

Aufgabenblatt 4

Knobelaufgabe

Wir betrachten die Summe der ersten n ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$$

Bestimmen Sie diese Summe für die Zahlen $n = 1$ bis $n = 5$. Fällt Ihnen etwas auf? Stellen Sie eine Vermutung auf, wie man die Summe leichter berechnen kann. Können Sie ihre Vermutung auch beweisen?

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a)

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > 5$$

b)

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > 5$$

c)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n < m$$

d)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n - m = 0$$

e)

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : \exists r \in \mathbb{N} : n + r = m$$

Aufgabe 2

Ein Fass enthalte 10 Liter Wein, ein weiteres Fass enthalte 10 Liter Wasser. Es werden nun 3 Liter Wein von dem ersten in das zweite Fass gefüllt. Anschließend werden von dem entstandenen Gemisch 3 Liter in das Weinfass zurück gefüllt. Ist nun mehr Wasser im Weinfass oder mehr Wein im Wasserfass?

Aufgabe 3

Ein Schwimmbecken kann mit einer Pumpe A innerhalb von 6 Stunden gefüllt werden. Mit einer Pumpe B kann dasselbe Becken in 8 Stunden gefüllt werden. Wie lange benötigt man, wenn man beide Pumpe gleichzeitig einsetzt, um das Becken zu füllen?

Aufgabe 4*

Sind m, n zwei natürliche Zahlen, so schreiben wir $m|n$, falls n durch m teilbar ist. Formulieren Sie folgende Aussage in möglichst einfachen Worten:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N} : 1 < m < n \ \& \ m|n) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N} : 1 < k^2 \leq n \ \& \ k|n)$$

Ist die Aussage wahr? Formulieren Sie auch die Negation dieser Aussage, sowohl formal als auch in Worten.

Hausübung

Welches Problem hat das Vorgehen zur Lösung der folgenden Gleichung?

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$