Aufgabenblatt 11

Ableitungsübung

Leiten Sie ab (es dürfen Ableitungsregeln verwendet werden):

a) $f(x) = 5 \cdot x^2 \cdot x^{3+2}$	b) $h(x) = \frac{1}{2x+1}$
c) $g(x) = e^{4x}$	d) $i(x) = e^{(x^2)}$
e) $j(x) = \sin(x)^2 \cdot e^{(x^2)}$	f) $h(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Beträge der komplexen Zahlen i, $2 - 3i$ und $-4 + 3i$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $\forall\ n \in \mathbb{N}$ gilt: $\exp(n) = e^n$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

b) $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$.

Aufgabe 4

Folgern Sie aus der Eulerschen Formel die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus: Für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x + x') = \sin(x)\cos(x') + \cos(x)\sin(x')$ und $\cos(x + x') = \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x')$.
Frage*: Wieso ist dies im Rahmen des Vorkurses kein Beweis für die Additionstheoreme?

Aufgabe 5 (Taschenrechner zur Überprüfung einmal erlaubt)

a) Finden Sie die Polarkoordinaten von $1+i$ und $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) Berechnen Sie das Produkt in Polarkoordinaten:

$$3e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

und finden Sie alle drei Wurzeln von

$$-27$$

in Polardarstellung und skizzieren Sie die Positionen in der komplexen Ebene.

Aufgabe 6*/ Wiederholung Induktion

a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ gilt die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$