Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Aus einer Analysis Vorlesung:

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, $f(a) < 0$ ist, $f(b) > 0$ ist und $u \in [a, b]$ die einzige Nullstelle von f ist, dann ist $\forall x \in [a, u) : f(x) < 0$ und $\forall x \in (u, b] : f(x) > 0$.

Was bedeutet diese Aussage? Machen Sie sich die Aussage anhand einer Skizze klar und begründen Sie, warum diese gelten sollte. Würde die Aussage auch noch gelten, wenn die Funktion f an einer Stelle zwischen a und b nicht stetig ist?

Formulieren Sie eine ähnliche Aussage, die beginnt mit:

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, $f(a) > 0$ ist, $f(b) < 0$ ist und $u \in [a, b]$ die einzige Nullstelle von f ist, dann ist ...

Aufgabe 2

Zeigen Sie (mit dem ϵ, δ Formalismus), dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x$ an jeder beliebigen Stelle x_0 stetig ist.

Aufgabe 3*

Zeigen Sie (mit dem ϵ, δ Formalismus), dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{|x|}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ist.

Aufgabe 4 **

a) Zeigen Sie, dass es zu jeder irrationalen Zahl x eine rationale Zahl y gibt, die beliebig nahe an x liegt.
   (Beweisidee: Stelle x als Dezimalzahl dar. Finde zu beliebigem (aber festem) $n \in N$ eine rationale Zahl y, deren Unterschied zu x weniger als $\frac{1}{10^n}$ beträgt.)

   Die rationalen Zahlen liegen also “dicht” in $\mathbb{R}$: zwar fehlen in $\mathbb{Q}$ unendlich viele Zahlen, aber die “Lücken” sind alle “unendlich klein”.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$, die definiert durch:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \text{falls x} \in \mathbb{Q} \\ f(x) &= 1, \text{falls x} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{aligned}$$

c) Beweisen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $x = \pi$ nicht stetig ist

Hausrätsel

Das Rätsel handelt von einem Stamm Eingeborener auf einer Insel. Diese Eingeborenen haben eine Religion, die folgende Regel hat: Niemand darf über Augenfarben reden. Wer jemals Kenntnis über seine eigene Augenfarbe bekommt, der muss sich am nächsten Tag vor allen anderen rituell selbst umbringen. Es gibt dort natürlich auch keine Spiegel oder so. Man hat somit die Situation, dass jeder die Augenfarbe aller seiner Mitmenschen kennt, niemand aber die eigene. Insgesamt gibt es 100 blauäugige Insulaner und 900 braunäugige Insulaner. Kein Insulaner weiß, dass es nur 2 verschiedene Augenfarben auf der Insel gibt.

Selbstverständlich sind die Eingeborenen hochintelligent, und könnten praktisch alle sofort Mensa beitreten. Jeder Insulaner ist ein logischer Denker und kann sich somit alles erschließen, was für ihn aus seinen Beobachtungen und seinem Wissen logisch ableitbar ist. Jeder weiß, dass jeder Insulaner ein logischer Denker ist (und jeder weiß, dass jeder weiß, dass jeder ein logischer Denker ist, und so weiter).

Jetzt gibt es ein Ereignis. Es kommt ein fremder, blauäugiger Besucher auf die Insel, der nichts von der Religion weiß. Er versteht sich aber gut mit den Eingeborenen und nach einigen Tagen hat er ihr vollstes Vertrauen. Jetzt kommt der Tag, an dem der Besucher wieder abreist. An diesem Tag sagt er nichtsahnend, vor allen Insulanern, dass es doch erstaunlich sei, in dieser Region der Welt auf blaue Augen zu stoßen. Er sagt also explizit, dass es mindestens einen blauäugigen unter den Eingeborenen gibt. Dann reist er ab.

Hat diese Äußerung des Besuchers irgendeine Auswirkung auf den Stamm? Wenn ja, welche?