General Relativity: Hausübung **Blatt Nr. 10** 22.06.2020

Niclas Gesing, Gernot Akemann

Aufgabe 10.1: TT-Eichung für sphärische Wellen (2+2+2+2 Punkte)

(a) Verwenden Sie eine Eichtransformation, welche durch

$$\xi^\alpha = B^\alpha(x^\mu)e^{i\Omega(r-t)}$$

generiert wird, wobei B^α eine sich langsam ändernde Funktion von x^μ ist, um

$$\bar{h}_{jk} = -2\Omega^2 D_{jk} e^{i\Omega(r-t)}/r$$

auf die TT-Eichung zu bringen. Finden Sie das allgemeine Transformationsgesetz bis zur Ordnung $1/r$.

(b) Fordern Sie, dass die neuen Komponenten $\bar{h}_{\alpha\beta}$ bis zur Ordnung $1/r$ die Bedingungen $\bar{h}_{0\mu} = 0, \bar{h}^\alpha{}_\alpha = 0$ und $\bar{h}_{\mu j}n^j = 0$ erfüllen, wobei $n^j := x^j/r$ der Einheitsvektor in radialer Richtung ist. Zeigen Sie, dass es möglich Funktionen B^α zu finden, welche eine solche Transformation ermöglichen und $\Box\xi^\alpha = 0$ zur Ordnung $1/r$ erfüllen.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{zi} &= 0\\
\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xx} &= -\,\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{yy} = -\Omega^2\left(\rlap{-}I_{xx} - \rlap{-}I_{yy}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega r}/r\\
\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{xy} &= -\,2\Omega^2 \rlap{-}I_{xy}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega r}/r
\end{aligned}$$

in der TT-Eichung gilt, wobei

$$\rlap{-}I_{jk} := I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}I^l{}_l$$

ist.

(d) Zeigen Sie, indem Sie $R = |x^i - y^i|$ in Gleichung

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x^i) \approx \frac{4}{r}\int T_{\mu\nu}(t-R, y^i)d^3y, \tag{1}$$

entwickeln und Terme der Ordnung $1/r$ verwerfen, dass die Anteile höherer Ordnung in $1/r$ von $\bar{h}_{0\mu}$, welche nicht durch

$$\int T_{0\mu}d^3y = \mathrm{const}$$

eliminiert werden, Eichterme zur Ordnung v^2 sind, d.h. bis auf zweite Zeitableitungen in der Entwicklung von $\bar{h}_{00}$ und erste Zeitableitungen in $\bar{h}_{0j}$ in Gleichung (1).

Aufgabe 10.2: Luminosität von Gravitationswellen (1+2+1 Punkte)

(a) Es sei $n^j = x^j/r$. Argumentieren auf der Basis von Symmetrien, dass

$$\int n^j n^k \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \propto \delta^{jk}.$$

Bestimmen Sie anschließend, den Proportionalitätsfaktor, indem Sie den Spezialfall $j = k = z$ betrachten.

(b) Zeigen Sie analog, dass

$$\int n^i n^j n^k n^l \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{15}\left(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}\right).$$

Argumentieren Sie dazu im ersten Schritt, dass das Integral nur von δ^{jk} abhängen kann und, dass die Kombination auf der rechten Seite, die einzige ist, welche die selben Symmetrien bzgl. des Vertauschens von Indices besitzt, wie die linke Seite.

(c) Die Luminosität L eines gravitativ Strahlenden Objektes ist durch

$$L = \int F r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

gegeben, wobei

$$F = \frac{\Omega^6}{16\pi r^2}\left\langle 2{\rlap{-}I}_{ij}{\rlap{-}I}^{ij} - 4n^j n^k {\rlap{-}I}_{ji}{\rlap{-}I}^i_k + n^i n^j n^k n^l {\rlap{-}I}_{ij}{\rlap{-}I}_{kl}\right\rangle$$

ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus **(a)** und **(b)**, dass die Luminosität L der Gravitationswellen durch

$$L = \frac{1}{5}\Omega^6 \langle {\rlap{-}I}_{ij}{\rlap{-}I}^{ij}\rangle$$

gegeben ist.