General Relativity: Präsenzübung	**Blatt Nr. 10**	29.06.2020
	Niclas Gesing, Gernot Akemann	

Aufgabe 10.1: Die innere Schwarzschild-Lösung von Objekten konstanter Dichte

(a) Die T-O-V Gleichung vereinfacht sich für ein kugelsymmetrisches Objekt konstanter Dichte zu

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{4}{3}\pi r \frac{(\rho+p)(\rho+3p)}{1-8\pi r^2\rho/3}.$$

Integrieren Sie diese Differentialgleichung und zeigen Sie, dass die Lösung durch

$$\frac{\rho+3p}{\rho+p} = \frac{\rho+3p_\mathrm{c}}{\rho+p_\mathrm{c}}\left(1-2\frac{m}{r}\right)^{1/2}$$

beschrieben werden kann, wobei $p_c = p(r=0)$ ist. Rechnen Sie auch, wie in der Vorlesung angegeben, nach, dass

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho}\left[1-(\rho+p_\mathrm{c})^2/(\rho+3p_\mathrm{c})^2\right],$$

bzw.

$$p_c = \rho\left[1-(1-2M/R)^{1/2}\right]/\left[3(1-2M/R)^{1/2}-1\right]$$

und daher

$$p(r) = \rho\frac{\left(1-2Mr^2/R^3\right)^{1/2}-(1-2M/R)^{1/2}}{3(1-2M/R)^{1/2}-\left(1-2Mr^2/R^3\right)^{1/2}}$$

gilt.

(b) Setzen Sie $p(r)$ in

$$(\rho+p(r))\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp(r)}{dr}$$

ein und lösen Sie die resultierende Gleichung.

$$\left(\text{Lösung: } \exp(\Phi) = \frac{3}{2}(1-2M/R)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1-2Mr^2/R^3\right)^{1/2}, \quad r \leqslant R\right)$$

Aufgabe 10.2: Berechnung der Christoffelsymbole bzgl. der Schwarzschildmetrik

Berechnen Sie (mit Hilfe von Mathematica) die Christoffelsymbole $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ bzgl. der Schwarzschildmetrik.