General Relativity: Hausübung	Blatt Nr. 08	10.06.2021
Patricia Päßler, Gernot Akemann		*Abgabe bis: 17.06.2021 8:30 Uhr*

Aufgabe 8.1: Einstein-Hilbert Wirkung und Einsteinsche Feldgleichungen im Vakuum (4 Punkte)

Leiten Sie die Einsteinschen Vakuumgleichungen

$$G^{\mu\nu} = 0$$

aus der Einstein-Hilbert Wirkung

$$I = \int \sqrt{-g} R dx^4$$

mit Hilfe der Variationsrechnung her.
(Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 5.2 c): $\frac{\delta f}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} = 0$.)

Aufgabe 8.2: Linearisierte ART I (4 Punkte)

Berechnen Sie $R_{\mu\nu}, R$ und $G_{\mu\nu}$ in der linearisierten ART bis zur Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$, und drücken Sie das Ergebnis durch $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h^{\alpha}{}_{\alpha}$ aus.

Aufgabe 8.3: Linearisierte ART II (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie ausgehend von

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + \mathcal{O}\left(h^2_{\alpha\beta}\right)\right],$$

dass G_{00} und G_{0i} keine zweiten zeitlichen Ableitungen irgendeiner der Komponenten von $\bar{h}_{\alpha\beta}$ enthalten. Die Dynamik steckt also in den sechs Komponenten $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$. Die Gleichungen $G_{0a} = 8\pi T_{0a}$ liefern Relationen zwischen den Anfangswerten für die anderen sechs Gleichungen. Wie deckt sich dies mit dem allgemeinen Resultat für die unabhängigen Komponenten des Einstein Tensors?

(b) Die Feldgleichungen der linearisierten Theorie sind

$$\Box \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}.$$

Diese enthalten Ableitungen zweiter Ordnung, auch wenn μ und ν null sind. Widerspricht dies Aufgabenteil **(a)**? Warum?