Taylor Aufgabe

Vorbereitung:

$\log(0+1) = \log(1) = 0$

$\log'(x+1) = \frac{1}{x+1}$ $\qquad \log'(0+1) = 1$

$\log''(x+1) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ $\qquad \log''(0+1) = -1$

$\log'''(x+1) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $\qquad \log'''(0+1) = 2$

$\log^{(4)}(x+1) = \frac{-6}{(x+1)^4}$ $\qquad \log^{(4)}(0+1) = -6$

$$\Rightarrow \quad p(x) = \sum_{i=0}^{4} \frac{x^i}{i!} f^{(i)}(0) = 0 + x \cdot 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} - \frac{6x^4}{24}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \quad //$$

Aufgabe 1

$$9 \cdot 3^{x^2} = 27^x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^2 \cdot 3^{x^2} = 3^{3x} \qquad | \log$$

$$\Leftrightarrow \quad \log(3^2 \cdot 3^{x^2}) = \log(3^{3x})$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \log(3) + x^2 \log(3) = 3x \log(3) \qquad |: \log(3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2 \qquad x_2 = 1 \qquad (\text{passt})$$

Aufgabe 2

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{2}{n^2}\right)$

  $= \lim_{n\to\infty} n - 0 = \lim_{n\to\infty} n$ divergiert!

- $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (n-1) = \lim_{n\to\infty} n - 1$

  divergiert auch!

- $c_n = \left(\frac{n^3-2}{n^2} - (n-1) \right) = \frac{n^3-2-n^3+n^2}{n^2}$

  $= \frac{n^2-2}{n^2} = \frac{1-2/n^2}{1} = 1 - \frac{2}{n^2}$

  $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n^2}\right) = 1 - 0 = 1$ //

Erstaunlich: Die Kombination von zwei divergenten Folgen konvergiert.

Aufgabe 3 a)

I A $\quad n = 1 \quad \sum_{k=0}^{1} x^k = 1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x}$

$= \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{1-x^{1+1}}{1-x}$ //

I V. $\quad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ gilt für ein n

I.S. $\quad \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$

$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$ $\square$

b) nach a: $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-1/2} = 2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ //