Aufgabenblatt 17

Vorbereitungsübung

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 7-2z &= x \\ -5x &= 2y-9 \\ y+z &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Beträge ($\sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$) der folgenden sechs Vektoren und bilden Sie aus jeweils zwei Vektoren das Sakalarprodukt. Achten Sie dabei besonders auf das "Hinlegen" des ersten Vektors.

a)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Führen Sie folgende Matrixmultiplikationen aus:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 1 \quad 0)$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (5 \quad -4 \quad 2)$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie die sogenannte Graßmann-Identität: Für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$a \times (b \times c) = b\langle a, c\rangle - c\langle a, b\rangle$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $< , >$ von Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) $< \vec{v}, \vec{w} > = < \vec{w}, \vec{v} >$

(2) $< \vec{v}, \vec{v} > \geq 0$ und $< \vec{v}, \vec{v} > = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$

(3) $< x\vec{v}, \vec{w} > = x < \vec{v}, \vec{w} >$ für $x \in \mathbb{R}$

(4) $< \vec{v} + \vec{u}, \vec{w} > = < \vec{v}, \vec{w} > + < \vec{u}, \vec{w} >$

Hausübung

Der in der Vorlesung definierte Betrag ist eine Möglichkeit, einen Abstand zu definieren. Alternativen sind z.B. auf Wikipedia (Stichwort Norm (Mathematik)) zu finden.