

Aufgabe 7.1: Newtonsche Limes relativistischer Fluid-Dynamik (1+1+2 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass sich für ein perfektes Fluid die räumlichen Komponenten von

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (1)$$

im Newtonschen Limes für die Metrik in PU06 Aufgabe 6.1 auf die Eulerschen Gleichungen

$$\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p/\rho + \nabla\phi = 0 \quad (2)$$

eines nicht-relativistischen Fluids reduzieren. (Hinweis: Es ist $(nU^\alpha)_{;\alpha} = 0$ zu verwenden, wobei n die Teilchenzahldichte ist.)

- (b) Ermitteln Sie auch die Zeitkomponente unter obigen Voraussetzungen und interpretieren Sie die einzelnen Terme.
 (c) Zeigen Sie, dass sich (1) im Falle eines statischen Fluid ($U^i = 0, p_{,0} = 0$, etc.) im hydrostatischen Gleichgewicht auf

$$p_i + (\rho + p) \left[\frac{1}{2} \log(-g_{00}) \right]_{,i} = 0$$

reduziert.

Aufgabe 7.2: Erhaltene Impulskomponenten einiger, in der Kosmologie wichtigen Raumgeometrien (2+2+2+2 Punkte)

Es seien vier Linienelemente gegeben:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3)$$

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4)$$

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{2Mr \sin^2\theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta}{\rho^2} \sin^2\theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (5)$$

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[(1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (6)$$

wobei M, a, k Konstanten, $R(t)$ eine Funktion, welche nur von t abhängt, und $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ sind. Der Reihe nach sind dies die *Minkowski-, Schwarzschild-, Kerr- und Robertson-Walker-Metrik*.

- (a) Finden Sie für jede Metrik so viele erhaltene Komponenten p_α des Viererimpulses eines frei fallenden Teilchens wie möglich.

- (b) Zeigen Sie, dass (4) und (6) sphärisch symmetrisch sind. Erhöht dies die Anzahl der erhaltenen Komponenten p_α ? (Hinweis: Drücken Sie zunächst den räumlichen Anteil von (3) in sphärischen Koordinaten aus (nachrechnen)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7)$$

aus und argumentieren Sie von dort ausgehend.)

- (c) Es kann gezeigt werden, dass im Falle der Metriken (7) und (4)-(6), für eine Geodäte, die mit $\theta = \pi/2$ and $p^\theta = 0$ beginnt, d.h. tangential zur äquatorialen Ebene, immer $\theta = \pi/2$ und $p^\theta = 0$ gilt. Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$ die p^r für die Fälle (7), (4) und (5) als Funktion von m , anderer erhaltener Größen und bekannten Funktionen der Position.
- (d) Im Falle der Robertson-Walker-Metrik impliziert die sphärische Symmetrie, dass, falls eine Geodäte zu Beginn $p^\theta = p^\phi = 0$ erfüllt, dies immer gilt. Nutzen Sie dies, um, von

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{v\alpha, \beta} p^v p^\alpha$$

ausgehend, zu zeigen, dass p_r erhalten ist.