Lösungen: Vorkurs Zettel 5

schnelle(?) Übung

$$f(x,t) = \sin(kx - \omega t), \qquad [k] = \frac{1}{m}, \quad [\omega] = \frac{1}{s}$$
$$\Rightarrow \quad [x] \stackrel{!}{=} m, \quad [t] \stackrel{!}{=} s.$$

Was passiert, wenn sich die Variablen ändern?

t **konstant:** Bewegung entlang einer stehenden Welle

x **konstant:** Schwingung einer Welle an einem festen Ort

Für was für physikalische Objekte könnte diese Art Funktion eine Rolle spielen?

Diese Funktion beschreibt eine Welle mit Amplitude 1 in Abhängigkeit von Ort und Zeit. Beispiele: Schwingende Saite, Elektromagnetische Welle, etc.

Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \log(x), \quad x_0 = 1 \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\log(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\log(x) = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}\log(x) = -\frac{6}{x^4} \\
\Rightarrow \quad &\log(x) \stackrel{x_0=1}{=} \log(1) + \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{1^2}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2}{1^3}\frac{(x-1)^3}{6} - \frac{6}{1^4}\frac{(x-1)^4}{24} + \mathcal{O}\left((x-1)^5\right) \\
&= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \mathcal{O}\left((x-1)^5\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+\cos(x^5)} = g\left(h(i(x))\right), \\
&\quad \text{mit} \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = 1 + \cos(x), \quad i(x) = x^5 \\
f'(x) &= i'(x) \cdot h'(i(x)) \cdot g'(h(i(x))) \\
&= 5x^4 \cdot (-\sin(x^5)) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\cos(x^5)}} \\
&= -\frac{5}{2}\frac{x^4 \sin(x^5)}{\sqrt{1+\cos(x^5)}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \left(1+\exp\left[\sqrt{x}\right]\right)^2 = f(h(i(x))), \\
&\quad \text{mit} \quad f(x) = x^2, \quad h(x) = 1+\exp[x], \quad i(x) = \sqrt{x} \\
g'(x) &= i'(x)\cdot h'(i(x))\cdot f'(h(i(x))) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\exp\left[\sqrt{x}\right]\cdot 2\left(1+\exp\left[\sqrt{x}\right]\right) \\
&= \frac{\exp[\sqrt{x}]\,(1+\exp[\sqrt{x}])}{\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x\exp[x]}{5x+1} \\
h'(x) &= \frac{\exp[x]}{5x+1} + \frac{x\exp[x]}{5x+1} - \frac{5x\exp[x]}{(5x+1)^2} \\
&= \frac{\exp[x]}{5x+1}\left[1+x+\frac{5x}{5x+1}\right] \\
&= \frac{\exp[x]}{5x+1}\left[\frac{5x+1+5x^2+x-5x}{5x+1}\right] \\
&= \frac{\exp[x]\,(5x^2+x+1)}{(5x+1)^2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
& 9\cdot 3^{x^2} = 27^x \\
\Leftrightarrow\quad & 3^2\cdot\exp\left[x^2\log(3)\right] = \exp[x\log(27)] \\
\Leftrightarrow\quad & 3^2\cdot\exp\left[x^2\log(3)\right] = \exp[3x\log(3)] \\
\Leftrightarrow\quad & \log(3^2\cdot\exp\left[x^2\log(3)\right]) = \log(\exp[3x\log(3)]) \\
\Leftrightarrow\quad & \log(3^2) + x^2\log(3) = 3x\log(3) \\
\Leftrightarrow\quad & 2\log(3) + x^2\log(3) = 3x\log(3) \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 3x + 2 = 0 \\
\Rightarrow\quad & x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2} \\
\Rightarrow\quad & x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\Rightarrow\quad & x_1 = 2, \quad x_2 = 1
\end{aligned}
$$

Rätsel

Wenn $i^2 = -1$ wäre, wäre dann

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\cdot i = -1\,?$$

Antwort: Nein!!!

Denn: Aus $i^2 = -1$ folgt nicht $i = \sqrt{-1}$, sondern lediglich $i = \pm\sqrt{-1}$!