General Relativity: Hausübung	**Blatt Nr. 07**	03.06.2021
Patricia Päßler, Gernot Akemann		Abgabe bis: 10.06.2021 8:30 Uhr

Aufgabe 7.1: Newtonsche Limes relativistischer Fluid-Dynamik (1+1+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich für ein perfektes Fluid die räumlichen Komponenten von

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{1}$$

im Newtonschen Limes, d.h. für die Metrik schwacher Gravitationsfelder aus Kap. 7.2 der Vorlesung, auf die Eulerschen Gleichungen

$$\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p/\rho + \nabla\phi = 0 \tag{2}$$

eines nicht-relativistischen Fluids reduzieren. (Hinweis: Es ist $(nU^\alpha)_{;\alpha} = 0$ zu verwenden, wobei n die Teilchenzahldichte ist.)

(b) Ermitteln Sie auch die Zeitkomponente unter obigen Voraussetzungen und interpretieren Sie die einzelnen Terme.

(c) Zeigen Sie, dass sich (1) im Falle eines statischen Fluid ($U^i = 0, p_{,0} = 0$, etc.) im hydrostatischen Gleichgewicht auf

$$p_{,i} + (\rho + p)\left[\frac{1}{2}\log(-g_{00})\right]_{,i} = 0$$

reduziert.

Aufgabe 7.2: Erhaltene Impulskomponenten einiger, in der Kosmologie wichtigen Raumgeometrien (2+2+2+2 Punkte)

Es seien vier Linienelemente gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 =& -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2, && (3)\\
\mathrm{d}s^2 =& -(1-2M/r)\mathrm{d}t^2 + (1-2M/r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right), && (4)\\
\mathrm{d}s^2 =& -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t^2 - 2a\frac{2Mr\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi \\
&+ \frac{\left(r^2+a^2\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2, && (5)\\
\mathrm{d}s^2 =& -\mathrm{d}t^2 + R^2(t)\left[\left(1-kr^2\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)\right], && (6)
\end{aligned}$$

wobei M, a, k Konstanten, $R(t)$ eine Funktion, welche nur von t abhängt, und $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ sind. Der Reihe nach sind dies die *Minkowski-*, *Schwarzschild-*, *Kerr-* und *Robertson-Walker-Metrik*.

(a) Finden Sie für jede Metrik so viele erhaltene Komponenten p_β des Viererimpulses eines frei fallenden Teilchens wie möglich. (Hinweis: Sie können die Gleichung

$$m\frac{\mathrm{d}p_\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}g_{\nu\alpha,\beta}p^\nu p^\alpha$$

von S.80 der Vorlesung für die Komponenten p_β des Viererimpulses verwenden. Hierbei bezeichnet τ die Eigenzeit.)

(b) Zeigen Sie, dass (4) und (6) sphärisch symmetrisch sind. Erhöht dies die Anzahl der erhaltenen Komponenten p_α? (Hinweis: Drücken Sie zunächst den räumlichen Anteil von (3) in sphärischen Koordinaten aus (nachrechnen)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{7}$$

aus und argumentieren Sie von dort ausgehend.)

(c) Es kann gezeigt werden, dass im Falle der Metriken (7) und (4)-(6), für eine Geodäte, die mit $\theta = \pi/2$ and $p^\theta = 0$ beginnt, d.h. tangential zur äquatorialen Ebene, immer $\theta = \pi/2$ und $p^\theta = 0$ gilt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung $\vec{p}\cdot\vec{p} = -m^2$ die p^r für die Fälle (7), (4) und (5) als Funktion von m, anderer erhaltener Größen und bekannten Funktionen der Position.

(d) Im Falle der Robertson-Walker-Metrik impliziert die sphärische Symmetrie, dass, falls eine Geodäte zu Beginn $p^\theta = p^\phi = 0$ erfüllt, dies immer gilt. Nutzen Sie dies, um, von

$$m\frac{\mathrm{d}p_\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}g_{v\alpha,\beta}p^v p^\alpha$$

ausgehend, zu zeigen, dass p_r erhalten ist.