

Aufgabe 12.1: Linienelement Kruskal-Koordinaten

Berechnen Sie das Linienelement ds^2 in Kruskal-Koordinaten (u, v, θ, ϕ) , wobei

$$\begin{aligned} u &= (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M), \\ v &= (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M) \end{aligned}$$

für $r > 2M$ und

$$\begin{aligned} u &= (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M), \\ v &= (1 - r/2M)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M) \end{aligned}$$

für $r < 2M$ ist.

Aufgabe 12.2: Inverse der Kerr-Metrik

Berechnen Sie die Inverse der Kerr-Metrik.

Zur Erinnerung:

Die Kerr-Metrik ist durch

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \\ &\quad + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

gegeben, wobei a eine Konstante, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ und $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ist.