Lösungen: Vorkurs Zettel 9

Aufgaben zum Raten

1.

$$x''(t) = a, \qquad \text{mit} \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

<u>Ansatz:</u> $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$.

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + x_0 = x_0, \\ x'(0) &= a \cdot 0 + v_0 = v_0 \end{aligned}$$

<u>Check:</u>

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at + v_0) \\ &= a \end{aligned}$$

2.

$$x''(t) = at^2, \qquad \text{mit} \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

<u>Ansatz:</u> $x(t) = \frac{1}{12}at^4 + ct + c'$

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{12}a \cdot 0^4 + c \cdot 0 + c' = c' \quad \Rightarrow \quad c' = 0 \\ x'(0) &= \frac{1}{3}a \cdot 0^3 + c = c \quad \Rightarrow \quad c = v_0 \\ \Rightarrow \quad x(t) &= \frac{1}{12}at^4 + v_0 t \end{aligned}$$

<u>Check:</u>

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{1}{12}at^4 + v_0 t\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4}{12}at^3 + v_0\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}at^3 + v_0\right) \\ &= at^2 \end{aligned}$$

3.

$$x''(t) = -\omega^2 x(t), \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

<u>Ansatz:</u> $x(t) = C\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} x(0) &= C \cdot \cos(0) = C \quad \Rightarrow \quad C = 1, \\ x'(0) &= -\omega C \sin(0) = 0 \\ \Rightarrow \quad x(t) &= \cos(\omega t) \end{aligned}$$

<u>Check:</u>

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \cos(\omega t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \omega \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

4.

$$x''(t) = -\omega^2 x(t), \qquad \text{mit} \quad x(0) = C_0, \quad x'(0) = S_0$$

<u>Ansatz:</u> $x(t) = C_0\cos(\omega t) + \frac{S_0}{\omega} sin(\omega t)$

$$\begin{aligned} x(0) &= C_0 \cos(0) + \frac{S_0}{\omega} \sin(0) = C_0 \\ x'(0) &= -\omega C_0 \sin(0) + S_0 \cos(0) = S_0 \\ \Rightarrow \quad x(t) &= C_0 \cos(\omega t) + \frac{S_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

<u>Check:</u>

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(C_0 \cos(\omega t) + \frac{S_0}{\omega} \sin(\omega t) \right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-\omega C_0 \sin(\omega t) + S_0 \cos(\omega t) \right) \\ &= -\omega^2 C_0 \cos(\omega t) - \omega S_0 \sin(\omega t) \\ &= -\omega^2 \left(C_0 \cos(\omega t) + \frac{S_0}{\omega} \sin(\omega t) \right) \end{aligned}$$

5.

$$f'(x) = \frac{3}{x} f(x) \qquad \text{mit} \quad f(1) = 42$$

<u>Ansatz:</u> $f(x) = c \cdot x^3$

$$\begin{aligned} f(1) &= c \cdot 1^3 = c \quad \Rightarrow \quad c = 42 \\ \Rightarrow \quad f(x) &= 42x^3 \end{aligned}$$

<u>Check:</u>

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 42x^3 &= 3 \cdot 42x^2 \\ &= \frac{3}{x} 42x^3 \end{aligned}$$

6.

$$f'(x) = 2xf(x), \qquad \text{mit} \quad f(0) = 0$$

Ansatz: $f(x) = 0$

$$f(0) = 0$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 0 = 0$$

Aufgaben zum Variablen trennen

1.

$$x'(t) = -\omega \sin(\omega t), \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) &= -\omega \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \quad x(t) &= \int \mathrm{d}x \; = -\omega \int \mathrm{d}t \; \sin(\omega t) \\ &= \cos(\omega t) + c \end{aligned}$$

Mit $x(0) = 1$ folgt sofort $c = 0$ und damit

$$x(t) = \cos(\omega t).$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x(t) = -\omega \sin(\omega t)$$

2.

$$x''(t) = -\omega \sin(\omega t), \qquad \text{mit} \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x'(t) &= -\omega \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \quad x'(t) &= \int \mathrm{d}x' \; = -\omega \int \mathrm{d}t \; \sin(\omega t) \\ &= \cos(\omega t) + c. \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) &= \cos(\omega t) + c \\ \Rightarrow \quad x(t) &= \int \mathrm{d}x \; = \int \mathrm{d}t \; \cos(\omega t) + c \\ &= \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + ct + c'. \end{aligned}$$

Mit $x(0) = 1$ folgt $c' = 1$, mit $x'(0) = 1$ folgt $c = 0$ und somit

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + 1.$$

Check:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + 1 \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t).$$

Rechercheübung

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) x(t) = 0 \tag{1}$$

Dies ist die Differentialgleichung eines sog. *harmonischen Oszillators*. Anwendung findet diese Gleichung in vielen Bereichen der Physik. So zum Beispiel für die Beschreibung einer ungedämpften, idealisiert frei schwingenden Feder in einer Dimension:

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) &= -kx \\ \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\right) x &= 0. \end{aligned}$$

Definiert man hier $\omega^2 := \frac{k}{m}$, so findet man den oben beschriebenen Ausdruck Gleichung (1).

Ein anderes Beispiel ist eines freien Teilchens (d.h. frei von äußeren Kräften, bzw. Potentialen) in einer Dimension in der Quantenmechanik. Die sog. zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für diesen Fall sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) &= E\psi(x) \\ \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right) \psi(x) &= 0. \end{aligned}$$

Hier kann man ebenfalls $\omega^2 := \frac{2mE}{\hbar^2}$ definieren, um zum oben genannten Ausdruck Gleichung (1) zu gelangen.