

Lösungen: Vorkurs Zettel 10

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14} \\ \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \\ (3 \ 1 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 16 + 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ (1 \ 4 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 5 - 4 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 5 - 16 - 2 = -13\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} \\ \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7 \\ (1 \ -2 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} &= -1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = -2 - 6 - 24 = -32\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Land	0	A	B	AB
Deutschland	41%	43%	11%	5%
Estland	34.5%	35.5%	23%	7%
Finnland	31%	44%	17%	8%
Frankreich	42%	44%	10%	4%

Seien:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.43 \\ 0.11 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0.345 \\ 0.355 \\ 0.23 \\ 0.07 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0.31 \\ 0.44 \\ 0.17 \\ 0.08 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_r = \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.44 \\ 0.10 \\ 0.04 \end{pmatrix}.$$

Des weitern gilt

$$\cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \Rightarrow \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \cos^{-1} \left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right).$$

$$\|\vec{D}\| = \sqrt{0.41^2 + 0.43^2 + 0.11^2 + 0.05^2} = 0.6063$$

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{0.345^2 + 0.355^2 + 0.23^2 + 0.07^2} = 0.550318$$

$$\|\vec{F}_i\| = \sqrt{0.31^2 + 0.44^2 + 0.17^2 + 0.08^2} = 0.570088$$

$$\|\vec{F}_r\| = \sqrt{0.42^2 + 0.44^2 + 0.10^2 + 0.04^2} = 0.617738$$

$$\sphericalangle(\vec{D}, \vec{E}) = 14.589^\circ$$

$$\sphericalangle(\vec{D}, \vec{F}_i) = 11.2524^\circ$$

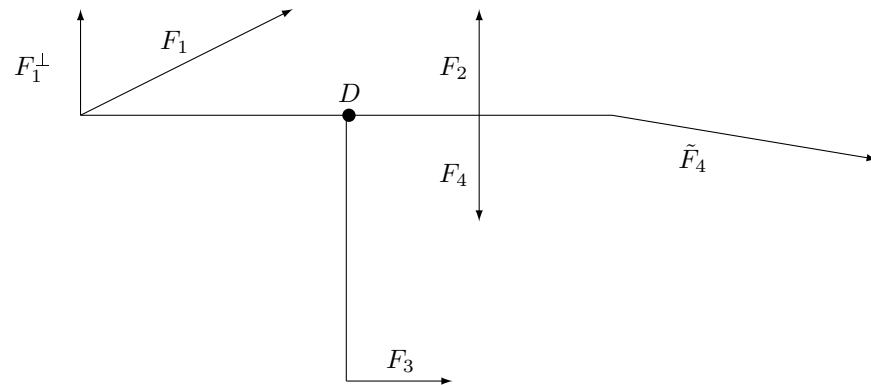
$$\sphericalangle(\vec{D}, \vec{F}_r) = 1.53608^\circ$$

$$\sphericalangle(\vec{E}, \vec{F}_i) = 11.11^\circ$$

$$\sphericalangle(\vec{E}, \vec{F}_r) = 15.9284^\circ$$

$$\sphericalangle(\vec{F}_i, \vec{F}_r) = 12.3617^\circ$$

Physikübung



Hier sind zwei mögliche Kräfte F_4 und \tilde{F}_4 eingezeichnet. Hierbei ist nur die Projektion auf die Komponente orthogonal zum Hebel relevant. Desweiteren muss natürlich die Länge des Hebelarms berücksichtigt werden.

Aufgabe 3

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x \times y = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \times z = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 6 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 6 - 0 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$y \times z = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 6 - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 6 - 0 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$