

Aufgabe 3.1: Abhängigkeit des gemessenen Fluxes von der Relativgeschwindigkeit (2 + 2 + 4 Punkte)

Astronomische Beobachtungen der Helligkeit von Objekten sind Messungen des Strahlensflusses T^{0i} der Objekte auf der Erde. Diese hängen von der Relativgeschwindigkeit Objekt \leftrightarrow Erde ab.

- (a) Zeigen Sie, dass im Ruhesystem \mathcal{O} eines Sternes konstanter Luminosität L (totale, abgestrahlte Energie pro Sekunde), der Energie-Impuls-Tensor der Strahlung des Sternes am Punkte $(t, x, 0, 0)$ die Komponenten

$$T^{00} = T^{0x} = T^{x0} = T^{xx} = \frac{L}{4\pi x^2}$$

hat. Der Stern sitze im Ursprung des Ruhesystems.

- (b) Es sei \vec{X} der Nullvektor, welcher Emission und Rezeption der Strahlung miteinander verbindet. Zeigen Sie, dass dieser im Inertialsystem \mathcal{O} am Event $(x, x, 0, 0)$ durch $\vec{X} = (x, x, 0, 0)$ gegeben ist. Zeigen Sie außerdem, dass der Energie-Impuls-Tensor aus a) die Intertialsystem invariante Form

$$\mathbf{T} = \frac{L}{4\pi} \frac{\vec{X} \otimes \vec{X}}{(\vec{U}_S \cdot \vec{X})^4}$$

hat, wobei \vec{U}_S die Vierergeschwindigkeit des Sternes ist.

- (c) Es sei $\bar{\mathcal{O}}$ das Inertialsystem eines Beobachters auf der Erde, welches sich mit Geschwindigkeit v in x -Richtung auf den Stern zu bewege. Dieser Beobachter messe die Strahlung des Sternes auf der \bar{x} -Achse. Im System $\bar{\mathcal{O}}$ sei $\vec{X} = (R, R, 0, 0)$ für eine Funktion $R(x)$. Bestimmen Sie $R(x)$ und drücken Sie $T^{\bar{0}\bar{x}}$ darüber aus. Wie hängen R und $T^{\bar{0}\bar{x}}$ von v ab?

Aufgabe 3.2: Energie-Impuls-Tensor von Strahlung (2 + 2 Punkte)

Der Energie-Impuls-Tensor eines elektromagnetischen Feldes mit $J^\mu = 0$ kann über den Feldstärketensor, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

- (a) Drücken Sie $T^{\mu\nu}$ über das elektrische und magnetische Feld aus.
- (b) Verwenden Sie die Maxwell'schen Gleichungen um zu zeigen, dass der Energie-Impuls-Tensor erhalten ist.