General Relativity: Hausübung	Blatt Nr. 12	08.07.2021
Patricia Päßler, Gernot Akemann		Abgabe bis: 15.07.2021 8:30 Uhr

Aufgabe 12.1: Kruskal-Koordinaten I (2+2+2 Punkte)

Betrachten Sie ein Punktteilchen, welches sich frei fallend in ein schwarzes Loch hinein bewegt. Nehmen Sie dabei an, dass das Punktteilchen in $r = \infty$ aus der Ruhe starte, der Drehimpuls des Teilchens verschwindet und das $T^{\mu\nu} = 0$ für $r \neq 0$ gelte.

(a) Berechnen Sie r als Funktion der Eigenzeit τ.

(b) Warum sieht ein ruhender Beobachter mit fester radialer Koordinate $r_{\text{Obs}} > R_S$ niemals das Teilchen den Schwarzschildradius überqueren.

(c) Berechnen Sie $\frac{dv}{dr}$ für das Punktteilchen, wobei

$$v = t + r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

die avancierte (oder einlaufende) Eddington-Finkelstein-Koordinate ist. Zeigen Sie, dass v endlich bleibt bevor das Punktteilchen $r = 0$ erreicht. Ist das Teilchen schneller oder langsamer als ein radiales Lichtsignal?

Bonusaufgabe 12.2: Kruskal-Koordinaten II (2+2+2 Punkte)

(a) Die sogenannte auslaufende oder retardierte Eddington-Finkelstein-Koordinate u ist

$$u = t - r - 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right).$$

Drücken Sie ds^2 für die Schwarzschild-Metrik mit Hilfe der Koordinaten u, v, θ und φ aus. Schreiben Sie $u - v$ als Funktion von r. Welche Werte von u und v sind die zu $r = R_S$ korrespondierenden?

(b) Schreiben Sie nun ds^2 als Funktion von $v' := \exp\left[v/\left(2R_{\text{S}}\right)\right], u' := -\exp\left[u/\left(2R_{\text{S}}\right)\right]$ sowie θ und φ. Welche Werte von u' und v' sind die zu $r = R_S$ korrespondierenden?

(c) Drücken Sie nun ds^2 mit Hilfe der sogenannten Kruskal-Koordinaten

$$T := \frac{v' + u'}{2}, \quad R := \frac{v' - u'}{2}$$

aus. Welche Werte von T und R korrespondieren zu $r = R_S$? Zeichnen Sie die gültige Region der ursprünglichen Schwarzschild-Metrik (jene, welche t und r verwendet) in ein $T - R-$Diagramm.