General Relativity: Hausübung **Blatt Nr. 12** 06.07.2020

Niclas Gesing, Gernot Akemann

Aufgabe 12.1: Kruszkal-Koordinaten I (2+2+2 Punkte)

Betrachten Sie ein Punktteilchen, welches sich frei fallend in ein schwarzes Loch hinein bewegt. Nehmen Sie dabei an, dass das Punktteilchen in $r = \infty$ aus der Ruhe starte, und das $T^{\mu\nu} = 0$ für $r \neq 0$ gelte.

(a) Berechnen Sie r als Funktion der Eigenzeit τ.

(b) Warum sieht ein ruhender Beobachter mit fester radialer Koordinate $r_{\text{Obs}} > R_S$ niemals das Teilchen den Schwarzschildradius überqueren.

(c) Berechnen Sie $\frac{dv}{dr}$ für das Punktteilchen, wobei

$$v = t + r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$$

die avancierte (oder einlaufende) Eddington-Finkelstein-Koordinate ist. Zeigen Sie, dass v endlich bleibt bevor das Punktteilchen $r = 0$ erreicht. Ist das Teilchen schneller oder langsamer als ein radiales Lichtsignal?

Aufgabe 12.2: Kruszkal-Koordinaten II (2+2+2 Punkte)

(a) Die sogenannte auslaufende oder retardierte Eddington-Finkelstein-Koordinate u ist

$$u = t - r - 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right).$$

Drücken Sie ds^2 für die Schwarzschild-Metrik mit Hilfe der Koordinaten u, v, θ und φ aus. Schreiben Sie $u - v$ als Funktion von r. Welche Werte von u und v sind die zu $r = R_S$ korrespondierenden?

(b) Schreiben Sie nun ds^2 als Funktion von $v' := \exp\left[v/\left(2R_{\text{S}}\right)\right], u' := -\exp\left[u/\left(2R_{\text{S}}\right)\right]$ sowie θ und φ. Welche Werte von u' und v' sind die zu $r = R_S$ korrespondierenden?

(c) Drücken Sie nun ds^2 mit Hilfe der sogenannten Kruszkal-Koordinaten

$$T := \frac{v' + u'}{2}, \quad R := \frac{v' - u'}{2}$$

aus. Welche Werte von T und R korrespondieren zu $r = R_S$? Zeichnen Sie die gültige Region der ursprünglichen Schwarzschild-Metrik (jene, welche t und r verwendet) in ein $T - R-$Diagramm.

Bonusaufgabe 12.3: Buchdahl'schen Lösungen (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die sogenannte Buchdahl'sche Lösung

$$
\begin{aligned}
\exp(2\Phi) &= (1-2\beta)(1-\beta-u)(1-\beta+u)^{-1} \\
\exp(2\Lambda) &= (1-2\beta)(1-\beta+u)(1-\beta-u)^{-1}\left(1-\beta+\beta\cos Ar'\right)^{-2} \\
p(r) &= A^2(1-2\beta)u^2\left[8\pi(1-\beta+u)^2\right]^{-1} \\
\rho(r) &= 2\Lambda^2(1-2\beta)u\left(1-\beta-\frac{3}{2}u\right)\left[8\pi(1-\beta+u)^2\right]^{-1}
\end{aligned}
,
$$

wobei $p_*, \beta \in \mathbb{R}$,

$$u\left(r'\right) := \beta\frac{\sin Ar'}{Ar'}, \quad A^2 := \frac{288\pi p_*}{1-2\beta}$$

und

$$r\left(r'\right) = r'\frac{1-\beta+u\left(r'\right)}{1-2\beta}$$

sind, die einsteinschen Feldgleichungen erfüllt.

<u>Zusatzinfo:</u>

Die Buchdahl'sche Lösung ist die Schwarzschildlösung eines perfekten Fluids, dessen Zustandsgleichung durch

$$\rho = 12\left(p_* p\right)^{1/2} - 5p$$

gegeben ist. Obgleich ihre Zustandsgleichung physikalisch unmotiviert ist, so hat Sie dennoch zwei schöne Eigenschaften: (i) sie erhält die Kausalität, sofern man fordert, dass die lokale Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, und (ii), sie kann als relativistische Verallgemeinerung der $n = 1$ Polytrop-Lösung in der newtonschen Beschreibung von Sternen aufgefasst werden. Aus der Lösung und der Forderung (i) ergibt sich, dass $0 < \beta < 1/6$ gelten muss, wobei $\beta = 0$ dem newtonschen Limes und $\beta = 1/6$ dem maximal relativistischen Grenzfall entspricht (siehe auch Kapitel 10.6 im Schutz).