General Relativity: Präsenzübung	**Blatt Nr. 08**	15.08.2020

Niclas Gesing, Gernot Akemann

Aufgabe 8.1: Fixierung B_α TT-Eichung

Zeigen Sie, dass B_α durch

$$A_\alpha^{\text{new}\,\alpha} = 0, \quad \text{und} \quad A_{\alpha\beta}^{\text{new}} U^\alpha = 0,$$

wobei

$$A_{\alpha\beta}^{\text{new}} = A_{\alpha\beta}^{\text{old}} - ik_\beta B_\alpha - ik_\alpha B_\beta + \eta_{\alpha\beta} i B_\gamma k^\gamma, \quad k_\mu k^\mu = 0$$

und U^α ein beliebiger zeitartiger Vektor ist (Vorlesung Seite 91).

Aufgabe 8.2: Riemann-Tensor in TT-Eichung

Berechnen Sie die nicht-verschwindenden Komponenten des Riemann-Tensors

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right) + \mathcal{O}(h_{\alpha\beta}^2)$$

in TT-Eichung.
(Lösung: $R_{x0x0} = -\frac{1}{2}h^{TT}_{xx,00}$, $\quad R_{y0x0} = -\frac{1}{2}h^{TT}_{xy,00}$, $\quad R_{y0x0} = -\frac{1}{2}h^{TT}_{yy,00} = +\frac{1}{2}h^{TT}_{xx,00}$.)

Aufgabe 8.3: Wiederholung gedämpfte Schwingung

Die Bewegungsgleichung eines gedämpften Oszillators lautet

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \Omega^2 x = f(t), \tag{1}$$

wobei γ die Dämpfungsrate, Ω die Kreisfrequenz und $f(t)$ eine äußere Antriebskraft des Oszillators sind.

(a) Verwenden Sie den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

um die homogenen Lösungen von (1) zu bestimmen. Skizzieren sie die Lösungen in einer Dimension, für $\gamma = 0, \gamma < \Omega, \gamma = \Omega$ und $\gamma > \Omega$.

(b) Es sei $f(t) = F\cos\omega t$, mit $F, \omega \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$x(t) = Ae^{i\omega t + \varphi}$$

Gleichung (1) löst. Bestimmen Sie A und φ? Was passiert, falls $\gamma \to 0$ und $\omega \to \Omega$?
$\left(\text{Lösung: } A = \frac{Fe^{-i\varphi}}{\sqrt{(\Omega^2-\omega^2)^2+4(\gamma\omega)^2}}, \varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\Omega^2-\omega^2}\right)\right)$