Aufgabenblatt 14

Reminder: Die Vorlesung findet morgen in H13 statt!

Ableitungsübung

Leiten Sie ab (es dürfen Ableitungsregeln verwendet werden):

a) $f(x) = 5 \cdot x^2 \cdot x^{3+2}$ b) $h(x) = \frac{1}{2x+1}$

c) $g(x) = e^{4x}$ d) $i(x) = e^{(x^2)}$

e) $j(x) = \sin(x)^2 \cdot e^{(x^2)}$ f) $h(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Beträge der komplexen Zahlen i, $2 - 3i$ und $-4 + 3i$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass $\forall\ n \in \mathbb{N}$ gilt: $\exp(n) = e^n$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

b) $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$.

Aufgabe 4

Folgern Sie aus der Eulerschen Formel die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus: Für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x + x') = \sin(x)\cos(x') + \cos(x)\sin(x')$ und $\cos(x + x') = \cos(x)\cos(x') - \sin(x)\sin(x')$.
Frage*: Wieso ist dies im Rahmen des Vorkurses kein Beweis für die Additionstheoreme?

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie die Polarkoordinaten von $1+i$ und $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) Berechnen Sie die Produkte in Polarkoordinaten:

$$3e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

und

$$e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{3}{5}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Hausübung

Eine Hausaufgabe: Schenken Sie ein schäumendes Getränk in ein zylinderförmiges Glas und messen zu verschiedenen Zeitpunkten die Höhe des Schaumes (ohne zwischendurch zu trinken). Versuchen Sie eine Funktion $h(t)$ anzugeben, die die Höhe des Schaumes zum Zeitpunkt t angibt. Danach dürfen Sie das Glas gerne austrinken.