

Aufgabe 6.1: Geodäten=kürzeste Verbindung zweier Punkte (4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Variationsrechnung, dass Geodäten Extrema bzgl. der Länge von Kurven sind.

Aufgabe 6.2: Paralleltransport (2+2 Punkte)

Das Linienelement einer 2-Sphäre ist durch

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

gegeben, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante, $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist. Der Nordpol liegt dann bei $\theta = 0$ und der Südpol bei $\theta = \pi$.

- (a) Zeigen Sie, dass Kurven konstanter geographischer Länge ($\varphi = \text{const}$) Geodäten sind und, dass die einzige Kurve konstanter geographischer Breite ($\theta = \text{const}$) der Äquator ist $\theta = \pi/2$.
- (b) Es sei \vec{V} ein Vektor mit Koordinaten $V^\mu = (1, 0)$ in der Koordinatenbasis. (i) Transportieren Sie \vec{V} parallel zu einer Kurve konstanter Breite (Länge). Was sind seine Komponenten als Funktion von θ (φ)? (ii) Starten Sie nun mit dem Vektor \vec{V} bei $(\pi/2, 0)$ und verschieben ihn zunächst parallel entlang des Äquators zum Punkt $(\pi/2, \bar{\varphi})$, dann parallel entlang des Längengrades zum Nordpol und letztendlich erneut parallel entlang eines Längengrades zurück zum Startpunkt. Wie lauten die Komponenten des Vektors \vec{V} zum Schluss? Fertigen Sie auch eine Skizze an.

Aufgabe 6.3: Die 3-Sphäre (2+2 Punkte)

Das Linienelement der 3-Sphäre mit Koordinaten (ψ, θ, φ) ist

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

- (a) Berechnen Sie die Komponenten $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ des Levi-Civita-Zusammenhangs.
- (b) Berechnen Sie, Krümmungstensor, Ricci-Tensor und Ricci-Skalar.