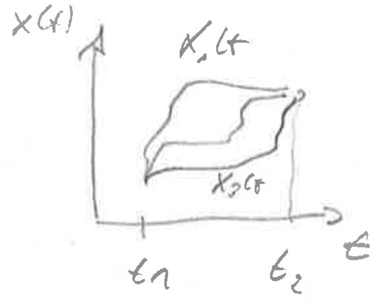
5. Variationsrechnung

Wir betrachten im Folgenden Funktionale ("Funktionen von Funktionen") und deren Variation. Ein <u>Funktional $S[x]$</u> ordnet der Funktion $x(t)$, welches z.B. die Raumkurve eines Teilchens beschreibt, eine Zahl zu



hier z.B. festgehaltene Anfangs- und Endpunkte

$$S[x]: \left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ \uparrow \\ \text{Raum bestimmte} \\ \text{Funktion} \end{array} \right. \longrightarrow S[x] \in \mathbb{R}$$

"Wirkung"

$$\text{z.B.} \quad \boxed{S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt \overbrace{\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} m \left(\tfrac{\partial x}{\partial t}\right)^2}_{\text{Kin. Energie}} - V(x(t)) \Big)}^{\mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t); t)}} \in \mathbb{R}$$

wobei $V(x)$ das Potential, z.B. ein Polynom ist, also $V(x) = g\, x(t)^2$

- für verschiedene Wahlen von Funktionen $x(t) = x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ oben erhalten wir ein unterschiedliches Ergebnis $S[x_1] \overset{?}{<} S[x_2]$, und wir können fragen, für welches $x(t)$ $S[x]$ minimal (oder maximal) ist.

- Im obigen Bsp ist <u>$S[x]$ die Wirkung</u> für ein Teilchen in einer Dimension, daß sich im Potential $V(x)$ bewegt. Der Integrand <u>$\mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t), t)$ ist die Lagrangefunktion</u>. Die Forderung daß $S[x]$ minimal ist führt auf die Newtonsche Bewegungsgl. (später)

- Das <u>Variationsprinzip</u> von solchen Funktionalen $S[x]$ ist ~~extrem~~ wichtig in der Physik, um Theorien zu konstruieren, die bestimmte Symmetrien haben.

einfaches Beispiel für ein Funktional:

gegeben integrierbare Fkt $g(x)$

def $\vartheta_0[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, (f^2(x) - 2 f(x) g(x))$

– ordnet jeder quadratintegrierbaren Fkt $f(x)$ den Wert $\vartheta_0[f]$ zu.

Frage: für welche Wahl von $f(x)$ (z.B. Gauß, Lorentz) wird $\vartheta_0[f]$ minimal? ($\vartheta[f] = \vartheta[f(x)]$ hängt nicht von x ab)

$$\vartheta_0[f] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(f(x) - g(x))^2 - g^2(x) \right]$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, (f(x) - g(x))^2}_{\geq 0 \text{ da Integrand } \geq 0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, g^2(x)}_{\text{gegeben, konstant}}$$

1. Int "=" 0 wenn $\boxed{f(x) = g(x)}$, dies ist offenbar das Minimum.

Können wir dies formalisieren, wie bei $f(x)$: Extremal wenn $f'(x) = 0$

⇒ Funktionalableitung: betrachte kleine Variation von $\vartheta[f]$

$$\delta\vartheta[f] = \vartheta[f + \eta] - \vartheta[f]. \quad \eta(x) \text{ "klein" im Vergleich zu } f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta\vartheta[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\vartheta[f(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - \vartheta[f(x)] \right)}$$

die Variable des Funktionals ist die Funktion $f(y)$

erhalten eine Funktion in y

zurück zum Beispiel:

$$\delta \vartheta[f] = \int dx\, (f(x)+\varepsilon\delta(x-y))^2 - 2(f(x)+\varepsilon\delta(x-y))\,g(x)$$

$$- \int dx\, (f^2(x) - 2f(x)g(x))$$

$$= \int dx\, 2f(x)\,\varepsilon\,\delta(x-y) - 2\varepsilon\int dx\,\delta(x-y)\,g(x) + O(\varepsilon^2)$$

$$= 2\varepsilon(f(y) - g(y))$$

$$\Rightarrow \frac{\delta\vartheta[f]}{\delta f(y)} = 2(f(y)-g(y)) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow f(x) = g(y)$$

- genauso auf höhere Potenzen von $f(x)$: $\int dx\, (f(x))^4$,

$\frac{\delta}{\delta f(y)}$ erfüllt die Produktregel.

mit $\boxed{\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y)}$ können wir bel. Funktionale

von Polynomen oder anderen Fkt von $f(x)$ berechnen

Bsp $$\frac{\delta}{\delta f(y)}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(f(x))^n = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, n\,(f(x))^{n-1}\,\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = n\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f^{n-1}(x)\,\delta(x-y)$$

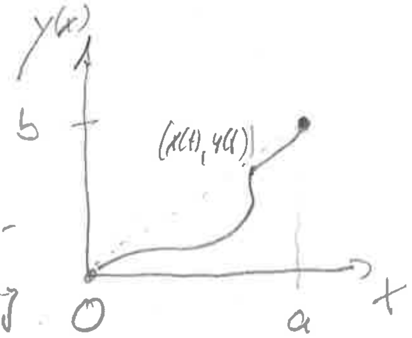
$$= n\,(f(y))^{n-1}$$

---

* oftmals wird nur $\delta\vartheta[f] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Bspobe}}}{=} \int dx\, 2(f(x)-g(x))\,\eta(x)$ betrachtet, ohne die Funktionalableitung zu bilden

Die Forderung $\delta\vartheta[f] \overset{!}{=} 0$ für bel. $\eta(x) \Rightarrow (f(x)-g(x))=0$ heißt Variationsprinzip

Anwendung: Kürzeste Verbindung



von $(0,0)$ nach (a,b): $\boxed{\begin{matrix}\vec{X}(t_0)=(0,0)\\ \vec{X}(t_1)=(a,b)\end{matrix}}$ Randbedingung

Bogenlänge

$$C = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \overset{x'=\frac{dx}{dt}}{=} \int_0^a dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \vartheta[y(x)]$$

Minimum: klar, Gerade

$$\frac{\delta \vartheta}{\delta y(z)} = \frac{\delta}{\delta y(z)} \int_0^a dx \sqrt{1+y'(x)^2} = \int_0^a dx\, 2\, y'(x)\, \frac{\delta y'(x)}{\delta y(z)} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$$

$z \in (0,a)$

wobei $\frac{\delta y'(x)}{\delta y(z)} = \partial_x \frac{\delta y(x)}{\delta y(z)} = \partial_x \delta(x-z)$

$$= \int_0^a dx \left(\partial_x \delta(x-z)\right) \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = \cancel{\delta(x-z) \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_0^a} - \int_0^a dx\, \delta(x-z) \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{}}\right)'$$

$$= \frac{y''(x)\sqrt{} - y'(x)\frac{2y''(x)}{2}\frac{y'}{\sqrt{}}}{\sqrt{1+y'(x)^2}^{\,2}}\Bigg|_{x=z} = \frac{y''(x)\left(1+y'(x)^2\right) - y''(x)\, y'(x)^2}{\sqrt{}^{\,3}}\Bigg|_{x=z}$$

$$\frac{\delta \vartheta[y]}{\delta y(z)} = \frac{y''(z)}{\sqrt{1+y'(z)^2}^{\,3}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow y''(z) = 0$$

$$y'(z) = \alpha, \quad y(z) = \alpha z + \beta$$

Lösung mit Randbedingungen

$$y(z=0) = 0 = \beta, \quad y(z=a) = \alpha a = b$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{b}{a} x} \quad \text{Gerade}$$

Anmerkung: • $\frac{\delta \vartheta[f]}{\delta f(y)} = 0$ liefert nicht immer eine einfach zu lösende Gleichung (z.B. für $\vartheta[f] = \frac{\int dx\,(f'^2 + x^2 f^4)}{\int dx\, f^2}$)

$\longrightarrow$ wir müssen oft eine Lösung raten oder einen Ansatz machen, für den $\vartheta[f]$ näherungsweise minimal ist!

• im Prinzip müssen wir uns noch überzeugen, daß $\frac{\delta \vartheta}{\delta f} = 0$ ein Minimum ist

Zurück zum Prinzip d. kleinsten Wirkung über die Lagrangefkt:

$$\frac{\delta S[x]}{\delta x(s)} = \frac{\delta}{\delta x(s)} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \right) \qquad s \in (t_1, t_2)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m\, \dot{x}(t) \frac{\delta \dot{x}(t)}{\delta x(s)} - \frac{\delta x(t)}{\delta x(s)} \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right)$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-m (\partial_t \dot{x}(t)) \delta(t-s) - \delta(t-s) \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right)$$

$$= -m\, \ddot{x}(s) - \frac{\partial}{\partial x(s)} V(x(s)) \overset{!}{=} 0$$ Newtonsche Bewegungsgl

• für allgem. $\mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t))$ erhalten wir

$$\boxed{0 = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}(t)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(t)}}$$ Euler Lagrange Gleichung

Ausblick: Verallgemeinerungen

- $D=1 \to D=3$: $x(t) \Rightarrow \vec{x}(t)$, mit kin Energie $\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}(t)\cdot\dot{\vec{x}}(t)$
  potent. u. $V(\vec{x}(t))$ (Skalar

- relativistische Feldtheorie:

$$x(t) \to \phi(x_\mu) \qquad x_\mu = (t,x,y,z) = (x_0,x_1,x_2,x_3)$$

invariante Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\partial_\mu\phi, \phi)$

z.B. $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4}$, $\phi = \phi(x_\mu)$ Skalarfeld (z.B. Higgs)

Summationskonvention $\mu = 0,1,2,3$ mit Minkowski Metrik $\eta_{\mu\nu}$

Euler-Lagrange Gleichungen für $\mathcal{L}$:

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0}$$

oder für Vektorfelder $A_\mu(x) = \left(\phi(\vec{x},t), \vec{A}(\vec{x},t)\right)$ Vierervektor in der Elektrodynamik

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu, A_\nu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$$

Euler-Lagrange-Gl. $\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ Maxwell gl.

$$\Leftrightarrow (\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)A^\mu = 0$$

mehrere Vektorfelder: $A^a_\mu(x)$, $a = 1,2,3$ schwache WW, inv $SU(2)$

$1,\dots,8$ starke WW, invariant unter $SU(3)$

$\to$ So lassen sich rel. (Quanten) feldtheorien konstruieren, die invariant unter best. Symmetrien sind.