General Relativity: Hausübung	Blatt Nr. 11	29.06.2020
	Niclas Gesing, Gernot Akemann	

Aufgabe 11.1: Der Druckgradient statischer, idealer Flüssigkeiten in der Schwarzschild-Metrik (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die kovariante Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors (${T^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$) für ein statisches, ideales Fluid im Falle der Schwarzschild-Metrik zu

$$(\rho + p)\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}$$

reduziert.

Aufgabe 11.2: Isotropische Koordinaten (2+2 Punkte)

(a) In Aufgabe 7.2 der Hausübungen hatten Sie bereits gezeigt, dass das Minkowski-Linienelement bei geeigneter Kartenwahl, auf die die sphärisch symmetrische Form

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

gebracht werden kann. Definieren Sie eine neue radiale Koordinate über

$$r = \bar{r}(1 + 2M/2\bar{r}), \quad M \in \mathbb{R}$$

und zeigen Sie, dass die sphärisch symmetrische Form des Linienelements, dann die Form

$$\mathrm{d}s^2 = -\left[\frac{1 - M/2r}{1 + M/2\bar{r}}\right]^2 \mathrm{d}t^2 + \left[1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right]^4 \left[\mathrm{d}\bar{r}^2 + \bar{r}^2\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

annimmt.

(b) Definieren sie quasi-kartesische Koordinaten über

$$\begin{aligned} x =& \bar{r}\cos\phi\sin\theta \\ y =& \bar{r}\sin\phi\sin\theta \\ 7 =& \bar{r}\cos\theta, \end{aligned}$$

sodass, wie in Aufgabe 7.2, $d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = dx^2 + dy^2 + dz^2$ gilt. Man nennt dies die isotropischen Koordinaten. Zeigen Sie, dass diese für $\bar{r} \gg 1$ durch

$$\mathrm{d}s^2 = -\left[1 - \frac{2M}{\bar{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]\mathrm{d}t^2 + \left[1 + \frac{2M}{\bar{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

gegeben sind.