General Relativity: Hausübung	**Blatt Nr. 04**	06.05.2021
Patricia Päßler, Gernot Akemann		Abgabe bis: 13.05.2021 8:30 Uhr

Aufgabe 4.1: Koordinatenwechsel (Polarkoordinaten) (1+1+2+2 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Komponenten der Transformationsmatrix Λ von kartesischen (x, y) zu Polarkoordinaten r, θ, sowie die der Rücktransformation Λ^{-1}.

(b) Es seien eine skalare Funktion $f = 2(x^2 + y^2) - xy$ sowie, in kartesischen Koordinaten, zwei Vektoren $\vec{V} = (x^2 - y, y^2 - x)$, $\vec{W} = (1, 2)$ gegeben. Verwenden Sie die Transformationseigenschaften der einzelnen Objekte und die Ergebnisse aus Aufgabenteil (a), um f als Funktion von r und θ auszudrücken und die Komponenten von $\vec{V}$ und $\vec{W}$ in der Polarbasis zu finden (ebenfalls als Funktion von r und θ).

(c) Berechnen Sie die Komponenten von $\tilde{\mathrm{d}}f$ in kartesischen Koordinaten und anschließend in Polarkoordinaten durch (i) direktes nachrechnen und (ii) durch Transformieren von kartesischen in Polarkoordinaten.

(d) Berechnen Sie die Komponenten der zu $\vec{V}$ und $\vec{W}$ assoziierten Einsformen $\tilde{V}$ und $\tilde{W}$ in Polarkoordinaten (i) mit Hilfe des metrischen Tensors und (ii) durch Transformieren von kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 4.2: Konstant beschleunigte Beobachter in der SRT und Rindler Räume (1+1+2+2) Punkte

Die Weltlinie eines Beobachters B sei durch

$$t(\lambda) = \frac{1}{a}\sinh(a\lambda), \quad x(\lambda) = \frac{1}{a}\cosh(a\lambda) \tag{1}$$

gegeben. Die folgende Aufgabe zeigt, dass man auch im Rahmen der SRT beschleunigte Bewegungen beschreiben kann.

(a) Zeigen Sie, dass λ die Eigenzeit des Beobachters ist und berechnen Sie Vierergeschwindigkeit und Vierebeschleunigung. Was ist a?

(b) Nehmen Sie nun an a^{-1} sei der variable Parameter in (1) und $a\lambda$ sei konstant. Zeigen Sie, dass die resultierende Kurve orthogonal zur Weltlinie des Beobachters B ist. Durch variieren von $a\lambda$ erhält man dann eine Familie solcher Kurven.

(c) Zeigen Sie, dass (1) eine Transformation von Koordinaten (t, x) zu Koordinaten $(a\lambda, a^{-1})$ ist, welche nach (b) ein orthogonales Koordinatensystem formen. Zeichnen Sie dieses und zeigen Sie, dass es nur eine Hälfte der $t - x$ Ebene abdeckt. Zeigen Sie außerdem, dass die $(a\lambda, a^{-1})$ Koordinaten für $|x| = |t|$ divergieren, sodass Sie in Wahrheit zwei disjunkte Quadranten abdecken.

(d) Berechnen Sie den metrischen Tensor und die Christoffelsymbole des $(a\lambda, a^{-1})$ Koordinatensystems. Ein Beobachter könnte mit diesen im Rahmen der SRT ohne Probleme Ereignisse innerhalb seines Quadranten beschreiben, d.h., mit anderen Worten, die SRT beinhaltet auch beschleunigte Bewegungen. Der rechte Quadrant wird auch Rindler-Raum genannt und die Grenzlinien $x = \pm t$ ähneln in gewisser Weise dem Ereignishorizont schwarzer Löcher.