General Relativity: Hausübung	Blatt Nr. 05	18.05.2020
	Niclas Gesing, Gernot Akemann	

Aufgabe 4.1: Signaturform einer symmetrischen Matrix (4 Punkte)

Es sei A eine reellwertige symmetrische $n \times n$ Matrix. Aus der linearen Algebra wissen wir bereits, dass diese orthogonal diagonalisierbar ist, d.h. es existiert eine Matrix $H \in O(n)$, sodass $H^T AH$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge die Eigenwerte von A sind. Diese Aufgabe beleuchtet die sogenannte Signaturform einer solchen Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Matrix R gibt, sodass $R^T H^T AHR$ eine Diagonalmatrix der Eigenwerte A's in aufsteigender Reihenfolge ist.

(b) Zeigen Sie, dass es eine weitere Matrix N gibt, sodass $N^T R^T H^T AHRN$ eine Diagonalmatrix ist, deren Komponenten ausschließlich $-1, 0$ und $+1$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass, wenn A invertierbar ist, keiner der diagonalen Einträge aus (b) null ist.

(d) Es sei $\mathbf{g}$ der metrische Tensor. Zeigen Sie, vom Ergebnis aus (a)-(c) ausgehend, dass es eine Matrix M gibt, sodass

$$M^T \mathbf{g} M = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1).$$

Aufgabe 4.2: Rechenübungen mit dem metrischen Tensor (4 Punkte)

Es sei $g := \det(g_{\mu\nu})$ die Determinante des metrischen Tensors und f ein skalares Feld.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int d^4x \sqrt{-g} f$$

invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist.

(b) Berechnen Sie $g_{,\mu}$.

(c) Variieren Sie den Ausdruck in (a) bzgl. $g_{\mu\nu}$.