

Aufgabe 8.1: Einstein-Hilbert Wirkung und Einsteinsche Feldgleichungen im Vakuum (4 Punkte)

Leiten Sie die Einsteinschen Vakuumgleichungen

$$G^{\mu\nu} = 0$$

aus der Einstein-Hilbert Wirkung

$$I = \int \sqrt{-g} R dx^4$$

mit Hilfe der Variationsrechnung her. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.2 c))

Aufgabe 8.2: Linearisierte ART I (4 Punkte)

Berechnen Sie $R_{\mu\nu}$, R und $G_{\mu\nu}$ in der linearisierten ART.

Aufgabe 8.3: Linearisierte ART II (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie ausgehend von

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta} \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + \mathcal{O}(h_{\alpha\beta}^2) \right],$$

dass G_{00} und G_{0i} keine zweiten Ableitungen irgendeiner der Komponenten von $\bar{h}_{\alpha\beta}$ enthalten. Die Dynamik ist also in den sechs Komponenten $G_{ij} = 8\pi T_{ij}$ enthalten. Die Gleichungen $G_{0a} = 8\pi T_{0a}$ liefern Relationen zwischen den Anfangswerten für die anderen sechs Gleichungen. Wie deckt sich dies mit dem allgemeinen Resultat für die unabhängigen Komponenten des Einstein Tensors?

(b) Die Feldgleichungen der linearisierten Theorie sind

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}.$$

Diese enthalten Ableitungen zweiter Ordnung, auch wenn μ und ν null sind. Widerspricht dies Aufgabenteil (a)? Warum?