# Aufgabenblatt 8

### Skript

Lesen Sie das Skript Kapitel 6 zuende.

## Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ die Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt.

## Aufgabe 2

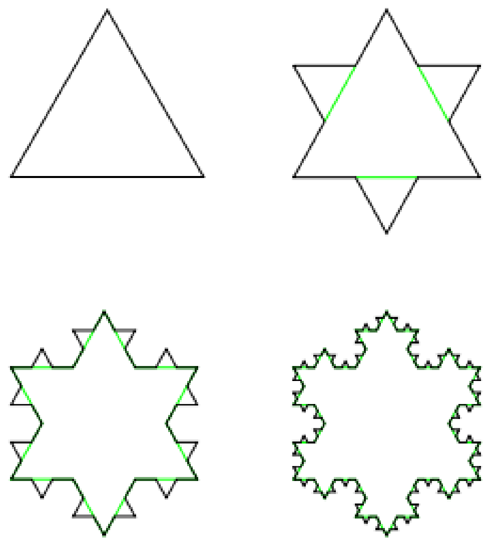
Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

## Aufgabe 3

Die Koch'sche Schneeflocke ist durch folgende Regel definiert: Wir starten mit einem Dreieck, bei dem jede Seite die Länge 1 hat. Im nächsten Schritt wird auf jeder Seite das mittlere Drittel ersetzt durch eine neue Zacke, die wieder einem gleichseitigen Dreieck entspricht. Dieser Schritt wird nun für jeden geraden Abschnitt der Schneeflocke wiederholt (siehe Bild!).

Die Länge der Kurve $K_n$, die die Schneeflocke nach $n$ Ausführungen dieser Regel umschließt, wird mit jedem Schritt wachsen. Wie groß ist $K_n$ für $n = 1, 2, 3$ ? Können Sie eine allgemeine Formel für $K_n$ erraten, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist? Falls ja, beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Vermutung und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} K_n$, falls dieser existiert. Zeigen Sie außerdem, dass die Fläche der Schneeflocke endlich ist, auch im Fall $n \to \infty$.



## Aufgabe 4*

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Hinweis: Die Bernoullische Ungleichung könnte hier helfen.

## Aufgabe 5**

Beweisen Sie geometrisch:

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y)$$