Kopfrechnen

a) $\frac{18}{5} + \frac{3}{2} + \frac{7}{10} = \frac{36}{10} + \frac{15}{10} + \frac{7}{10} = \frac{29}{5}$

b) $\left(\frac{21}{5} \cdot \frac{10}{7}\right)^2 = \left(\frac{210}{35}\right)^2 = \left(\frac{42}{7}\right)^2 = 6^2 = 36$

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^2 \div \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10}\right)^2 = \left(\frac{15}{90}\right)^2 = \left(\frac{3}{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

d) Abzug $120\,€ \mathrel{\hat{=}} 24\,\%$ $\quad | \div 24$

$5\,€ \mathrel{\hat{=}} 1\,\%$ $\quad | \cdot 100\%$

$500\,€ \mathrel{\hat{=}} 100\,\%$

Aufgabe 1

a) $2x - 63 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{63}{2} = 31.5$

b) $18x^2 - 3x = 10 \quad | \div 18 \,,\ - \frac{10}{18}$ $\qquad \frac{5}{9}$

$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{9} = 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{12} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{5}{9}}}_{= 3/4}$

$= \frac{1}{12} \pm \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{12} \pm \frac{9}{12} = \frac{10}{12} \,,\ -\frac{8}{12}$

$= \frac{5}{6} \,,\ -\frac{2}{3}$

NR $\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{5}{9} = \frac{1}{3^2} \cdot \left(\frac{1}{4^2}\right) + \frac{5}{3^2}$

$= \frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{16} + 5\right)$ $\qquad 16 \cdot 5 = 50 + 30 = 80$

$= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{81}{16}$

$= \frac{81}{3^2 \cdot 4^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{81}{12^2}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

c) $x^4 + 4x^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{1,2} = 0}} \quad \wedge \quad x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_{3,4} \notin \mathbb{R}$$

d) Die Idee ist die Nullstellen zu raten:

$$\sqrt{2x+7} + \underbrace{\sqrt{x-5}}_{} = 7$$

$x \geq 5$ da $\sqrt{y}$ für $y<0$ nicht geht für y reell.

Test $x = 5$: $\sqrt{10+7} = \sqrt{17} \neq 7$ ↯

Test $x = 6$: $\sqrt{19} + 1 \neq 7$ ↯

Test $x = 7$: $\sqrt{21} + \sqrt{2} \neq 7$ ↯

Test $x = 8$ $\sqrt{23} + \sqrt{3} \neq 7$ ↯

Test $x = 9$ $\sqrt{25} + \sqrt{4} = 5 + 2 = 7$ ✓

$\Rightarrow$ 9 ist eine Nullstelle.

Mit Taschenrechner kann man dies aus so lösen:

$$\sqrt{2x+7} + \sqrt{x-5} = 7 \qquad |^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 7 + x - 5 + 2\sqrt{(2x+7)(x-5)} = 49$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 2 + 2\sqrt{(2x+7)(x-5)} = 49$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(2x+7)(x-5)} = -\frac{3}{2}x + \frac{47}{2} \qquad |^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x - 35 = \frac{9}{4}x^2 + \left(\frac{47}{2}\right)^2 - \frac{3 \cdot 47}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2 - \frac{9}{4}\right)x^2 + 3 \cdot \underbrace{\left(\frac{47}{2} - 1\right)}_{22.5}x - 35 - \left(\frac{47}{2}\right)^2 = 0$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + 67.5x - 587.25 = 0$$

$$x^2 - 270x + 2349 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = 135 \pm \sqrt{135^2 - 2349} = 135 \pm \sqrt{15876}$$

$$= 135 \pm 126 \Rightarrow x_{1,2} \in \{261, 9\}$$

Einsetzen von 261 zeigt, dass dies keine Nullstelle ist. Dies passiert da wir keine Äquivalenzumformung machen. Somit sind alle Nullstellen in der Lösungsmenge, aber nicht alle Lösungsmengenelemente sind Nullstellen.

Aufgabe 2

a) $4x + 10 \geq 14 \qquad | -10 \;,\; \div 4$

$x \geq 1$

b) 1. $-12x + 12 < 24 \qquad | -12 \quad \div (-12$

$x > -1$

2. $12x - 12 < 24 \qquad | +12 \quad \div 12$

$x < 3$

$\Rightarrow x \in (1, 3)$

c) $4x \cdot 2x > 16$

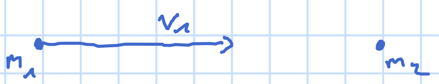
$8x^2 > 16 \qquad | \div 8$

$x^2 > 2 \qquad | \sqrt{\;}$

$\Rightarrow x < -\sqrt{2}$

$x > \sqrt{2}$

Aufgabe 3



$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$

$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$

klassisches nicht relativistisches System

$p_1 = m_1 v_1 \;,\; p_2 = 0$ da Kugel 2 in Ruhe ist

$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \;,\; E_2 = 0$

$\Rightarrow \quad m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad \text{I}$

$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \qquad \text{II}$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem, welches wir so lösen wollen, das v_1' und v_2' nur von m_1, m_2 und v_1 abhängen.

@I: $v_1' = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2'}{m_1}$

e2 $v_2'^2 = \frac{m_1(v_1^2 - v_1'^2)}{m_2}$ | I → II

$= \frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - \left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2'}{m_1}\right)^2\right)$ | Binomische Formel

$= \frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - \frac{1}{m_1^2}\left(m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2'^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2'\right)\right)$ | Sortieren und ein multiplizieren

$= \frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - v_1^2 - \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2'^2 + 2\frac{m_2}{m_1} v_1 v_2'\right)$ | Weiter aufräumen

$= -\frac{m_2}{m_1} v_2'^2 + 2 v_1 v_2'$ | $- v_2'^2$

$\Rightarrow 0 = -\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) v_2'^2 + 2 v_1 v_2'$ | in quadratische Gleichung umformen sodass wir die PQ-Formel anwenden können

$= v_2'^2 - 2\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} v_2'$

$\Rightarrow v_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1 \pm \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1$

$\in \left\{2\frac{m_1}{m_1+m_2} v_1, 0\right\}$, $v_2' = 0$ interessiert uns nicht, da hier kein Impuls übertragen wird also kein Stoß stattfindet.

Einsetzen in von v_2' in I

$v_1' = \frac{1}{m_1}\left(m_1 v_1 - m_2 v_2'\right)$

$= \frac{1}{m_1}\left(m_1 v_1 - 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1\right)$

$= v_1 \cdot \left(1 - 2\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)$

$= v_1 \cdot \frac{(m_1 + m_2 - 2m_2)}{m_1 + m_2}$

$= v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ //

$m_1 = m_2$: $v_2' = 2\frac{m_1}{2m_1} v_1 = v_1$ //

$v_1' = 0$ //

Der gesampte Impuls von Kugel 1 wird auf Kugel 2 übertragen.

Aufgabe 4

a) 1.) $-12x + 12 = 24 \quad | -12, \div(-12)$

$x = -1$

b) $12x - 12 = 24 \quad | +12, \div 12$

$x = 3$

b) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$, $x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = \underline{\underline{1}}$

Aufgabe 5

$x^3 - 2x^2 + x = 0 \quad |$ x ausklammern $\Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad |$ 2. Binomische Formel: $(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \quad | \pm\sqrt{}$

$\Rightarrow \pm(x-1) = 0 \quad | \pm 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \quad , \quad (-x = -1 \Leftrightarrow x = 1)$

$\Rightarrow x_{2,3} = 1$