Lösungen: Vorkurs Zettel 13

Aufgabe ε

$$\begin{aligned} |x_n - 1| &= \left|\frac{n-2}{n+2} - 1\right| = \left|\frac{n-2-n-2}{n+2}\right| = \left|\frac{-4}{n+2}\right| \\ &= 4\frac{1}{n+2} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+2} &< \frac{\varepsilon}{4} \\ \Leftrightarrow \quad n+2 &> \frac{4}{\varepsilon} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} - 2 = 38 \\ n &> 38 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.01 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} - 2 = 398 \\ n &> 398 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0.00012 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} - 2 = 33331.\overline{3} \\ n &> 33331.\overline{3} \end{aligned}$$

ODER:
Wähle $n = 10^9$.

Aufgabe 1

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis:
Induktionsanfang: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

Induktionsvermutung: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 &\overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Beweis:
Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2^0} = 1 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

Induktionsvermutung: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &\overset{I.V.}{=} 2 - \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Beobachtung: $K_n = 3L_n$

$$\begin{aligned}L_1 &= 1 \\ L_2 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}L_1 \\ L_3 &= L_2 - \frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9} = \frac{4}{3}L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L_{n+1} = \frac{4}{3}L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad K_{n+1} = \frac{4}{3}K_n = 3L_{n+1} = \frac{4^n}{3^{n-1}}$$

Beweis:
Induktionsanfang: $n = 1$

$$K_1 = 3L_1 = 3$$

<u>Induktionsschritt:</u> $n \to n+1$

$$K_{n+1} = \frac{4^n}{3^{n-1}} = \frac{4}{3}\frac{4^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{4}{3}K_n.$$

Diese Folge hat keinen Grenzwert, da $4^n > 3^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Endlicher Flächeninhalt:</u>

Zu beweisen, dass der Flächeninhalt der Koch'schen Schneeflocke endlich ist, ist simpel:
Zeichne ein hinreichend großen Kreis um K_1. Hinreichend groß heißt in diesem Fall:
$K_2, \ldots, K_n$ sollten ebenfalls in diesen Kreis passen.
Der Kreis hat einen bekannten, endlichen Flächeninhalt. Fertig.