

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

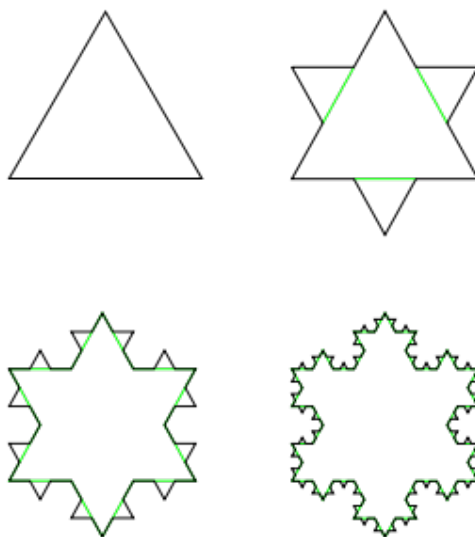
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Aufgabe 2

Die Koch'sche Schneeflocke ist durch folgende Regel definiert: Wir starten mit einem Dreieck, bei dem jede Seite die Länge 1 hat. Im nächsten Schritt wird auf jeder Seite das mittlere Drittel ersetzt durch eine neue Zacke, die wieder einem gleichseitigen Dreieck entspricht. Dieser Schritt wird nun für jeden geraden Abschnitt der Schneeflocke wiederholt (siehe Bild!).

Die Länge der Kurve K_n , die die Schneeflocke nach n Ausführungen dieser Regel umschließt, wird mit jedem Schritt wachsen. Wie groß ist K_n für $n = 1, 2, 3$? Können Sie eine allgemeine Formel für K_n erraten, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist? Falls ja, beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Vermutung und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$, falls dieser existiert. Zeigen Sie außerdem, dass die Fläche der Schneeflocke endlich ist, auch im Fall $n \rightarrow \infty$.



Aufgabe 3*

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine konvergente Folge (a_n) an, so dass:

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n).$$

Aufgabe 4 *

Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n^2}$ gegen Null konvergiert, indem Sie die ϵ , N -Definition der Konvergenz gegen Null verwenden.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Hinweis: Die Bernoullische Ungleichung könnte hier helfen.

Hausübung

Ein Jäger kehrt mit seinem Hund nach Hause zurück. Als beide noch 400m vor dem Haus stehen, lässt er den Hund laufen. Der Hund hat die 3fache Geschwindigkeit des Jägers. Er läuft immer wieder vom Haus zum Jäger zum Haus zum Jäger usw.... Berechnen Sie die Strecke, die der Hund zurück legt.