

Aufgabe 5.1: Signaturform einer symmetrischen Matrix (4 Punkte)

Es sei A eine reellwertige symmetrische $n \times n$ Matrix. Aus der linearen Algebra wissen wir bereits, dass diese orthogonal diagonalisierbar ist, d.h. es existiert eine Matrix $H \in O(n)$, sodass $H^T A H$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge die Eigenwerte von A sind. Diese Aufgabe beleuchtet die sogenannte Signaturform einer solchen Matrix.

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Matrix R gibt, sodass $R^T H^T A H R$ eine Diagonalmatrix der Eigenwerte A 's in aufsteigender Reihenfolge ist.
- (b) Zeigen Sie, dass es eine weitere Matrix N gibt, sodass $N^T R^T H^T A H R N$ eine Diagonalmatrix ist, deren Komponenten ausschließlich $-1, 0$ und $+1$ sind.
- (c) Zeigen Sie, dass, wenn A invertierbar ist, keiner der diagonalen Einträge aus (b) null ist.
- (d) Es sei \mathbf{g} der metrische Tensor. Zeigen Sie, vom Ergebnis aus (a)-(c) ausgehend, dass es eine Matrix M gibt, sodass

$$M^T \mathbf{g} M = \text{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

Aufgabe 5.2: Rechenübungen mit dem metrischen Tensor (4 Punkte)

Es sei $g := \det(g_{\mu\nu})$ die Determinante des metrischen Tensors und f ein skalares Feld.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$I := \int d^4x \sqrt{-g} f$$

invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist.

- (b) Berechnen Sie $g_{,\mu}$.
- (c) Variieren Sie den Ausdruck in (a) bzgl. $g_{\mu\nu}$.