Aufgabenblatt 3

Knobelaufgabe

Wie viele Nullstellen hat die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 100$?

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass diese Kombinationen der Mengen X,Y,Z identisch sind:

a) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

b) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

Aufgabe 2

Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck der Form $\{x|.....\}$ für die Menge:

$$(X \cup Y) \diagdown (X \cap Y)$$

Sie dürfen hier gerne ein neues Symbol (z.B. $\vee$!) für die Verknüpfung von zwei Aussagen definieren.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass die quadratische Gleichung $x^2 + mx + l = 0$ die beiden Lösungen $x_{1/2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 - l}$ hat. Welche Lösungen hat die Gleichung $nx^2 + mx + l = k$?
* Leiten Sie die Lösungen der Gleichung $x^2+mx+l = 0$ durch Umformungen her (ohne das bekannte Resultat zu verwenden).

Aufgabe 4

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

- $2x - 63 = 0$
- $18x^2 - 3x = 10$
- $x^4 + 4x^2 = 0$

Hausübung

Finden Sie den Fehler!

Satz: $\sqrt{4}$ kann nicht als Bruch $\frac{p}{q}$ geschrieben werden und ist daher keine rationale Zahl.

Beweis: Wir nehmen an: $\sqrt{4}$ kann als Bruch $\frac{p}{q}$ geschrieben werden. Dann können wir diesen Bruch vollständig kürzen und erhalten zwei neue ganze Zahlen p' und q' für die ebenfalls gilt: $\sqrt{4} = \frac{p'}{q'}$. Daraus folgern wir:
$\sqrt{4} = \frac{p'}{q'} \Rightarrow 4 = \frac{p'^2}{q'^2} \Rightarrow p'^2 = 4q'^2$ $(*)$. Daraus folgt, dass p'^2 eine gerade Zahl ist und das heißt, auch p' muss eine gerade Zahl sein. Also kann ich p' schreiben als $p' = 4c$, mit passender ganzen Zahl c. Dies setzen wir in $(*)$ ein und erhalten: $(4c)^2 = 4q'^2 \Rightarrow 4c^2 = q'^2$. Mit der selben Argumentation wie vorher sehen wir, dass es eine passende ganze Zahl d gibt mit $q' = 4d$.

Insgesamt ergibt sich: $\sqrt{4} = \frac{p'}{q'} = \frac{4c}{4d} = \frac{c}{d}$. Wir konnten also ein weiteres mal kürzen, was ein Widerspruch ist, da $\frac{p'}{q'}$ bereits vollständig gekürzt sein sollte. Daraus folgt, dass $\sqrt{4}$ nicht als Bruch geschrieben werden kann (da man hier unendlich lange weiter kürzen kann). $\lightning$?