General Relativity: Hausübung **Blatt Nr. 02** 27.04.2020

Niclas Gesing, Gernot Akemann

Aufgabe 2.1: Kurven im Euklidischen Raum (4 Punkte)

Es sei A ein Punkt im dreidimensionalen euklidischen Raum mit Koordinaten $(x, y, z) = (1, 0, -1)$. Betrachten Sie folgende Kurve durch A:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\mapsto (x^i(\lambda)) = (\lambda, (\lambda-1)^2, -\lambda)\end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie in der gegebenen Koordinatenbasis die Tangente dieser Kurve an A.

(b) Es sei $f = x^2 + y^2 - yz$, wobei $x = x^1(\lambda), y = x^2(\lambda)$ und $z = x^3(\lambda)$. Berechnen Sie $df/d\lambda$.

Aufgabe 2.2: Komponenten von Tensoren (4 Punkte)

Es seien X und V Tensoren mit Komponenten

$$(X^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (V^\mu) = (-1, 2, 0, -2).$$

Berechnen Sie die Komponenten von

(a) $X^\mu{}_\nu$

(b) $X_\mu{}^\nu$

(c) $X^{(\mu\nu)}$

(d) $X_{[\mu\nu]}$

(e) $X^\lambda{}_\lambda$

(f) $V_\mu X^{\mu\nu}$

Aufgabe 2.3: Transformation von E und B-Feld

Die Lorentztransformationen bilden zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine 6-dimensionale Lie Gruppe, die sogenannte Lorentz-Gruppe $O(3,1)$. Jedes Element Λ dieser Gruppe, lässt sich eindeutig als Hintereinanderausführung einer räumlichen Rotation und einer speziellen Lorentztransformation (Boost in Richtung $\vec{v}$) schreiben:

$$\Lambda = L(\vec{v})\mathcal{R}, \quad \text{mit} , \quad \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad R \in SO(3).$$

Zeigen Sie unter Verwendung des Transformationsverhaltens des elektromagnetischen Feldstärketensors, wie das elektrische und magnetische Vektorfeld $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unter

(a) Rotationen um die y-Achse

(b) Boosts entlang der z-Achse

transformieren.