

Aufgabe 5.1: Invarianz des Skalarproduktes unter Paralleltransporten

Zeigen Sie, dass, falls \vec{A} und \vec{B} entlang einer Kurve parallel verschoben werden, deren Produkt $g(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$ konstant auf dieser Kurve ist.

Aufgabe 5.2: Riemann- und Ricci-Tensor

Die folgende Aufgabe dient als Vorbereitung auf die Vorlesung am kommenden Donnerstag. Aus der Vorlesung kennen Sie bereits den Riemannschen Krümmungstensor \mathbf{R} mit Komponenten $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$. Diese sind im ersten und zweiten Indexpaar jeweils antisymmetrisch, und symmetrisch bzgl. Vertauschens des ersten mit dem zweiten Paares (siehe kommende Vorlesung für Beweis), d.h es gilt

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{[\alpha\beta]\mu\nu} = R_{\alpha\beta[\mu\nu]} = R_{\mu\nu\alpha\beta}.$$

Außerdem erfüllt der Riemannsche Tensor die sogenannte (erste) Bianchi-Identität

$$R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0.$$

- (a) Wie viele unabhängige Komponenten hat der Riemannsche Krümmungstensor?
- (b) Die Komponenten des sogenannten Ricci-Tensors sind per

$$R_{\mu\nu} := R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$$

definiert. Zeigen Sie, dass jede andere Kontraktion des Riemann Tensors entweder verschwindet oder proportional zum Ricci Tensor ist.