussage hierzu erfordert allerdings noch weitere Untersuchungen zum Einfluß von Temperatur und Dichte auf die Masse der Diquark-Zustände.

Anhang A

Verwendete Konventionen

Dirac-Matrizen

Die euklischen γ-Matrizen in der nicht-relativistischen Darstellung sind selbstadjungiert ($\gamma_k = \gamma_k^\dagger$) und werden repräsentiert durch

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$$

Matrix der Ladungsumkehr

Für die Hadron- und Diquark-Propagatoren wird die *charge conjugation* Dirac-Matrix C benötigt:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \gamma_4\gamma_2 \quad = \quad -\gamma_1\gamma_3\gamma_5$$

$$C\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anhang B

Zusammenstellung der Daten

kappa	m_π	m_ρ	m_N
0.140	0.914(7)	1.034(9)	1.626(26)
0.142	0.798(7)	0.943(10)	1.464(29)
0.144	0.671(7)	0.852(10)	1.295(34)
0.145	0.601(7)	0.807(11)	1.207(28)
0.146	0.523(8)	0.762(12)	1.115(32)
0.147	0.435(8)	0.715(16)	1.000(40)
0.1475	0.374(11)	0.668(30)	0.930(48)
0.148	0.326(11)	0.617(45)	0.857(81)
κ_c		0.594(27)	0.752(55)

Tabelle B.1: Hadronmassen auf dem 16^3x30 Gitter mit $\kappa_c = 0.14925(11)$

kappa	m_π	m_ρ	m_N	m_Δ	$m_\Delta - m_N$	$m_\Delta + m_N$
0.140	0.910(1)	1.025(2)	1.608(6)	1.673(8)	0.065(10)	3.281(10)
0.142	0.794(1)	0.932(2)	1.457(6)	1.536(10)	0.079(12)	2.993(12)
0.144	0.667(1)	0.836(3)	1.298(6)	1.396(15)	0.098(16)	2.694(16)
0.145	0.596(1)	0.787(4)	1.212(7)	1.326(19)	0.114(20)	2.538(20)
0.146	0.519(1)	0.739(7)	1.122(10)	1.250(19)	0.128(22)	2.371(22)
0.147	0.430(2)	0.688(15)	1.029(13)	1.163(39)	0.135(41)	2.192(41)
0.1475	0.379(2)	0.661(18)	0.982(13)	1.114(65)	0.131(66)	2.096(66)
0.148	0.316(3)	0.595(66)	0.924(14)	1.071(96)	0.147(97)	1.996(97)
κ_c		0.579(18)	0.821(13)	0.987(55)	0.166(56)	1.808(56)

Tabelle B.2: Hadronmassen (16^3x32 Gitter mit $\kappa_c = 0.14923(2)$)

kappa	m_q	m_{303}	m_{613}	$m_{613} - m_{303}$	m_{316}	m_{606}
0.140	0.586(5)	1.190(9)	1.207(11)	0.017(14)	1.326(27)	1.373(27)
0.142	0.531(5)	1.079(12)	1.102(13)	0.023(17)	1.104(156)	1.249(33)
0.144	0.472(6)	0.962(14)	0.993(14)	0.030(20)	0.972(127)	1.110(43)
0.145	0.442(6)	0.901(15)	0.936(15)	0.035(21)	0.915(139)	1.029(55)
0.146	0.410(8)	0.839(15)	0.880(26)	0.040(30)	0.859(141)	0.927(80)
0.147	0.378(11)	0.774(15)	0.827(33)	0.053(36)	0.821(121)	0.785(97)
0.1475	0.361(12)	0.737(18)	0.806(35)	0.070(40)	0.821(147)	0.693(134)
0.148	0.344(11)	0.696(18)	0.806(45)	0.110(49)	0.841(179)	0.595(374)
κ_c	0.307(11)	0.623(19)	0.727(37)	0.104(42)	0.771(173)	0.502(146)

Tabelle B.3: Quark- und Diquarkmassen (16^3x32 Gitter mit $\kappa_c = 0.14923(2)$)

t	$C^{\Pi}(\kappa = 0.140)$	$C^{\Pi}(\kappa = 0.142)$	$C^{\Pi}(\kappa = 0.144)$	$C^{\Pi}(\kappa = 0.145)$	$C^{\Pi}(\kappa = 0.146)$	$C^{\Pi}(\kappa = 0.147)$	$C^{\Pi}(\kappa = 0.1475)$	$C^{\Pi}(\kappa = 0.148)$
0	1.687 (3) e+01	1.707 (3) e+01	1.729 (4) e+01	1.742 (4) e+01	1.758 (5) e+01	1.780 (5) e+01	1.798 (6) e+01	1.828 (8) e+01
1	1.732 (8) e+00	1.912 (10) e+00	2.137 (13) e+00	2.278 (16) e+00	2.455 (20) e+00	2.706 (27) e+00	2.895 (34) e+00	3.213 (54) e+00
2	3.964 (33) e−01	4.831 (46) e−01	6.054 (69) e−01	6.911 (90) e−01	8.088 (124) e−01	9.941 (188) e−01	1.145 (25) e+00	1.420 (47) e+00
3	1.192 (15) e−01	1.636 (23) e−01	2.352 (39) e−01	2.910 (54) e−01	3.739 (79) e−01	5.160 (131) e−01	6.392 (180) e−01	8.745 (379) e−01
4	4.182 (65) e−02	6.496 (112) e−02	1.074 (22) e−01	1.438 (32) e−01	2.021 (51) e−01	3.101 (93) e−01	4.094 (135) e−01	6.047 (278) e−01
5	1.576 (27) e−02	2.766 (53) e−02	5.239 (117) e−02	7.571 (186) e−02	1.158 (32) e−01	1.960 (64) e−01	2.742 (98) e−01	4.326 (194) e−01
6	6.154 (118) e−03	1.217 (26) e−02	2.632 (64) e−02	4.095 (110) e−02	6.795 (204) e−02	1.264 (45) e−01	1.868 (71) e−01	3.143 (142) e−01
7	2.450 (52) e−03	5.455 (126) e−03	1.344 (36) e−02	2.247 (65) e−02	4.035 (129) e−02	8.218 (304) e−02	1.281 (51) e−01	2.303 (109) e−01
8	9.823 (223) e−04	2.458 (61) e−03	6.887 (193) e−03	1.236 (38) e−02	2.399 (80) e−02	5.341 (203) e−02	8.773 (353) e−02	1.695 (90) e−01
9	3.944 (90) e−04	1.109 (27) e−03	3.529 (96) e−03	6.796 (200) e−03	1.426 (47) e−02	3.472 (127) e−02	6.013 (241) e−02	1.253 (79) e−01
10	1.593 (39) e−04	5.032 (130) e−04	1.820 (52) e−03	3.761 (116) e−03	8.525 (296) e−03	2.270 (85) e−02	4.143 (169) e−02	9.353 (762) e−02
11	6.440 (164) e−05	2.284 (62) e−04	9.390 (283) e−04	2.082 (67) e−03	5.101 (186) e−03	1.486 (60) e−02	2.864 (118) e−02	6.986 (652) e−02
12	2.598 (69) e−05	1.035 (30) e−04	4.841 (152) e−04	1.154 (38) e−03	3.063 (115) e−03	9.815 (411) e−03	2.003 (86) e−02	5.223 (450) e−02
13	1.050 (29) e−05	4.712 (140) e−05	2.519 (81) e−04	6.475 (221) e−04	1.873 (71) e−03	6.641 (282) e−03	1.440 (63) e−02	3.996 (281) e−02
14	4.314 (122) e−06	2.198 (66) e−05	1.357 (43) e−04	3.788 (127) e−04	1.201 (45) e−03	4.734 (196) e−03	1.091 (47) e−02	3.222 (192) e−02
15	1.962 (51) e−06	1.145 (31) e−05	8.215 (238) e−05	2.486 (75) e−04	8.592 (278) e−04	3.715 (141) e−03	8.997 (361) e−03	2.803 (154) e−02
16	1.350 (28) e−06	8.537 (190) e−06	6.638 (163) e−05	2.093 (55) e−04	7.537 (222) e−04	3.397 (119) e−03	8.399 (323) e−03	2.682 (149) e−02
17	1.936 (43) e−06	1.131 (26) e−05	8.144 (202) e−05	2.473 (66) e−04	8.588 (254) e−04	3.734 (128) e−03	9.061 (346) e−03	2.835 (163) e−02
18	4.250 (101) e−06	2.166 (54) e−05	1.344 (36) e−04	3.766 (108) e−04	1.202 (377) e−03	4.779 (171) e−03	1.105 (44) e−02	3.278 (197) e−02
19	1.038 (24) e−05	4.664 (117) e−05	2.504 (69) e−04	6.466 (192) e−04	1.882 (61) e−03	6.725 (250) e−03	1.463 (60) e−02	4.037 (252) e−02
20	2.577 (59) e−05	1.029 (25) e−04	4.831 (133) e−04	1.155 (34) e−03	3.081 (102) e−03	9.933 (379) e−03	2.033 (86) e−02	5.202 (348) e−02
21	6.407 (141) e−05	2.277 (54) e−04	9.389 (250) e−04	2.086 (60) e−03	5.124 (167) e−03	1.498 (56) e−02	2.891 (121) e−02	6.875 (478) e−02
22	1.592 (34) e−04	5.043 (116) e−04	1.829 (47) e−03	3.784 (105) e−03	8.580 (266) e−03	2.283 (82) e−02	4.165 (167) e−02	9.234 (646) e−02
23	3.954 (83) e−04	1.115 (25) e−03	3.556 (90) e−03	6.850 (187) e−03	1.436 (43) e−02	3.488 (121) e−02	6.027 (234) e−02	1.250 (89) e−01
24	9.830 (201) e−04	2.464 (54) e−03	6.907 (171) e−03	1.239 (33) e−02	2.400 (71) e−02	5.325 (181) e−02	8.724 (332) e−02	1.697 (123) e−01
25	2.456 (48) e−03	5.476 (117) e−03	1.350 (33) e−02	2.255 (59) e−02	4.042 (118) e−02	8.203 (278) e−02	1.276 (49) e−01	2.325 (162) e−01
26	6.190 (110) e−03	1.227 (24) e−02	2.656 (60) e−02	4.130 (103) e−02	6.845 (192) e−02	1.270 (42) e−01	1.875 (69) e−01	3.200 (209) e−01
27	1.584 (25) e−02	2.784 (49) e−02	5.280 (108) e−02	7.631 (173) e−02	1.167 (30) e−01	1.974 (60) e−01	2.760 (94) e−01	4.383 (233) e−01
28	4.185 (57) e−02	6.510 (101) e−02	1.077 (20) e−01	1.443 (29) e−01	2.027 (47) e−01	3.109 (84) e−01	4.105 (125) e−01	6.041 (244) e−01
29	1.189 (13) e−01	1.634 (21) e−01	2.351 (36) e−01	2.908 (50) e−01	3.736 (73) e−01	5.154 (121) e−01	6.385 (169) e−01	8.655 (288) e−01
30	3.935 (31) e−01	4.796 (43) e−01	6.011 (64) e−01	6.861 (82) e−01	8.026 (111) e−01	9.861 (167) e−01	1.136 (22) e+00	1.399 (36) e+00
31	1.719 (7) e+00	1.898 (9) e+00	2.121 (12) e+00	2.261 (14) e+00	2.436 (18) e+00	2.685 (25) e+00	2.871 (31) e+00	3.181 (46) e+00

Tabelle B.4: Pion Korrelationsfunktion

t	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.140)$	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.142)$	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.144)$	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.145)$	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.146)$	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.147)$	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.1475)$	$C^{\mathcal{R}}(\kappa = 0.148)$
0	4.088 (6) e+01	4.067 (6) e+01	4.038 (7) e+01	4.021 (7) e+01	4.002 (7) e+01	3.980 (8) e+01	3.968 (8) e+01	3.956 (8) e+01
1	2.980 (8) e+00	3.115 (9) e+00	3.248 (10) e+00	3.313 (10) e+00	3.377 (10) e+00	3.440 (11) e+00	3.470 (11) e+00	3.501 (11) e+00
2	5.341 (30) e−01	5.863 (33) e−01	6.387 (37) e−01	6.641 (39) e−01	6.884 (41) e−01	7.111 (44) e−01	7.217 (46) e−01	7.317 (49) e−01
3	1.282 (12) e−01	1.510 (14) e−01	1.759 (17) e−01	1.887 (18) e−01	2.014 (20) e−01	2.137 (22) e−01	2.194 (24) e−01	2.247 (26) e−01
4	3.731 (46) e−02	4.789 (59) e−02	6.078 (77) e−02	6.805 (89) e−02	7.573 (104) e−02	8.364 (123) e−02	8.755 (137) e−02	9.114 (165) e−02
5	1.204 (18) e−02	1.695 (25) e−02	2.363 (36) e−02	2.773 (44) e−02	3.234 (53) e−02	3.737 (67) e−02	3.994 (79) e−02	4.235 (103) e−02
6	4.104 (71) e−03	6.350 (110) e−03	9.746 (17) e−02	1.200 (22) e−02	1.469 (29) e−02	1.778 (39) e−02	1.939 (48) e−02	2.093 (69) e−02
7	1.441 (28) e−03	2.452 (48) e−03	4.143 (84) e−03	5.356 (112) e−03	6.877 (157) e−03	8.712 (235) e−03	9.689 (31) e−02	1.063 (51) e−02
8	5.122 (114) e−04	9.566 (22) e−03	1.778 (41) e−03	2.413 (59) e−03	3.256 (90) e−03	4.345 (151) e−03	4.969 (229) e−03	5.644 (378) e−03
9	1.828 (45) e−04	3.746 (94) e−04	7.654 (204) e−04	1.090 (31) e−03	1.545 (51) e−03	2.168 (96) e−03	2.541 (143) e−03	2.882 (256) e−03
10	6.574 (175) e−05	1.480 (41) e−04	3.327 (102) e−04	4.974 (168) e−04	7.400 (299) e−04	1.088 (61) e−03	1.304 (97) e−03	1.539 (184) e−03
11	2.364 (67) e−05	5.842 (174) e−05	1.444 (49) e−04	2.263 (89) e−04	3.522 (171) e−04	5.391 (383) e−04	6.603 (635) e−04	8.853 (1.838) e−04
12	8.482 (251) e−06	2.302 (73) e−05	6.265 (234) e−05	1.030 (46) e−04	1.678 (93) e−04	2.680 (231) e−04	3.366 (413) e−04	5.008 (1.435) e−04
13	3.051 (93) e−06	9.119 (304) e−06	2.745 (110) e−05	4.753 (226) e−05	8.157 (518) e−05	1.376 (145) e−04	1.799 (277) e−04	2.732 (761) e−04
14	1.113 (35) e−06	3.678 (130) e−06	1.231 (54) e−05	2.252 (120) e−05	4.088 (303) e−05	7.341 (946) e−05	1.010 (198) e−04	1.696 (552) e−04
15	4.439 (137) e−07	1.637 (57) e−06	6.139 (277) e−06	1.191 (68) e−05	2.305 (191) e−05	4.474 (698) e−05	6.491 (1.599) e−05	1.101 (462) e−04
16	2.793 (74) e−07	1.100 (34) e−06	4.383 (181) e−06	8.748 (479) e−06	1.740 (148) e−05	3.464 (613) e−05	5.016 (1.534) e−05	7.908 (4.693) e−05
17	4.341 (127) e−07	1.590 (52) e−06	5.898 (243) e−06	1.140 (60) e−05	2.222 (176) e−05	4.513 (702) e−05	6.826 (1.682) e−05	1.186 (507) e−04
18	1.087 (32) e−06	3.564 (115) e−06	1.180 (47) e−05	2.154 (105) e−05	3.958 (274) e−05	7.490 (951) e−05	1.071 (215) e−04	1.731 (593) e−04
19	3.004 (87) e−06	8.941 (279) e−06	2.677 (99) e−05	4.637 (202) e−05	8.066 (469) e−05	1.429 (140) e−04	1.951 (284) e−04	2.912 (812) e−04
20	8.366 (232) e−06	2.268 (67) e−05	6.162 (209) e−05	1.015 (40) e−04	1.671 (82) e−04	2.782 (215) e−04	3.657 (405) e−04	5.056 (1.010) e−04
21	2.329 (61) e−05	5.750 (159) e−05	1.419 (44) e−04	2.221 (78) e−04	3.469 (149) e−04	5.430 (343) e−04	6.862 (599) e−04	8.988 (1.318) e−04
22	6.497 (159) e−05	1.461 (38) e−04	3.275 (93) e−04	4.884 (154) e−04	7.260 (270) e−04	1.083 (55) e−03	1.336 (91) e−03	1.701 (186) e−03
23	1.815 (42) e−04	3.721 (89) e−04	7.584 (199) e−04	1.077 (31) e−03	1.522 (50) e−03	2.143 (91) e−03	2.552 (139) e−03	3.139 (291) e−03
24	5.085 (109) e−04	9.486 (211) e−04	1.756 (42) e−03	2.373 (60) e−03	3.186 (90) e−03	4.237 (149) e−03	4.869 (210) e−03	5.661 (399) e−03
25	1.432 (29) e−03	2.433 (51) e−03	4.095 (90) e−03	5.277 (120) e−03	6.750 (166) e−03	8.548 (246) e−03	9.571 (33) e−02	1.072 (54) e−02
26	4.097 (74) e−03	6.339 (117) e−03	9.715 (19) e−02	1.195 (24) e−02	1.461 (31) e−02	1.772 (42) e−02	1.944 (52) e−02	2.125 (73) e−02
27	1.201 (18) e−02	1.692 (26) e−02	2.357 (38) e−02	2.764 (46) e−02	3.222 (56) e−02	3.727 (71) e−02	3.993 (83) e−02	4.261 (105) e−02
28	3.700 (46) e−02	4.753 (60) e−02	6.034 (78) e−02	6.754 (89) e−02	7.516 (103) e−02	8.304 (122) e−02	8.700 (135) e−02	9.084 (158) e−02
29	1.267 (12) e−01	1.494 (14) e−01	1.741 (16) e−01	1.869 (18) e−01	1.996 (20) e−01	2.120 (22) e−01	2.179 (23) e−01	2.234 (26) e−01
30	5.279 (31) e−01	5.795 (3) e−01	6.314 (39) e−01	6.565 (41) e−01	6.807 (43) e−01	7.033 (46) e−01	7.140 (47) e−01	7.241 (50) e−01
31	2.956 (8) e+00	3.089 (8) e+00	3.221 (9) e+00	3.285 (9) e+00	3.349 (9) e+00	3.411 (10) e+00	3.441 (10) e+00	3.471 (10) e+00

Tabelle B.5: Rho Korrelationsfunktion

t	$C^N(\kappa = 0.140)$	$C^N(\kappa = 0.142)$	$C^N(\kappa = 0.144)$	$C^N(\kappa = 0.145)$	$C^N(\kappa = 0.146)$	$C^N(\kappa = 0.147)$	$C^N(\kappa = 0.1475)$	$C^N(\kappa = 0.148)$
0	1.150 (2) e+02	1.135 (3) e+02	1.117 (3) e+02	1.107 (3) e+02	1.097 (3) e+02	1.085 (3) e+02	1.080 (3) e+02	1.074 (3) e+02
1	9.425 (46) e-01	9.536 (5) e+00	9.542 (6) e+00	9.496 (62) e-01	9.414 (67) e-01	9.292 (72) e-01	9.217 (75) e-01	9.136 (78) e-01
2	4.209 (34) e-02	4.516 (40) e-02	4.760 (47) e-02	4.847 (51) e-02	4.905 (56) e-02	4.932 (63) e-02	4.937 (68) e-02	4.946 (74) e-02
3	3.030 (45) e-03	3.623 (57) e-03	4.270 (74) e-03	4.609 (86) e-03	4.957 (101) e-03	5.332 (122) e-03	5.548 (139) e-03	5.816 (162) e-03
4	3.428 (74) e-04	4.797 (109) e-04	6.712 (169) e-04	7.955 (214) e-04	9.475 (287) e-04	1.144 (39) e-03	1.272 (47) e-03	1.436 (60) e-03
5	5.191 (150) e-05	8.617 (260) e-05	1.450 (475) e-04	1.900 (66) e-04	2.520 (98) e-04	3.431 (151) e-04	4.079 (195) e-04	4.975 (266) e-04
6	9.131 (315) e-06	1.794 (65) e-05	3.614 (141) e-05	5.211 (217) e-05	7.662 (352) e-05	1.167 (61) e-04	1.476 (85) e-04	1.932 (126) e-04
7	1.726 (68) e-06	3.992 (163) e-06	9.571 (42) e-05	1.514 (71) e-05	2.457 (126) e-05	4.161 (247) e-05	5.560 (365) e-05	7.717 (594) e-05
8	3.376 (150) e-07	9.164 (421) e-07	2.602 (129) e-06	4.503 (238) e-06	8.026 (484) e-06	1.501 (115) e-05	2.108 (176) e-05	3.122 (300) e-05
9	6.696 (322) e-08	2.125 (105) e-07	7.111 (373) e-07	1.342 (74) e-06	2.616 (164) e-06	5.364 (433) e-06	7.886 (725) e-06	1.236 (145) e-05
10	1.355 (73) e-08	5.023 (278) e-08	1.984 (116) e-07	4.088 (251) e-07	8.748 (581) e-07	1.979 (157) e-06	3.062 (295) e-06	4.978 (733) e-06
11	2.744 (161) e-09	1.192 (73) e-08	5.587 (370) e-08	1.262 (89) e-07	2.975 (229) e-07	7.431 (697) e-07	1.205 (142) e-06	2.233 (501) e-06
12	5.574 (357) e-10	2.836 (195) e-09	1.576 (120) e-08	3.899 (319) e-08	1.009 (92) e-07	2.726 (318) e-07	4.468 (695) e-07	9.487 (4.491) e-07
13	1.134 (79) e-10	6.766 (514) e-10	4.455 (384) e-09	1.203 (114) e-08	3.369 (369) e-08	9.210 (1.478) e-08	1.323 (366) e-07	1.561 (1.954) e-07
14	2.310 (171) e-11	1.618 (132) e-10	1.266 (123) e-09	3.731 (413) e-09	1.120 (156) e-08	2.886 (767) e-08	2.689 (2.223) e-08	-6.086 (12.16) e-08
15	4.492 (356) e-12	3.640 (327) e-11	3.298 (369) e-10	1.035 (142) e-09	3.190 (664) e-09	6.574 (4.585) e-09	-1.516 (15.70) e-09	-7.441 (8.991) e-08
16	8.276 (9.734) e-14	9.899 (1.022) e-12	1.238 (1.418) e-11	3.575 (6.421) e-11	-3.113 (36.84) e-11	-2.976 (3.240) e-09	-1.451 (1.254) e-08	-9.513 (10.22) e-08
17	-3.870 (271) e-12	-2.965 (227) e-11	-2.453 (243) e-10	-7.340 (983) e-10	-2.312 (525) e-09	-8.384 (4.522) e-09	-1.811 (1.648) e-08	-3.954 (9.660) e-08
18	-1.999 (120) e-11	-1.334 (85) e-10	-9.650 (74) e-09	-2.700 (260) e-09	-7.774 (1.158) e-09	-2.229 (778) e-08	-3.452 (2.536) e-08	-2.042 (14.33) e-08
19	-1.014 (57) e-10	-5.842 (344) e-10	-3.657 (247) e-09	-9.576 (77) e-08	-2.621 (290) e-08	-7.553 (1.542) e-08	-1.290 (432) e-07	-1.964 (2.265) e-07
20	-5.149 (279) e-10	-2.563 (144) e-09	-1.380 (86) e-08	-3.349 (240) e-08	-8.517 (784) e-08	-2.331 (328) e-07	-4.035 (798) e-07	-6.617 (3.867) e-07
21	-2.593 (129) e-09	-1.114 (58) e-08	-5.140 (293) e-08	-1.149 (72) e-07	-2.678 (200) e-07	-6.653 (688) e-07	-1.090 (153) e-06	-1.647 (648) e-06
22	-1.297 (61) e-08	-4.795 (234) e-08	-1.889 (102) e-07	-3.887 (228) e-07	-8.309 (560) e-07	-1.886 (163) e-06	-2.947 (322) e-06	-4.604 (942) e-06
23	-6.547 (289) e-08	-2.076 (97) e-07	-6.954 (358) e-07	-1.314 (73) e-06	-2.572 (162) e-06	-5.323 (403) e-06	-7.938 (705) e-06	-1.244 (154) e-05
24	-3.335 (136) e-07	-9.045 (389) e-07	-2.568 (121) e-06	-4.446 (226) e-06	-7.932 (449) e-06	-1.486 (99) e-05	-2.099 (158) e-05	-3.169 (342) e-05
25	-1.716 (64) e-06	-3.970 (155) e-06	-9.514 (41) e-05	-1.505 (69) e-05	-2.440 (123) e-05	-4.128 (240) e-05	-5.522 (362) e-05	-7.861 (744) e-05
26	-9.104 (286) e-06	-1.788 (59) e-05	-3.601 (129) e-05	-5.190 (198) e-05	-7.625 (319) e-05	-1.160 (56) e-04	-1.467 (77) e-04	-1.953 (136) e-04
27	-5.164 (131) e-05	-8.565 (226) e-05	-1.438 (41) e-04	-1.880 (57) e-04	-2.487 (82) e-04	-3.373 (126) e-04	-4.005 (164) e-04	-4.918 (231) e-04
28	-3.374 (67) e-04	-4.722 (98) e-04	-6.600 (148) e-04	-7.812 (188) e-04	-9.286 (245) e-04	-1.118 (33) e-03	-1.240 (40) e-03	-1.402 (51) e-03
29	-2.970 (43) e-03	-3.554 (55) e-03	-4.191 (72) e-03	-4.523 (85) e-03	-4.865 (101) e-03	-5.231 (125) e-03	-5.442 (142) e-03	-5.708 (164) e-03
30	-4.144 (35) e-02	-4.445 (42) e-02	-4.683 (49) e-02	-4.768 (54) e-02	-4.822 (60) e-02	-4.847 (68) e-02	-4.850 (73) e-02	-4.854 (79) e-02
31	-9.336 (45) e-01	-9.443 (51) e-01	-9.445 (58) e-01	-9.398 (62) e-01	-9.314 (67) e-01	-9.192 (71) e-01	-9.117 (74) e-01	-9.035 (77) e-01

Tabelle B.6: Nukleon Korrelationsfunktion

t	$C^\Delta(\kappa = 0.140)$	$C^\Delta(\kappa = 0.142)$	$C^\Delta(\kappa = 0.144)$	$C^\Delta(\kappa = 0.145)$	$C^\Delta(\kappa = 0.146)$	$C^\Delta(\kappa = 0.147)$	$C^\Delta(\kappa = 0.1475)$	$C^\Delta(\kappa = 0.148)$
0	1.343 (3) e+02	1.324 (3) e+02	1.303 (3) e+02	1.291 (3) e+02	1.278 (3) e+02	1.265 (3) e+02	1.258 (3) e+02	1.251 (3) e+02
1	1.176 (5) e+00	1.190 (5) e+00	1.193 (6) e+00	1.189 (7) e+00	1.182 (7) e+00	1.172 (7) e+00	1.165 (8) e+00	1.157 (8) e+00
2	4.697 (33) e–02	4.973 (37) e–02	5.173 (42) e–02	5.234 (44) e–02	5.263 (47) e–02	5.258 (50) e–02	5.243 (53) e–02	5.223 (55) e–02
3	2.841 (38) e–03	3.239 (44) e–03	3.597 (51) e–03	3.743 (55) e–03	3.854 (58) e–03	3.924 (62) e–03	3.945 (66) e–03	3.960 (70) e–03
4	2.647 (54) e–04	3.387 (71) e–04	4.211 (93) e–04	4.626 (104) e–04	5.021 (118) e–04	5.377 (135) e–04	5.540 (145) e–04	5.703 (160) e–04
5	3.402 (97) e–05	5.010 (145) e–05	7.182 (216) e–05	8.475 (261) e–05	9.880 (32) e–04	1.137 (39) e–04	1.214 (44) e–04	1.295 (52) e–04
6	5.280 (182) e–06	9.005 (316) e–06	1.498 (55) e–05	1.906 (72) e–05	2.395 (96) e–05	2.968 (130) e–05	3.288 (156) e–05	3.626 (201) e–05
7	9.017 (357) e–07	1.778 (72) e–06	3.430 (145) e–06	4.698 (206) e–06	6.353 (304) e–06	8.456 (458) e–06	9.694 (59) e–05	1.099 (87) e–05
8	1.621 (75) e–07	3.688 (175) e–07	8.214 (409) e–07	1.210 (63) e–06	1.759 (102) e–06	2.518 (175) e–06	2.996 (253) e–06	3.502 (431) e–06
9	2.964 (155) e–08	7.745 (444) e–08	1.982 (113) e–07	3.125 (190) e–07	4.862 (359) e–07	7.446 (725) e–07	9.147 (1.194) e–07	1.087 (231) e–06
10	5.534 (323) e–09	1.663 (102) e–08	4.903 (330) e–08	8.317 (613) e–08	1.399 (132) e–07	2.357 (316) e–07	3.074 (566) e–07	3.945 (1.217) e–07
11	1.035 (66) e–09	3.570 (245) e–09	1.209 (95) e–08	2.197 (194) e–08	3.965 (462) e–08	7.219 (1.334) e–08	9.775 (265) e–07	1.312 (737) e–07
12	1.944 (135) e–10	7.717 (599) e–10	3.017 (285) e–09	5.907 (663) e–09	1.153 (177) e–08	2.283 (625) e–08	3.199 (1.400) e–08	4.966 (4.545) e–08
13	3.697 (279) e–11	1.693 (147) e–10	7.678 (867) e–10	1.625 (230) e–09	3.448 (701) e–09	7.180 (2.919) e–09	8.776 (7.875) e–09	3.428 (29.10) e–09
14	7.053 (581) e–12	3.736 (367) e–11	1.986 (271) e–10	4.628 (807) e–10	1.128 (282) e–09	3.027 (1.501) e–09	4.749 (4.954) e–09	7.731 (21.29) e–09
15	1.282 (120) e–12	7.741 (921) e–12	4.717 (870) e–11	1.189 (309) e–10	3.269 (1.400) e–10	1.143 (1.018) e–09	2.484 (3.605) e–09	8.945 (16.70) e–09
16	2.234 (3.394) e–14	2.184 (3.280) e–13	2.775 (4.379) e–12	1.211 (1.983) e–11	6.596 (11.38) e–11	4.405 (9.455) e–10	1.406 (3.342) e–09	6.681 (15.90) e–09
17	-1.165 (96) e–12	-6.845 (741) e–12	-3.805 (750) e–11	-8.093 (2.957) e–11	-1.139 (1.484) e–10	4.196 (11.02) e–10	2.368 (3.805) e–09	1.244 (1.734) e–08
18	-6.479 (448) e–12	-3.380 (278) e–11	-1.715 (211) e–10	-3.697 (696) e–10	-7.108 (2.860) e–10	-6.285 (16.94) e–10	1.353 (5.212) e–09	1.837 (2.283) e–08
19	-3.507 (231) e–11	-1.600 (117) e–10	-7.254 (691) e–10	-1.537 (192) e–09	-3.261 (638) e–09	-7.070 (2.898) e–09	-1.064 (759) e–08	-7.540 (32.49) e–09
20	-1.877 (115) e–10	-7.468 (499) e–10	-2.959 (236) e–09	-5.882 (565) e–09	-1.180 (160) e–08	-2.496 (580) e–08	-3.909 (1.329) e–08	-6.640 (4.630) e–08
21	-1.007 (56) e–09	-3.503 (208) e–09	-1.212 (82) e–08	-2.243 (172) e–08	-4.146 (407) e–08	-7.888 (1.250) e–08	-1.154 (265) e–07	-1.805 (787) e–07
22	-5.384 (274) e–09	-1.628 (87) e–08	-4.870 (288) e–08	-8.355 (540) e–08	-1.423 (108) e–07	-2.433 (274) e–07	-3.247 (511) e–07	-4.180 (1.377) e–07
23	-2.916 (137) e–08	-7.648 (377) e–08	-1.972 (106) e–07	-3.130 (182) e–07	-4.905 (325) e–07	-7.577 (669) e–07	-9.384 (1.086) e–07	-1.085 (252) e–06
24	-1.607 (69) e–07	-3.656 (162) e–07	-8.142 (385) e–07	-1.198 (60) e–06	-1.738 (95) e–06	-2.465 (161) e–06	-2.894 (227) e–06	-3.227 (406) e–06
25	-9.064 (349) e–07	-1.789 (71) e–06	-3.449 (144) e–06	-4.720 (204) e–06	-6.369 (290) e–06	-8.421 (428) e–06	-9.560 (54) e–05	-1.059 (77) e–05
26	-5.340 (176) e–06	-9.124 (308) e–06	-1.519 (53) e–05	-1.931 (69) e–05	-2.420 (90) e–05	-2.979 (119) e–05	-3.274 (142) e–05	-3.559 (181) e–05
27	-3.417 (90) e–05	-5.036 (134) e–05	-7.212 (196) e–05	-8.494 (235) e–05	-9.863 (28) e–04	-1.125 (34) e–04	-1.193 (47) e–04	-1.259 (45) e–04
28	-2.606 (52) e–04	-3.336 (67) e–04	-4.145 (84) e–04	-4.549 (93) e–04	-4.925 (103) e–04	-5.250 (114) e–04	-5.386 (123) e–04	-5.507 (134) e–04
29	-2.784 (37) e–03	-3.175 (44) e–03	-3.528 (50) e–03	-3.672 (54) e–03	-3.782 (58) e–03	-3.852 (64) e–03	-3.872 (67) e–03	-3.883 (71) e–03
30	-4.636 (36) e–02	-4.908 (40) e–02	-5.105 (45) e–02	-5.165 (48) e–02	-5.193 (52) e–02	-5.187 (56) e–02	-5.171 (59) e–02	-5.149 (61) e–02
31	-1.165 (5) e+00	-1.179 (5) e+00	-1.181 (6) e+00	-1.178 (6) e+00	-1.171 (7) e+00	-1.160 (7) e+00	-1.153 (8) e+00	-1.146 (8) e+00

Tabelle B.7: Delta Korrelationsfunktion

t	$C^q(\kappa = 0.140)$	$C^q(\kappa = 0.142)$	$C^q(\kappa = 0.144)$	$C^q(\kappa = 0.145)$	$C^q(\kappa = 0.146)$	$C^q(\kappa = 0.147)$	$C^q(\kappa = 0.1475)$	$C^q(\kappa = 0.148)$
0	1.196 (6) e+01	1.215 (7) e+01	1.230 (8) e+01	1.235 (8) e+01	1.238 (9) e+01	1.241 (10) e+01	1.242 (10) e+01	1.245 (12) e+01
1	4.046 (42) e+00	4.249 (47) e+00	4.434 (55) e+00	4.516 (61) e+00	4.591 (73) e+00	4.661 (79) e+00	4.700 (87) e+00	4.752 (101) e+00
2	2.731 (39) e+00	3.042 (45) e+00	3.381 (53) e+00	3.560 (59) e+00	3.746 (72) e+00	3.942 (77) e+00	4.046 (85) e+00	4.161 (99) e+00
3	1.735 (31) e+00	2.045 (37) e+00	2.413 (48) e+00	2.621 (54) e+00	2.848 (63) e+00	3.096 (71) e+00	3.230 (78) e+00	3.374 (90) e+00
4	1.051 (23) e+00	1.309 (28) e+00	1.637 (36) e+00	1.832 (41) e+00	2.051 (48) e+00	2.300 (62) e+00	2.437 (68) e+00	2.587 (78) e+00
5	6.186 (155) e−01	8.138 (203) e−01	1.076 (27) e+00	1.240 (32) e+00	1.431 (38) e+00	1.657 (48) e+00	1.786 (56) e+00	1.932 (66) e+00
6	3.570 (105) e−01	4.952 (144) e−01	6.919 (205) e−01	8.204 (248) e−01	9.753 (30) e+00	1.165 (40) e+00	1.278 (47) e+00	1.408 (58) e+00
7	2.036 (70) e−01	2.976 (101) e−01	4.387 (152) e−01	5.346 (189) e−01	6.538 (240) e−01	8.046 (327) e−01	8.968 (394) e−01	1.006 (51) e+00
8	1.145 (45) e−01	1.765 (69) e−01	2.748 (111) e−01	3.445 (144) e−01	4.339 (191) e−01	5.511 (272) e−01	6.249 (337) e−01	7.132 (448) e−01
9	6.462 (290) e−02	1.053 (47) e−01	1.737 (80) e−01	2.246 (107) e−01	2.919 (148) e−01	3.834 (220) e−01	4.427 (281) e−01	5.134 (383) e−01
10	3.633 (182) e−02	6.256 (310) e−02	1.094 (56) e−01	1.456 (78) e−01	1.951 (113) e−01	2.648 (176) e−01	3.111 (233) e−01	3.659 (331) e−01
11	2.013 (113) e−02	3.661 (204) e−02	6.769 (391) e−02	9.273 (564) e−02	1.279 (87) e−01	1.788 (140) e−01	2.133 (190) e−01	2.530 (282) e−01
12	1.112 (70) e−02	2.136 (133) e−02	4.176 (272) e−02	5.886 (407) e−02	8.359 (662) e−02	1.204 (112) e−01	1.460 (157) e−01	1.771 (244) e−01
13	6.132 (432) e−03	1.240 (87) e−02	2.552 (192) e−02	3.691 (301) e−02	5.383 (541) e−02	7.978 (937) e−02	9.829 (135) e−01	1.220 (216) e−01
14	3.205 (269) e−03	6.777 (585) e−03	1.460 (139) e−02	2.160 (227) e−02	3.226 (395) e−02	4.914 (751) e−02	6.160 (1.130) e−02	7.848 (1.859) e−02
15	1.406 (179) e−03	3.072 (415) e−03	6.834 (1.061) e−03	1.028 (180) e−02	1.562 (325) e−02	2.430 (647) e−02	3.096 (980) e−02	4.070 (1.645) e−02
16	1.223 (1.497) e−04	2.978 (3.614) e−04	7.351 (9.568) e−04	1.159 (1.652) e−03	1.842 (3.045) e−03	3.055 (6.164) e−03	4.146 (9.356) e−03	7.157 (15.82) e−03
17	-1.105 (182) e−03	-2.341 (423) e−03	-5.004 (1.087) e−03	-7.320 (1.819) e−03	-1.067 (329) e−02	-1.535 (651) e−02	-1.820 (976) e−02	-2.011 (1.644) e−02
18	-2.807 (274) e−03	-5.821 (594) e−03	-1.221 (140) e−02	-1.771 (228) e−02	-2.560 (392) e−02	-3.666 (742) e−02	-4.369 (1.087) e−02	-5.177 (1.766) e−02
19	-5.619 (441) e−03	-1.124 (90) e−02	-2.283 (200) e−02	-3.263 (312) e−02	-4.653 (504) e−02	-6.569 (895) e−02	-7.751 (1.273) e−02	-9.119 (1.991) e−02
20	-1.060 (72) e−02	-2.025 (140) e−02	-3.928 (290) e−02	-5.487 (434) e−02	-7.652 (666) e−02	-1.058 (114) e−01	-1.236 (155) e−01	-1.445 (227) e−01
21	-1.963 (119) e−02	-3.566 (220) e−02	-6.567 (426) e−02	-8.943 (611) e−02	-1.217 (90) e−01	-1.646 (146) e−01	-1.909 (193) e−01	-2.220 (279) e−01
22	-3.552 (200) e−02	-6.109 (339) e−02	-1.063 (62) e−01	-1.406 (85) e−01	-1.858 (120) e−01	-2.444 (186) e−01	-2.797 (241) e−01	-3.211 (340) e−01
23	-6.393 (319) e−02	-1.040 (51) e−01	-1.707 (86) e−01	-2.190 (114) e−01	-2.805 (157) e−01	-3.574 (231) e−01	-4.022 (291) e−01	-4.520 (396) e−01
24	-1.153 (49) e−01	-1.776 (75) e−01	-2.754 (118) e−01	-3.432 (153) e−01	-4.271 (202) e−01	-5.293 (287) e−01	-5.879 (352) e−01	-6.533 (468) e−01
25	-2.037 (73) e−01	-2.971 (107) e−01	-4.355 (161) e−01	-5.275 (202) e−01	-6.382 (259) e−01	-7.700 (355) e−01	-8.446 (425) e−01	-9.277 (552) e−01
26	-3.569 (110) e−01	-4.936 (153) e−01	-6.852 (218) e−01	-8.075 (266) e−01	-9.507 (33) e+00	-1.117 (44) e+00	-1.209 (51) e+00	-1.312 (65) e+00
27	-6.140 (161) e−01	-8.056 (213) e−01	-1.060 (29) e+00	-1.216 (34) e+00	-1.394 (42) e+00	-1.596 (53) e+00	-1.707 (61) e+00	-1.831 (75) e+00
28	-1.042 (23) e+00	-1.296 (29) e+00	-1.615 (38) e+00	-1.804 (43) e+00	-2.013 (51) e+00	-2.247 (63) e+00	-2.375 (71) e+00	-2.518 (85) e+00
29	-1.716 (30) e+00	-2.021 (37) e+00	-2.380 (46) e+00	-2.583 (52) e+00	-2.803 (59) e+00	-3.042 (71) e+00	-3.172 (79) e+00	-3.317 (93) e+00
30	-2.700 (38) e+00	-3.004 (44) e+00	-3.335 (54) e+00	-3.510 (59) e+00	-3.690 (66) e+00	-3.879 (78) e+00	-3.981 (86) e+00	-4.097 (98) e+00
31	-4.004 (43) e+00	-4.201 (50) e+00	-4.379 (59) e+00	-4.456 (65) e+00	-4.525 (72) e+00	-4.588 (82) e+00	-4.624 (90) e+00	-4.675 (103) e+00

Tabelle B.8: Quark Korrelationsfunktion

t	$C^{303}(\kappa = 0.140)$	$C^{303}(\kappa = 0.142)$	$C^{303}(\kappa = 0.144)$	$C^{303}(\kappa = 0.145)$	$C^{303}(\kappa = 0.146)$	$C^{303}(\kappa = 0.147)$	$C^{303}(\kappa = 0.1475)$	$C^{303}(\kappa = 0.148)$
0	1.028 (1) e+01	1.033 (1) e+01	1.037 (2) e+01	1.038 (2) e+01	1.040 (2) e+01	1.041 (2) e+01	1.042 (2) e+01	1.043 (2) e+01
1	7.795 (48) e–01	8.388 (51) e–01	9.044 (55) e–01	9.402 (57) e–01	9.787 (6) e+00	1.021 (6) e+00	1.046 (7) e+00	1.073 (7) e+00
2	1.258 (16) e–01	1.462 (19) e–01	1.708 (22) e–01	1.853 (23) e–01	2.019 (26) e–01	2.217 (30) e–01	2.338 (33) e–01	2.489 (39) e–01
3	2.746 (53) e–02	3.531 (67) e–02	4.597 (87) e–02	5.287 (102) e–02	6.138 (122) e–02	7.250 (157) e–02	7.979 (196) e–02	8.932 (246) e–02
4	7.144 (182) e–03	1.028 (26) e–02	1.510 (38) e–02	1.855 (48) e–02	2.312 (71) e–02	2.959 (95) e–02	3.410 (120) e–02	4.012 (158) e–02
5	2.036 (65) e–03	3.282 (103) e–03	5.451 (174) e–03	7.150 (234) e–03	9.569 (33) e–02	1.326 (51) e–02	1.598 (68) e–02	1.970 (102) e–02
6	6.048 (236) e–04	1.090 (42) e–03	2.039 (80) e–03	2.852 (115) e–03	4.092 (175) e–03	6.137 (303) e–03	7.744 (434) e–03	1.010 (71) e–02
7	1.833 (86) e–04	3.692 (171) e–04	7.781 (371) e–04	1.161 (58) e–03	1.786 (97) e–03	2.901 (187) e–03	3.839 (286) e–03	5.353 (505) e–03
8	5.605 (312) e–05	1.263 (70) e–04	2.996 (176) e–04	4.759 (296) e–04	7.831 (550) e–04	1.373 (117) e–03	1.902 (186) e–03	2.885 (371) e–03
9	1.723 (112) e–05	4.334 (284) e–05	1.153 (81) e–04	1.944 (147) e–04	3.404 (296) e–04	6.399 (687) e–04	9.243 (1.147) e–04	1.554 (323) e–03
10	5.297 (396) e–06	1.486 (114) e–05	4.440 (376) e–05	7.966 (736) e–05	1.492 (161) e–04	3.013 (413) e–04	4.504 (732) e–04	8.726 (3.896) e–04
11	1.617 (140) e–06	5.061 (457) e–06	1.701 (174) e–05	3.243 (365) e–05	6.434 (869) e–05	1.351 (246) e–04	2.021 (469) e–04	4.428 (3.461) e–04
12	5.024 (502) e–07	1.778 (184) e–06	6.821 (795) e–06	1.389 (183) e–05	2.916 (475) e–05	6.244 (1.497) e–05	9.060 (3.021) e–05	1.586 (1.751) e–04
13	1.550 (183) e–07	6.202 (744) e–07	2.707 (372) e–06	5.872 (934) e–06	1.302 (268) e–05	2.871 (958) e–05	4.146 (2.100) e–05	3.675 (7.573) e–05
14	4.710 (673) e–08	2.113 (320) e–07	1.033 (186) e–06	2.350 (508) e–06	5.346 (1.600) e–06	1.132 (662) e–05	1.472 (1.574) e–05	-1.484 (5.810) e–05
15	1.466 (274) e–08	7.533 (1.497) e–08	4.244 (1.009) e–07	1.034 (299) e–06	2.503 (1.038) e–06	5.569 (4.737) e–06	6.874 (12.14) e–06	-3.201 (5.502) e–05
16	7.977 (1.534) e–09	4.461 (937) e–08	2.721 (716) e–07	6.833 (2.310) e–07	1.684 (887) e–06	3.652 (4.279) e–06	3.677 (11.28) e–06	-5.241 (6.550) e–05
17	1.432 (283) e–08	7.071 (1.488) e–08	3.770 (981) e–07	8.872 (3.077) e–07	2.090 (1.087) e–06	4.754 (4.950) e–06	5.921 (12.60) e–06	-5.965 (8.104) e–05
18	4.360 (740) e–08	1.893 (343) e–07	8.892 (1.970) e–07	1.982 (529) e–06	4.489 (1.648) e–06	1.013 (670) e–05	1.377 (1.608) e–05	-6.549 (10.42) e–05
19	1.409 (210) e–07	5.457 (858) e–07	2.304 (403) e–06	4.932 (1.005) e–06	1.090 (286) e–05	2.456 (1.010) e–05	3.531 (2.196) e–05	-3.630 (10.91) e–05
20	4.550 (567) e–07	1.591 (207) e–06	6.079 (878) e–06	1.241 (197) e–05	2.627 (520) e–05	5.782 (1.683) e–05	8.700 (3.469) e–05	8.398 (9.919) e–05
21	1.516 (168) e–06	4.734 (525) e–06	1.603 (189) e–05	3.075 (399) e–05	6.121 (946) e–05	1.279 (271) e–04	1.911 (525) e–04	2.960 (1.255) e–04
22	5.062 (467) e–06	1.410 (134) e–05	4.195 (408) e–05	7.496 (795) e–05	1.384 (173) e–04	2.679 (425) e–04	3.846 (782) e–04	6.059 (1.772) e–04
23	1.675 (123) e–05	4.175 (314) e–05	1.100 (88) e–04	1.839 (159) e–04	3.164 (317) e–04	5.676 (681) e–04	7.818 (1.160) e–04	1.159 (247) e–03
24	5.591 (319) e–05	1.252 (73) e–04	2.944 (179) e–04	4.635 (300) e–04	7.498 (557) e–04	1.268 (110) e–03	1.702 (176) e–03	2.422 (352) e–03
25	1.861 (85) e–04	3.741 (174) e–04	7.848 (381) e–04	1.164 (60) e–03	1.768 (101) e–03	2.796 (191) e–03	3.624 (290) e–03	4.963 (566) e–03
26	6.145 (239) e–04	1.107 (44) e–03	2.069 (84) e–03	2.890 (124) e–03	4.127 (194) e–03	6.120 (334) e–03	7.662 (479) e–03	1.011 (87) e–02
27	2.043 (66) e–03	3.288 (107) e–03	5.448 (183) e–03	7.136 (250) e–03	9.532 (36) e–02	1.317 (57) e–02	1.586 (76) e–02	1.995 (121) e–02
28	7.130 (184) e–03	1.024 (27) e–02	1.502 (40) e–02	1.842 (51) e–02	2.293 (68) e–02	2.927 (96) e–02	3.368 (121) e–02	3.994 (167) e–02
29	2.722 (52) e–02	3.497 (67) e–02	4.548 (88) e–02	5.227 (104) e–02	6.061 (127) e–02	7.144 (165) e–02	7.846 (195) e–02	8.782 (247) e–02
30	1.247 (16) e–01	1.448 (19) e–01	1.690 (22) e–01	1.832 (24) e–01	1.993 (26) e–01	2.186 (30) e–01	2.303 (33) e–01	2.449 (38) e–01
31	7.715 (49) e–01	8.300 (52) e–01	8.947 (55) e–01	9.299 (57) e–01	9.678 (6) e+00	1.010 (6) e+00	1.033 (7) e+00	1.060 (7) e+00

Tabelle B.9: Diquark(303) Korrelationsfunktion

t	$C^{613}(\kappa = 0.140)$	$C^{613}(\kappa = 0.142)$	$C^{613}(\kappa = 0.144)$	$C^{613}(\kappa = 0.145)$	$C^{613}(\kappa = 0.146)$	$C^{613}(\kappa = 0.147)$	$C^{613}(\kappa = 0.1475)$	$C^{613}(\kappa = 0.148)$
0	1.511 (2) e+01	1.486 (2) e+01	1.458 (3) e+01	1.442 (3) e+01	1.426 (3) e+01	1.408 (3) e+01	1.399 (3) e+01	1.390 (3) e+01
1	7.531 (47) e–01	7.661 (47) e–01	7.765 (48) e–01	7.809 (48) e–01	7.850 (48) e–01	7.889 (49) e–01	7.910 (49) e–01	7.934 (50) e–01
2	1.040 (16) e–01	1.107 (17) e–01	1.165 (18) e–01	1.189 (18) e–01	1.209 (18) e–01	1.225 (19) e–01	1.232 (19) e–01	1.239 (20) e–01
3	2.070 (54) e–02	2.377 (63) e–02	2.682 (74) e–02	2.825 (79) e–02	2.955 (85) e–02	3.066 (94) e–02	3.114 (97) e–02	3.164 (84) e–02
4	5.095 (174) e–03	6.441 (221) e–03	8.002 (283) e–03	8.839 (317) e–03	9.688 (37) e–02	1.053 (38) e–02	1.094 (41) e–02	1.136 (46) e–02
5	1.388 (54) e–03	1.945 (75) e–03	2.689 (107) e–03	3.138 (128) e–03	3.640 (156) e–03	4.194 (197) e–03	4.495 (230) e–03	4.823 (281) e–03
6	4.020 (185) e–04	6.243 (287) e–04	9.583 (45) e–03	1.179 (58) e–03	1.440 (76) e–03	1.743 (106) e–03	1.906 (132) e–03	2.068 (179) e–03
7	1.187 (65) e–04	2.043 (112) e–04	3.488 (198) e–04	4.532 (268) e–04	5.849 (380) e–04	7.439 (583) e–04	8.287 (779) e–04	9.035 (1.179) e–04
8	3.510 (227) e–05	6.697 (434) e–05	1.274 (89) e–04	1.753 (129) e–04	2.400 (195) e–04	3.236 (334) e–04	3.706 (479) e–04	4.166 (796) e–04
9	1.046 (78) e–05	2.220 (166) e–05	4.731 (377) e–05	6.916 (593) e–05	1.010 (100) e–04	1.454 (191) e–04	1.716 (299) e–04	1.940 (574) e–04
10	3.151 (268) e–06	7.435 (651) e–06	1.770 (170) e–05	2.739 (289) e–05	4.222 (532) e–05	6.299 (1.161) e–05	7.374 (1.970) e–05	7.614 (4.585) e–05
11	9.253 (919) e–07	2.405 (253) e–06	6.297 (766) e–06	1.018 (142) e–05	1.620 (290) e–05	2.377 (722) e–05	2.561 (1.311) e–05	1.698 (3.649) e–05
12	2.731 (320) e–07	7.835 (1.010) e–07	2.265 (362) e–06	3.847 (745) e–06	6.418 (1.711) e–06	9.660 (480) e–05	1.023 (926) e–05	6.149 (24.28) e–06
13	7.975 (1.131) e–08	2.564 (409) e–07	8.551 (1.743) e–07	1.593 (399) e–06	2.994 (1.029) e–06	5.457 (3.291) e–06	7.141 (6.802) e–06	7.949 (18.14) e–06
14	2.465 (420) e–08	9.311 (1.754) e–08	3.902 (886) e–07	8.433 (2.236) e–07	1.883 (641) e–06	4.207 (2.318) e–06	6.201 (5.137) e–06	8.709 (14.31) e–06
15	8.514 (1.617) e–09	3.759 (793) e–08	1.833 (476) e–07	4.188 (1.319) e–07	9.442 (4.195) e–07	1.790 (1.706) e–06	1.841 (4.023) e–06	7.965 (117.6) e–07
16	5.022 (956) e–09	2.268 (536) e–08	1.028 (368) e–07	2.082 (1.079) e–07	3.409 (3.593) e–07	-1.429 (14.94) e–07	-1.835 (3.571) e–06	-7.243 (10.73) e–06
17	9.556 (180) e–08	3.820 (863) e–08	1.471 (513) e–07	2.631 (1.429) e–07	3.382 (4.543) e–07	-4.546 (17.67) e–07	-2.349 (3.906) e–06	-7.272 (11.52) e–06
18	2.796 (484) e–08	1.003 (200) e–07	3.651 (983) e–07	6.884 (2.349) e–07	1.230 (658) e–06	1.705 (2.296) e–06	1.171 (4.942) e–06	-2.334 (13.69) e–06
19	8.859 (1.369) e–08	2.836 (481) e–07	9.409 (1.992) e–07	1.756 (446) e–06	3.368 (1.092) e–06	6.657 (3.508) e–06	9.246 (7.042) e–06	8.460 (18.09) e–06
20	2.929 (391) e–07	8.445 (1.160) e–07	2.513 (406) e–06	4.440 (820) e–06	8.075 (1.815) e–06	1.522 (517) e–05	2.066 (995) e–05	1.686 (2.479) e–05
21	9.917 (108) e–06	2.584 (282) e–06	6.853 (846) e–06	1.128 (149) e–05	1.875 (313) e–05	3.101 (795) e–05	3.856 (1.449) e–05	3.418 (3.320) e–05
22	3.292 (305) e–06	7.749 (727) e–06	1.840 (180) e–05	2.847 (293) e–05	4.424 (553) e–05	6.855 (1.230) e–05	8.387 (2.076) e–05	8.774 (4.391) e–05
23	1.093 (86) e–05	2.317 (181) e–05	4.919 (391) e–05	7.172 (610) e–05	1.047 (100) e–04	1.526 (199) e–04	1.823 (311) e–04	2.013 (578) e–04
24	3.700 (234) e–05	7.065 (433) e–05	1.341 (85) e–04	1.841 (124) e–04	2.518 (190) e–04	3.419 (326) e–04	3.947 (471) e–04	4.410 (798) e–04
25	1.245 (66) e–04	2.141 (111) e–04	3.641 (191) e–04	4.714 (261) e–04	6.054 (372) e–04	7.667 (588) e–04	8.539 (759) e–04	9.338 (1.171) e–04
26	4.195 (180) e–04	6.504 (279) e–04	9.937 (44) e–03	1.217 (56) e–03	1.475 (74) e–03	1.762 (103) e–03	1.909 (131) e–03	2.054 (179) e–03
27	1.427 (51) e–03	1.990 (72) e–03	2.728 (100) e–03	3.160 (119) e–03	3.622 (144) e–03	4.090 (182) e–03	4.311 (214) e–03	4.508 (270) e–03
28	5.124 (151) e–03	6.456 (190) e–03	7.979 (238) e–03	8.776 (268) e–03	9.561 (30) e–02	1.029 (35) e–02	1.060 (39) e–02	1.087 (45) e–02
29	2.048 (46) e–02	2.348 (53) e–02	2.644 (59) e–02	2.781 (63) e–02	2.904 (66) e–02	3.007 (72) e–02	3.049 (75) e–02	3.085 (81) e–02
30	1.029 (16) e–01	1.095 (17) e–01	1.151 (18) e–01	1.174 (18) e–01	1.193 (18) e–01	1.208 (19) e–01	1.214 (19) e–01	1.220 (20) e–01
31	7.446 (51) e–01	7.576 (52) e–01	7.682 (52) e–01	7.727 (53) e–01	7.769 (52) e–01	7.811 (53) e–01	7.833 (53) e–01	7.857 (53) e–01

Tabelle B.10: Diquark(613) Korrelationsfunktion

t	$C^{316}(\kappa = 0.140)$	$C^{316}(\kappa = 0.142)$	$C^{316}(\kappa = 0.144)$	$C^{316}(\kappa = 0.145)$	$C^{316}(\kappa = 0.146)$	$C^{316}(\kappa = 0.147)$	$C^{316}(\kappa = 0.1475)$	$C^{316}(\kappa = 0.148)$
0	3.750 (6) e+00	3.689 (7) e+00	3.618 (7) e+00	3.580 (7) e+00	3.539 (8) e+00	3.496 (8) e+00	3.474 (8) e+00	3.452 (8) e+00
1	1.577 (22) e–01	1.614 (22) e–01	1.647 (22) e–01	1.662 (22) e–01	1.678 (22) e–01	1.694 (22) e–01	1.703 (22) e–01	1.715 (22) e–01
2	1.756 (53) e–02	1.919 (56) e–02	2.083 (59) e–02	2.165 (62) e–02	2.246 (64) e–02	2.329 (68) e–02	2.375 (71) e–02	2.429 (75) e–02
3	3.122 (138) e–03	3.777 (190) e–03	4.539 (223) e–03	4.962 (241) e–03	5.416 (273) e–03	5.914 (322) e–03	6.198 (352) e–03	6.544 (408) e–03
4	6.930 (402) e–04	9.381 (529) e–04	1.265 (79) e–03	1.467 (93) e–03	1.700 (111) e–03	1.975 (145) e–03	2.139 (153) e–03	2.337 (197) e–03
5	1.725 (127) e–04	2.616 (189) e–04	3.974 (294) e–04	4.903 (376) e–04	6.063 (498) e–04	7.551 (706) e–04	8.519 (903) e–04	9.759 (129) e–03
6	4.510 (427) e–05	7.673 (715) e–05	1.314 (127) e–04	1.724 (176) e–04	2.266 (256) e–04	3.002 (406) e–04	3.509 (570) e–04	4.218 (972) e–04
7	1.207 (148) e–05	2.308 (281) e–05	4.451 (579) e–05	6.176 (868) e–05	8.516 (1.375) e–05	1.161 (248) e–04	1.361 (372) e–04	1.639 (688) e–04
8	3.161 (516) e–06	6.843 (1.122) e–06	1.489 (269) e–05	2.177 (442) e–05	3.103 (787) e–05	4.152 (1.592) e–05	4.608 (2.513) e–05	5.773 (5.808) e–05
9	8.221 (1.852) e–07	2.048 (460) e–06	5.223 (1.272) e–06	8.374 (2.254) e–06	1.336 (433) e–05	2.113 (973) e–05	2.680 (1.635) e–05	4.171 (3.811) e–05
10	2.388 (696) e–07	6.874 (1.965) e–07	2.037 (619) e–06	3.519 (1.179) e–06	6.056 (2.444) e–06	1.070 (604) e–05	1.544 (1.082) e–05	4.414 (3.444) e–05
11	6.919 (2.703) e–08	2.330 (883) e–07	8.067 (3.319) e–07	1.500 (698) e–06	2.765 (1.662) e–06	5.319 (4.099) e–06	8.619 (7.740) e–06	5.449 (5.586) e–05
12	2.084 (991) e–08	8.362 (3.803) e–08	3.493 (1.670) e–07	7.231 (3.697) e–07	1.519 (941) e–06	3.497 (2.813) e–06	6.226 (5.623) e–06	2.481 (2.880) e–05
13	6.073 (3.612) e–09	2.958 (1.521) e–08	1.431 (788) e–07	3.055 (2.014) e–07	6.100 (5.605) e–07	1.011 (1.805) e–06	1.090 (3.748) e–06	-2.237 (11.99) e–06
14	1.904 (1.449) e–09	1.062 (680) e–08	5.407 (3.934) e–08	1.088 (1.082) e–07	1.632 (3.246) e–07	-9.927 (11.51) e–07	-8.755 (25.49) e–07	-5.948 (7.834) e–06
15	5.006 (5.647) e–10	3.000 (3.115) e–09	1.118 (2.242) e–08	2.148 (68.80) e–09	-1.249 (2.329) e–07	-1.040 (946) e–06	-2.889 (2.207) e–06	-1.071 (702) e–05
16	2.366 (3.416) e–10	1.714 (2.072) e–09	7.545 (15.69) e–09	3.226 (48.44) e–09	-8.589 (16.91) e–08	-8.808 (7.560) e–07	-2.790 (1.940) e–06	-7.801 (7.566) e–06
17	2.041 (6.028) e–10	1.876 (3.178) e–09	1.154 (2.044) e–08	2.295 (5.843) e–08	1.306 (19.41) e–08	-3.813 (8.559) e–07	-1.665 (2.174) e–06	-3.876 (8.317) e–06
18	7.754 (14.29) e–10	5.285 (6.637) e–09	3.099 (3.752) e–08	7.332 (9.960) e–08	1.602 (3.028) e–07	9.751 (11.94) e–07	-8.762 (28.04) e–07	-1.007 (1.003) e–05
19	3.101 (3.695) e–09	1.670 (1.503) e–08	8.999 (7.328) e–08	2.188 (1.760) e–07	5.564 (4.957) e–07	1.309 (1.726) e–06	1.215 (3.700) e–06	-1.038 (1.318) e–05
20	1.242 (990) e–08	5.225 (3.552) e–08	2.320 (1.496) e–07	5.093 (3.375) e–07	1.148 (864) e–06	2.406 (2.722) e–06	2.499 (5.545) e–06	-8.237 (14.41) e–06
21	5.262 (2.555) e–08	1.791 (806) e–07	6.543 (2.952) e–07	1.290 (615) e–06	2.582 (1.441) e–06	5.106 (4.114) e–06	6.629 (8.055) e–06	-4.345 (201.5) e–07
22	2.004 (664) e–07	5.713 (1.853) e–07	1.726 (593) e–06	3.084 (1.158) e–06	5.647 (2.513) e–06	1.105 (655) e–05	1.656 (1.203) e–05	2.148 (2.735) e–05
23	7.754 (1.826) e–07	1.892 (446) e–06	4.702 (1.230) e–06	7.405 (2.223) e–06	1.151 (441) e–05	1.737 (1.070) e–05	2.130 (1.875) e–05	3.519 (4.096) e–05
24	3.063 (510) e–06	6.573 (1.095) e–06	1.419 (255) e–05	2.076 (415) e–05	2.992 (733) e–05	4.141 (1.536) e–05	4.745 (2.502) e–05	8.845 (6.577) e–05
25	1.203 (150) e–05	2.275 (285) e–05	4.296 (578) e–05	5.865 (863) e–05	7.919 (1.379) e–05	1.044 (248) e–04	1.186 (368) e–04	1.694 (800) e–04
26	4.553 (443) e–05	7.673 (743) e–05	1.290 (131) e–04	1.665 (180) e–04	2.135 (261) e–04	2.705 (420) e–04	3.033 (586) e–04	3.104 (1.092) e–04
27	1.740 (130) e–04	2.620 (192) e–04	3.925 (293) e–04	4.781 (378) e–04	5.785 (495) e–04	6.928 (752) e–04	7.558 (1.040) e–04	7.795 (1.750) e–04
28	7.013 (405) e–04	9.444 (533) e–04	1.263 (71) e–03	1.453 (84) e–03	1.666 (101) e–03	1.899 (133) e–03	2.026 (159) e–03	2.154 (215) e–03
29	3.142 (133) e–03	3.770 (156) e–03	4.483 (184) e–03	4.869 (202) e–03	5.274 (223) e–03	5.705 (259) e–03	5.941 (285) e–03	6.226 (335) e–03
30	1.787 (54) e–02	1.946 (57) e–02	2.103 (60) e–02	2.179 (62) e–02	2.254 (64) e–02	2.329 (67) e–02	2.368 (70) e–02	2.412 (75) e–02
31	1.556 (23) e–01	1.593 (23) e–01	1.626 (23) e–01	1.641 (23) e–01	1.656 (23) e–01	1.673 (23) e–01	1.682 (23) e–01	1.693 (23) e–01

Tabelle B.11: Diquark(316) Korrelationsfunktion

t	$C^{606}(\kappa = 0.140)$	$C^{606}(\kappa = 0.142)$	$C^{606}(\kappa = 0.144)$	$C^{606}(\kappa = 0.145)$	$C^{606}(\kappa = 0.146)$	$C^{606}(\kappa = 0.147)$	$C^{606}(\kappa = 0.1475)$	$C^{606}(\kappa = 0.148)$
0	9.378 (16) e+00	9.375 (16) e+00	9.361 (16) e+00	9.349 (16) e+00	9.333 (16) e+00	9.314 (16) e+00	9.303 (16) e+00	9.291 (17) e+00
1	4.958 (70) e–01	5.250 (72) e–01	5.553 (75) e–01	5.709 (76) e–01	5.866 (78) e–01	6.024 (79) e–01	6.104 (80) e–01	6.185 (80) e–01
2	5.219 (155) e–02	5.880 (169) e–02	6.592 (182) e–02	6.961 (189) e–02	7.335 (197) e–02	7.712 (203) e–02	7.901 (206) e–02	8.097 (208) e–02
3	8.043 (351) e–03	9.847 (41) e–02	1.196 (48) e–02	1.312 (51) e–02	1.434 (55) e–02	1.563 (59) e–02	1.630 (62) e–02	1.704 (64) e–02
4	1.577 (90) e–03	2.132 (116) e–03	2.860 (148) e–03	3.299 (167) e–03	3.794 (191) e–03	4.353 (218) e–03	4.664 (235) e–03	5.019 (257) e–03
5	3.576 (257) e–04	5.380 (368) e–04	8.049 (527) e–04	9.818 (63) e–03	1.196 (77) e–03	1.456 (96) e–03	1.609 (109) e–03	1.782 (130) e–03
6	8.862 (812) e–05	1.479 (129) e–04	2.465 (207) e–04	3.181 (265) e–04	4.112 (347) e–04	5.356 (477) e–04	6.151 (592) e–04	7.055 (760) e–04
7	2.235 (258) e–05	4.148 (459) e–05	7.722 (841) e–05	1.057 (116) e–04	1.458 (167) e–04	2.054 (258) e–04	2.485 (349) e–04	3.055 (502) e–04
8	5.608 (850) e–06	1.169 (170) e–05	2.454 (354) e–05	3.581 (529) e–05	5.302 (832) e–05	8.166 (1.462) e–05	1.053 (213) e–04	1.437 (347) e–04
9	1.443 (285) e–06	3.399 (639) e–06	8.104 (1.537) e–06	1.270 (249) e–05	2.056 (434) e–05	3.654 (839) e–05	5.294 (1.298) e–05	8.493 (2.321) e–05
10	4.013 (970) e–07	1.065 (245) e–06	2.895 (681) e–06	4.884 (1.201) e–06	8.645 (2.284) e–06	1.747 (506) e–05	2.763 (837) e–05	4.776 (1.621) e–05
11	1.116 (347) e–07	3.314 (985) e–07	1.012 (312) e–06	1.820 (599) e–06	3.481 (1.252) e–06	7.810 (3.093) e–06	1.306 (547) e–05	2.293 (1.177) e–05
12	2.711 (1.296) e–08	9.264 (4.138) e–08	3.354 (1.495) e–07	6.701 (3.101) e–07	1.444 (710) e–06	3.597 (1.979) e–06	6.086 (3.772) e–06	9.900 (897) e–05
13	5.232 (4.767) e–09	2.133 (1.737) e–08	9.225 (7.362) e–08	2.024 (1.676) e–07	4.886 (4.270) e–07	1.412 (1.321) e–06	2.538 (2.679) e–06	3.559 (6.830) e–06
14	7.156 (18.22) e–10	3.672 (7.611) e–09	1.718 (3.775) e–08	3.938 (9.352) e–08	1.199 (2.608) e–07	5.960 (8.736) e–07	1.498 (1.912) e–06	3.074 (5.252) e–06
15	-3.590 (7.215) e–10	-1.988 (3.480) e–09	-1.366 (2.044) e–08	-3.372 (5.560) e–08	-5.839 (17.17) e–08	1.030 (6.541) e–07	5.588 (14.97) e–07	8.876 (43.87) e–07
16	-1.690 (4.141) e–10	-1.077 (2.235) e–09	-8.690 (14.61) e–09	-2.251 (4.210) e–08	-3.908 (14.00) e–08	8.775 (59.51) e–08	4.571 (14.20) e–07	6.722 (42.60) e–07
17	-1.088 (7.620) e–10	-5.960 (356.0) e–11	1.173 (19.87) e–09	6.884 (52.72) e–09	4.715 (16.34) e–08	3.607 (6.473) e–07	1.045 (1.510) e–06	2.422 (4.439) e–06
18	1.503 (19.13) e–10	2.676 (7.676) e–09	2.644 (3.643) e–08	8.421 (8.873) e–08	2.856 (2.477) e–07	1.141 (881) e–06	2.593 (1.938) e–06	6.117 (5.308) e–06
19	3.775 (5.090) e–09	1.838 (1.784) e–08	9.745 (729) e–07	2.394 (1.653) e–07	6.193 (4.234) e–07	1.764 (1.330) e–06	3.320 (2.718) e–06	7.064 (6.875) e–06
20	2.054 (1.431) e–08	7.927 (4.482) e–08	3.270 (1.560) e–07	7.013 (3.125) e–07	1.581 (726) e–06	3.790 (2.040) e–06	6.039 (3.908) e–06	7.954 (9.892) e–06
21	9.731 (398) e–07	3.101 (1.121) e–07	1.036 (337) e–06	1.961 (632) e–06	3.827 (1.317) e–06	7.618 (3.274) e–06	1.052 (582) e–05	1.140 (1.304) e–05
22	4.203 (1.064) e–07	1.140 (266) e–06	3.166 (705) e–06	5.365 (1.220) e–06	9.250 (2.306) e–06	1.612 (510) e–05	2.094 (849) e–05	2.583 (1.685) e–05
23	1.553 (302) e–06	3.682 (672) e–06	8.853 (1.552) e–06	1.383 (246) e–05	2.178 (416) e–05	3.448 (819) e–05	4.334 (1.277) e–05	5.531 (2.375) e–05
24	5.919 (887) e–06	1.236 (176) e–05	2.598 (361) e–05	3.782 (533) e–05	5.531 (828) e–05	8.186 (1.420) e–05	1.014 (205) e–04	1.360 (382) e–04
25	2.246 (258) e–05	4.150 (452) e–05	7.670 (812) e–05	1.043 (111) e–04	1.420 (157) e–04	1.960 (240) e–04	2.349 (322) e–04	3.024 (504) e–04
26	8.786 (814) e–05	1.449 (127) e–04	2.374 (201) e–04	3.026 (255) e–04	3.844 (327) e–04	4.890 (446) e–04	5.563 (540) e–04	6.487 (749) e–04
27	3.521 (263) e–04	5.229 (372) e–04	7.693 (525) e–04	9.273 (624) e–04	1.111 (74) e–03	1.324 (92) e–03	1.443 (104) e–03	1.569 (129) e–03
28	1.564 (92) e–03	2.096 (118) e–03	2.780 (151) e–03	3.182 (170) e–03	3.621 (190) e–03	4.095 (218) e–03	4.346 (234) e–03	4.606 (260) e–03
29	8.090 (341) e–03	9.845 (40) e–02	1.186 (47) e–02	1.296 (51) e–02	1.408 (54) e–02	1.523 (58) e–02	1.581 (61) e–02	1.639 (64) e–02
30	5.308 (154) e–02	5.961 (168) e–02	6.658 (182) e–02	7.015 (189) e–02	7.374 (194) e–02	7.729 (201) e–02	7.904 (204) e–02	8.079 (208) e–02
31	4.912 (71) e–01	5.200 (74) e–01	5.498 (77) e–01	5.650 (78) e–01	5.804 (78) e–01	5.958 (80) e–01	6.035 (81) e–01	6.113 (81) e–01

Tabelle B.12: Diquark(606) Korrelationsfunktion

t	$Ratio(\kappa = 0.140)$	$Ratio(\kappa = 0.142)$	$Ratio(\kappa = 0.144)$	$Ratio(\kappa = 0.145)$	$Ratio(\kappa = 0.146)$	$Ratio(\kappa = 0.147)$	$Ratio(\kappa = 0.1475)$	$Ratio(\kappa = 0.148)$
1	8.018 (4) e–01	8.019 (6) e–01	8.002 (7) e–01	7.987 (7) e–01	7.964 (12) e–01	7.931 (10) e–01	7.913 (6) e–01	7.894 (10) e–01
2	8.959 (16) e–01	9.074 (16) e–01	9.194 (20) e–01	9.253 (22) e–01	9.311 (30) e–01	9.376 (36) e–01	9.414 (32) e–01	9.467 (41) e–01
3	1.066 (4) e+00	1.117 (4) e+00	1.186 (6) e+00	1.230 (7) e+00	1.285 (8) e+00	1.359 (11) e+00	1.407 (10) e+00	1.469 (10) e+00
4	1.295 (7) e+00	1.415 (8) e+00	1.592 (16) e+00	1.717 (20) e+00	1.885 (18) e+00	2.126 (25) e+00	2.294 (31) e+00	2.517 (29) e+00
5	1.525 (10) e+00	1.716 (12) e+00	2.013 (31) e+00	2.233 (39) e+00	2.540 (38) e+00	3.007 (53) e+00	3.345 (77) e+00	3.822 (82) e+00
6	1.727 (12) e+00	1.987 (16) e+00	2.402 (42) e+00	2.721 (54) e+00	3.181 (74) e+00	3.910 (106) e+00	4.460 (155) e+00	5.292 (202) e+00
7	1.912 (17) e+00	2.240 (23) e+00	2.781 (52) e+00	3.209 (68) e+00	3.847 (119) e+00	4.895 (201) e+00	5.702 (286) e+00	6.987 (462) e+00
8	2.083 (22) e+00	2.484 (34) e+00	3.164 (71) e+00	3.717 (97) e+00	4.553 (173) e+00	5.948 (348) e+00	7.012 (549) e+00	8.870 (976) e+00
9	2.262 (33) e+00	2.748 (52) e+00	3.596 (103) e+00	4.302 (146) e+00	5.389 (243) e+00	7.241 (476) e+00	8.631 (808) e+00	1.135 (138) e+01
10	2.453 (49) e+00	3.029 (77) e+00	4.062 (165) e+00	4.938 (238) e+00	6.283 (349) e+00	8.489 (567) e+00	9.981 (104) e+01	1.251 (163) e+01
11	2.665 (60) e+00	3.360 (97) e+00	4.663 (230) e+00	5.802 (355) e+00	7.568 (569) e+00	1.035 (90) e+01	1.183 (251) e+01	1.567 (427) e+01
12	2.884 (67) e+00	3.703 (112) e+00	5.274 (292) e+00	6.665 (473) e+00	8.782 (864) e+00	1.174 (163) e+01	1.248 (455) e+01	1.706 (671) e+01
13	3.088 (80) e+00	4.029 (143) e+00	5.843 (420) e+00	7.417 (716) e+00	9.628 (144) e+01	1.188 (334) e+01	9.339 (10.71) e+00	-1.383 (2.300) e+02
14	3.294 (111) e+00	4.364 (215) e+00	6.400 (614) e+00	8.020 (1.057) e+00	9.634 (194) e+01	7.864 (4.034) e+00	1.387 (6.813) e+00	1.233 (2.306) e+01
15	3.513 (174) e+00	4.715 (362) e+00	6.930 (986) e+00	8.432 (1.748) e+00	8.890 (3.097) e+00	2.316 (6.393) e+00	-3.665 (7.200) e+00	4.203 (79.57) e–01

Tabelle B.13: Quotient der Korrelationsfunktionen von Delta und Nukleon

t	$Ratio(\kappa = 0.140)$	$Ratio(\kappa = 0.142)$	$Ratio(\kappa = 0.144)$	$Ratio(\kappa = 0.145)$	$Ratio(\kappa = 0.146)$	$Ratio(\kappa = 0.147)$	$Ratio(\kappa = 0.1475)$	$Ratio(\kappa = 0.148)$
1	1.035 (2) e+00	1.095 (2) e+00	1.165 (3) e+00	1.204 (3) e+00	1.247 (4) e+00	1.295 (5) e+00	1.322 (5) e+00	1.353 (6) e+00
2	1.208 (7) e+00	1.320 (9) e+00	1.466 (9) e+00	1.558 (11) e+00	1.669 (13) e+00	1.809 (17) e+00	1.898 (18) e+00	2.008 (21) e+00
3	1.326 (14) e+00	1.485 (19) e+00	1.713 (21) e+00	1.870 (25) e+00	2.076 (34) e+00	2.363 (50) e+00	2.560 (51) e+00	2.822 (58) e+00
4	1.401 (20) e+00	1.594 (26) e+00	1.886 (35) e+00	2.097 (43) e+00	2.384 (54) e+00	2.808 (78) e+00	3.114 (84) e+00	3.528 (94) e+00
5	1.465 (23) e+00	1.685 (31) e+00	2.025 (43) e+00	2.275 (54) e+00	2.624 (64) e+00	3.155 (94) e+00	3.547 (117) e+00	4.075 (134) e+00
6	1.503 (25) e+00	1.743 (34) e+00	2.124 (54) e+00	2.415 (70) e+00	2.833 (87) e+00	3.508 (134) e+00	4.043 (217) e+00	4.853 (297) e+00
7	1.541 (34) e+00	1.804 (47) e+00	2.226 (72) e+00	2.555 (95) e+00	3.042 (132) e+00	3.880 (215) e+00	4.601 (346) e+00	5.860 (600) e+00
8	1.594 (41) e+00	1.881 (60) e+00	2.344 (87) e+00	2.705 (119) e+00	3.247 (185) e+00	4.212 (297) e+00	5.078 (486) e+00	6.766 (1.127) e+00
9	1.644 (47) e+00	1.947 (69) e+00	2.429 (106) e+00	2.798 (146) e+00	3.351 (235) e+00	4.351 (405) e+00	5.290 (683) e+00	7.493 (2.284) e+00
10	1.676 (66) e+00	1.990 (101) e+00	2.492 (154) e+00	2.886 (207) e+00	3.501 (333) e+00	4.703 (548) e+00	5.898 (1.057) e+00	8.676 (5.985) e+00
11	1.739 (105) e+00	2.089 (163) e+00	2.673 (253) e+00	3.146 (347) e+00	3.905 (542) e+00	5.470 (1.035) e+00	6.861 (2.737) e+00	-7.079 (6.178) e+01
12	1.830 (148) e+00	2.249 (239) e+00	2.958 (414) e+00	3.516 (612) e+00	4.361 (966) e+00	5.520 (2.462) e+00	2.542 (7.855) e+00	2.607 (1.292) e+02
13	1.929 (207) e+00	2.389 (319) e+00	3.098 (524) e+00	3.565 (742) e+00	4.078 (1.194) e+00	3.437 (3.388) e+00	-2.215 (9.132) e+00	7.438 (17.96) e+00
14	1.891 (225) e+00	2.234 (333) e+00	2.593 (442) e+00	2.713 (551) e+00	2.685 (806) e+00	2.017 (1.622) e+00	6.116 (26.96) e–01	3.985 (4.065) e+01
15	1.703 (213) e+00	1.973 (327) e+00	2.281 (417) e+00	2.429 (556) e+00	2.483 (1.016) e+00	1.373 (3.002) e+00	-1.985 (1.833) e+01	-8.325 (5.692) e+02

Tabelle B.14: Quotient der Korrelationsfunktionen von Diquark(613) und Diquark(303)

Literaturverzeichnis

[1] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories - An Introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1992)

[2] I. Montvay, G. Münster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge University Press (1994)

[3] K. G. Wilson, Confinement of Quarks, Phys. Rev. D10 (1974) 2445

[4] K. Symanzik, Mathematical Problems in theoretical physics, Lecture notes in Physics, 153 (Springer Berlin 1982)

[5] P. Weisz, Improved Lattice Action for pure Yang-Mills Theory, Nucl. Phys. B212 (1983) 1

[6] K. Symanzik, Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories, Nucl. Phys. B226 (1983) 187, 205

[7] G. P. Lepage, P. B. Mackenzie, Viability of lattice pertubation theory, Phys. Rev. D48 (1993) 2250

[8] H. B. Nielsen, M. Ninomiya, Absence of Neutrinos on a Lattice, Nucl. Phys. B185 (1981) 20

[9] L. Susskind, Lattice fermions, Phys. Rev. D16 (1977) 3031

[10] B. Sheikholeslami, R. Wohlert, Improved Continuum Limit Lattice Action for QCD with Wilson Fermions, Nucl. Phys. B259 (1985) 572

[11] R. Wohlert, Improved continuum limit lattice action for quarks, DESY preprint 87-069 (1987) unpublished

[12] M. Lüscher et. al., Non-perturbative O(a) improvement of lattice QCD, Nucl. Phys. B491 (1997) 323

[13] K. Jansen, R. Sommer, The non-perturbative O(a)-improved action for dynamical Wilson fermions, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 63 (1998) 853

[14] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, Equation of state calculations by fast computing machines, J. Chem. Phys.21 (1953) 1087

[15] M. Creutz, Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory, Phys. Rev. D21 (1980) 2308

[16] N. Cabibbo, E. Marinari, A new method for updating SU(N) matrices in computer simulations of gauge theories, Phys. Lett. B119 (1982) 387

[17] A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, Improved heatbath method for Monte Carlo calculations in lattice gauge theories, Phys. Lett. B156 (1985) 393

[18] S. L. Adler, Over-relaxation method for the Monte Carlo evalation of the partition function for multiquadratic actions, Phys. Rev. D23 (1981) 2901

[19] M. Creutz, Overrelaxation and Monte Carlo simulation, Phys.Rev. D36 (1987) 515

[20] J. E. Mandula, M. Ogilvie, A Lattice Calculation of the Gluon Propagator in the Landau Gauge, Phys. Lett. B185 (1987) 127

[21] C. Bernard, D. Murphy, A. Soni and K. Yee, Introduction to lattice Gaugefixing an Effective Quark and Gluon Masses, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 17 (1990) 593

[22] J. I. Skullerud (UKQCD Collaboration), A lattice study of the quark propagator and vertex function, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 42 (1995) 364

[23] C. T. H. Davies et. al., Fourier accelaration in lattice gauge theories: I. Landau gauge fixing, Phys. Rev. D37 (1988) 1581

[24] J. F. Donoghue, K. S. Sateesh, Diquark clusters in the quark-gluon plasma, Phys. Rev. D38 (1989) 360

[25] M. Alford, K. Rajagopal, F. Wilczek, QCD at Finite Baryon Density: Nucleon Droplets and Color Superconductivity, hep-ph/9711395v4

[26] J. Berges, K. Rajagopal, Color Superconductivity and Chiral Symmetry Restoration at Nonzero Baryon Density and Temperature, hep-ph/9804233

[27] T. Schäfer, E. V. Shuryak, J. J. M. Verbaarschot, Baryonic correlators in the random instanton vacuum, Nucl. Phys. B412 (1994) 143

[28] R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak, M. Velkovsky, Diquark Bose Condensates in High Density Matter and Instantons, hep-ph/9711396

[29] L. Y. Glozman, D. O. Riska, The Spectrum of the Nucleons an the Strange Hyperons and Chiral Dynamics, Phys. Rep. 268 (1996) 263

[30] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann, A. Peikert, String Tension and Thermodynamics with Tree Level and Tadpole Improved Actions, hep-lat/9707023

[31] S. L. Eisenstat et al. J. Num. Anal. 20 (1983) 345

[32] Y. Oyanagi, An incomplete LDU Decomposition of Lattice Fermions and its Application to Conjugate Residual Methods, Comp. Phys. Comm. 42 (1986) 333

[33] M. R. Hestenes, E. Stiefel, J. of Research of the National Bureau of Standards Vol. 49 No. 6 (Dec. 1952)

[34] H. van der Vorst, SIAM J. Sc. Stat. Comp. 13 (1992) 631

[35] T. A. Degrand, P. Rossi, Conditioning techniques for dynamical fermions, Comp. Phys. Comm. 60 (1990) 211

[36] N. P. Standford, Thesis Edinburgh (1994)

[37] T. A. DeGrand, Lattice QCD Spectroscopy: Progress and Prospects, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 20 (1991) 353

[38] D. Weingarten, QCD Spectroscopy, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 34 (1994) 29

Danksagung

Diese Arbeit wurde unter Anleitung von Prof. Dr. Frithjof Karsch durchgeführt. Ich danke Herrn Karsch für die hervorragende Betreuung meiner Diplomarbeit und seine Bereitschaft, sich jederzeit mit meinen Fragen auseinanderzusetzen und Probleme zu diskutieren.

Insbesondere möchte ich mich bei Matthias Heß für die Erzeugung der Eichfeldkonfigurationen und die Durchführung der Landau-Eichung bedanken. Darüber hinaus sei der gesamten Arbeitsgruppe gedankt, die immer zu einer angenehmen Atmosphäre beigetragen hat.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mich während des gesamten Studiums unterstützt haben.

Hiermit versichere ich, daß ich außer den im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen keine weiteren Hilfsmittel bei der Anfertigung meiner Arbeit verwendet habe.