

Aufgabe 9.1: Ebene Wellen in nicht linearer Theorie (4 Punkte)

Gegeben Sei folgendes Linienelement

$$ds^2 = -dudv + f^2(u)dx^2 + g^2(u)dy^2$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\Gamma_{xu}^x &= \dot{f}/f, & \Gamma_{yu}^y &= \dot{g}/g \\ \Gamma_{xx}^v &= 2\dot{f}f, & \Gamma_{yy}^v &= 2\dot{g}g \\ R^x_{uxu} &= -\ddot{f}/f, & R^y_{uyu} &= -\ddot{g}/g \\ R^v_{xxu} &= -2\dot{f}\dot{f}, & R^v_{yyu} &= -2\dot{g}\dot{g}\end{aligned}$$

die nicht-verschwindenden Komponenten des Zusammenhangs und Riemann-Tensors sind. Wie lauten die Vakuumfeldgleichungen?

Aufgabe 9.2: Killing-Vektorfelder (1+1+1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass, falls ein Vektor-Feld ξ^α die Killing-Gleichung

$$2\xi_{\{\alpha;\beta\}} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

erfüllt, so gilt $\dot{\gamma}^\alpha \xi_\alpha = \text{const}$ entlang jeder Geodäten $\gamma(\lambda)$.

- (b) Bestimmen Sie die Killing-Felder der Minkowski-Metrik. Erklären Sie deren physikalische Bedeutung.
- (c) Zeigen Sie, dass die Linearkombination $\alpha\vec{\xi} + \beta\vec{\eta}$ zweier Killing-Vektorfelder $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ mit Konstanten α, β ebenfalls ein Killing-Vektorfeld ist.
- (d) Zeigen Sie, dass Lorentztransformationen der Felder aus (b) nur Linearkombinationen wie in (c) produzieren.