General Relativity: Hausübung	Blatt Nr. 01	15.04.2021
Patricia Päßler, Gernot Akemann		Abgabe bis: 22.04.2021 8:30 Uhr

Aufgabe 1.1: Transformation von Geschwindigkeiten (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{O}$ ein Inertialsystem mit Koordinaten $(x^\mu) = (t, x, y, z)$ und $\bar{\mathcal{O}}$ ein Inertialsystem mit Koordinaten $(\bar{x}^\mu) = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, das sich gegenüber $\mathcal{O}$ mit Geschwindigkeit v in z-Richtung bewege. Betrachten Sie einen sich geradlining und gleichförmig bewegenden Ball. In $\bar{\mathcal{O}}$ ist dessen Geschwindigkeit $\bar{V}$ und der Winkel zwischen $\bar{x}$-Achse und der Trajektorie des Balles $\bar{\varphi}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit V des Balles und den Winkel φ zwischen Trajektorie und x-Achse im Inertialsystem $\mathcal{O}$.

Aufgabe 1.2: Relativität der Zeitordnung (4 Punkte)

Betrachten Sie nur eine räumliche Dimension und drei Ereignisse A, B, C. In einem Inertialsystem treten diese in der Reihenfolge ABC auf. In einem anderen sei die Abfolge der Ereignisse CBA. Gibt es ein Inertialsystem, in welchem die Ereignisskette ACB ist? Hinweis: Zeichnen Sie ein Raum-Zeit-Diagramm.

Aufgabe 1.3: Geschwindigkeitsparameter u (1+2+1+2=6 Punkte)

(a) Die Einsteinsche Addition von Geschwindigkeiten hat eine einfachere Form, wenn man das Konzept des *Geschwindigkeitsparameters* u einführt, welcher durch die Gleichung $v = \tanh u$ definiert ist. Für $-\infty < u < \infty$ ist die Geschwindigkeit beschränkt auf $-1 < v < 1$. Zeigen Sie, dass für

$$v = \tanh u \text{ und } w = \tanh U \tag{1}$$

aus der Einsteinschen Addition von Geschwindigkeiten folgt:

$$w' = \tanh(u + U) \tag{2}$$

D. h. die Geschwindigkeitsparameter addieren sich linear.

(b) Verwenden Sie den obigen Geschwindigkeitsparameter u, um zu zeigen, dass die Lorentztransformationsgleichungen in folgender Form geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t\cosh u - x\sinh u, \quad \bar{y} = y, \\ \bar{x} &= -t\sinh u + x\cosh u, \quad \bar{z} = z. \end{aligned}$$

(c) Verwenden Sie die Identität $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, um die Invarianz des Abstandes Δs^2 dieser Gleichungen zu zeigen.

(d) Benennen Sie so viele Parallelen wie möglich zwischen der Geometrie der Raumzeit und der gewöhnlichen 2-dimensionalen euklidischen Geometrie, wobei die Koordinatentransformation analog zu der Lorentztransformation gegeben ist

$$\bar{x} = x\cos\Theta + y\sin\Theta, \quad \bar{y} = -x\sin\Theta + y\cos\Theta.$$

Was ist das Analogon zum Abstand? Was ist das Analogon für eine invariante Hyperbel?