• Wir werden im Folgenden oft Fkt $f(z)$ über einen Halbkreis Γ mit Radius $R\to\infty$ integrieren, um reelle Integral über f zu bestimmen. Zur Abschätzung von $f(z)$ auf Γ hilft uns

<u>Jordans Lemma</u>

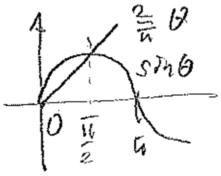
Sei Γ ein Halbkreis parametrisiert durch $z(\theta)=Re^{i\theta}, \theta\in[0,\pi]$, und $f(z)$ stetig mit $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)=0$. Dann gilt

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma dz\, e^{imz} f(z) = 0 \quad \text{für jedes feste } m\in\mathbb{R}_+ .$$

<u>Beweis</u>: Wir müssen dieses Integral ähnlich wie im ML Lemma abschätzen, zunächst

$$\left|\int_\Gamma e^{imz}dz\right| = \left|\int_0^\pi d\theta\, \underbrace{iRe^{i\theta}}_{\dot z(\theta)} e^{miR(\cos\theta+i\sin\theta)}\right| \le \int_0^\pi d\theta\, \underbrace{|iRe^{i\theta}|}_{=R}\, \underbrace{|e^{miR\cos\theta}|}_{=1}\, |e^{-mR\sin\theta}|$$

nun ist $\sin\theta$ sym auf



θ und $e^{-x}>0$, sowie $\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$

$$= 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, e^{-mR\sin\theta} \le 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, e^{-mR\frac{2}{\pi}\theta} = \left[-\frac{\pi}{m}e^{-\frac{mR2\theta}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{m}\left(1-e^{-mR}\right) \le \frac{\pi}{m}$$

• Wegen $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ gilt: $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0$, mit $\frac{1}{\delta}<\underbrace{|z|}_{=R} \Leftrightarrow \frac{1}{|z|}<\delta \Rightarrow |f(z)|<\varepsilon$ auf Γ

$$\Rightarrow \left|\int_\Gamma dz\, e^{imz} f(z)\right| \le \int_0^\pi d\theta\, R e^{-mR\sin\theta}|f(z)| < \varepsilon\cdot\frac{\pi}{m} \to 0 \quad \text{da } \varepsilon \text{ beliebig.}$$

• für $m=0$ brauchen wir, daß $\lim\limits_{R\to\infty} R \underbrace{\max_{z\in\Gamma} f(z)}_{} = 0$

d.h. $\sim \frac{1}{R^{1+\alpha}}, \alpha>0$