Rechenmethoden der Physik

Vorlesungsskript

Prof. Dr. Gernot Akemann

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

Inhaltsverzeichnis

0 Inhaltsübersicht

0.1 Literatur: einige Standardwerke

- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (10. Aufl.), Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- H. Schulz, *Physik mit Bleistift* (6. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2006.
- C.B. Lang und N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* (2. Aufl.), Spektrum Akad. Verl., Heidelberg, 2005.
- I.N. Bronstein und K.A. Semendjaev, *Taschenbuch der Mathematik* (8. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, 2012.
- G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger* (18. Aufl.), Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2014.

→ Semesterapparat

0.2 Übersicht

1. Lineare Algebra
2. Analysis in 1 Dimension
3. Analysis in ≥ 1 Dimension
4. Fourier-Transformation

1 Lineare Algebra

Lit.: Gerd Fischer, *Lineare Algebra*

1.1 Vektoren und Skalare

Gruppe G: Menge G mit Verknüpfung $+ :\ G \times G \to G$

G 0 abgeschlossen $\forall\, a, b \in G$: $a + b \in G$

G 1 + assoziativ $(a + b) + c = a + (b + c)$

G 2 $\exists$ neutrales Element e: $\forall a \in G$: $e + a = a$

G 3 $\forall a$: $\exists$ inverses a': $a' + a = e$

G ist abelsch, wenn $\forall a, b$: $a + b = b + a$

Körper K: Menge K mit 2 Verknüpfungen $(K, +, \cdot)$

K 1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $e = 0$, $a' = -a$

K 2 $K^* \equiv K \setminus \{0\}$ ist eine Untergruppe: $K^* \subset K$ bzgl. $\cdot$
und $(K^*, \cdot)$ ist abelsch, neutr. Element $\equiv 1$, $a' = a^{-1}$

K 3 Distributivgesetze
$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c\,, \\ \Rightarrow (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Beispiele:
$K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ mit üblicher Addition und Multiplikation. Es gilt:

$$\begin{aligned} &e, a' \text{sind eindeutig}\,, \\ &\forall\, a \in K : a \cdot 0 = 0\,, \\ &\forall\, a, b \in K : a \cdot b = 0 \ \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0\,. \end{aligned}$$

Vektorraum über K (K-Vektorraum): K Körper, V Menge mit 2 Verknüpfungen $+, \cdot$;

- $+$ Addition $V \times V \to V$: $\vec{v}, \vec{w} \in V \to \vec{v} + \vec{w} \in V$
- $\cdot$ Multiplikation mit Element aus dem Körper $K \times V \to V$: $a \in K$, $\vec{v} \in V \to a \cdot \vec{v} \in V$ mit:

  V 1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, mit $e \equiv \vec{0}$ Nullvektor und inversem Element $-\vec{v}$ zu $\vec{v}$, so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

  V 2 Distributivgesetze:

$$
\begin{aligned}
(a+b) \cdot \vec{v} &= a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}\,, \\
a(b \cdot \vec{v}) &= (ab) \cdot \vec{v}\,, \\
a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}\,, \\
\text{und } 1 \cdot \vec{v} &= \vec{v}\,, \text{ wobei } 1 \in K\,.
\end{aligned}
$$

Die Elemente von K heißen Skalare (z. B. m, T, ...), die von V Vektoren und werden mit $\vec{\ }$ gekennzeichnet (z. B. Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, Impuls $m \cdot \vec{v} = \vec{p}$, Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$, ...)

Beispiel:
$K = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $\underset{\text{oder } V = \text{Polynome}}{V = \mathbb{R}^n}$, $\vec{v}$ n-Tupel in $\mathbb{R}^n$.

- Um zu einer expliziten Darstellung von Vektoren zu gelangen (u. a. um mit ihnen konkret zu rechnen) müssen wir eine Basis einführen
- Vektorenaddition u. skalare Multiplikation iteriert: (Geometrische Bedeutung $\to$ Ü)

Linearkombination: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i \in V$
die Vektoren $\vec{v}_1$, ...,$\vec{v}_k \neq \vec{0}$ sind linear unabhängig falls gilt

$$
\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \forall\, i = 1, ..., k: \;\; a_i = 0\,, \tag{1.1}
$$

gibt es eine Lösung für (1.1) mit mind. einem $a_j \neq 0$, so sind die Vektoren linear abhängig:
$\vec{v}_j = -\frac{1}{a_j} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} a_i \vec{v}_i\,.$

Basis (Fundamentalsystem):
Die Menge von Vektoren $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ bildet eine Basis von V falls

B 1 sie sind linear unabhängig,

B 2 sie spannen V auf: $V = \text{span}\,(\vec{e}_i)_{i=1,\ldots,n}$: $\forall \vec{v} \in V\ \exists v_1, ..., v_n \in K$ mit $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$.

Dann ist die <u>Dimension</u> $\dim V = n$

- eine Wahl der Basis ist nicht eindeutig, z. B. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$ ist auch eine Basis
- <u>nach Wahl</u> einer Basis sind die <u>Komponenten</u> v_i eines Vektors $\vec{v}$ bzg. dieser Basis eindeutig!
  Dann

$$\begin{aligned} &\exists\, v_1, ..., v_n; w_1, ..., w_n \text{ mit} \\ &\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{e}_i \\ \Rightarrow\ &\vec{0} = \vec{v} - \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)\, \vec{e}_i, \vec{e}_i \text{ linear unabh. } \Rightarrow \forall_{i=1,\ldots,n}\,, v_i = w_i\,. \end{aligned}$$

Beispiele:
$\mathbb{R}^3$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, Basis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$;
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 3-Tupel mit <u>kanonischer Basis</u> $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$, $\vec{e}_z = (0,0,1)$ und Addition komonentenweise (sowie Multiplikation)

- die Menge der Polynome mit maximalen Grad n ist ein $(n+1)$-dim. Vektorraum
- Phasenraum eines Teilchens in der klass. Mechanik $\mathbb{R}^6 \ni \{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}$
  $\rightarrow$ höhere Dim. für mehr Teilchen

$\underset{\text{(inneresProdukt)}}{\textbf{Skalarprodukt}}$: die Multiplikation von $\begin{array}{ll} \vec{v}, \vec{w} \in V & V \times V \rightarrow K \\ \text{Abb. in K} & (\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in K \end{array}$
heißt Skalarprodukt falls gilt:

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{w}$ <u>abelsch</u> (es gibt auch <u>nicht abelsch</u>: $K = \mathbb{C}$: $\vec{v}^* \cdot \vec{w}$),
- $\vec{v}\,(a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2) = a_1 \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + a_2 \vec{v} \cdot \vec{w}_2$ linear,
- $\left.\begin{array}{ll} |\vec{v}|^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} & \geq 0 \\ |\vec{v}|^2 = 0 & \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \end{array}\right\}$ positiv definit, $|\vec{v}|$ ist die **Norm** ("Länge") von $\vec{v}$,

es gilt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}| \,. \tag{1.2}$$

(Denn $0 \leq |\lambda\vec{v} + \vec{w}|^2$,
oBdA $\vec{v} \neq \vec{0}$, wähle $\lambda = -\vec{v} \cdot \vec{w}/|\vec{v}|^2$ u. Gl. $\cdot|\vec{v}|^2$
$\Rightarrow 0 \leq -(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 + |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$.)

Dreiecksungleichung:

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| \,. \tag{1.3}$$

(Denn $|\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\,\vec{v} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 \leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v} \cdot \vec{w}| + |\vec{w}|^2 \leq (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2$,
oder geom. Beweis für $\mathbb{R}^2$.)

- 2 Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V$ heißen **orthogonal** falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
  Wir definieren einen **Winkel** θ zwischen 2 Vektoren:

$$\text{für } \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}: \; \cos\theta := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \,, \tag{1.4}$$

  wegen Cauchy-Schwarz (1.2) gilt $|\cos\theta| \leq 1$.

- insbesondere haben wir für $\theta = \pi/2$: $\vec{v} \perp \vec{w}$ Orthogonalität.

Orthonormale (ON) Basis: gegeben eine Basis $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ von V, gilt

$$\forall_{i,j=1,\ldots,n} \text{ mit } i \neq j: \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \,, \text{so ist diese } \underline{\text{orthogonal}}. \tag{1.5}$$

Ist zusätzlich $\forall_{i=1,\ldots,n}\ |\vec{e}_i| = 1$ ist sie <u>orthonormal</u>.
(Können wir immer durch Normierung erzielen $\vec{e}_i \to \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$, da $\forall_i\ \vec{e}_i \neq \vec{0}$ (lin. unabh.!).)

- aus einer beliebigen Basis $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ kann immer eine orthn. Basis rekursiv konstruiert werden: **Gram-Schmidt Verfahren**:

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_1 &:= \vec{a}_1\,, \\
\vec{b}_2 &:= \vec{a}_2 - \frac{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1\right)}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1\,, \\
&\;\vdots \\
\vec{b}_k &:= \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left(\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i\right)}{|\vec{b}_i|^2}\vec{b}_i
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

mit $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ für $i \neq j$, dann $\vec{e}_j = \vec{b}_j/|\vec{b}_j|$ ist ON Basis.

- In einer ON Basis gilt:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \\
&= v_i w_i \text{ (Einsteinsche Summenkonvention über gleiche Indizes)},
\end{aligned}
$$

wegen

$$
\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases} \quad \textbf{Kronecker Delta}\,. \tag{1.7}
$$

- bisher hatten wir $\begin{array}{ll} \text{skalare Mult.} & K \times V \to V : \; a \cdot \vec{v} \\ \text{Skalarprodukt} & V \times V \to K : \; \vec{v} \cdot \vec{w} \end{array}$.

  Gibt es weitere Multiplikationen, die wieder in V führen?

  $\underline{\underline{\text{Ja!}}}$: $\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \text{ "="} \; \mathbb{C} & : z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C} \text{ Mult. komplexer Zahlen } z = \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \;\to\; \text{Ü} \\ \mathbb{R}^3 & : \text{Vektorprodukt} \end{array}$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt o. äußeres Produkt) auf $\underline{V = \mathbb{R}^3}$

$$
\text{"}\times\text{"}: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.8}
$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $$
\begin{array}{rrl}
\underline{\text{antisymmetrisch}}: & \vec{u} \times \vec{v} = & -\vec{v} \times \vec{u} \quad \left(\Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}\right)\,, \\
\underline{\text{linear}}: & \vec{u} \times (a\vec{v} + b\vec{w}) = & a\,(\vec{u} \times \vec{v}) + b\,(\vec{u} \times \vec{w})\,.
\end{array}
$$

- Wenn wir "$\times$" auf einer ON Basis defeinieren, ist es für alle Vektoren auf $\mathbb{R}^3$ definiert:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{e}_1 & \times & \vec{e}_2 & = & \vec{e}_3 \\ {\scriptstyle 2} & & {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 3} & & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 2} \end{array} \quad \text{zyklisch} .$$

→ Figur 1 (Rechtshändige ON Basis)

In einer rechtshändigen ON Basis gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \times (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \\ &\overset{\text{linear}}{=} (u_1v_2 - u_2v_1)\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + (u_2v_3 - u_3v_2)\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} + (u_3v_1 - u_1v_3)\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} \\ &= \underline{(u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{e}_3}\,, \\ \leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v})_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_j v_k\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Total anti-sym. Epsilon-Tensor (3. Stufe: 3 Indizes)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn je 2 (oder mehr) Indizes gleich} \\ +1 & \text{, wenn } ijk \text{ zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{, wenn } ijk \text{ nicht zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \end{cases} \tag{1.10}$$

3 Indizes $\Rightarrow$ $3! = 6$ Permutationen:

+	-
ϵ_{123}	ϵ_{132}
231	321
312	213

Vorzeichen ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung. Skalarprodukt und Vektorprodukt spielen eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik, mit Ableitungen als Komponenten.

(geometrische) **Eigenschaften des Vektorprodukts**:

- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$,
- $0 \overset{!}{=} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$
  sowie $0 = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (denn $\vec{u} \to \vec{v}$, $\vec{v} \to \vec{u}$ oben, antisym.) (falls $\neq 0$!)
  $\Rightarrow$ $(\vec{u} \times \vec{v})$ ist senkrecht zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, d. h. zur von $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ aufgespannten Ebene (rechtshändig),

  → Figur 2 (Normale und Winkel von/zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$.)

- Flächenbestimmung:

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= (u_1v_2-u_2v_1)^2+(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2 \\
&= \ldots = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)\,, \\
\Rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}| &= |\vec{u}||\vec{v}|\sqrt{1-\cos^2\theta} = |\vec{u}||\vec{v}||\sin\theta|
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

= Fläche des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

→ Figur 3 (Parallelogramm $\vec{u}$, $\vec{v}$, θ.)

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x+\vec{e}_y) && \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\
\vec{v} &= \vec{e}_z && \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 1 \\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= 0 && \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \text{spannen Einheitsquadrat auf} \\
\vec{u}\times\vec{v} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x+\vec{e}_y)\times\vec{e}_z = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_y+\vec{e}_x) && |\cdot\vec{u}=0 \\
& && |\cdot\vec{v}=0 \\
|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 1 && \text{Fläche} = 1
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt, dass diese $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ eine neue ON Basis bilden.

- $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$, wenn:

$$
\begin{aligned}
&\vec{u}\parallel\vec{v} \\
&\Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}|\,(\pm1)\,\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \\
&\Rightarrow (\vec{u}\times\vec{v})_i = \sum_{j,k}\underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{anti}-}\underbrace{u_ju_k}_{sym.}(\pm1)\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}
\end{aligned}
$$

(oder mit: $\theta = 0,\ \pi$)

Kombinationen von $\left\{\begin{array}{l}\text{Skalarprodukt und Vektorprodukt ?}\\ \text{Vektorprodukt und Vektorprodukt ?}\end{array}\right.$

Spatprodukt: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ $\qquad V\times V\times V\to K$

- Zyklizytät $\quad\stackrel{1)}{=}\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})\quad\stackrel{2)}{=}\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ denn:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j,k}^{n} \epsilon_{ijk} v_j w_k$$

Idee: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$, endliche Summen können immer umgeordnet werden

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k,i}^{n} \epsilon_{jki} w_k u_i \qquad 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k \sum_{i,j}^{n} \epsilon_{kij} u_i v_j \qquad 2)$$

(Später: schreibe Spatprodukt mit Determinante)

- es gibt weitere Identitäten bei anti-zyklischer Vertauschung von $(\vec{v}\times\vec{w}) = -(\vec{w}\times\vec{v})$
- "Vertauschbarkeit" $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \overset{!}{=} (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$,
  denn: 2) oben, Skalarprodukt ist kommut. $= \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$
- Volumenbestimmung
  Volumen = Fläche $\times$ Höhe
  Höhe = $\cos\theta\cdot|\vec{u}|$ $\rightarrow$ Figur 4, Parallelepiped (= Spat)
  $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = \cos\theta|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|$
- das von $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ aufgespannte Spatvolumen ist $\neq 0$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind linear unabhängig
  (denn alle wechselseitigen Kreuzprodukte müssen $\neq 0$ sein)

Weitere Eigenschaften des Vektor- und Skalarproduktes:

- Graßmann-Identität

$$\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} \tag{1.12}$$

(Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Lagrange-Identität

$$(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)\cdot(\vec{v}_1\times\vec{v}_2) = (\vec{u}_1\times\vec{v}_1)\cdot(\vec{u}_2\times\vec{v}_2) - (\vec{u}_1\times\vec{v}_2)\cdot(\vec{u}_2\times\vec{v}_1) \tag{1.13}$$

(Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Jacobi-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} \tag{1.14}$$

(Beweis → Übung)

- Aus der Jacobi-Identität folgt, dass das Vektorprodukt i.A. nicht zyklisch ist
$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, d.h. Klammern sind wichtig!
Im Gegensatz dazu hatten wir $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

* Wir kommen später auf diese Formeln zurück in der Differential- und Integralrechnung in 3 Dimensionen.

* weitere Multiplikationen von Vektoren die $V \to V$ abbilden (in bel. Dim.):
lineare Abbildungen und Matrixmultiplikation

1.2 Matrizen

lineare Abbildung $M : \begin{array}{l} V \to V \\ \vec{v} \to \vec{w} = M(\vec{v}) \end{array}$ auf K-Vektorraum V, wenn gilt

$L\ 1$ $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V : \quad M(\vec{v} + \vec{w}) = M(\vec{v}) + M(\vec{w})\,,$

$L\ 2$ $\forall\, \vec{v} \in V, \forall a \in K : \quad M(a \cdot \vec{v}) = a \cdot M(\vec{v})\,.$

Darstellung der linearen Abbildung: Matrix

- wähle ON Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$, so dass $\vec{v} = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j = v_j \vec{e}_j$
$\Rightarrow\ \vec{w} = \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \vec{e}_k = M(\vec{v}) \overset{L\,1,2}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} v_j M(\vec{e}_j) \qquad |\vec{e}_i \cdot\,, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$
$\Rightarrow\ w_i = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_i M(\vec{e}_j) = M_{ij} v_j$, wobei $\vec{e}_i M(\vec{e}_j) \equiv M_{ij} \in K$, damit Resultat in K und M_{ij} Darstellung von M in Basis $\{\vec{e}_i\}$.

  Beispiele:

  - lineares Gleichungssystem: $\vec{w}$, M gegeben:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + \ldots + M_{1n}v_n \\ \vdots \\ M_{i1}v_1 + \ldots + M_{in}v_n \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \ldots + M_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1j} & \ldots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \vdots & \ddots & M_{ij} & \ddots & M_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & M_{nj} & \ldots & M_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_i \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_n \cdot \vec{v} \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{M}_i$ der i-te Zeilenvektor ist.

- Nullmatrix: $0_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$,
- Einheitsmatrix: $\mathbb{1}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $M_{ij} = \delta_{ij}$.

- Im Allgemeinen betrachten wir im folgenden nur quadratische Matrizen $M\,\square$.
- Rechteckige Matrizen (z.B. in der Finanzmathematik) $\left(\begin{array}{l} \updownarrow \text{Zeitreihen} \\ \updownarrow \text{Firmen} \end{array} \right)$

  Beispiele:

  -
  $$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \text{, also } M: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 .$$
  -
  $$M \quad - \quad n \times m \;\text{ Matrix: } \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n .$$

- Transponierte Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji}$
  (definiert für quadratisches und rechteckiges $M \quad \Rightarrow MM^\top$ quadratisch)

insbesondere für Vektoren:

$$\vec{v} \in V \text{ als } n \times 1 \text{ "Matrix": } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ SpaltenVektor}\,,$$
$$v^\top = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \text{ Zeilenvektor}\,. \tag{1.15}$$

- Skalarprodukt als Matrixprodukt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i = \begin{pmatrix} v_1, \dots, v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^\top w \qquad \text{Abbildung von } \mathbb{R}^n \to \underbrace{\mathbb{R}^1}_{=K}\,.$$

- <u>Symmetrische</u> Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = +M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,
  antisymmetrische Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = -M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.
- Operationen von Matrizen: M, N: $V \to V$
  - elementweises Addieren $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ wichtig: gleiche Dimension
  - mit Skalaren Multiplizieren $(aM)_{ij} = aM_{ij}$
- Hintereinanderausführung: $\vec{v} = N\vec{u}$, $\vec{w} = M\vec{v}$:

$$\begin{array}{rll} \Rightarrow\ \vec{w} = & M\,(N\vec{u}) \Rightarrow\ w_i = M_{ij} N_{jk} v_k & \\ \text{aber i.A. } \neq & N\,(M\vec{u}) \quad (= N_{ij} M_{jk} u_k) & \end{array}$$

ist <u>assoziativ</u>
A(BC)=(AB)C
und <u>distributiv</u>
A(B+C)=AB+AC

- Vertauschen von 2 Matrizen: <u>Kommutator</u> $[M, N] = MN - NM$
- Eigenschaften von "$\top$"
  * $\left(M^\top\right)^\top = M$
  * $(M+N)^\top = M^\top + N^\top$

* $(MN)^\top = N^\top M^\top$ $\quad \left(\text{denn } \begin{aligned} \left((MN)^\top\right)_{ij} &= M_{jk}N_{kj} = \left(N^\top\right)_{ik}(M)_{kj} \\ &= \left(N^\top M^\top\right)_{ij} \end{aligned}\right)$

$\Rightarrow$ z.B. $MM^\top$ ist symmetrisch

- In der Quantenmechanik brauchen wir Matrizen mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$
  $\rightarrow$ betrachte $K = \mathbb{C}$ Vektorraum, z.B. $V = \mathbb{C}^n$:
  - konjungierte Matrix $\quad (M^*)_{ij} = (M_{ij})^* \quad$ $*$ komplexe Konjugation
  - adjungierte Matrix $\quad \left(M^\dagger\right)_{ij} = (M_{ij})^\dagger = \left(M^\top\right)^*_{ij} \quad$ $\dagger$ $\underset{\text{(engl.dagger)}}{\text{Kreuz}}$
  - selbstadjungierte oder hermitesche Matrix $\quad M^\dagger = M$
- wegen $(z^*)^* = z$ hat "$\dagger$" dieselben Eigenschaften wie "$\top$"
  (Notation Mathematik: oft $z^* \rightarrow \bar{z}$, $M^\dagger \rightarrow M^*$)

Beispiel:
die Pauli-Matrizen sind hermitesch:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Funktionen von Matrizen

- viele wichtige Funktionen in der Physik besitzen eine Taylorreihendarstellung, die auf ganz $\mathbb{R}$ (oder sogar $\mathbb{C}$) konvergiert
  Beispiele:
  * $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
  * $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, etc.
    $(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$

  Damit definieren wir z.B. $\left(e^M\right)_{ij} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M^n)_{ij}$,
  wegen $AB \neq BA$ gilt aber i.A. $e^{AB} \neq e^{BA}$ (nicht kommutierende Matrizen)
  oder allgemeiner: $F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad \Rightarrow \quad F(M) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j M^j$.
- Insbesondere sind einfache Beispiele P_k Polynome vom Grad k:
  $a_j = 0 \quad \forall j > k: \quad P_2(M) = a\mathbb{1} + bM + cM^2$, wobei a, b und c Skalare $\in K$.

Das transponierte $M^\top$ einer Matrix M ist wichtig z.B. bei

Drehungen: lineare Abbildung (gegeben durch Matrixmultiplikation), die das Skalarprodukt invariant läßt (und damit insbesondere die $\underset{=\text{Länge}}{\text{Norm}}$ aller Vektoren!):

$$\begin{aligned} &\vec{x} \to \vec{x}' = O\,\vec{x} \quad (= Ox \text{ als Spaltenvektor) mit} \\ &\vec{x}\cdot\vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}'\cdot\vec{y}' = (x')^\top y' = (O\,x)^\top (O\,y) = x^\top O^\top O\,y \stackrel{!}{=} x^\top y \\ &\Rightarrow O^\top O = \mathbb{1}\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Matrizen, deren inverse Matrix $O^{-1} = O^\top$, heißen orthogonal. Es gilt auch $O\,O^\top = \mathbb{1}$.
(O: orthogonale Transformation)

- für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, z.B. $\mathbb{C}^n$ läßt sich mit $\vec{u}\,,\quad \vec{v} \in \mathbb{C}^n$: $\vec{u}^*\cdot\vec{v}$ ein (nicht kommutatives) Skalarprodukt definieren, das eine positiv definite Norm hat.
  Dies wird durch folgende lineare Abbildung invariant gelassen:

$$\begin{aligned} &\vec{u} \to \vec{u}' = U\vec{u}\,, \quad \vec{v} \to \vec{v}' = U\vec{v} \\ &\Rightarrow (\vec{u}')^* \cdot \vec{v}' = (Uu)^{\top *}\cdot Uv = u^{\top *}U^{\top *}Uv \stackrel{!}{=} u^{\top *}v \\ &\Rightarrow U^\dagger U = \mathbb{1}\,, \end{aligned} \tag{1.18}$$

solche Matrizen heißen unitär. Es gilt auch $UU^\dagger = \mathbb{1}$.
(U: unitäre Transformation)

Drehung der Basis
Sei $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ eine ON Basis: $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}$
$\Rightarrow\quad \vec{e}_i{}' = O\vec{e}_i$ bildet eine neue ON Basis da $\vec{e}_i{}'\cdot\vec{e}_j{}' = \delta_{ij}$, wenn O orthogonal ist $O^\top O = \mathbb{1}$, und da $1 = |\vec{e}_i| = |\vec{e}_i{}'|$.
Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$ mit kanonischer Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$: Drehung um

$$\underset{z\text{-Achse}}{D_{z,\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} & 0 \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{y\text{-Achse}}{D_{y,\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & 0 & -\mathrm{s} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{s} & 0 & \mathrm{c} \end{pmatrix}} \quad \underset{x\text{-Achse}}{D_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c} & -\mathrm{s} \\ 0 & \mathrm{s} & \mathrm{c} \end{pmatrix}} \tag{1.19}$$

um Winkel ϕ im positiven Sinn, $\mathrm{c} = \cos\phi$, $\mathrm{s} = \sin\phi$.

Abbildungen von Matrizen in den Körper K:

Spur (Sp) einer Matrix (engl. trace (tr)), M $n \times n$ Matrix:

$$\mathrm{Sp}M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = M_{ii} \quad \underline{\text{Summe der Diagonalelemente.}} \tag{1.20}$$

Es gilt:

* $\mathrm{Sp}\left(M^\top\right) = \mathrm{Sp}M$ ($\top$ "spiegelt" M an der Diagonalen, die Diagonale ist invariant) $\left(= \left(M^\top\right)_{ii} = M_{ii}\right)$
* $\mathrm{Sp}\,(MN) = \mathrm{Sp}\,(NM)$ für M, N $n \times n$ Matrizen
  (denn $\mathrm{Sp}\,(MN) = M_{ik}N_{ki} = N_{ki}M_{ik} = \mathrm{Sp}\,(NM)$)
  $\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(LMN) = \mathrm{Sp}\,(MNL) = \mathrm{Sp}\,(NLM)$
* Die <u>Spur ist invariant</u> unter einer <u>orthogonalen Transformation</u> der Basis:

- $\vec{e}_i' = O\vec{e}_i$, welche <u>Komponenten</u> hat $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$ <u>in der neuen Basis</u>?
-

$$\begin{aligned} \vec{v} =& v_i\vec{e}_i = v_i'\vec{e}_i' \qquad (\vec{v} \text{ wird nicht gedreht, nur die Basis}) \\ \Rightarrow \quad v_i' =& \vec{e}_i' \cdot \vec{v} = (Oe_i)^\top v = e_i^\top 0^\top v = \left(O^\top v\right)_i \\ \Leftrightarrow \quad \underline{v_i'} =& O_{ik}^\top v_k = \underline{O_{ki}v_k} \end{aligned} \tag{1.21}$$

- <u>Matrixelemente in alter Basis</u>: $M_{ij} = \vec{e}_i M \vec{e}_j$
  in neuer Basis:

$$\begin{aligned} M_{ij}' =& \vec{e}_i' \cdot M \cdot \vec{e}_j' = (Oe_i)^\top MOe_j = \vec{e}_i \left(O^\top MO\right) \vec{e}_j = \left(O^\top MO\right)_{ij} \\ \Leftrightarrow \quad \underline{M_{ij}'} =& O_{ik}^\top M_{kl} O_{lj} = \underline{O_{ki}O_{lj}M_{kl}} \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(M') = \mathrm{Sp}\left(O^\top MO\right) = \mathrm{Sp}\left(\underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}} M\right) = \mathrm{Sp}\,(M)$$

- dito für unitäre Trafos.

Tensoren: Verallgemeinerung von Vektoren, Matrizen, definiert durch Trafo:
$T_{i_1,...,i_k}$ ist ein <u>Tensor k-ter Stufe</u>, wenn er wie folgt unter O orthog. transformiert:

$$T'_{i_1,...,i_k} = O_{l_1 i_1} ... O_{l_k i_k} T_{l_1,...,l_k} \,. \tag{1.23}$$

Beispiele:

	Skalar $a \in K$	Vektor v_i	Matrix M_{ij}	ϵ_{ijk}-Tensor
Tensor	0-ter Stufe	1-ter Stufe	2-ter Stufe	3-ter Stufe

R_{ijkl} Riemann-Tensor $\rightarrow$ Allgemeine Relativitätstheorie
Tensor 4-ter Stufe

Determinante einer <u>quadratischer $n \times n$ Matrix M</u>: $\det(M) \in K$.

- Um det zu definieren schreiben wir M ausgedrückt durch n Spaltenvektoren:
$$M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ m_1 & m_2 & ,..., & m_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} .$$
- Die Determinante von M ist durch folgende Eigenschaften definiert [K. Weierstraß]:

D 1 <u>$\det(M)$ ist linear</u> in jeder Spalte:

a) $$\det\big(m_1, ..., m_j = m'_j + m''_j, ..., m_n\big) = \begin{array}{l} \det\big(m_1, ..., m'_j, ..., m_n\big) \\ +\det\big(m_1, ..., m''_j, ..., m_n\big) \end{array} ,$$

sowie

b) $\det(m_1, ..., \alpha m_j, ..., m_n) = \alpha \det(m_1, ..., m_j, ..., m_n)$ für $\alpha \in K$,

D 2 <u>$\det(M)$ ist alternierend</u>, d.h. $\det M = 0$ falls 2 Spalten gleich:
$$\det\left(m_1, ..., \underset{i-\text{te}}{m_i}, ..., \underset{j-\text{te}}{m_i}, ..., m_n\right) = 0 \,,$$

D 3 <u>$\det(M)$ ist normiert</u>, d.h. für die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n\times n}$ gilt:
<u>$1 = \det(\mathbb{1}_{n\times n})$ (=</u> $\det(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ für $\{\vec{e}_i\}$ die kanonische ON Basis).

* Aus *D* 1 folgt, dass sich 2 Matrizen, die sich in <u>genau einer</u> Spalte unterscheiden addieren lassen.
Im Allgemeinen gilt aber $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$, für A, B beliebige $n \times n$ Matrizen.

- Die folgenden Eigenschaften von det folgen aus *D* 1 - *D* 3,
für alle Beweise siehe z.B. Gerd Fischer, *Lineare Algebra*.

* Für M $n \times n$, $\alpha \in K$ gilt $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{punktweise mult.} \\ \text{aller Matrix-Elemente}}}{\det(\alpha M)} = \alpha^n \det(M)$.

* Für $M = (m_1, ..., m_n)$ mit $\exists i$: $m_i = \vec{0}$ gilt $\det(M) = 0$.

* $\det(m_1, ..., m_i, ..., m_j, ..., m_n) = -\det(m_1, ..., \underset{i-\text{te}}{m_j}, ..., \underset{j-\text{te}}{m_i}, ..., m_n)$

* det ist invariant unter Addition von Spalten mit $i \neq j$:
$\det(m_1, ..., \underset{i-\text{te}}{m_i + \alpha\, m_j}, ..., m_j, ..., m_n) = \det(m_1, ..., m_i, ..., m_j, ..., m_n)$.

* Ist M eine obere Dreiecksmatrix $M = \begin{pmatrix} x_1 & - \\ & \diagdown & | \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$, so gilt: $\det(M) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$

Satz: Die Determinante exisitiert und ist eindeutig, und es gilt für

$$\det(M_{ij}) = \underset{\substack{\sigma \\ \uparrow \text{ alle Permutationen}}}{\sum} \text{sign}(\sigma) M_{1\sigma(1)} \cdot ... \cdot M_{n\sigma(n)}\,, \tag{1.24}$$

[G.W. Leibniz].

Permutationen: σ ist eine Permutation von $(1, 2, ..., n) \to (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)) \equiv (i_1, i_2, ..., i_n)$

- <u>σ ist gerade</u> (symmetrisch), wenn sie aus einer geraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = +1$
- <u>σ ist ungerade</u> (antisymmetrisch), wenn sie aus einer ungeraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = -1$
- Wir können sign (Permutationen) mit dem <u>Levi-Cevita-Symbol</u> schreiben (total anti-sym. Tensor n-ter Stufe):

$$\epsilon_{i_1 ... i_n} = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ gerade Permutation} \\ -1 & \sigma \text{ ungerade Permutation} \\ 0 & 2 \text{ oder mehrere Indizes gleich (also \underline{keine} Permutation)} \end{cases} \tag{1.25}$$

$$\Rightarrow \det(M_{ij}) = \left(\sum_{i_1, ..., i_n = 1}^{n} \right) \epsilon_{i_1 ... i_n} M_{1 i_1} ... M_{n i_n} \tag{1.26}$$

Beispiel $n = 2$:

$\exists\, n! = 2$ Permutationen $\begin{array}{ll} (1,2) \to (1,2) & \text{Identität, gerade (0 Paar vertauscht.)} \\ (1,2) \to (2,1) & \text{ungerade (1 Paar vertauscht)} \end{array}$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = +M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \underbrace{\epsilon_{12}}_{=1} M_{11}M_{22} + \underbrace{\epsilon_{21}}_{\substack{=-1 \\ (\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0)}} M_{12}M_{21}$$

Beispiel $n = 3$:
$\exists\ n! = 3! = 6$ Permutationen, wir kennen ϵ_{ijk} schon (1.10), (zeige, dass es daselbe ist, wie Levi-Cevita.)
$\Rightarrow\ \det(M) = \epsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}\,,$

oder
$$\det(M_{ij}) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = M_{11}M_{22}M_{33} + M_{12}M_{23}M_{31} + M_{13}M_{21}M_{32}$$
$$-M_{13}M_{22}M_{31} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{12}M_{21}M_{33}$$

$=$ Sarrussche Regel $\searrow + \nearrow -$

- für $n \geq 4$ gibt es keine einfache Regeln mehr

Weitere Eigenschaften für beliebiges n:

* $\det\left(M^\top\right) = \det M$

$$\begin{aligned} \det\left(M^\top\right) &= \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) M_{\sigma(1)1} \ldots M_{\sigma(n)n} && \hookleftarrow \text{Umordnung} \\ &= \sum_\sigma \operatorname{sign}\left(\sigma^{-1}\right) M_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots M_{n\sigma^{-1}(n)} = \det(M)\,, && \text{da } \sigma \to \sigma^{-1} \text{ bijektiv ist} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Alle Eigenschaften von det gelten auch für Zeilenvektoren (inkl. die Definition darüber)

* Multiplikationssatz für Determinanten

$$M\,,\ N\ n \times n\ \Rightarrow \det(M \cdot N) = \det(M)\det(N) \tag{1.27}$$

$\Rightarrow$ Reihenfolge der Matrizen in der det egal
Insbesondere folgt $= \det(N \cdot M)$

und für invertierbares M:

$$\exists\ M^{-1}\ :\ MM^{-1} = \mathbb{1}\ \Rightarrow\ \det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{\det(M)}\ \left(= (\det(M))^{-1}\right) \tag{1.28}$$

denn: $M = \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & \ldots & m_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ mit $\begin{matrix} | \\ m_1 \\ | \end{matrix} = M_{j1}$ etc.

dito $N = \begin{pmatrix} | & & | \\ n_1 & \ldots & n_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ mit $\begin{matrix} | \\ n_i \\ | \end{matrix} = N_{ji}$ etc.

$$(M \cdot N)_{ij} = M_{ik} N_{kj} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ M_{ik_1} N_{k_1 1} & M_{ik_2} N_{k_2 1} & \ldots & M_{ik_n} N_{k_n 1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l}\\ \text{Linearkombination von Vektoren } m_{kn} \uparrow \\ \\ \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ \det(M\cdot N) \underset{\text{det Linear}}{=} & \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} \det\left(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}\right) N_{i_1 1} \ldots N_{i_n n} \\ \underset{\text{det antisym.}}{=} & \sum_{i_1,\ldots,i_n} \epsilon_{i_1\ldots i_n} \det\left(m_1,\ldots,m_n\right) N_{i_1 1}\ldots N_{i_n n} \\ = \ & \det(M)\cdot\det(N)\end{aligned}$$

- wie schon die Spur ist auch die Determinante invariant unter Orthogonalen (und unitären) Transformationen:

$$\begin{array}{l} M' = O^\top M O \\ \text{mit } O^\top O = \mathbb{1} \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} \det(M') = \ & \det\left(O^\top M O\right) \\ = \ & \det\Big(\underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}} M\Big) = \det(M) \end{aligned}$$

dito für $M' = U^\dagger M U$ mit $U^\dagger U = \mathbb{1}$.
(oder sogar für jede Ähnlichkeits-trafo $M' = P^{-1} M P$ mit $P^{-1}P = \mathbb{1}_{n\times n}$)

Eigenschaften von inversen Matrizen:
Falls es für eine $n\times n$ Matrix M eine $n \times n$ Matrix N gibt mit $NM = \mathbb{1}_{n\times n}$, dann ist $N \equiv M^{-1}$ die inverse Matrix zu M. M heißt dann nicht singulär, regulär oder invertierbar.

* es gilt $MN = \mathbb{1}_{n\times n}$ (Rechtsinverse = Linksinverse)
(denn: $w = Mv \ \Rightarrow \ Nw = NMv = v \ \Rightarrow \ w = Mv = MNw$
$\Rightarrow \ (MN)_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{oder} \quad MN = \mathbb{1}_{n\times n}$)

* wenn M^{-1} exisitiert, ist dies eindeutig
(denn: seien N, N' beides inverse, so gilt:
$N' = N'\mathbb{1}_{n\times n} = N'(MN) = \mathbb{1}_{n\times n} N = N$)

* $\boxed{\left(M^{-1}\right)^{-1} = M}$ (denn $MM^{-1} = \mathbb{1}_{n\times n}$ also $M = \left(M^{-1}\right)^{-1}$)

* $\boxed{\left(M_1 M_2\right)^{-1} = M_2^{-1} M_1^{-1}}$ (vertauscht die Ordnung wie $\top$, $\dagger$)
(denn: $M_2^{-1} M_1^{-1} M_1 M_2 = M_2^{-1} M_2 = \mathbb{1}_{n\times n}$, also $M_2^{-1}M_1^{-1} = \left(M_1 M_2\right)^{-1}$)

- wir kennen Beispiele für reguläre Matrizen bereits:

$$\begin{array}{lll} \text{orthogonal } \sim, & \text{mit } O^\top O = \mathbb{1}_{n\times n}, & \text{d.h. } O^\top = O^{-1} \ \Rightarrow \ OO^\top = \mathbb{1} \\ \text{unitär } \sim, & \text{mit } U^\dagger U = \mathbb{1}_{n\times n}, & \text{d.h. } U^\dagger = U^{-1} \ \Rightarrow \ UU^\dagger = \mathbb{1} \end{array}$$

- *Beispiel* dafür, dass Matrizen zu sich selbst invers sein können (und $\neq \mathbb{1}_{n\times n}$ selbst sind):
  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{n\times n}$, d.h. $\sigma_x^{-1} = \sigma_x$
  dasselbe gilt für σ_y und σ_z
- Wie findet man die inverse einer Matrix (wenn sie existiert)?
  Dies hängt eng mit der allgemeinen Berechnung von Determinanten zusammen!

Berechnung von Determinanten für allgemeine Dimension

1. <u>Laplacescher Entwicklungssatz</u> M $n \times n$ Matrix

   a) Entwicklung nach der <u>j-ten Spalte</u>:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det\left(\hat{M}_{ij}\right)}_{\equiv \text{Kofaktor: cof}(M)_{ij}}, \tag{1.29}$$

   wobei $\hat{M}$ wie M ohne i-te Zeile und ohne j-te Spalte ist, d.h. $(n-1)\times(n-1)$ Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & \cancel{M_{1j}} \dots & M_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \cancel{M_{i1}} & \dots & \cancel{M_{ij}} \dots & \cancel{M_{in}} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & \cancel{M_{in}} \dots & M_{nn} \end{pmatrix} ; \; (-1)^{i+j} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & - & + & - & \\ \hline - & + & - & + & \\ \hline + & - & + & & \\ \hline & & & + & \\ \hline & & & & + \\ \hline \end{array}$$

Spezialfall einer <u>Hankel</u>matrix $A_{ij} = A_{i+j}$
<u>Toeplitz</u>matrix $B_{ij} = B_{i-j}$

   b) Entwicklung nach <u>i-ten Zeile</u>:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} (-1)^{i+j} \det\left(\hat{M}_{ij}\right), \tag{1.30}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{denn aus Def.:} \quad \det M = & \sum\limits_{i_1,\dots,i_n} \epsilon_{i_1 \dots i_n} M_{1i_1} \dots M_{ni_n} \\ = & \sum\limits_{i_i=1}^{n} M_{ii_i} \underbrace{\sum_{i_1,\dots,\cancel{i_i},\dots,i_n} \underbrace{\epsilon_{i_1\dots i_n}}_{\pm 1\, \epsilon_{i_1\dots\cancel{i_i}\dots i_n}} M_{1i_1} \dots \cancel{M_{ii_i}} \dots M_{ni_n}}_{\pm \det \hat{M}_{ij}} \end{array}\right)$$

   a) $\Rightarrow$ b) durch $\top$

Beispiel:
- wähle immer Zeile (Spalte) mit vielen Nullen:

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&\boxed{0}\end{vmatrix} = \begin{cases} +0\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix} = 27 \\[2em] +0\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix} = 27 \end{cases}$$

c) Entwicklung nach Blöcken:
entwickle $n \times n$ Matrix nach $m \times m$ Unterblöcken $(m < n)$
– es gibt $N = \binom{n}{m}$ Möglichkeiten Unterblöcke zu wählen:

$$\det M = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_\rho \det B_j \det C_j \,, \tag{1.31}$$

wobei

ϵ_ρ	Vorzeichen um Zeilen von B in diese Reihenfolge zu bringen
$\det C_j$	Komplementäre Matrix: M nach Streichung der Zeilen und Spalten von B

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p \end{pmatrix} \quad \text{in } 2\times 2 \text{ Blöcke: } \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$$

$$\Rightarrow \det M = +\begin{vmatrix}a&b\\e&f\end{vmatrix}\begin{vmatrix}k&l\\o&p\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}a&c\\e&g\end{vmatrix}\begin{vmatrix}j&l\\n&p\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a&d\\e&h\end{vmatrix}\begin{vmatrix}j&k\\n&o\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}b&c\\f&g\end{vmatrix}\begin{vmatrix}i&l\\m&p\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b&d\\f&h\end{vmatrix}\begin{vmatrix}i&k\\m&o\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}c&d\\g&h\end{vmatrix}\begin{vmatrix}i&j\\m&n\end{vmatrix}$$

2. Gaußscher Algorithmus (sehr effektiv für $n \geq 4$)
Idee: bringe Matrix M durch Zeilen- (oder Spalten-) umformungen auf obere Dreiecksmatrix-Form, ändert nicht , aber dann $\det M$ = Produkt der Diagonalelemente:
Beispiel:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{vmatrix} = +\begin{vmatrix}3&1&2\\6&4&5\\0&7&8\end{vmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2)\\ \leftarrow + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}3&1&2\\0&2&1\\0&7&8\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-\frac{7}{2})\\ \leftarrow +\end{matrix} = \begin{vmatrix}3&1&2\\0&2&1\\0&0&\frac{16-7}{2}\end{vmatrix}$$
$$= 3\cdot 2\cdot \frac{9}{2} = 27$$

Anwendung Blockmatrizen

- gegeben A, B, C, D $n \times n$ Matrizen

  $$\boxed{\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}}$$

  (denn: Laplaceentwicklung nach Blöcken)

- für A regulär ($\exists\, A^{-1}$) gilt:

  $$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right)}$$

  (denn: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$, benutze $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ sowie Eigenschaften oben)

- außer der Spur und der Determinante gibt es weitere Abb. $M \to K$ Körper

* für A $2n \times 2n$ antisymmetrisch deiniere die
Pfaffsche Determinante (engl. Pfaffian):

$$\begin{aligned} \mathrm{Pf}(A) =& \frac{1}{2^n n!} \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} A_{i_1 i_2} \dots A_{i_{2n-1} i_{2n}} \\ (\text{vgl. } \det(A) =& \quad \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} A_{1\, i_1} A_{2\, i_2} \dots A_{2n\, i_{2n}}) \end{aligned}$$

und es gilt $\boxed{(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det(A)}$.

Anwendung: $\mathrm{Pf}A \text{ ''='' } \det\tilde{A}$, $\tilde{A}$ $n \times n$ Matrix mit $\tilde{A}_{ij}$ Quaternionen, Majorana-Fermionen

Bestimmung der Inversen einer Matrix (falls diese existiert!)

- brauchen $\underline{\det M \text{ und Kofaktor-Matrix}}$ $(-1)^{i+j}\det\hat{M}_{ij}$ dazu:

$$\det M = \sum_{j_1, \dots, j_i, \dots, j_n} \epsilon_{j_1 \dots j_n} M_{1 j_1} \dots \underbrace{M_{i j_i}}_{i-\text{te}} \dots M_{n j_n}$$

betrachte für $k \neq i$ für festes i

$$f_i(k) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \underbrace{\epsilon_{j_1 \dots j_n}}_{\text{antisymm. u. Vert.}} \overset{\text{Argument } k \downarrow \downarrow \text{ Index } i}{M_{1 j_1} \dots M_{k j_i} \dots M_{k j_k} \dots M_{n j_n}} = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow$
symm. u. Vert. v. j_i und j_k

für $f_i(i) = \det M$, d.h. $f_i(k) = \delta_{ki} \det M$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} M_{kj_i} \underbrace{\sum_{j_1,\ldots,\cancel{j_i},\ldots,j_n} \epsilon_{j_1\ldots j_n} M_{1j_1}\ldots\cancel{M_{ij_i}}\ldots M_{nj_n}}_{=(\mathrm{adj}M)_{j_i i} = (\mathrm{Cof}\,(M))_{ij_i}}\,, \qquad \text{siehe (1.29)}$$

$$\text{Adjunkte} = (\text{Kofaktor})^\top$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i=1}^{n} M_{kj_i} \,(\mathrm{adj}M)_{j_i i} = (\mathbb{1}_{n\times n})_{ki} \det M$$

$\Rightarrow$ haben inverse Matrix $\uparrow$ zu M falls $\det M \neq 0$.

Satz: $\det M \neq 0 \;\Leftrightarrow\; M$ ist regulär, d.h. besitzt M^{-1}:
"$\Rightarrow$"$\det M \neq 0$

$$\Rightarrow \; M^{-1} = \frac{\mathrm{adj}M}{\det M}$$

"$\Leftarrow$" $\exists\, M^{-1}: \; MM^{-1} = \mathbb{1}:$

$$\Rightarrow \; \det\left(MM^{-1}\right) = \det M \cdot \det M^{-1} = 1$$

da M^{-1} exisitiert, ist $\det M^{-1} < \infty \;\Rightarrow\; \det M \neq 0$.

Beispiel: $n=2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = ad - bc \overset{!}{\neq} 0$ $\begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$

$\Rightarrow \; \mathrm{cof}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \text{check!}$$

Matrix-Inversion durch Gauß-Jordan Verfahren

- dient auch zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} Mv = w = \mathbb{1}w\,,\ \det M \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, M^{-1}: \quad M^{-1}Mv = v = M^{-1}w \\ \Leftrightarrow\; M_{11}v_1 + M_{12}v_1 + \ldots + M_{1n}v_n = w_1 \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \ldots + M_{nn}v_n = w_n \end{aligned}$$

* Gleichungssysteme ändern sich nicht, wenn wir:

- Gleichungen vertauschen,
- Gleichungen mit einer konstanten $c \neq 0$ multiplizieren,
- Linearkombinationen von Gleichungen bilden.

Beginne mit der 1. Spalte, o.B.d.A. $M_{11} \neq 0$

- teile 1. Gl. durch M_{11}
- Subtrahiere $M_{j1}\cdot$ 1. Gl. von den übrigen Gleichungen

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1v_1 + ... \\ 0v_1 + M'_{22}v_2 \\ \vdots \\ 0v_1 + \end{array}$$

- wähle die 2. Spalte, o.B.d.A. $M'_{22} \neq 0$, normiere durch Gl.$\cdot 1/M'_{22}$, usw

* wir machen dieselben Umformungen auf der rechten Seite mit $\mathbb{1}$
$\Rightarrow$ am Ende $\mathbb{1}v = M^{-1}w$.
(Diese Umformungen lassen sich auch durch Matrixmult. darstellen.)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rcccc}
\hline
\frac{1}{2}\cdot & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
-\mathrm{I} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
\hline
 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
2\cdot & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & -3 \\
 & 0 & 1 & -1 & 2
\end{array}$$

$$\text{check: } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung lineare Gleichungssysteme:

$$\text{es gilt} \qquad \begin{array}{c} M \text{ ist regulär} \\ \text{d.h. } \exists\, M^{-1} \\ \text{d.h. } \det M \neq 0 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{c} \text{das lin. Gleichungssystem} \\ M\,v = 0 \\ \text{hat nur die triviale Lsg: } v = 0 \end{array}$$

(denn $\Rightarrow\ \exists\, M^{-1}$, mult. $M\,v = 0\ \Rightarrow\ M^{-1}M\,v = v = 0$
"$\Leftarrow$" müssen Injektivität zeigen: sei $w = M\,v$, dann ist v eindeutig:
Annahme $\exists\, v_{1,2}$ mit $w = M\,v_1 = M\,v_2\ \Rightarrow\ M\,(v_1 - v_2) = 0\ \Rightarrow\ v_1 - v_2 = 0$)

Konsequenz: Das lineare Gleichungssystem $M\,v = w$ hat eine eindeutige Lösung $v = M^{-1}w$ genau dann, wenn $\det M \neq 0$

* Falss $\det M = 0$ gibt es nicht triviale Lösungen v_a mit $M\,v_a = 0$. Also können wir zu einer speziellen Lösung v_s mit $M\,v_s = w$ bel. Linearkomb. der v_a addieren:
Lösung $v = \sum\limits_a c_a v_a + v_s$ (wie bei lin. Diff. gl.).

Anwendung lineare Unabhängigkeit

- die Menge von n Vektoren $\vec{m}_{i=1,\dots,n}$ in einem V K-Vektorraum mit $\dim V = n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\det\,(m_1, m_2, \dots, m_n) \neq 0$.

  (denn lin. unabh.: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \vec{m}_i = \vec{0}$ hat nur die triviale Lsg.: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{0}$

  $\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & \dots & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{0}$, mit obigen Satz ist dies equiv. zu $\det(\quad) \neq 0$)

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

I.A. verändert die lineare Abb. M den Vektor auf den sie angewendet wird $M\,\vec{v} = \vec{w}$ mit $\vec{w} \neq \vec{v}$ (z.B. bei Drehungen). Es gibt besondere Vektoren, die in sich selbst übergehen (z.B. die Drehachse), diese charakterisieren M.

- Sei M eine Matrix, die auf den K-Vektorraum V wirkt.
  Gibt es ein $\lambda \in\ K$ und ein $\vec{v} \in\ V$ mit $\underline{\vec{v} \neq \vec{0}}$, so dass $\boxed{M\,\vec{v} = \lambda\vec{v}}$,
  so heißen $\underline{\lambda \text{ Eigenwert von } M}$, $\underline{\vec{v} \text{ Eigenvektor von } M}$ mit Eigenwert λ.

* Der Eigenwert $\lambda = 0$ kann vorkommen:
$\exists\,\vec{v} \neq \vec{0}\ :\ M\,\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = 0$ ($\Rightarrow\ \det M = 0$), aber der Nullvektor ist kein Eigenvektor!

* ein Eigenvektor ist nicht eindeutig bestimmt:
für $\alpha \in\ K$, $\alpha \neq 0$ ist auch $\alpha \cdot \vec{v}$ Eigenvektor ($\alpha M\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v}$)

Beispiele $M = \mathbb{1}\ \Rightarrow\ \lambda = 1$ ist Eigenwert $\forall\,\vec{v} \in\ V$
insbesondere für alle n linear unabhängige Basisvektoren

* Wir hatten bereits folgende Equivalenzen gesehen:

i) M ist regulär
ii) $\det M \neq 0$
iii) die Spalten (Zeilen) von M sind linear unabh.
iv) $M\,\vec{v} = 0$ hat nur die Lösung $\vec{v} = \vec{0}$

zusätzlich gelten als equivalent:

v) $M\,\vec{v}_1 = M\,\vec{v}_2 \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 = \vec{v}_2$
vi) alle Eigenwerte λ_i von M sind $\neq 0$

(denn iv) $M\,\vec{v} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \nexists\, \vec{v} \neq \vec{0}$ mit $M\,\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ vi))

Wie bestimmen wir Eigenwerte und Eigenvektoren?
Suche $M\,\vec{v} = \lambda\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$
$\Leftrightarrow\; (M - \lambda\mathbb{1})\,\vec{v} = \vec{0}\,,\; \vec{v} \neq \vec{0}$

$$\Leftrightarrow\; \det \underbrace{(M - \lambda\mathbb{1})}_{M_{ij}-\lambda\delta_{ij}} = 0 \tag{1.32}$$

* für einen n-dim. Vektorraum V ist:

$$\underset{\in K}{P_n}(\lambda) \equiv \det(M - \lambda\mathbb{1}) = \det(m_1 - \lambda\vec{e}_1, ..., m_n - \lambda\vec{e}_n) \tag{1.33}$$

ein Polynom in λ von Grad n und heißt charakteristisches Polynom (schreibe und multipliziere det aus)

* $\rightarrow$ wir wollen die Säkulargleichung $\boxed{P_n(\lambda) = 0}$ lösen

* Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom von Grad n $P_n(\lambda)$ mit reellen (o. komplexen) Koeffizienten hat genau n Nullstellen $\lambda_i \in \underline{\underline{\mathbb{C}}}$.
hier $P_n(\lambda) = (-1)^n\,(\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n)$, λ_i nicht notwendig verschieden

$\rightarrow$ damit wir alle Lösungen von $P_n(\lambda) = 0$ als Eigenwerte nutzen können, betrachten wir nun i.A. $K = \mathbb{C}$.
(eine Matrix M mit $M_{kl} \in \mathbb{R}$ kann komplexe Lsg. λ_i haben,
obwohl $\det(M - \lambda) = P_n(\lambda) \in \mathbb{R}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$)

* zu gegebenen λ_i können wir dann Eigenvektoren $\vec{v}_i$ finden mit $(M - \lambda_i\mathbb{1})\,\vec{v}_i = 0$
Normiere diese zur Länge $1 = |\vec{v}_i| \quad = \left(\underset{\text{kompl. Skalarprod.}}{v_i^* v_i = v_i^\dagger v_i} \right)$

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = +i\sqrt{2}\,,\ \lambda_2 = -i\sqrt{2}\,,\ M$ hat keine reellen Eigenwerte!

$$(M - i\mathbb{1}\sqrt{2})\vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv_1\sqrt{2} + v_2 \\ -2v_1 - iv_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow v_2 = i\sqrt{2}v_1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Normierung: $|\vec{v}|^2 = 1{\cdot}1{+}i(-i)2 = 3$

$$(M - (-i)\mathbb{1}\sqrt{2})\vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_1\sqrt{2} + w_2 \\ -2w_1 + iw_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow w_2 = -i\sqrt{2}w_1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ist normiert.

"<u>Skalarprodukt</u>" hier $\vec{v}_1^\dagger \cdot \vec{v}_2 = (v_1^*, v_2^*) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \left(1 \cdot 1 + i \cdot i\sqrt{2}^2\right) \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sind linear unabh.

<u>ist das immer so?</u>

* <u>Eigenvektoren</u> $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $(\neq \vec{0})$ mit <u>Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$</u> sind <u>linear unabh.</u>:
  sei $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, $\qquad M\cdot$, $\lambda_1\cdot$, $\lambda_2\cdot$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{v}_2 &= \vec{0} \\ \lambda_1\left(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2\right) &= \vec{0} \\ \lambda_2(\qquad\qquad\qquad) &= \vec{0} \end{aligned} \quad \stackrel{I-II}{\Rightarrow} \quad \begin{aligned} &\alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{\vec{v}_2}_{\neq\vec{0}} = \vec{0} \\ &\text{dito für } \alpha_1 \end{aligned}$$

* es gilt sogar: $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}$ Eigenvektoren mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind paarweise lin. unabh. (Beweis mit Induktion), so dass für $\dim V = m$ gilt: wenn $m = n$ bilden eine Basis.

* Es ist equivalent:

  i) $\exists$ Basis von V aus Eigenvektoren von M

  ii) $\exists$ Basis von V in der $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, d.h. $M_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ (keine Summe)

  Matrizen M für die dies gilt, heißen <u>diagonalisierbar</u>.

Eigenschaften der Eigenwerte und des charakteristischen Polynoms

*

$$\det(M) = \lambda_1 ... \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.34}$$

det von M ist das <u>Produkt ihrer Eigenwerte</u>

(denn: $\begin{aligned} P_n(\lambda) = & \det(M - \lambda \mathbb{1}_{n\times n}) = \det \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 - \lambda e_1 & ... & m_n - \lambda e_n \\ | & & | \end{pmatrix} \\ = & (-)^n (\lambda - \lambda_1)...(\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$

$\rightarrow$ nehme auf beiden Seiten nur die Terme der Ordnung λ^0 (setze $\lambda = 0$)

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & ... & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} = (-)^n(-\lambda_1)...(-\lambda_n) = \lambda_1...\lambda_n$)

*

$$\mathrm{Sp} M = \lambda_1 + ... + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.35}$$

Spur von M ist die <u>Summe ihrer Eigenwerte</u>

(denn: benutze Linearität von det in $P_n(\lambda)$ und betrachte Terme der Ordnung λ^{n-1} in $P_n(\lambda)$:

$(-\lambda)^{n-1} \left[\det \begin{pmatrix} | & & & \\ m_1, & e_2, & ..., & e_n \\ | & & & \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} & | & & \\ e_1, & m_2, & ..., & e_n \\ & | & & \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} & & & | \\ e_1, & ..., & e_{n-1}, & m_n \\ & & & | \end{pmatrix} \right]$

$= (-)\lambda^{n-1} \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = (-)^{n+1} \lambda^{n-1} (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)$)

d.h. es gilt $P_n(\lambda) = (-)^n (\lambda^n - \lambda^{n-1} \mathrm{Sp}(M) + ...) + \lambda^0 \det(M)$

Beispiel 2×2 (kennen alle Koeffizienten von $P_2(\lambda)$):

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{aligned} P_2(\lambda) = & \det(M - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ = & \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a + d)}_{\mathrm{Sp}(M)} + \underbrace{ad - bc}_{\det(M)} \end{aligned}$$

* Die Eigenwerte von M vor und nach einer orthogonalen (unitären) Transformation sind dieselben, d.h. sie sind invariant
  (denn: $M' = O^\top M O$, $v' = O^\top v$, mit v Eigenvektor $M\,v = \lambda v$
  $\Rightarrow \underline{M' v'} = O^\top M \underbrace{O O^\top}_{=\mathbb{1}} v = O^\top M\, v = O^\top \lambda v = \lambda v'$
  d.h. die transf. Matrix M' hat einen Eigenvektor v' mit demselben Eigenwert λ.

Dasselbe gilt für unitäre Trafos, der Beweis, dass $\vec{e}_i' = U\,\vec{e}_i \;\Rightarrow\; v' = U^\dagger v$ geht genauso wie in (1.21))

Satz von Caley-Hamilton:
Jede $n \times n$ Matrix erfüllt ihre eigene Säkulargleichung

$$P_n(M) = 0_{n\times n} \tag{1.36}$$

(hier ist gemeint: $P_n(\lambda) = \sum\limits_{l=0}^{n} a_l \lambda^l \;\rightarrow$ Polynom einer Matrix M
(nicht $P_n(M) = \det(M - M\mathbb{1}) \in\; K$!)

Idee: führe die Wirkung von $P_n(M)$ auf Eigenvektoren zurück:
Annahme: wir können einen beliebigen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ in eine Basis aus Eigenvektoren darstellen $\vec{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \vec{v}_k$, mit $Mv_k = \lambda v_k$
$\Rightarrow\;\; \forall\, k = 1, ..., n$ gilt $P_n(M)\vec{v}_k = \sum\limits_{l=0}^{n} a_l M^l \vec{v}_k = \sum\limits_{l=0}^{n} a_l \lambda_k^l \vec{v}_k = \underbrace{P_n(\lambda_k)}_{=0}\,\vec{v}_k = \vec{0}$
$\Rightarrow\;\; P_n(M)\vec{v} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \forall\, \vec{v} \in V \quad P_n(M)\vec{v} = \vec{0}$ d.h. $P_n(M) = 0_{n\times n}$)

Eigenschaften von Matrizen

* Sei $\underline{M \text{ symmetrisch } M = M^\top}$ mit $M_{ij} \in \mathbb{R}$, $^{(\Rightarrow\, M = M^\dagger)}$ dann gilt:

  i) die Eigenwerte von M sind reell ($\rightarrow$ betrachte M auf $K = \mathbb{R}$-Vektorraum)
  ii) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(denn:

– zu i) sei $v \in V$ mit $Mv = \lambda v$, betrachte das Skalarprodukt:
$\left(v^\dagger M v\right)^\dagger = v^\dagger \left(v^\dagger M^\dagger\right)^\dagger = v^\dagger M v = \lambda v^\dagger v$, $v^\dagger v = |\vec{v}|^2 > 0$
sowie $= \left(v^\dagger \lambda v\right)^\dagger = \lambda^* \left(v^\dagger v\right)^\dagger = \lambda^* v^\dagger v \;\Rightarrow\; \lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}$
Die Kombination $v^\dagger M v$ heißt <u>quadratische Form</u> (auf $\mathbb{R}$: $v^\top M v$).

– zu ii) Sei $Mv_1 = \lambda_1 v_1$, $Mv_2 = \lambda_2 v_2$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\Rightarrow\;\; (Mv_2)^\top = v_2^\top \underbrace{M^\top}_{=M} = \lambda_2 v_2^\top \qquad$ (Spaltenvektor)
Betrachte $v_2^\top M v_1 = v_2^\top \lambda_1 v_1 = \lambda_2 v_2^\top v_1 \;\Rightarrow\; \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} v_2^\top v_1 = 0,$

also ist $v_2 \perp v_1$ bzgl. unseres reellen Skalarproduktes.)

* Bei einer orthogonalen Matrix O mit $O_{ij} \in \mathbb{R}$ gilt für alle Eigenwerte $|\lambda_i| = 1$
$i = 1, ..., n$
d.h. liegen auf dem Einheitskreis

(denn: sei v Eigenvektor: $Ov = \lambda v \overset{\dagger}{\Rightarrow} v^\dagger O^\dagger = v^\dagger O^\top = \lambda^* v^\dagger$
$\Rightarrow v^\dagger \underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}_{n\times n}} v = v^\dagger \lambda^* \lambda v = v^\dagger v = |\vec{v}|^2 > 0$
$\Rightarrow |\lambda|^2 = 1$
Dasselbe gilt für die Eigenwerte einer unitären Matrix U mit $U_{ij} \in \mathbb{C}$.)

* Sei M hermitesch, $M = M^\dagger$, mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$, dann gilt:

i) die Eigenwerte von M sind reell
ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal (bzgl. komplexem Skalarprodukt)

Der Beweis geht wie bei reell-symmtrischen Matrizen, mit komplexen Skalarprodukt in ii).
In der Quantenmechanik wird die Hamiltonfuntion durch einen Operator = Matrix ersetzt. Ist dieser hermitesch, so sind dessen Eigenwerte = Energien reell!
(aber: reelle Eigenwerte $\not\Rightarrow$ $M = M^\dagger$)
Bsp $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$

Diagonalisierung von Matrizen:

- Wir hatten bereits gezeigt, dass für eine orthogonale Trafo O gilt (1.21) $\vec{e}_i' = O\vec{e}_i$
$\Rightarrow$ die Matrixelemente M_{ij} und die Vektorkomponenten v_i transformieren wie ein Tensor 2. bzw. 1. Stufe in die neue Basis:
$M'_{ij} = \left(O^\top M O\right)_{ij} = O_{ki} O_{lj} M_{kl}$
$v'_i = \left(O^\top v\right)_i = O_{ki} v_k \qquad \Rightarrow \; v^\top \to (v')^\top = v^\top O$
Skalare sind invariant.

* Wir konstruieren jetzt zu jeder reellen symmetrischen $n \times n$ Matrix M eine orthogonale Trafo O, die diese diagonalisiert:

wir nehmen an, dass alle n Eigenwerte λ_i von M paarweise verschieden sind $\Rightarrow$ die Eigenvektoren $\vec{v}_i$ sind paarweise orthogonal und bilden eine Basis (Seite 32), wir wählen diese als orthonormal $\vec{v}_i \to \vec{v}_i / |\vec{v}_i|$
(sollten 2 oder mehr λ_i entarten, nehmen wir an, dass sich die $\vec{v}_i$ in diesem entarteten Unterraum trotzdem ON wählen lassen)

definiere $O \equiv \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$, dann gilt

$$M = \begin{pmatrix} - & m_1 & - \\ & \vdots & \\ - & m_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^\top v_1 & & m_1^\top v_n \\ m_2^\top v_1 & \dots & m_2^\top v_n \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{m_n^\top v_1}_{Mv_1} & \dots & \underbrace{m_n^\top v_n}_{Mv_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow O^\top M O = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^\top v_1 & \dots & \lambda_n v_1^\top v_1 \\ \lambda_1 v_2^\top v_1 & & \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 v_n^\top v_1 & \dots & \lambda_n v_n^\top v_n \end{pmatrix}$$

wegen $v_i^\top v_j = \delta_{ij}$ gilt :

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 & & & 0 \\ & \lambda_2 \cdot 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \cdot 1 \end{pmatrix}$$

aus diesem Grund gilt, dass $O^\top O = \mathbb{1}_{n \times n}$.

D.h. diese orthogonale Trafo diagonalisiert $M \to O^\top M O = M'$.

Die Diagonalelemente von M' sind die Eigenwerte von M (und M').

* Auf diese Weise lässt sich für jede koplexe hermitesche Matrix $M = M^\dagger$, $M_{ij} \in \mathbb{C}$ eine unitäre Trafo aus den (komplexen) Eigenvektoren konstruieren, die M diagonalisiert.

Anwendung Diagonalisierung: **Hauptachsentransformation**.
Betrachte die quadratische Form $\boxed{f(x_1, ..., x_n) = x^\top M\, x}$ mit M $n \times n$ Matrix, $M_{ij} \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$.
O.B.d.A. können wir M als symmetrisch wählen:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} x_i M_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \left(x_i \frac{1}{2} M_{ij} x_j + \underset{i \leftrightarrow j}{x_i \frac{1}{2} M_{ij} x_j} \right) \quad \text{(Indizes umbenennen)}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \frac{1}{2} \underbrace{(M_{ij} + M_{ji})}_{=\frac{1}{2}\left(M + M^\top\right)} x_j \quad \text{(symmetrische Matrix, antisymmetrischer Anteil: } \frac{1}{2}\left(M - M^\top\right))$$

$\Rightarrow$ wir können die Matrix einer quadratischen Form diagonalisieren!
Da die Gleichung $x^\top M\, x = c \in \mathbb{R}$ ein Skalar ist, bleibt sie invariant:

$$\left.\begin{array}{rcl} x \to & O^\top x & = x' \\ M \to & O^\top M\, O & = M' \end{array}\right\} x'^\top M' x' = \left(O^\top x\right)^\top O^\top M\, O O^\top x = x^\top O O^\top M O O^\top x$$
$$= x^\top M\, x\,.$$

Aber: wenn M' diagonal ist die Gleichung in Koordinaten x' <u>viel einfacher</u>:

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow x'^\top M' x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \left(x_i'\right)^2 = c\,.$$

Der <u>Rang der quadratischen Form</u> ist die Zahl der $\lambda_i \neq 0$.
Für maximalen Rang n beschreibt die quadratische Form ein Ellipsoid, in den neuen Koordinaten x' ist dieses in Hauptachsenform.

Beispiel $n = 2$: Finde die Hauptachsenform für die quadratische Form:

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix} = 6$$

($\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschreibt dieselbe quadratische Form, läßt sich aber i.A. nicht diagonalisieren durch O orthog. Trafo $\to$ symmetrische $\tilde{M}$, ergibt M)
<u>Gesucht</u>: Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren v_i von M (denn: $v_i \Rightarrow O$ orth. $\Rightarrow x' = O^\top x$, zusammen mit λ_i folgt quadratische Form im neuen System).

$$\det\left(M - \lambda \mathbb{1}_{2\times 2}\right) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -(2 - \lambda)(1 + \lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 - 4 = 0$$
$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 3 & ''+'' \\ -2 & ''-'' \end{cases}$$

$$M\,v_+ = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v_+ = 3v_+ \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\,v_{+\,1} + 2\,v_{+\,2} &= \ \ 3\,v_{+\,1} \\ 2\,v_{+\,1} - \ v_{+\,2} &= \ \ 3\,v_{+\,2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v_+ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M\,v_- = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v_- = -2v_- \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\,v_{-\,1} + 2\,v_{-\,2} &= \ -2\,v_{-\,1} \\ 2\,v_{-\,1} - \ v_{-\,2} &= \ -2\,v_{-\,2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_+ \neq \lambda_-$

Seite 34: $v_+^\top v_- = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$ orthogonal

$I)$ $O_I = \begin{pmatrix} v_+ & v_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad O_I^\top = O_I$, $\quad \underline{\det O_I = \frac{1}{\sqrt{5}^2}(-4-1) = -1}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$$

O_I ist eine Drehspiegelung, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ kein Rechtssystem

$$\Rightarrow \ f\,(x', y') = 3\,x'^{\,2} - 2\,y'^{\,2} = 6$$

$II)$ wähle $\overline{O_{II} = \begin{pmatrix} v_- & v_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$, $\quad O_{II}^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \det O_{II} = +1$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

$O_{II} \rightarrow$ <u>eigentliche Drehung</u>

$$\Rightarrow \ f\,(x', y') = -2\,x'^{\,2} + 3\,y'^{\,2} = 6$$

$\Leftrightarrow \ y' = \pm\sqrt{2 + \frac{2}{3}\,x'^{\,2}}$, $\quad$ Test:

$$M' = O^\top M\,O = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Eine klassische Frage der Linearen Algebra ist: <u>wann läßt sich eine Matrix M diagonalisieren?</u>

Haben bereits gesehen:

$$M = M^\top \text{ reell} \Rightarrow \exists\, O \text{ orth.: } \overbrace{O^\top}^{=O^{-1}} M\, O = M' \text{ diag}$$
$$M = M^\dagger \text{ komplex} \Rightarrow \exists\, U \text{ unitär: } U^\dagger M\, U = M' \text{ diag.}$$

Was ist wenn M dies nicht erfüllt? Unter Umständen gibt es trotzdem eine Ähnlichkeitstrafo A mit $A^{-1}M\,A = M'$ diagonal.

* Wir haben bereits gesehen, dass ein solches A die Determinante (und Spur) invariant läßt und damit insbesondere auch die Eigenwerte: $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 1$.
* Es gibt ein solches A (A^{-1} ex.), wenn die Eigenvektoren $\vec{v}_j$ von M eine Basis von V bilden (s. Seite 32). Eine hinreichende Bedingung ist, dass alle λ_i paarweise verschieden sind. Dann ist $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.
* Beachte, dass nicht jede $n \times n$ Matrix auch n Eigenwerte hat (Bsp. S. 32 $K = \mathbb{R}$) oder deren Eigenvektoren lin. unabhängig sind.
  Für Matrizen in der Physik ist dies aber i.A. der Fall.

weitere Anwendungen:
Sei M diagonalisierbar: $\exists\, A\, :\, A^{-1}M\,A = M'$ diag
$\Rightarrow$ A diagonalisiert auch Funktionen von M, z.B.:

$$A^{-1}\exp(M)A = A^{-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}M^l\right)A = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\underbrace{\underline{A^{-1}M\,A}A^{-1}M\ldots MA}_{l \text{ mal}}$$
$$= \exp(M') = \exp\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} \quad \text{(Konvergenz OK)}\,.$$

Für solche M gilt:

* $\underline{\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Sp}(M)) \in K}$ denn: $\det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} = e^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot e^{\lambda_n} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$
* Für $Q = \mathbb{1}_{n\times n} + Y$ in der Nähe der Einheitsmatrix gilt die folgende Potenzreihendarstellung: $\ln Q = \ln(\mathbb{1}_{n\times n} + Y) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\frac{1}{l}Y^l$

  $\underline{\ln(\det(Q)) = \mathrm{Sp}(\ln(Q)) \in K}$
  definiere $Q \equiv \exp(M)$ sowie den matrixwertigen ln als Umkehrfunktion hier von $M \equiv \ln Q$. Dann folgt dies aus der ersten Eigenschaft.

2 Analysis in einer Dimension

2.1 Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Betrachte reellwertige Funktionen $f(x)$ einer Variable $x \in A \subseteq \mathbb{R}$
Def.: $f(x)$ hat bei $x = x_0$ den **Grenzwert** f_0 genau dann, wenn $\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f_0| < \epsilon \tag{2.1}$$

(schreibe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f_0$).

- $f(x)$ muss diesen Wert f_0 nicht annehmen, z.B. $f(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}$ für $x > 0$.
  Die Def.: $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ergibt $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Def.: $f(x)$ ist **stetig** bei $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f\left(x_0\right) \tag{2.2}$$

"Vertauschbarkeit der Limites".

"physikalische Definition": $f(x)$ ist stetig auf Interval I, wenn sie gezeichnet werden kann, ohne abzusetzen.

Rechenregeln: f, g stetig und c =const.:

$$\begin{aligned}
\lim c f &= c \lim f \\
\lim (f + g) &= \lim f + \lim g \\
\lim f \cdot g &= \lim f \cdot \lim g \\
\lim \left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\lim f}{\lim g}\,, \qquad \text{falls } \lim g \neq 0 \\
\text{sowie:} \qquad f\left(g(x)\right) &\text{ stetig}\,, \\
f^{-1}(x) &\text{ stetig}\,, \qquad (\text{falls } f' \neq 0)
\end{aligned}$$

Zwischenwertsatz: $f(x)$ stetig auf $I = [a,b]$ $(a < b)$, $x, y \in I \Rightarrow$ f nimmt jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.
Insbesondere für $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ hat f dann mindestens eine Nullstelle!
Def.: $f(x)$ hat bei $x = x_0$ die **Ableitung** $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \partial_x f(x_0)$ genau dann, wenn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{exisitert und } = f'(x_0) \ . \tag{2.3}$$

Dann ist f diffbar in x_0.
(Unterscheide später totale und partielle Ableitung; $f''(x) = f^{(2)(x)}$, entsprechend $f^{(n)}(x)$)

anschaulich $\rightsquigarrow$ Tangentensteigung

es gilt: f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

Bsp.: $f(x) = x$

Rechenregeln: f, g diffbar. $c =$const.:

- ∂_x ist linear:

$$\begin{aligned}\partial_x (c \cdot f) =& c\, \partial_x f \, , \\ \partial_x (f + g) =& \partial_x f + \partial_x g\end{aligned}$$

- Produkt- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\partial_x (f \cdot g) =& (\partial_x f)\, g + f\, (\partial_x g) \ , \\ \partial_x \left(\frac{f}{g}\right) =& \frac{(\partial_x f)\, g - f\, (\partial_x g)}{g^2} \, , \qquad \text{für } g \neq 0\end{aligned}$$

- Kettenregel:

$$\partial_x (f \circ g) = \partial_x g\,(f(x)) = \left.(\partial_y g(y))\right|_{y=f(x)} \cdot (\partial_x f(x)) \ .$$

- Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, mit $f^{-1}(f(x)) = x$

$$\Rightarrow \ \partial_y f^{-1}(y) = \left.\frac{1}{\partial_x f(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)} \qquad \text{(benutze Kettenregel für } f^{-1}(f(x)) = x\text{)}$$

Bemerkung: Die Ableitung aller elementaren Funktionen (x^α, e^x, $\ln x$, $\sin(h)x$, $\cos(h)x$, $\tan(h)x$, $\arcsin(x)$, arsinh$x$, $\arccos(x)$, arcosh$x$, ...) ist wieder eine "elementare Funktion", z.B.:

$$\partial_x \tanh(x) = 1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}\,.$$

2.2 Einige Sätze der Differentialrechnung

globale Eigenschaften: **Mittelwertsatz**: f stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b) (b¿a) $\Rightarrow\ \exists\, x_0 \in (a,b)$, so dass

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b-a) \tag{2.4}$$

(Spezialfall $f(b) = f(a) \ \Rightarrow\ \exists\, x_0$ mit $f'(x_0) = 0$: Satz von Rolle $\Uparrow$ $g(x) \equiv \begin{array}{l} f(x) - f(a) \\ -(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}$, beweise diesen zunächst mit $f \neq$const. hat mindestens ein Minimum oder Maximum)

- ähnlich: erster Term in Taylorreihe

Erweiterter Mittelwertsatz: f, g wie oben $\Rightarrow\ \exists\, x_0 \in\ (a,b)$ mit

$$f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) = g'(x_0)\,(f(b) - f(a)) \tag{2.5}$$

(oben hatten wir $g(x) = x$).
Beweis mit Satz von Rolle und $h(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))$.

Wichtige Konsequenz: **Regel von l'Hôspital**:
$f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$, f, g diffbar in Umgebung von $a \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} \overset{\downarrow''0/0''}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,. \tag{2.6}$$

Beweis mit erw. MWsatz:

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,, \quad a < x_0 < b \text{ dann } \lim b \to a \ \Rightarrow\ x_0 \to a$$

- Falls $f'(a) = g'(a) = 0$ kann l'Hôpital iteriert werden.

- Falls $\lim_{x\to a} f(x) = \infty = \lim_{x\to a} g(x)$ wähle in l'Hôpital:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{f(x)}\,, \quad \tilde{g}(x) = \frac{1}{g(x)}\,, \quad \text{d.h. } ”\infty/\infty” \text{ wird zu } ”0/0”$$

Partielle und totale Ableitung

- betrachte Funketionen von mehreren Variablen, z.B.: $f = f(x,a) = ax^2$, $g(x,y) = ax^2 + bxy + y^2$ quadratische Form.
- die **parteille Ableitung** ist definiert durch Ableitung nach einer Variablen unter Festhaltung aller anderen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,a)}{\partial x} &= \left.\frac{df}{dx}\right|_{a=\text{const.}} = 2ax \\ \frac{\partial f(x,a)}{\partial a} &= \left.\frac{df}{da}\right|_{x=\text{const.}} = x^2 \end{aligned}$$

- bei der **totalen Ableitung** werden alle Funktionen abgeleitet, die von einer Variablen abhängen:
  Bsp.: zeitabhängiges Potential $V(x,t) = \frac{1}{2}x(t)^2 - t\cdot b$, $x(t)$ zeitabhängige Koordinaten

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\equiv \dot{x}(t)} \frac{dV}{dx} + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{x}\, x(t) - b$$

- Implizite Gleichung: falls $y(x)$ als Lösung der Gleichung $g(x,y) = \text{const.}$ definiert wird, heißt $y(x)$ **implizite Funktion**. Deren Ableitung kann durch die totale Ableitung mit der Kettenregel bestimmt werden:
  Bsp. von oben:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dg(x,y)}{dx} &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} \\ &= 2ax + by + y'(x)\underbrace{(bx + 2cy(x))}_{\neq 0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{2ax + by}{2cy + bx}$$

d.h. wir bestimmen die Ableitung, ohne vorher die Lösung $y(x)$ bestimmt zu haben!

2.3 Taylor-Entwicklung und Reihen

Für $f^{(n)}$ stetig auf $I = [a, b]$, und diffbar auf (a, b) $\exists\, f^{(n+1)}$ gilt die **Taylor-Formel**:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k}_{\text{Taylor-Polynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Lagrange-Restglied } R_n} \tag{2.7}$$

mit $a < x_0 < x \leq b$.
($n = 0$: Mittelwertsatz) Beweis mit erweitertem MWsatz.

Insbesondere gilt für $f(x)$ ∞ oft diffbar: wenn $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \text{Restglied} = 0 \ \underline{\text{und}} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \text{Taylor-Polynom konvergiert} \end{cases}$ die folgende Darstellung als **Taylor-Reihe**:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \,. \tag{2.8}$$

* Für Analysis in $\mathbb{C}$ ($\simeq \mathbb{R}^2$) folgt aus der Existenz der ersten Ableitung die <u>aller</u> Ableitungen sowie die Taylorreihen Darstellung für **analytische Funktionen**.

* *Bsp.* für Taylorreihen:

$$\text{auf } \mathbb{R}: \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k\,, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (a = 0 \text{ hier})$$

$$\text{auf } I = (-1,1): \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \xleftarrow{-\partial_x} \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

* *Gegenbeispiel*: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ hat <u>keine</u> Taylorreihe bei $x = 0$

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \begin{array}{cc} \xrightarrow[x\to 0]{} & \exp(-\infty) = 0 \\ \xrightarrow[x\to\infty]{} & \exp(0^-) = 1 \end{array}$$

<u>obwohl</u>:

- alle Ableitungen existieren, $\equiv 0$ bei $x = 0$

$$f' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \quad f'' = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \ldots, \quad f^{(n)} = \left(\ldots (-)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

– $\lim\limits_{n\to\infty}$ Taylor-Polynom $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{0}{k!} x^k = 0$ konvergiert $\to 0$

Aber: der Rest R_n wächst mit n:

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} x^{n+1} = \left(\ldots + \frac{(n+2)x^{n+1}}{x_0^{n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x_0^2}} \quad \nearrow$$

Es gilt: ist eine Funtion $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ durch eine konvergente Reihe definiert und existiert deren Taylorreihe um $x = a$, so sind diese beiden gleich:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,.$$

* Die **Konvergenz von Reihen** wird anhand von Vergleichskriterien entschieden:

Majorantenkriterium: ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent ($\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} c_n$ existiert) und gilt $\forall\, k \geq k_0 \quad |a_k| \leq c_k$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent** (d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert)

Minorantenkriterium: ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ divergent und gilt $\forall\, k \geq k_0\ a_k \geq d_k > 0$, so ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

Quotientenkriterium: gibt es ein $q < 1$ (> 1) mit $\forall\, k \geq k_0 \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ ($\geq q$), so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent (divergent)

Der Beweis geht auf die geometrische Reihe zurück, die auch oft im Majorantenkriterium verwendet wird. Es gibt weitere Kriterien, doch nicht immer treffen diese eine Aussage (z.B. wenn $q = 1$).

Wichtig: mit absolut konvergenten Reihen können wir wie mit endlichen Reihen (=Polynomen) rechnen, d.h. wir können addieren, umordnen, dividieren, multiplizieren, sowie termweise differenzieren und integrieren (die letzten beiden erfordern die Vertauschung von $\underline{\underline{2}}$ Grenzwerten).

Bsp. **Cauchysche Produktformel** für zwei absolut konvergente Reihen:

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k}\right) . \tag{2.9}$$

2.4 Integralrechnung

Umkehroperation zur Differentiation (nicht eindeutig!) $F(x) \underset{\int dx}{\overset{\partial_x}{\rightleftarrows}} f(x)$

Def.: Sei $f(x)$ stetig $\forall\, x \in I = (a,b)$, $(a < b)$. Die **Stammfunktion** bzw. das **unbestimmte Integral** von $f(x)$ ist eine diffbare Funktion $F(x)$ mit

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \forall\, x \in I$$

$$\text{wir schreiben} \quad F(x) = \int dF = \underset{\text{unbest.}}{\int} dy f(y) \quad \left(\int^{x} dy f(y)\right) .$$

($\Rightarrow$ das Integral einer stetigen Funktion ist diffbar!)
Die Stammfunktion ist nicht eindeutig: $F'(x) = f(x) = G'(x) \Rightarrow \partial_x \left(F(x) - G(x)\right) = 0$
$\Rightarrow F(x) = G(x) + \text{const.}$ Integrationskonstante.

* Die Differentiation von aus elementaren Funktionen zusammengesetzten Funktion ist dank Produkt-, Quotienten- und Kettenregel i.A. immer einfach auszuführen (sogar für implizite Funktionen). Die Umkehr = Integration aber i.A. nicht:
$\Rightarrow$ Erraten der Stammfunktion - wenn es sie gibt!

$\exists$ Ausnahmen, z.B.

$$f_n(x) = x^n\,, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n'(x) = nx^{n-1}$$

$$\text{und umgekehrt} \quad F_n(x) = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} \Rightarrow F_n'(x) = f_n(x)$$

(später mehr).

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Vorraussetzungen wie oben in der Def.:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)\,, \tag{2.10}$$

a, b Integrationsgrenzen (bestimmtes Integral), d.h. die Integrationskonstante, die verschiedene Stammfunktionen unterscheidet, fällt heraus.

Interpretation: MWSatz angewandt auf Stammfunktion $F(x)$:

$$F\left(x+\Delta x\right) = F(x) + \underbrace{F'\left(x_0\right)\Delta x}_{f(x_0)\cdot\Delta x} + \ldots$$

$$\text{und } F\left(x+\Delta x\right) - F(x) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} dy f(y) = \text{Fläche unter der Kurve von } f(x)\,.$$

* Zusammensetzen von $\int_a^b dx f(x)$ aus vielen kleinen Teilstücken $\rightarrow$ Riemannsche Summe.

  Bsp.: $f(x)$ auf $I = (0,1)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \text{const. alle mögl. Stammfkt.}$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 dx x = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^2}{2} + \text{const.}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

  (oder $\left(\frac{x^2}{2} + \text{const.}\right)\Big|_0^1$)

Sätze zur Integralrechnung:

* Integration ist linear (aus Linearität von ∂_x für Stammfunktion):

$$\int\limits_a^b dx\left(c\,f(x)\right) = c\int\limits_a^b dx f(x) \text{ für } c \text{ konstant}$$

$$\int\limits_a^b dx\left(f(x)+g(x)\right) = \int\limits_a^b dx f(x) + \int\limits_a^b dx g(x)$$

$$\underset{I_1}{\int\limits_a^b} dx f(x) + \underset{I_2}{\int\limits_b^c} dx f(x) = \underset{I_1\cup I_2}{\int\limits_a^c} dx f(x) \ (F(b) \text{ fällt heraus im Hauptsatz})$$

* Integration <u>ist orientiert</u>:

$$\int_a^b dx f(x) = -\int_b^a dx f(x) \text{ (aus HS)}$$

$$\text{und insbes. für } a = b: \quad \int_a^a dx f(x) = 0$$

* <u>Differentiation nach Grenzen</u>:

$$\partial_x \int_a^x dy f(y) = f(x)$$

$$\partial_x \int_x^b dy f(y) = -f(x)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Sei $f(x)$ stetig auf $I = (a, b)$: $\Rightarrow \; \exists x_0 \in I$ mit

$$\int_a^b dx f(x) = f(x_0)(b - a). \tag{2.11}$$

(denn: $F(b) - F(a) = F'(x_0)(b - a)$ MWS für $F(x)$)

* Lesen wir die Liste der bekannten Ableitungen in umgekehrter Reihenfolge erhalten wir eine Liste von Stammfunktionen:

$f(x)$	$\int dx g(x)$	e^x	$\underset{x>0}{\ln x}$	$\cos x$	$\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tan x$	$\tanh x$
$f'(x)$	$g(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$	$\frac{1}{\cosh(x)^2}$

$f(x)$	$\int dx g(x)$	$\overset{=\sin^{-1}(x)}{\arcsin x}$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\mathrm{arsinh} x$	$\mathrm{arcosh} x$	$\overset{=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\mathrm{artanh} x}$
$f'(x)$	$g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\underset{=\partial_x \mathrm{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{1-x^2}}$

Stammfunktion nicht immer eindeutig:

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \; \arcsin x = \underset{\uparrow \text{const.}}{\frac{\pi}{2}} \; \underset{\uparrow \text{Vor.}}{-} \; \arccos x$$

* durch Umkehrung der Produkt-, Quotienten-, oder Kettenregel können wir die Stammfunktion erraten:

$\int dx g(x)$	$e^{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$g(x)$	$f'(x)e^{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

* das Integral von Kombinationen von elementaren Funktionen lässt sich <u>nicht</u> immer durch elementare Funktionen ausdrücken $\rightarrow$ definiere <u>neue Funktionen</u>:
  z.B.

$$\mathrm{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy e^{-y^2}, \quad x > 0 \quad \underline{\text{Errorfunktion}}$$

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty dy y^{x-1} e^{-y}, \quad \underline{\text{Gammafkt.}} \text{ (verallg. Fakultät: } \Gamma(n+1) = n! \text{ für } n \in \mathbb{N})$$

$$E_1(x) \equiv \int_x^\infty dy \frac{1}{y} e^{-y}, \quad \underline{\text{exponentielles Integral}}$$

$$Li_2(x) \equiv -\int_0^x dy \frac{1}{y} \ln(1-y), \quad 0 < x < 1 \quad \underline{\text{Dilogarithmus}}$$

$\rightarrow$ wir benötigen den Begriff des <u>uneigentlichen Integrals</u>:

$$\int_a^\infty dx f(x) \equiv \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx f(x), \quad \text{falls limes ex. } (<\infty) \text{ ist } f \text{ integrierbar auf } [a,\infty)$$

$$\int_{-\infty}^b dx f(x) \equiv \lim_{a\to-\infty} \int_a^b dx f(x), \quad \text{falls limes ex. } (<\infty) \text{ ist } f \text{ integrierbar auf } (-\infty,b]$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x) \equiv \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b dx f(x), \quad \text{falls limes ex. } (<\infty) \text{ ist } f \text{ integrierbar auf } (-\infty,\infty)$$

($\lim\limits_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}$ unabhängig von einander), oder $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^b dx f(x)$ falls $f(a=0)$ nicht definiert.

Im Gegensatz dazu def. Hauptwert-Integral z.B.

$$\fint_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \equiv \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} dx f(x)$$

(Principal Value)

* es gibt Funktionen , für die $\fint_{-\infty}^{\infty}$, aber nicht $\int_{-\infty}^{\infty}$ existiert! (Bsp.: $f(x) = x^3$)

Bsp.: uneigentliche Integrale: bei $x = 0$:

$$\underline{\int_0^1 dx \ln x} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 dx \ln x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 dx \partial_x \left(x \ln x - x\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[x \ln x - x\right]_\epsilon^1 = 1 \underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 - \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+} (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon)}_{=0} = \underline{-1}$$

$$\underline{\int_0^\infty dx e^{-x}} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b dx e^{-x} = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b$$

$$= - \lim_{b\to\infty} e^{-b} + \underbrace{e^0}_{=1} = \underline{1}$$

* ein und dieselbe Funktion kann auf einem Interval I_1 integrierbar sein und auf einem anderen I_2 nicht, z.B. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

2.5 Integrationsmethoden

∃ Vielzahl an Lit. zu Integraltafeln, z.B. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, London (6th Ed 2000), sowie software
→ wir wollen selbst verstehen, wie es geht!

i) **Variablentransformation oder Substitution**

Sei φ eine diffbare und invertierbare Funktion. Dann gilt:

$$I = \int_a^b dx f(x) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt \varphi'(t) f(\varphi(t)) \tag{2.12}$$

durch Substitution $x = \varphi(t) \quad (\varphi^{-1}(x) = t)$.

Denn: Sei $F(x)$ Stammfunktion zu $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$. Definiere $\tilde{F}(t) \equiv F(\varphi(t))$, dann

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} F'(x)|_{x=\varphi(t)} = \varphi'(t) f(\varphi(t))$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt \varphi'(t) f(\varphi(t)) = \left[\tilde{F}(t)\right]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(b)\right)\right) - F\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(a)\right)\right) = I\,.$$

* In vielen Fällen findet man zuerst die Umkehrfunktion $\varphi^{-1}(x) = t$.
* Schreibweise zum Merken:

$$dx = \frac{dx}{dt} dt = \varphi'(t) dt\,, \quad \text{Grenzen:} \begin{array}{l} x = a \leftrightarrow t = t_a = \varphi^{-1}(a) \\ x = b \leftrightarrow t = t_b = \varphi^{-1}(b) \end{array}$$

Beispiele:

- $$\int_a^b dx (1+cx)^4 = \int_{1+ca}^{1+cb} dt \frac{1}{c} t^4 = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{5} t^5\right]_{1+ca}^{1+cb} = \frac{1}{5c}\left((1+cb)^5 - (1+ca)^5\right)$$

  wähle $t = 1 + cx = \varphi^{-1}(x) \quad \leftarrow$ Translation und Skalierung

  $$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{c}(t-1)\varphi(t)\,, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{c}\,, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{c} \ \Leftrightarrow\ dx = \frac{dt}{c}$$

- $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} dt 2\cancel{t} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} = 2\,[t]_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} = 2\left(\sqrt{1+b} - \sqrt{1+a}\right)$$

  wähle $t = \sqrt{1+x}$ "Substituiere was kompliziert ist"

  $$\Leftrightarrow\ x = t^2 - 1 = \varphi(t)\,, \quad \varphi'(t) = 2t = \frac{dx}{dt}$$

Anwendung: Integrale über rationale Funktionen in $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$I = \int_a^b dx \frac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))},$$

$P(\sin(x), \cos(x))$ und $Q(\sin(x), \cos(x))$ Polynome in x und y, d.h. enthält auch $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Beispiel:

$$\int_a^b dx \frac{1}{\sin x} = \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} dt \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \ln(t)\Big|_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} = \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}\right)$$

$$\text{Substituiere } \begin{array}{c} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi^1(x) \\ x = 2\arctan(t) = \varphi(t) \end{array} \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Mittels Additionstheorem für sin, cos, tan gilt:

$$\boxed{\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}}$$

dito: $\boxed{\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$, $\boxed{\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}}$.

D.h. für

$$I = \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} dt \underbrace{\left(\frac{2}{1+t^2}\right) \frac{P\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{Q\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}}_{\text{rationale Fkt in } t\text{, lösbar!}},$$

ii) **Int.-Methode mittels Partialbruchzerlegung**

Seien $g_n(x)$ Polynom v. Grad n, $h_m(x)$ Polynom v. Grad m, $f(x) = \frac{g_n(x)}{h_m(x)}$,
oBdA: g_n, h_m haben keine gemeinsamen Nullstellen, $n < m$
$\Rightarrow\ \exists$ eindeutige Zerlegung:

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + ... \quad (\rightsquigarrow \int \text{ einfach}) \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + ..., \end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei $h_m(x) = \underbrace{(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r}}_{\text{reelle Nullstellen}} \underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}_{\text{komplexe Nullstellen}}$,

(Fundsatz d. Alg.)

$m = k_1 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s$

- für nicht entartete Nullstellen von $h_m(x)$ wie $(x-a)$, (x^2+px+q) können wir die Stammfunktion so bestimmen (k_1, $l_1 > 1$ später).

*

$$\frac{A}{x-a} = A\frac{d}{dx}\ln|x-a| \qquad \begin{pmatrix} x > a\,, & A\frac{1}{x-a} \\ x < a\,, & A\frac{d}{dx}\ln(a-x) = -A\frac{1}{a-x} = \frac{A}{x-a} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int^x dy \frac{A}{y-a} = A\ln|x-a|$$

* komplexe Nullstelle $x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ mit $\frac{p^2}{4} - q < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{Bx+C}{x^2+px+q} =& \frac{B}{2}\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{B}{2}p\right)\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} \\ =& \frac{B}{2}\frac{d}{dx}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{\left(C-\frac{B}{2}p\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int^x dy \frac{By+c}{y^2+py+q} = \frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{\left(C-\frac{B}{2}p\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}}\right)$$

Beispiele:

- $$\begin{aligned} \int^x dy \frac{1}{y^2-a^2} =& \int^x dy \frac{1}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a}\right) \\ =& \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} \end{aligned}$$

(oder artanh $\left(\frac{y}{a}\right)$ für $\left(-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{1-\frac{y^2}{a^2}}$)

- $$\begin{aligned} \int^x dy \frac{y}{y^2-a^2} =& \int^x dy \frac{y}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-a} + \frac{1}{y+a}\right) \\ =& \frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right| \end{aligned}$$

- $$\int^{x} dy \frac{y^2}{y^2-a^2} = \int^{x} dy \left(1 + \frac{a^2}{y^2-a^2}\right) \qquad \text{kennen wir schon}$$

- $$\int_0^1 dy \frac{1}{y^2+y+1}\,, \quad \frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0 \quad \text{keine reelle Nullst.}\,, \quad \begin{matrix} B=0 \\ C=1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \qquad \left(= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

iii) **Integration mittels Ableitung nach Parameter**

$\Rightarrow$ Terme mit höheren Nullstellen in Partialbruchzerlegung:

Sei $I\left(a(x), b(x), x\right) \equiv \int\limits_{a(x)}^{b(x)} dy f(y,x)$, bilder die totale Ableitung:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{da(x)}{dx}\frac{dI}{da} + \frac{db(x)}{dx}\frac{dI}{db} + \frac{\partial I}{\partial x} = a'(x)\left(-f\left(a(x),x\right)\right) + b'(x) f\left(b(x),x\right)$$

$$+ \int_{a(x)}^{b(x)} dy \frac{\partial f(y,x)}{\partial x} \quad \leftarrow \quad \begin{matrix}\text{Idee:} \\ \text{nach Abl. besser lösbar}\end{matrix}$$

* Oft benötigen wir nur einen Parameter im Integranden:

- $I_n = \int\limits_0^\infty dx x^n e^{-x} = ?$ $n \in \mathbb{N}$ betrachte allgemeines Integral:

  $I_n(a) = \int\limits_0^\infty dx x^n e^{-ax} \qquad (a = 1 \rightsquigarrow I_n)$

$$\Rightarrow I_n(a) = (-1)^n \left(\frac{d}{da}\right)^n \int_0^\infty dx e^{-ax} = (-)^n \frac{d^n}{da^n}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^\infty$$

$$= (-)^n \frac{d^n}{da^n}\frac{1}{a} = (-)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\frac{1}{a^2} = \dots = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$\Rightarrow I_n(a=1) = n! = \Gamma(n+1)$ Spezialfall der Gammafkt. (Seite: 50)

* höhere Nullstellen:

$$\bullet \int^x dy \frac{1}{(y-a)^n} = \frac{1}{(n-1)} \frac{d}{da} \int^x dy \frac{1}{(y-a)^{n-1}} = ... = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \int^x dy \frac{1}{y-1}$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \ln|x-a| = ... = \frac{-1}{(n-1)} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

(könnte man auch direkt raten)

$$\bullet \int^x dy \frac{By+C}{(y^2+py+q)^n} = \frac{-1}{(n-1)} \frac{d}{dq} \int^x dy \frac{By+C}{(y^2+py+q)^{n-1}} = ...$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}} \int^x dy \frac{By+C}{(y^2+py+q)}$$

(bekannt)

iv) **Partielle Integration**

Gegeben sind zwei Funktionen $u(x)$, $v(x)$ diffbar auf $I = (a, b)$. Dann gilt

$$\int_a^b dx u(x) v'(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b dx u'(x) v(x) \tag{2.14}$$

denn: $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b dx \frac{d}{dx} (u(x)v(x)) = \int_a^b dx \, (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$

* Also: starte mit Integral über $f(x) = u(x)v'(x)$ und hoffe, dass das Integral $g(x) = u'(x)v(x)$ einfacher ist, oder bekomme Identität für $\int f$.

Beispiele:

$$\bullet \int^x dy \, 1 \ln(y) = x\ln(x) - \int^x dy y \ln'(y) = x\ln(x) - \int^x dy y \cdot \frac{1}{y}$$
$$= x \ln x - x \quad \text{(Stammfunktion zu Seite 49)}$$

- $$\int^x dy\sqrt{1+y^2}\cdot 1 = x\sqrt{1+x^2} - \int^x dy y\cdot\frac{\frac{1}{2}2y}{\sqrt{1+y^2}}$$
$$= x\sqrt{1+x^2} - \int^x dy\left(\underline{\underline{\frac{y^2+1}{\sqrt{1+y^2}}}} + \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}\right)$$

$\underline{\underline{\quad}}$ ist das ursprüngliche Integral ($=\sqrt{1+y^2}$)

$$\overset{\text{S. 49}}{\Rightarrow} 2\int^x dy\sqrt{1+y^2} = x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh}(x)$$

- $$\int_a^b dt\sin^2(t) \overset{\sin t = -\cos' t}{=} [-\sin(t)\cos(t)]_a^b - \int_a^b dt\cos(t)\left(-\cos(t)\right)$$
$$\overset{1-\sin^2 t = \cos^2 t}{=} [-\sin(t)\cos(t)]_a^b + [t]_a^b - \int_a^b dt\sin^2(t)$$
$$\Rightarrow 2\int_a^b dt\sin^2(t) = \sin(a)\cos(a) - \sin(b)\cos(b) + b - a$$
$$= [\sin(x)\cos(x) + x]_a^b$$

- <u>kombiniere Methoden</u>: $\int_0^\infty dx\frac{\sin x}{x} \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$ ($\int$ ok bei $x=0$)

  allegemeineres $\int$: $\underline{F(a) \equiv \int_0^\infty dx e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}}$

$$\Rightarrow F'(a) = \int_0^\infty dx e^{-ax}\sin(x) = \left[e^{-ax}\cos(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty dx(-a)e^{-ax}\cos(x)$$
$$= -1 + \left[ae^{-ax}\sin(x)\right]_0^\infty - a\int_0^\infty dx(-a)e^{-ax}\sin(x)$$
$$\Rightarrow F'(a) = \frac{-1}{1+a^2}$$
$$\Rightarrow F(a) = -\arctan(a) + \text{const.}$$

Randbedingungen: $\lim_{a\to+\infty} F(a) = 0 = \lim_{a\to} (-\arctan(a) + \text{const.}) = -\frac{\pi}{2} + \text{const.}$
$\Leftrightarrow \text{const.} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F(a=0) = \frac{\pi}{2}$

2.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen (engl. ODE)

$$G\left(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}, ..., y(x), x\right) = 0 \quad \textbf{gew. DGL } n\textbf{-ter Ordnund} \tag{2.15}$$

- hängt von einer Variablen x ab
- gesucht: Lösung $y(x)$ dieser Gleichung im Definitionsbereich $\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \subseteq \mathbb{R}$

* haben schon gesehen: $y'(x) = f(x) = 0$ bei der Suche der Stammfunktion $F(x) = y(x)$ oder implizite Gleichung $G(y(x), x) = 0$ "0-ter Ordnung"

* unterscheide von **partieller Diff. Gl.** in mehreren Variablen (engl. PDE)

- z.B. $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y) = 0$ Laplace-Gl. in 2 Dim.
- $\mathcal{H}(p(t), q(t), t)$ Hamiltonfunktion $\dot{q}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$ Hamiltonische Gl.
- * Typen von gew. DGL (ODE):
  - **lineare**: Abhängigkeit von $y(x)$ und Ableitungen $y^{(n)}(x)$ nur linear
    Bsp:

$$m\ddot{y}(t) = -\gamma\dot{y}(t) - ky(t) - mg$$

Newtonsche Gl.: Felder in Schwerekraft mit Reibung

$$\underset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} Ly = \underline{\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{d}{dt} + \frac{k}{m}\right)}y(t) = -g$$

linearer Differentialoperator 2. Ordnung $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L y_1 + \alpha_2 L y_2$

  - **nicht lineare**:

$$x^2 y'(x) + y^2(x) = 0 \qquad \text{(Lsg. später)}$$

- i.A. betrachten wir nur explizite DGL, wo sich $y^{(n)}$ explizit als Funktion von $y^{(n-1)}, ..., y', y$ hinschreiben lässt, z.B. $y'(x) - g(y(x)) + f(x) = 0$

* Lösung(en) von gew. DGL n-ter Ordnung

- die **allgemeine Lösung** enthält i.A. $\underline{\underline{n}}$ unbekannte Integartionskonstante ($\leftrightarrow$ unbestimmtes Integral)
- eine **spezielle Lösung** enthält keine Unbekannten ($\leftrightarrow$ bestimmtes Integral)
- die Integrationskonstanten können auf 2 Weisen fixiert werden:
  1) durch **Anfangsbedingungen**: i.A. gegeben $\underbrace{y\left(x_0\right), y'\left(x_0\right), ..., y^{(n-1)}\left(x_0\right)}_{=n \text{ Bedingungen}}$ bei $x = x_0$, bestimmt die Lösung eindeutig i.A.
  2) durch **Randbedingungen**, z.B. für $n = 2$ gegeben $y\left(x_{\min}\right)$ und $y\left(x_{\max}\right)$ (auch Randwertproblem), dies ist oft viel restriktiver

  $\rightarrow$ Frage: Wann gibt es eine (eindeutige) Lösung? Antwort für $n = 1$ Ordnung ✓

* **graphische Lösung**: Richtungsfeld einer gew. DGL 1. Ord.
Beispiel:

$$G\left(y', y, x\right) = y' - yx = 0$$
$$\underline{y'(x) = xy(x)}$$

- ordne jedem Punkt (x, y) die Tangentensteigung zu $\rightarrow$ verbinde den Polygonzug (dieses "numerische" Verfahren geht zurück auf Euler)
  Steigung $\sim\ x \cdot y(x) \rightarrow$ Vorzeichen & Symmetrie: $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$
- vergl. mit allgem. Lösung $y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}}$, wobei C Integrationskonstante ($\exists$ spezielle Lsg. $y(x) \equiv 0\ \forall\, x$)

Gewöhnliche DGL 1. Ordnung: Existenz und Eindeutigkeit
$y'(x) = f(x, y)\,,$ mit Def.bereich $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, Anfangsbed. (AB) $y\left(x_0\right) = y_0$

Satz v. Peano: Falls $f(x, y)$ stetig in D gibt es eine Lösung.

Eindeutigkeit: **Satz v. Picard-Lindelöf**
Wenn f zusätzlich eine Lipschitz-Bedingung erfüllt ($\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ stetig), dann ist die Lösung eindeutig:

$$\exists\, L > 0\ :\quad \forall\,(x, y) \in D\ :\quad \left|f\left(x, y_1\right) - f\left(x, y_2\right)\right| \leq L\left|y_1 - y_2\right|\,, \tag{2.16}$$

wobei L die Lipschitz-Konstante ist.

Beispiel: $y'(x) = x\sqrt{y}$, $D = \{x \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$
AB $y(0) = 0$: hat 2 Lösungen:

$$\begin{aligned} y(x) =& 0 \qquad \forall\, x \\ y(x) =& \frac{x^4}{16} \;\Rightarrow\; y'(x) = \frac{x^3}{4} = x\sqrt{\frac{x^2}{16}} \end{aligned}$$

warum? $f(x, y)$ ist stetig in y, aber $\partial_y f$ ex nicht $y = 0$ ($\nexists\, L$ Lipschitz-Konstante auf ganz $\mathbb{R}_+$)
aber: für $\tilde{D} = \{x, y > y_0 > 0\}$ ist die Lösung eindeutig mit AB $y\,(x_0) = y_0$ $\left(= \frac{x_0^4}{16}\right)$

* Allgemeine Lösung der linearen gew. DGL: $\quad (f(x, y) = py + q\ \checkmark)$

$$\underbrace{y'(x) + p(x)y(x) + \underbrace{q(x)}_{\text{inhomogener Term}}}_{\text{inhomogene Gleichung}} = 0$$

homogene Gleichung: $y'(x) + p(x)y(x) = 0$.

Es gilt: allgem. Lösung = allgem. Lsg. der hom. Gl. + spez. Lsg. d. inhom. Gl
($y_1(x)$, $y_2(x)$ allgem. Lsgn: $y'_{1,2} + py'_{1,2} + q = 0 \;\Rightarrow\; (y_1 - y_2)' + p\,(y_1 - y_2) = 0$
Unterschied nur in hom. Gl.)

1) Konstruktion der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $y_a(x)$:

$$\begin{aligned} y'_a(x) &= -p(x)y_a(x) \qquad \text{Lsg.: } y_a(x) \equiv 0\ ^* \\ \text{oder } y_a(x) \neq 0 \;: \quad \frac{y'_a(x)}{y_a(x)} &= -p(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\ln|y_a(x)| = -p(x) \\ \Leftrightarrow\; \ln|y_a(x)| &= -\int\limits_{x_0}^{x} dt p(t) \quad (+\text{const.}) \\ \Leftrightarrow\; |y_a(x)| &= \exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} dt p(t) + \text{const.}\right] \\ \Rightarrow\; \text{allgem. Lösung: } y_a(x) &= C\exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x} dt p(t)\right] \end{aligned}$$

mit Integrationskonstante C, kann $< 0, > 0$ oder $= 0$ sein (d.h. Lsg. * enthalten). Durch die AB bestimmen wir $\underline{C = y_a(x_0) = y_0}$.

2) Konstruktion der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung $y_s(x)$: durch Raten, oder **Variation der Konstante** $C \to C(x)$:

$$\begin{aligned}\text{Ansatz: } y_s(x) =& C(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt p(t)\right)\\ y_s'(x) =& \frac{C'(x)}{C(x)} \cdot y_s(x) - p(x)y_s(x)\end{aligned}$$

Einsetzen in $y_s' + py_s + q = 0$:

$$\begin{aligned}-q(x) = C'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt p(t)\right) \;\Leftrightarrow\; C'(x) = -q(x)\exp\left(+\int_{x_0}^{x} dt p(t)\right)\\ \Rightarrow\; C(x) = -\int_{x_0}^{x} ds q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} dt p(t)\right) \quad (+\text{const.})\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ allgem. Lsg der inhom. Gl.:

$$\begin{aligned}y(x) =& y_a(x) + y_s(x)\\ =& \left(y_0 - \int_{x_0}^{x} ds q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} dt p(t)\right)\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} dt p(t)\right)\end{aligned} \tag{2.17}$$

mit AB $y(x_0) = y_0$: $y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} dt p(t)} - \int_{x_0}^{x} ds q(s) e^{\int_x^s dt p(t)}$

Beispiele lösbarer nichtlinearer Diff.Gl. 1. Ordnung $y'(x) = f(x, y)$

- **separierbare DGL**: $\boxed{\frac{dy}{dx} = g(y)f(x)}$

$$
\begin{aligned}
g(y) \neq 0 \;\rightarrow\; \frac{dy}{g(y)} &= dx f(x) \quad \text{integriere die Differentiale} \\
\Rightarrow \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})} &= \int\limits_{x_0}^{x} d\tilde{x} f(\tilde{x}) \quad \text{denn } \frac{d}{dx}\colon \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} = f(x) \checkmark
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

(AB: $y(x_0) = y_0$)

$$
\begin{aligned}
\text{z.B.} \quad \underline{y' = -\frac{y^2}{x^2}} : \;\Rightarrow \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{y^2} &= -\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{\tilde{y}}\bigg|_{y_0}^{y(x)} = \frac{1}{\tilde{x}}\bigg|_{x_0}^{x} \\
\Rightarrow -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \;\Leftrightarrow\; \underline{y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} - \frac{1}{x}}}
\end{aligned}
$$

- **Bernoulli DGL**: $\boxed{\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \neq 0, 1$ (sonst inhom., homog. lin DGL)

$$
\begin{aligned}
y \neq 0: \quad \cdot y^{-\alpha} \;\Rightarrow\; y^{-\alpha}y' &= y^{1-\alpha}p(x) + q(x) \quad |\cdot(1-\alpha) \neq 0 \\
\text{def. neue Var.: } z(x) = y^{1-\alpha}(x) \;&\Rightarrow\; z'(x) = y'(x)(1-\alpha)y^{-\alpha} \\
\Rightarrow \text{ DGL: } \underline{z' = (1-\alpha)zp(x) + (1-\alpha)q(x)} \quad &\text{lin. DGL in } z!
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

löse wie auf vorheriger Seite (2.17) $z(x) = z_a(x) + z_s(x)$, dann $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

- **exaktes Differential**: $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x,y)}{q(x,y)}}$, mit $p(x,y) = \partial_x F(x,y)$, $q(x,y) = \partial_y F(x,y)$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \; dyq(x,y) + dxp(x,y) &= dy\frac{\partial F}{\partial y} + dx\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\
\text{vgl.: } \frac{dF(x,y)}{dx} &= \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; F(x, y(x)) = \text{const.}
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

$\rightarrow$ löse nach $y(x)$ auf.

z.B. $\underline{y'(x) = -\frac{y}{x}}$, wähle $F(x,y) = xy \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x} = y,\; \frac{\partial F}{\partial y} = x$ ✓

$$\Rightarrow\; F(x,y) = xy = c \;\Rightarrow\; \underline{y(x) = \frac{c}{x}}$$

2.7 Differentialgleichungen 2. Ordnung

* Im Gegensatz zu gew. DGL 1. Ordnung lassen sich für $G\left(y'', y', y, x\right) = 0$ nicht so allgem. Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit bzw. eine explizite allgem. Lsg fällen. Ausnahmen: Reduktion 2. Ord. → 1. Ord. möglich, z.B.:

1) $G\left(y'', y', x\right) = 0$ hängt nicht von $y(x)$ ab:

$$\text{def. neue Funktion } z(x) = y'(x) \;\Rightarrow\; z'(x) = y''(x)$$
$$\Rightarrow\; \text{wende Ergebnisse für 1. Ord. auf } G\left(z'(x), z(x), x\right) = 0 \text{ an}$$
$$\text{und integriere am Ende} \qquad y(x) = \int^{x} dt z(t)\,.$$

2) $G\left(y''(x), y'(x), y(x)\right) = 0$ hängt nicht explizit von x ab:

$$\text{Betrachte } z(x) \equiv y'(x) = z(y) \text{ als Funktion von } y$$
$$\Rightarrow\; y''(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot z \;\Rightarrow\; G\left(\frac{dz}{dy}\cdot z, z, y\right) = 0 \text{ ist 1. Ord.}$$
$$\text{Bestimme am Ende } y(x) \text{ aus } \frac{dy}{dx} = z(y) \;\Leftrightarrow\; \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\tilde{y}}{z\left(\tilde{y}\right)} = \int_{x_0}^{x} d\tilde{x} = x - x_0\,.$$

Lineare Diff. Gl. 2. Ordnung

$$\underline{y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)} \quad \text{inhom. DGL}$$
$$\text{def. } \underline{Ly(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right) y(x)} \quad \text{linearer Diff. Op. 2. Ord.}$$

Es gilt:

- allgem. Lsg der inhom. DGL = allgem. Lsg der hom. DGL $Ly(x) = 0$ + spezielle Lsg der inhom. DGL $Ly(x) = f(x)$

(denn 2 Lsgn $y_{1,2}$ unterscheiden sich nur durch eine Lsg der hom. Gl. $L\left(y_1(x) - y_2(x)\right) = 0$)

- Die hom. DGL $\underline{Ly(x) = 0}$ hat 2 Integrationskonst. (da 2. Ord.). Aufgrund der Linearität (**Superpositionsprinzip**) ist die allgem. Lsg. der hom. DGL: $\boxed{y_a(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}$.

- Zwei Lösungen $y_{1,2}(x)$ sind unabhängig (sie bilden eine Basis des Lösungsraumes), wenn:

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)}_{\neq\text{const.}} = \frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1(x)^2}$$

$(y_1(x) \not\equiv 0$ da sonst nicht Element d. Basis$)$

$$\textbf{Wronski-Determinante}\ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{2.21}$$

(Wronski $= 0 \not\Rightarrow$ lineare Abhängigkeit)

- 1. Lösung $Ly_1(x) = 0 \Rightarrow$ 2. Lösung $Ly_2(x) = 0$ durch Variation der Konstante:

Beispiel:

$$\underline{y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0}$$

$$\text{offensichtlich ist } \underline{y_1(x) = cx \text{ eine Lösung}}:\ y_1' = c,\ y_1'' = 0$$

2. Lsg aus $y_2(x) = C(x)x$: $\begin{aligned} y_2' &= C'(x)x + C(x)\cdot 1 \\ y_2'' &= C''(x)x + 2C'(x) \end{aligned}$

$$\Rightarrow\ 2C' + xC'' + \frac{1}{x}\left(C'x + \underline{C}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\underline{Cx}\right) = 0\ \Leftrightarrow\ C'' = -\frac{3C'}{x}$$

$$z(x) = C'(x):\quad \boxed{\frac{dz(x)}{dx} = -\frac{3z(x)}{x}}\quad \text{Sep. der Var.}\ \int\frac{dz}{z} = -3\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z(x)| = -3\ln|x|\ \Rightarrow\ z(x) = \frac{c}{x^3}\ \Rightarrow\ C(x) = -\frac{c}{2x^2}$$

$$\text{allg. Lsg } y_a(x) = c_1 x + c_2\left(-\frac{c}{2x^2}\cdot x\right) = c_1 x + \tilde{c}_2\frac{1}{x},\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{1}{x}}{x}\right) \neq 0:\ y_{1,2}\text{ unabh.}$$

<u>Anmerkung</u>: L ist <u>homogen in x</u>: $L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow L(\alpha x) = \frac{1}{\alpha^2} L(x) \qquad \text{allgem. } \alpha^l L(x) \\
&\Rightarrow \text{mache Potenzansatz } \underline{y(x) = x^a}: \\
&\Rightarrow a(a-1)x^{a-2} + \frac{a}{x}x^{a-1} - \frac{1}{x^2}x^a = 0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} a(a-1) + a - 1 = 0 \\ a^2 = 1 \text{ Lsg } a = \pm 1 \end{array}
\end{aligned}$$

<u>Lösung der inhomogenen DGL:</u>

- <u>1. und 2. unabhängige Lösungen der linearen DGL</u> $Ly_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow$ <u>spez. Lsg</u> durch Variation der Konst.

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz: } y_s(x) =& C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \\
\Rightarrow \; y_s'(x) =& C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2' \\
&\text{wähle } \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0}_{\to \text{ i)}} \quad \Rightarrow \text{ eine verbleibende freie Funktion} \\
\Rightarrow \; y_s''(x) =& C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'
\end{aligned}$$

<u>eingesetzt in</u> $y_s'' + py_s' + qy_s = f$, benutze $Ly_1 = 0 = Ly_2$

$$\Rightarrow \; C_1\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{=0} + C_2\underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{=0} + \underbrace{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f}_{\to \text{ ii)}}$$

- aus y_1' i) + y_1 ii)

$$\begin{aligned}
0 = y_1'\left(\underline{C_1'y_1} + C_2'y_2\right) - y_1\left(\underline{C_1'y_1'} + C_2'y_2' - f\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \; C_2'(x) = \frac{-y_1(x)f(x)}{y_1'y_2 - y_1y_2'}, \qquad \text{Nenner} \neq 0 \text{ da } y_{1,2} \text{ unabh.}
\end{aligned}$$

- aus y_2' i) + y_2 ii)

$$\begin{aligned}
0 = y_2'\left(C_1'y_1 + \underline{C_2'y_2}\right) - y_2\left(C_1'y_1' + \underline{C_2'y_2'} - f\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \; C_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{y_2'y_1 - y_2y_1'}, \qquad \text{Nenner} \neq 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Integration über x auf beiden Seiten liefert die Funktion $C_1(x)$+const. und $C_2(x)$+ const. für beliebiges $f(x)$ (nicht unabh., erfüllen i)) $\Rightarrow\; y_s(x) = ...$

- weiter Lösungsverfahren:

Potenzreihenansatz: wenn sich $p(x)$ und $q(x)$ in einer nichtverschwindenen Umgebung von einem x_0 in eine Potenzreihe (Taylorreihe) entwickeln lassen:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, (x - x_0)^n \qquad \text{dito für } q(x)\,,$$

dann gibt es immer 2 unabhängige Lösungen $y_{1,2}$ der homogenen DGL: $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$, die sich in Potenzreihen entwickeln lassen. Also

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n \\ \Rightarrow\; y_1'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \, (x - x_0)^{n-1} \\ \Rightarrow\; y_1''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \, (x - x_0)^{n-2} \qquad \text{dito für } y_2(x)\,. \end{aligned}$$

Die a_n lassen sich dann durch Koeffizientenvergleich aus den p_n und q_n bestimmen.

Beispiel: $y''(x) - xy(x) = 0$, also $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv -x$:
$\rightarrow$ Potenzreihenansatz bei $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1) x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k = 0 \\ \mathcal{O}\left(x^0\right) &: a_2 = 0 \\ \mathcal{O}\left(x^{k\geq 1}\right) &: a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_{k-1} = 0 \qquad k \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \underline{a_{l+3} = \frac{a_l}{(l+3)(l+2)}} \qquad l \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_0$ bestimmt die Koeffizienten a_{3k}, a_1 bestimmt die Koeffizienten a_{3k+1}, die Koeffizienten $a_{3k+2} \sim a_2 \equiv 0$.
$\Rightarrow a_0$, a_1 sind auch die Integrationskonstanten. Wähle $y_1(x) \sim a_0$, $y_2(x) \sim a_1$, damit sind sie unabhängig:

$$\begin{aligned} y_1(x) =& a_0 \cdot 1 + a_3 x^3 + a_6 x^6 + ... = a_0 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{1}{3 \cdot 2} \frac{1}{6 \cdot 5} x^6 + ...\right) \\ y_2(x) =& a_1 \cdot x + a_4 x^4 + a_7 x^7 + ... = a_1 \left(x + \frac{1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{1}{4 \cdot 3} \frac{1}{7 \cdot 6} x^7 + ...\right) \end{aligned}$$

* Bemerkung: wir haben bereits gesehen, dass für L homogen in x eine einzelne Potenz die DGL löst. Obiges Beispiel ist allerdings nicht homogen.

– obige DGL heißt **Airy-Differential-Gleichung**:

$$y''(x) - xy(x) = 0\,. \tag{2.22}$$

Bestimmte Linearkombinationen von y_1 und y_2 heißen $\mathbf{Ai}(x)$ und $\mathbf{Bi}(x)$ und definieren neue Funktion: Airy-Funktion.

Lineare Differentialgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

* hierfür gibt es eine allgemeine Lösung; dieser Typ DGL ist wichtig in der Physik!

$$Ly \equiv y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x) \qquad p,\, q \in \mathbb{R}$$

- homogene Gl ($f = 0$): wir brauchen $y \sim y' \sim y''$ Ansatz: $y(x) = e^{rx}$

$$\Rightarrow\ Ly = 0 = \left(r^2 + pr + q\right) e^{rx} \ \Leftrightarrow\ \underbrace{r^2 + pr + q = 0}_{\text{charakt. Gl.}}$$

$\exists$ 3 Fälle von Lsg $r_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

i) $\frac{p^2}{4} - q > 0$: $\quad r_+ \neq r_- \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ 2 verschiedene Lsgn: $y_1(x) = e^{r_+ x}$, $\quad y_2(x) = e^{r_- x}$, $\quad \dfrac{y_2}{y_1} = e^{-2x\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \neq$ const.

$y_a(x) = c_1 e^{r_+ x} + c_2 e^{r_- x}$ d.h. $y_{1,2}$ unabhängig

ii) $\underline{\frac{p^2}{4} - q = 0}$: $r_+ = r_- = -\frac{p}{2}$, eine entartete reelle Lösung $y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}$, $y_2(x)$ mittels Variation der Konstante (wie auf Seite 65):

$$y_2(x) = c(x)e^{-\frac{p}{2}x}\,, \quad y_2'(x) = \left(c'(x) - \frac{p}{2}c(x)\right) e^{-\frac{p}{2}x}$$

$$y_2'' \left(c''(x) - pc'(x) + \overset{=q}{\frac{p^2}{4}}c(x)\right) e^{-\frac{p}{2}x}$$

$$\Rightarrow \; Ly_2 = 0 = \left(c'' - pc' + \frac{p^2}{4}c + pc' - \frac{p^2}{2}c + \frac{p^2}{4}c\right) e^{-\frac{p}{2}x} = 0$$

$$\Rightarrow \; c'' = 0 \quad \text{d.h } c(x) = \alpha x + \beta\,, \quad \text{d.h. } y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}\,, \text{ unabh. von } y_1(x)$$

Die allgemeine Lsg der homogenen Gl. ist dann gegeben mit:

$$\boxed{y_a(x) = c_1 e^{-\frac{p}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{p}{2}x}\,.}$$

iii) $\underline{\frac{p^2}{4} - q < 0}$: $r_\pm = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \in \mathbb{C}$, $e^{\pm i\alpha x} = \cos(\alpha x) \pm i\sin(\alpha x)$
Wähle neue Linearkombination als Lösung $y_a(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$:

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\cos\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}x\right)\,,\; y_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\sin\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}x\right)\,,\; \text{unabh. Lsg}$$

$$\text{denn } y_1'(x) = -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}x}\cos - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}e^{-\frac{p}{2}x}\sin\,,\; y_2' = ... \quad \text{Wronski} \neq 0$$

(check: $y_{\prime\prime} = \frac{p^4}{4}e^{-\frac{p}{2}x}\cos - \left(q - \frac{p^2}{4}\right)e^{-\frac{p}{2}x}\cos + \frac{p}{2}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}e^{-\frac{p}{2}x}\sin$, einsetzen ...)
allgem Lsg:

$$y_a(x) = c_1 e^{-\frac{p}{2}x}\cos\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}x\right) + c_2 e^{-\frac{p}{2}x}\sin\left(\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}x\right)$$

- Anwendung: **Schwingungsgleichung mit Dämpfung**:
(Federn = harmonische Kräfte, gibt es überall in der Physik)

$$m\ddot{x} = -kx\,, \quad k \text{ rücktreibende Federkraft, oder allgemeiner:}$$
$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0\,, \quad q = \frac{k}{m}\,, \quad \text{AB zu } x(t): \; x(t_0)\,,\, x'(t_0)$$

$p = 0$ keine Reibung: $q > 0 \left(\frac{p^2}{4}\right)$ freie Schwingung

$$\text{Reibung:}\quad \begin{array}{rll} \text{iii)} & q > \frac{p^2}{4} \geq 0 & \underline{\text{gedämpfte Schwingung}} \\ \text{ii)} & q = \frac{p^2}{4} & \underline{\text{kritisch gedämpfte Schwingung}}\text{: höchstens 1 Extremum} \\ \text{i)} & q < \frac{p^2}{4} & \underline{\text{komplett gedämpfte Schwingung}}\text{: nur exp. Abklingen} \end{array}$$

Bsp.: Inhomogene Gleichung: "getriebene Schwingung"

$$\underline{\text{z.B.}} \quad y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = b\sin(\omega x) \quad (= f(x)) \quad \begin{array}{l} 2k = p \\ \omega_0^2 = q \end{array}$$

Bestimme $y_s(x)$ mittels Variation der Konstanten, oder durch Raten.
Fall iii) $\omega_0^2 > k^2$:

$$y_a(x) = e^{-kx}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - k^2}\, x\right)\right) \quad \text{Lsg d. hom. Gl.}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y_s(x) =& A\cos\omega x + B\sin\omega x \\ y_s'(x) =& -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x \\ y_s''(x) =& -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x \\ \Rightarrow\ & \cos(\omega x)\left(-A\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + 2Bk\omega\right) + \sin(\omega x)\left(-B\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) - 2Ak\omega - b\right) = 0 \end{aligned}$$

Koeffizienten $= 0$:

$$B = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\, A}{2k\omega}\,, \; A\left(2k\omega + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right) \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{2k\omega}\right) = -b$$
$$\Rightarrow \underline{A = \frac{-2k\omega b}{4k^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}\,, \; B = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\, b}{4k^2\omega^2 + \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}}$$

* andere inhomogene Terme $f(x)$: Tricks (sonst: Seite: 65)

- f Polynom vom Grad n $\rightarrow$ wähle y_s Polynom vom Grad n oder $n+1$
- $f \sim e^{\alpha x}$ $\rightarrow$ wähle $y_s \sim e^{\alpha x}$ für $\alpha \neq r_\pm$, sonst $xe^{\alpha x}$, $x^2 e^{\alpha x}$
- $f \sim \cos(\omega x)$ $\rightarrow$ wähle Ansatz wie oben
- $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ (i.e. $\cos + \sin$): bestimme y_{s_1}, y_{s_2}, $y_s = y_{s_1} + y_{s_2}$ "Superposition"

2.8 Systeme von Differentialgleichungen / DGL n-ter Ordnung

Gegeben explizite gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^{(n)}(x) = f\left(y^{(n)}(x), ..., y'(x), y(x), x\right)$$

mit AB $y^{(i)}\,(x_0) = y_{0,i}$ für $i = 0, 1, ..., n-1$

$\rightarrow$ bilde ab auf System von n DGL 1. Ord.:

$$y_1(x) = y(x)\,, \; y_{i>1}(x) = y^{(i-1)}(x) \; i = 2, ..., n\,, \text{ also } y_2 = y'\,, \; y_3 = y'' \text{ etc.}$$

$\rightarrow$ Vektor DGL

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f\left(y_n, y_{n-1}, ..., y_1, x\right) \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \vec{y}'(x) = \vec{f}\left(\vec{y}, x\right)$$

(praktisch für die hom. Lsg von DGL n-ter Ord.)

- wie bei skalaren DGL 1. Ord. gibt es Eindeutigkeit, wenn die Lipschitzbed. erfüllt ist:

$$\exists\, L\ \forall\, x, \vec{y} \in\ D \qquad \left|\vec{f}\,(\vec{y}_1, x) - \vec{f}\,(\vec{y}_2, x)\right| \leq L\,|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|\ . \tag{2.23}$$

Dies wird z.B. durch lineare DGLs erfüllt $\boxed{\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{b}}$.

- *Beispiel* für homogene Gl:

$$y'''(x) - 3y''(x) - 9y'(x) - 5y(x) = 0$$

3. Ordnung, konstante Koeffizienten.
Setze $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y'' = y_2'$:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{3 unabh. Lsgn für } y(x) \leftrightarrow \text{3 Lsgn. für } \vec{y}\text{, so dass diese lin. unabhängig}}$

Lösung der homogenen DGL $\vec{y}' = A\vec{y}$: Eigenwerte von A

Ansatz für n unabhängige Lösungen: $\boxed{\vec{y}_i(x) = e^{\lambda_i x}\underset{(\neq 0)}{\vec{u}_i}}$ $i = 1, ..., n$

$$\Rightarrow\ \vec{y}_i'(x) = \lambda_i \vec{y}_i(x) = A\vec{y}_i(x)$$

$\Rightarrow$ nach Bestimmung der n Eigenwerte $\lambda_{i=1,\ldots,n}$ haben wir:

$$\vec{y}_a(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{y}_i(x) \quad \text{(wenn die } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ paarweise verschieden!)}$$

- Entartung, z.B. zweier Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2$:
wie bei DGL 2. Ordnung mit konst. Koeff. (S. 71)

$$\begin{aligned}\vec{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{u}_1\,,\ \vec{y}_2(x) &= xe^{\lambda_1 x}\vec{u}_1 + e^{\lambda_1 x}\vec{v}\\ \Rightarrow\ \vec{y}_2' &= \left(e^{\lambda_1 x}\vec{u}_1 + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}\vec{u}_1\right) + \lambda_1 e^{\lambda_1 x}\vec{v}\\ &= Axe^{\lambda_1 x}\vec{u}_1 + Ae^{\lambda_1 x}\vec{v}\\ \Leftrightarrow\ & \underline{(A - \lambda_1 \mathbb{1})\,\vec{v} = \vec{u}_1}\end{aligned}$$

nichttriviale Lösung existiert wegen $\boxed{\det(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = 0}$ $\Rightarrow$ Vektor $\vec{v}$

<u>zurück zum Beispiel</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & 9 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Eigenwerte - Lsg von:}$$

$$\begin{aligned}0 =& \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 5 & 9 & 3-\lambda\end{vmatrix}}_{\text{entwickle nach der 3. Spalte}}\\ =& -1\begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ 5 & 9\end{vmatrix} + (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}\\ =& 9\lambda + 5 + (3-\lambda)\lambda^2 = -(\lambda+1)^2(\lambda-5)\end{aligned}$$

$\exists$ Lsg für Gleichung 3. Ordnung, oder raten: $\underline{\lambda_1 = -1 = \lambda_2}$, $\underline{\lambda_3 = 5}$, Entartung! $\rightarrow$ verfahre wie oben.

<u>Eigenvektoren</u>:

$$\begin{aligned}\text{zu } \lambda_1 = -1: \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} &\Rightarrow A\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 5-9+3\end{pmatrix} = -\vec{u}_1\\ \text{zu } \lambda_3 = 5: \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1\\ 5\\ 25\end{pmatrix} &\Rightarrow A\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5\\ 25\\ 5+45+75\end{pmatrix} = 5\cdot\vec{u}_3\end{aligned}$$

<u>Bestimmung von $\vec{v}$</u> in $\vec{y}_2(x) = xe^{\lambda_1 x}\vec{u}_1 + e^{\lambda_1 x}\vec{v}$:

$$\underbrace{(A-\lambda_1 \mathbb{1})}_{M,\,\det M=0}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \vec{v} \stackrel{!}{=} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Seite 30: $\exists$ nichttriviale Lsg $M\vec{v}_a = 0$ (hier $\vec{v}_a = \vec{u}_1$!)
allg. Lsg: $\underline{\vec{v} = \sum_a c_a \vec{v}_a + \vec{v}_a}$, $\vec{v}_s$ spezielle Lsg.

- uns genügt eine Lsg $\vec{v}_s$ (da mit $c_1 e^{\lambda_1 x}\vec{u}_1 = c_1\vec{y}_1$ weitere homogene Lösungen erzeugt werden), also z.B. $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ vollständige Lsg des Gleichungssystems von der Seite 71: $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{y}(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[x e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + c_3 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

wegen $\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$ ist die erste Komponente des Vektors $y_1(x) = y(x)$ die allgemeine Lösung von

$$y'''(x) - 3y''(x) - 9y'(x) - 5y(x) = 0\,.$$

3 Analysis in mehreren Dimensionen

- bislang haben wir uns im Wesentlichen mit Funktionen von einer Variable beschäftigt, also z.B.

$$f : \begin{cases} x & \rightarrow & f(x) \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{cases}, \quad \vec{y} : \begin{cases} x & \rightarrow & \vec{y}(x) \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad \text{im vorherigen Bsp}$$

(Ausnahme bisher: DGL, z.B. $y'(x) = f(x, y)$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Seite 61)
Im Folgenden werden wir die Begriffe von Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit verallgemeinern. Funktionen mehrerer Variablen heißen **Felder**.

Beispiele, wo sowas vorkommt:

  - **skalares Feld**: $T : \begin{cases} (x, y, z) & \rightarrow & T(x, y, z) \\ \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \end{cases}$ z.B. Temperatur in einem Raum
  - **Vektor-Feld**: $\vec{E} : \begin{cases} (x, y, z) & \rightarrow & \vec{E}(x, y, z) \\ \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \end{cases}$ z.B. ein elektrisches Feld im Raum
  - **Raumkurve** eines Teilchens $\vec{r} : \begin{cases} t & \rightarrow & \vec{r}(t) \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \end{cases}$

- der uns umgebende Raum ist der alltäglichen Wahrnehmung 3 dimensional. U.U. betrachten wir höhere oder niedrigere Dimension D, z.B. Oberflächen $D = 2$, Raumzeit $D = 4$ (mit Eklidischer oder Minkowski Metrik), Gittereichtheorie $D = 5$ (die Physik passiert auf der $D = 4$ Oberfläche), Stringtheorie $D = 10$: einige Dimensionen sind klein und kompakt (!)

- Definition **ϵ-Umgebung im** $\mathbb{R}$ von $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$U_\epsilon(\vec{r}_0) \equiv \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{r} - \vec{r}_0| < \epsilon\} , \tag{3.1}$$

wobei hier $|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + ... + r_n^2}$, $\vec{r} = (r_1, ..., r_n)$, die Norm in der kanonischen Basis.

- Definition **Grenzwert**: Gegeben sei ein skalares Feld $f(\vec{r})$. Dann hat $f(\vec{r})$ bei $\vec{r} = \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ den Grenzwert f_0 genau dann wenn (g.d.w.)

$$\forall\,\epsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : \; |f(\vec{r}) - f_0| < \epsilon \quad \text{falls} \quad \vec{r} \in U_\delta(\vec{r}_0) \; . \tag{3.2}$$

- Der Grenzwert muss <u>un</u>abhängig von der Richtung sein.
- *Beispiel* einer Funktion deren Grenzwert nicht existiert in $\vec{r}_0 = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2}, \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \text{ Abb. v. } \mathbb{R}^2 \; \to \; \mathbb{R} \\ \text{für } y = x \text{ gilt } f(x,x) &= \frac{x^2}{x^2+x^2} = +\frac{1}{2} \\ \text{für } y = -x \text{ gilt } f(x,-x) &= \frac{-x^2}{x^2+(-x)^2} = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad \underset{\vec{r}=(x,y)\to\vec{0}}{\text{der Limes}} & \; f(x,y) \text{ existiert nicht!} \end{aligned}$$

  (aber: $f(x,y)$ stetig in <u>einer</u> Variablen, z.B. x für $y \neq 0$ fest!)

- <u>Definition</u> **Stetigkeit in** $\mathbb{R}^n$: Ein skalares Feld $f(\vec{r})$ ist stetig in $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ g.d.w.

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{r}_0} f(\vec{r}) = f\left(\lim_{\vec{r}\to\vec{r}_0} \vec{r}\right) = f(\vec{r}_0) \; , \tag{3.3}$$

  d.h. <u>Grenzwert</u> und <u>Funktion</u> <u>vertauschen</u>.
  Ein Vektorfeld ist stetig g.d.w. jede Komponente stetig ist.
  Ein Feld ist stetig in einer Umgebung $\vec{r}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es stetig ist $\forall\,\vec{r} \in D$.

3.1 Partielle Ableitung, Gradient, Richtungsableitung

[Schulz 8.1, Lang und Pucker 4.2 + 7.4]

Betrachten wir der Einfachheit halber wider ein Skalarfeld $f(\vec{r}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kanonischer Basis, so dass $\vec{r} = (r_1, ..., r_n) \in \diagdown^n$.
<u>Definition</u>: Das Skalarfeld $f(\vec{r})$ besitzt **partielle Ableitung nach der p-ten Koordiate** (ist nach der p-ten Koord. partiell differenzierbar) in $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, g.d.w.:

$$\lim_{\epsilon_0\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{p-1}, a_p + \epsilon, a_{p+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_p, ..., a_n)}{\epsilon} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_p}\right|_{\vec{r}=\vec{a}} \qquad \text{existiert.} \tag{3.4}$$

* Dies entspricht der gewöhnlichen Ableitung, wenn wir alle Koordinaten $a_1, ..., a_{p-1}, a_{p+1}, ..., a_n$ festhalten und $f(x_1, ..., x_p, ..., x_n)$ als Funktion einer Variablen, nämlich x_p, betrachten. Wir können auch schreiben:

$$\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_p} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\vec{a} + \epsilon \vec{e}_p) - f(\vec{a})}{\epsilon}, \tag{3.5}$$

wobei $\vec{e}_p$ der p-te Einheitsvektor in kanonischer Basis ist.

Bemerkung: offenbar können wir *allgemeine Ableitungen* definieren, indem wir

- die Ableitung emtlang einer anderen Richtung ($\neq \vec{e}_{p=1,...,n}$) betrachten
  $\rightarrow$ **Richtungsableitung**
- beim Grenzwert beliebige Richtungen zulassen, wie schon bei der Def. der Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$
  $\rightarrow$ **"totale" Differenzierbarkeit**

Definition: Die Funktion $f(\vec{r}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Skalarfeld) ist **differenzierbar** in $\vec{r} = \vec{r}_0$, wenn gilr:

$$\begin{aligned} \forall\, \vec{r}_0 + \Delta\vec{r} \in U_\delta(\vec{r}_0) \quad & \text{gibt es eine Darstellung} \\ f(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r}_0) &= \vec{d}(\vec{r}_0) \cdot \Delta\vec{r} + g(\Delta\vec{r}) \\ \text{mit } \lim_{\Delta\vec{r} \to \vec{0}} \frac{g(\Delta\vec{r})}{|\Delta\vec{r}|} &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ein solches $f(\vec{r})$ heißt auch **total differenzierbar**.

* Insbesondere gilt, dass ein differenzierbares $f(\vec{r})$ auch

- stetig ist in $\vec{r}_0$ (bilde $\lim \Delta\vec{r} \to \vec{0}$ auf beiden Seiten)
- alle partiellen Ableitungen existieren $\frac{\partial}{\partial x_p} f(\vec{r}_0)$ für $p = 1, ..., n$
  (denn: wähle $\Delta\vec{r} = \epsilon \vec{e}_p$, mit $\frac{\partial f(\vec{r}_0)}{\partial x_p} = \vec{d}(\vec{r}_0) \cdot \vec{e}_p \equiv d_p(\vec{r}_0)$)

• Der Umkehrschluß gilt i.A. nicht, d.h. aus der Existenz aller partiellen Ableitungen folgt nicht die Differenzierbarkeit von $f(\vec{r})$!

* Im Beispiel S. 76:

$$\underline{f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}} \text{ ist } \begin{cases} \text{stetig als Fkt. von } x \text{ (} y \text{ fest)} \\ \text{stetig als Fkt. von } y \text{ (} x \text{ fest)} \\ \underbrace{\text{nicht stetig in } (x,y) = \vec{0} \in \mathbb{R}^2}_{\Rightarrow \text{ kann nicht diffbar sein in } \vec{0}} \end{cases}$$

* zum Vergleich betrachte die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) =& \frac{(x^2+y^2)\, y - xy \cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^3 - yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \left(\text{z.B. } \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) =& \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)} \qquad \left(\text{z.B. } \underset{y \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

auf unterschiedliche Weise divergent bei $(x, y) = \vec{0}$.

<u>Definition</u>: Für differenzierbare skalare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt der Vektor $\vec{d}\,(\vec{r}_0)$ aus obiger Definition **Gradient** von f in $\vec{r} = \vec{r}_0$:

$$\vec{d}\,(\vec{r}_0) \equiv \vec{\nabla} f\,(\vec{r}_0)\ . \tag{3.7}$$

Als (lineare!) Abbildung betrachtet bildet der sog. **Nabla-Operator**

$$\vec{\nabla} = \sum_{k=1}^{n} \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \vec{e}_k \partial_k \tag{3.8}$$

den Skalar $f\,(\vec{r})$ auf eine Vektor ab: $\vec{\nabla} : \begin{cases} f\,(\vec{r}) \;\to\; \vec{\nabla} f\,(\vec{r}) \\ \mathbb{R} \;\to\; \mathbb{R}^n \end{cases}$

Differenzierbares $f\,(\vec{r}_0)$:

$$f\,(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) = f\,(\vec{r}_0) + \Delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f\,(\vec{r}_0) + \mathcal{O}\left(|\Delta\vec{r}|^2\right)\ . \tag{3.9}$$

- **Richtungsableitung**:
  Statt den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_p} f\,(\vec{x})$ entlang der orthonormalen Basisvektoren (die z.B. durch Rotation geändert werden können) können wir auch Ableitungen <u>entlang einer beliebigen Achse betrachten:</u>

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{h} \qquad \begin{array}{c}\text{Gerade durch } r_0 \\ \text{mit Richtung } \vec{h}\end{array} ,$$

wobei $\vec{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$ normiert sei $\left|\vec{h}\right| = 1$.
Die Richtungsableitung ist dann gegeben durch (S. 78 $\Delta\vec{r} = t\vec{h}$ mit $t = \epsilon \ll 1$)

$$f\left(\vec{r}_0 + \epsilon\vec{h}\right) - f\left(\vec{r}_0\right) = \epsilon\vec{h}\vec{\nabla} f\left(\vec{r}_0\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$$

$$\Leftrightarrow: \quad \left.\frac{df\left(\vec{r}_0 + t\vec{h}\right)}{dt}\right|_{t=0} = \underbrace{\vec{h}}_{=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}} \cdot \vec{\nabla} f\left(\vec{r}_0\right) = |\vec{h}||\vec{\nabla} f\left(\vec{r}_0\right)|\cos\theta\,, \tag{3.10}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{h}$ und $\vec{\nabla} f$ ist. (Sieht aus wie Kettenregel!)

Konsequenz:
Für ein Skalarfeld $f\left(\vec{r}\right)$ ist die Richtung der größten Änderung genau dann gegeben, wenn $\vec{h} \parallel \vec{\nabla} f$, d.h. in der Richtung vom Gradienten von $f\left(\vec{r}\right)$ (denn genau dann ist der $\cos\theta$ maximal!)

- *Beispiel*: **Niveauflächen** (Äquipotentialflächen)
Lösungen in der Gleichung $f\left(\vec{r}\right) = \lambda \in \mathbb{R}$ konstant beschreiben i.A. Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$: z.B. für die skalare Funktion

$$\phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{a}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ :$$

Lösungen $\phi\left(\vec{x}\right) = \lambda \neq 0$ sind Kugelflächen um den Ursprung mit konstantem Radius $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{a}{\lambda}$.
Es beschreibt $\phi\left(\vec{x}\right)$ das elektrostatische Potential einer Punktladung am Ursprung.
In welche Richtung nimmt ϕ am meisten ab (zu)?
Antwort: in Richtung grad$\phi = \vec{\nabla}\phi = \left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}\right)\phi = -\left(x_1, x_2, x_3\right)\frac{a}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3}$.
Nach Normierung ist dies der (negative) Radialvektor, d.h. die Zunahme ist am größten in Richtung Ursprung, d.h. $\perp$ zur Kugelfläche. Ist das immer so?
Ja: Sei $f\left(\vec{r}\right) = \lambda$ eine Hyperfläche mit Tangentialvektor $\vec{u}$ zur Hyperfläche in $\vec{r}_0$. Dann ist die Änderung von f in Tangentialrichtung $\parallel \vec{u}$ null, wegen $f\left(\vec{r}_0\right) = \lambda = \text{const}$.

$$\Rightarrow\ 0 = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f\left(\vec{r}_0\right)\ , \quad \text{d.h. } \vec{u} \perp \vec{\nabla} f\left(\vec{r}_0\right)\ .$$

Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen:

- wir haben diese schon im Prinzip bei der Richtungsableitung gesehen.
- eine weitere Anwendung:

  gegeben $\vec{r}(t)$ eine Raumkurve: $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $T(\vec{x})$ eine Temperatur (Skalarfeld) $T(\vec{x}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ $T(\vec{r}(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wie ändert isch T wenn $\vec{r}(t)$ mit dem Parameter t die Raumkurve durchläuft?

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} T\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right)$$

* wir benötigen, dass sowohl

- $r_{j=1,2,3}(t)$ (normal) differenzierbar:

$$r_j(t+\Delta t) = r_j + \overbrace{\frac{dr_j(t)}{dt}\Delta t}^{\Delta r_j(t)} + \mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$$

- $T(\vec{r})$ differenzierbar im $\mathbb{R}^3$:

$$T(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = T(\vec{r}) + \Delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} T + \mathcal{O}\left(|\Delta\vec{r}|^2\right)$$

$\Rightarrow$ **Kettenregel**:

$$\begin{aligned}\frac{dT(\vec{r}(t))}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(\vec{r}(t+\Delta t)) - T(\vec{r}(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sum_{j=1}^{3} \Delta r_j(t) \partial_{r_j} T + \mathcal{O}\overbrace{\left(|\Delta\vec{r}|^2\right)}^{\sim \Delta t^2}}{\Delta t} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{dr_j(t)}{dt} \cdot \frac{\partial T(\vec{r}(t))}{\partial r_j(t)} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \vec{\nabla} T(\vec{r}(t)) \,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

* Die Verallgemeinerung zum $\mathbb{R}^n$ ist offensichtlich.

Transformationseigenschaften

- wegen $\vec{\nabla} = \vec{e}_k \partial_{x_k}$ transformiert $\vec{\nabla}$ wie ein Vektor beim Wechsel der Basis:

$$\begin{aligned} \vec{e} &\rightarrow \vec{e}' = O\,\vec{e} \\ \Rightarrow\ \partial_{x_k} &\rightarrow \partial'_{x_k} = O^\top \partial_{x_k}\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

<u>Höhere Ableitungen und Taylorentwicklung</u>:

- Wir betrachten nun Kombinationen von partiellen Abelitungen,

$$\text{z.B. } \underline{\text{2. Ableitungen: }} \partial_i \partial_j f(\vec{r}) \equiv \frac{\partial^2 f(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{r})$$

per Definition gilt:

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j f(\vec{r}) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\partial_j f(\vec{r}+\epsilon\vec{e}_i) - \partial_j f(\vec{r})}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta\epsilon}\left[f(\vec{r}+\epsilon\vec{e}_i+\delta\vec{e}_j) - f(\vec{r}+\epsilon\vec{e}_i) - f(\vec{r}+\delta\vec{e}_j) + f(\vec{r})\right] \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{\partial_i f(\vec{r}+\delta\vec{e}_j) - \partial_i f(\vec{r})}{\delta} \\ &\uparrow \text{wenn die Abl. stetig sind, d.h. die Limites vertauschen.} \end{aligned}$$

* In den allermeisten Beispielen sind die 2. Ableitungen stetig, d.h. $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$.

Beispiel:

$$f(x,y) = xy^2 \quad \begin{array}{ll} \partial_x f = y^2 & \partial_x^2 f = 0 \\ \partial_y f = 2xy & \partial_y^2 f = 2x \end{array} \quad \partial_x \partial_y f = 2y = \partial_y \partial_x f$$

<u>Definition</u>: Für ein Skalarfeld $f(\vec{r}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dessen 2. Ableitungen alle stetig sind ist die

$$\textbf{Hesse-Matrix}: \quad \begin{pmatrix} \partial_1^2 f & \partial_1\partial_2 f & \dots & \partial_1\partial_n f \\ \partial_2\partial_1 f & \partial_2^2 f & \dots & \partial_2\partial_n f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f & \partial_n\partial_2 f & \dots & \partial_n^2 f \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

eine <u>symmetrische $n \times n$ Matrix</u>. Sie kann deshalb mittels einer <u>orthogonalen Transformation diagonalisiert werden</u> und hat reelle Eigenwerte.

- Entsprechend können höhere Ableitungen definiert werden. Existieren alle Ableitungen und sind stetig so definieren sie einen symmetrischen Tensor:

$$\text{z.B.:} \quad \begin{array}{cc} f(\vec{r}) & \text{Skalar} \\ \partial_i f(\vec{r}) & \text{Vektor} \end{array} \;, \quad \begin{array}{cc} \partial_i\partial_j f(\vec{r}) & \text{Matrix (Hesse} \sim) \\ \partial_i\partial_j\partial_k f(\vec{r}) & \text{sym. Tensor 3. Stufe} \end{array} \quad \text{etc.}$$

- Wie wir gleich sehen werden, bestimmen die Eigenwerte der Hesse-Matrix, ob es sich bei einem Extremalpunkt mit $\partial_i f = 0 \; \forall \, i = 1, ..., 0$ um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

<u>Taylorreihe für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:</u>

für $n = 1$, $f \in \mathcal{C}^\infty$ hatten wir folgende Entwicklung (wenn & $\begin{cases} \text{Reihe konvergiert} \\ \text{Restglied } \to 0 \end{cases}$)

$$f(x) = \sum_k^0 \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \sum_k^0 \frac{(x - x_0)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x_0) = \exp\left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x}\right] f(x_0) \; .$$

Verallgemeinerung: z.B. für $n = 3$ $f : \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, partielle Abl. bezüglich jeder Komponente existiert zu beliebiger Ordnung: Entwickle in jeder Komponente:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \exp\left[(x - x_0)\, \partial_x\right] f(x_0, y, z) \\ &= \exp\left[(x - x_0)\, \partial_x\right] \exp\left[(y - y_0)\, \partial_y\right] \exp\left[(z - z_0)\, \partial_z\right] f(x_0, y_0, z_0) \\ &= \exp\left[(\vec{x} - \vec{x}_0)\, \vec{\nabla}\right] f(\vec{x}_0) \; , \quad \text{da Abl. } \partial_x, \partial_y, \partial_z \text{ vertauschen.} \end{aligned}$$

<u>Definition</u>: **Taylorreihe** für beliebig oft differenzierbare Skalarfelder:

$$f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \exp\left(\Delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\right) f(\vec{r}) \; , \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, . \tag{3.14}$$

Beispiel: Entwicklung zur 2. Ordnung für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\text{Entwickle zunächst bzgl } y\text{:}\\
f\left(\vec{r}+\Delta x\cdot\vec{e}_x+\Delta y\vec{e}_y\right) =& f\left(\vec{r}+\Delta x\vec{e}_x\right)+\Delta y\partial_y f\left(\vec{r}+\Delta x\vec{e}_x\right)\\
&+\frac{1}{2}\Delta y^2\partial_y^2 f\left(\vec{r}+\Delta x\vec{e}_x\right)+\mathcal{O}\left(\Delta y^3\right)\\
&\text{entwickle jeden Term bzgl. } x\\
=& f\left(\vec{r}\right)+\Delta x\partial_x f\left(\vec{r}\right)+\frac{1}{2}\Delta x^2\partial_x^2 f\left(\vec{r}\right)\\
&+\Delta y\partial_y f\left(\vec{r}\right)+\frac{1}{2}\Delta y^2\partial_y^2 f\left(\vec{r}\right)+\Delta y\partial_y\Delta x\partial_x f\left(\vec{r}\right)\\
&+\mathcal{O}\left(\Delta x^3,\Delta x^2\Delta y,\Delta x\Delta y^2,\Delta y^3\right)
\end{aligned}$$

- benutze, dass die 2. Ableitungen vertauschen $\partial_x\partial_y f=\partial_y\partial_x f$

$$\Rightarrow\ \partial_y\partial_x f=\frac{1}{2}\left(\partial_x\partial_y+\partial_y\partial_x\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ f\left(\vec{r}+\Delta x\cdot\vec{e}_x+\Delta y\vec{e}_y\right) =& f\left(\vec{r}\right)+\left(\Delta x,\Delta y\right)\cdot\vec{\nabla}f\left(\vec{r}\right)\\
&+\frac{1}{2}\left(\Delta x,\Delta y\right)\underbrace{\begin{pmatrix}\partial_x^2 f & \partial_x\partial_y f\\ \partial_y\partial_x f & \partial_x^2 f\end{pmatrix}}_{\text{Hesse-Matrix } H}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+\mathcal{O}\left(\Delta^2\right)
\end{aligned}$$

- entsprechendes gilt im $\mathbb{R}^n$

  <u>Anwendung:</u>
  <u>Extremaleigenschaften im $\mathbb{R}^n$</u> - $\nexists$ Richtung des stärksten Anstiegs (in führender Ordnung) und sei $\vec{\nabla}f\left(\vec{r}_0\right)=\vec{0}$. Hat $f\left(\vec{r}\right)$ in $\vec{r}=\vec{r}_0$ ein lokales Min. oder Max.?

- wähle neue Basis $\vec{e}'=O\,\vec{e}$, O orthogonal ($OO^\top=\mathbb{1}$) mit O so gewählt, dass $O^\top HO=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)$.

- *zurück zum Beispiel* $n=2$: in der neuen Basis gilt:

$$f\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}\right)=f\left(\vec{r}\right)+\frac{1}{2}\lambda_1\left(\Delta x_1'\right)^2+\frac{1}{2}\lambda_2\left(\Delta x_2'\right)^2+\mathcal{O}\left(\left|\Delta\vec{r}\right|^3\right)$$

<u>3 Situationen:</u>

	$\lambda_1>0$	$\lambda_2<0$
i) Sattelpunkt	Zunahme in x_1'-Richtung	Abnahme in x_2'-Richtung

ii) lokales Minimum $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

iii) lokales Maximum $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

Extremwertkriterium: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindestens $2\times$ stetig differenzierbar mit $\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = \vec{0}$:
Wenn die Hesse Matrix H **positiv (negativ) definit** ist, d.h. sie hat nur positive (negative) Eigenwerte, so hat f in $\vec{r}_0$ ein lokales Minimum (Maximum). Wenn H **indefinit** ist, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

3.2 Divergenz und Rotation

[Lang & Pucker 7.5]

- Wir definieren im Folgenden erste und höhere Ableitungen von Vektorfeldern. Dabei werden uns Identitäten aus der linearen Algebra nützlich sein. Insbesondere beschränken wir uns nun auf den $\mathbb{R}^3$:
  dort gibt es $\begin{array}{rr} \text{das Skalarprodukt} \cdot : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \text{das Vektor (o. Kreuz-) Produkt} \times : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$.
- Wir bilden nun verschiedene Kombinationen von $\vec{\nabla}$ mit Vektorfeldern wie $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$, ϕ Skalarfeld. Die wichtigste Anwendung ist die Elektrodynamik.

Definition: Sei $\vec{E}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld (d.h. diffbar in jeder Komponente). Dann ist die **Divergenz** von $\vec{E}(\vec{r})$ gegeben durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial E_k}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div}\left(\vec{E}\right) \tag{3.15}$$

(also div : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).

Beispiel:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{r}) &= z\vec{e}_x + xy\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \\ \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E}_0(\vec{r}) &= \partial_x z + \partial_y(xy) + \partial_z(2) = x \end{aligned}$$

<u>Definition</u>: Die **Rotation** eines beliebigen Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r})$ ist definiert durch

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \overset{\downarrow i\text{-te Komponente}}{=} \epsilon_{ijk}\partial_j E_k \quad . \tag{3.16}$$

Damit ist rot : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Beispiel: dasselbe $\vec{E}_0$ wie oben:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 =& (\partial_y 2 - \partial_z xy)\,\vec{e}_x + (\partial_z z - \partial_x 2)\,\vec{e}_y + (\partial_x xy - \partial_y z)\,\vec{e}_z \\ =& 0 \cdot \vec{e}_x + \vec{e}_y + y\vec{e}_z \end{aligned}$$

- Nabla wirkt als Vektor $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ immer auf die rechts stehende(n) Funktion(en).

<u>Anschauliche Bedeutung der Divergenz</u>:

Betrachte <u>Differenz</u> zwischen
+ <u>Strömung</u> in ein kleines Volumenelement <u>hinein</u>
− <u>Strömung</u> aus einem kleinen Volumenelement <u>heraus</u>

$\gtrless 0 \;\Rightarrow\; \exists$ <u>Quellen/ Senken im Volumen V</u>.

- Der Strom $\vec{j}(\vec{r})$ ist durch ein Vektorfeld gegeben. Wir betrachten die <u>Normalkomponenten</u> zum Würfel V in alle 3 Raumrichtungen:

$$j_x^{\text{aus}}\left(\vec{r}_0 + \frac{\epsilon}{2}\vec{e}_x\right) - j_x^{\text{ein}}\left(\vec{r}_0 - \frac{\epsilon}{2}\vec{e}_x\right) = \epsilon\partial_x j_x(\vec{r}_0) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$$

(genauso in $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ Richtung)

Gesamte Differenz: $\epsilon\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$ geg. durch die <u>Divergenz von $\vec{j}$</u>.

<u>Definition</u>: Ein Vektorfeld $\vec{j}$ das $\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r}) = 0$ erfüllt $\forall\, \vec{r} \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **quellenfrei**. ($\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r}) > 0$ hat Quellen, $\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{r}) < 0$ hat Senken).

Beispiele:

1) $\boxed{\vec{j} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$, $\vec{\omega} = \text{const.}$ ist <u>quellenfrei</u>, denn:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \epsilon_{ijk}\,\underset{\text{immer } i \neq j}{\partial_i \omega_j x_k} = 0$$

$$(= \partial_x(\omega_y z - \omega_z y) + \ldots) \qquad \left(\vec{j} \perp \vec{\omega} \text{ und } \vec{j} \perp \vec{r}\right)$$

2) $\boxed{\vec{j} = \vec{r}}$ ist <u>nicht quellenfrei</u>:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3 \neq 0$$

klar: $\exists$ eine Quelle am Ursprung ($\vec{j} = -\vec{r}$ hat eine Senke am Ursprung).

<u>Anschauliche Bedeutung der Rotation</u>:

Betrachte die Strömung in einer Ebene. Gibt es Wirbel?

- Diesmal betrachten wir die Parallelkomp. zum Strom durch den Würfel

$$\begin{aligned} j_x\left(\vec{r}_0 + \frac{\epsilon}{2}\vec{e}_y\right) - j_x\left(\vec{r}_0 - \frac{\epsilon}{2}\vec{e}_y\right) &= -\,\epsilon\partial_y j_x + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \\ j_y\left(\vec{r}_0 + \frac{\epsilon}{2}\vec{e}_x\right) - j_y\left(\vec{r}_0 - \frac{\epsilon}{2}\vec{e}_x\right) &= -\,\epsilon\partial_x j_y + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \\ \text{d.h. "Wirbel" in } z\text{-Richtung: } \epsilon\left(\partial_x j_y - \partial_y j_x\right) &= \epsilon\left(\vec{\nabla} \times \vec{j}\right)_z . \end{aligned}$$

- die übrigen Richtungen ergeben sich analog

  <u>Definition</u>: Ein Vektorfeld $\vec{j}$ mit $\vec{\nabla} \times \vec{j} = \vec{0}$ heißt **wirbelfrei**.

  Beispiele (wie vorher):

  1) $\boxed{\vec{j} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ ist <u>nicht</u> wirbelfrei:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{j} &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \underset{\text{Graßmann-Identität (1.12)}}{=} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right) \cdot \vec{\omega} - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\right) \cdot \vec{r} \\ &= \left(\partial_x x + \partial_y y + \partial_z z\right) \cdot \vec{\omega} - \left(\omega_x \partial_x + \omega_y \partial_y + \omega_z \partial_z\right)(x, y, z) \\ &= 3\vec{\omega} - \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = 2\vec{\omega} \neq \vec{0} \end{aligned}$$

  2) $\boxed{\vec{j} = \vec{r}}$ ist <u>wirbelfrei</u>, denn:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{j}\right)_i = \underset{\text{immer } i \neq j}{\epsilon_{ijk} \partial_j x_k} = 0$$

$$\Big(\text{oder } \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{e}_x\left(\partial_y z - \partial_z y\right) + \vec{e}_y\left(\partial_z x - \partial_x z\right) + \vec{e}_z\left(\partial_x y - \partial_y x\right)\Big)$$

Mehrfache Anwendung von Nabla $\vec{\nabla}$:
[Schulz 8.4]

- wir nehmen an, dass das Skalarfeld φ und Vektorfeld $\vec{E}$ mehrfach stetig diffbar sind. Es gilt:

$$\bullet \ \text{div}\left(\text{grad}\left(\varphi\right)\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi = \left(\partial_x,\partial_y,\partial_z\right)\cdot\left(\partial_x,\partial_y,\partial_z\right)\varphi\left(x,y,z\right) = \left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)\varphi = \Delta\varphi\,, \qquad \Delta \text{ Laplaceoperator im } \mathbb{R}^3 \tag{3.17}$$

$$\bullet \ \text{rot}\left(\text{grad}\left(\varphi\right)\right)_i = \left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi\right)_i = \underset{\text{antisym.}}{\epsilon_{ijk}}\ \underset{\text{sym.}}{\partial_j\partial_k}\varphi = 0 \tag{3.18}$$

(denn z.B. $i = x$: $\left(\partial_y\partial_z - \partial_z\partial_y\right)\varphi\left(x,y,z\right) = 0$ da die Abl. vertauschen (stetig!))

$$\bullet \ \text{div}\left(\text{rot}\left(\vec{E}\right)\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \underset{\text{antisym.}}{\epsilon_{ijk}}\ \underset{\text{sym.}}{\partial_i\partial_j}E_k = 0 \tag{3.19}$$

Diese beiden Eigenschaften zusammen heißen **Poincaré Lemma**:

* ist ein Vektorfeld durch den Gradienten eines Skalarfeldes erzeugt, so ist dies immer wirbelfrei
* der Strom der durch Rotation eines Vektorfeldes erzeugt wird, ist immer quellenfrei

Zusammen mit den folgenenden in der Vorlesung bewiesenen Identitäten (1.12), (1.13) und (1.14) können wir nun Produktregeln für den Differentialoperator $\vec{\nabla}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
\text{Graßmann Id}\quad & \vec{u}\times\left(\vec{u}\times\vec{w}\right) = \left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w}\\
\text{Lagrange Id.}\quad & \left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\cdot\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right) = \left(\vec{u}_1\times\vec{v}_1\right)\cdot\left(\vec{u}_2\times\vec{v}_2\right) - \left(\vec{u}_1\times\vec{v}_2\right)\cdot\left(\vec{u}_2\times\vec{v}_1\right)\\
\text{Jacobi Id.}\quad & \vec{u}\times\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) + \vec{v}\times\left(\vec{w}\times\vec{u}\right) + \vec{w}\times\left(\vec{u}\times\vec{v}\right) = \vec{0}
\end{aligned}$$

Wichtig: in einem solchen Produkt wirkt $\vec{\nabla}$ immer nur auf die rechts von ihm stehenden Komponenten!

Bsp.: $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \overset{\text{Graßmann}}{=} \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \underbrace{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)}_{\Delta}\vec{E}$

Produktregeln für $\vec{\nabla}$:
(zum Vergleich in einer Dimension: $\partial_x\left(f(x)g(x)\right) = \left(\partial_x f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\partial_x g(x)\right)$)

- aus den bekannten Rechenregeln für die Multiplikation von Vektoren folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(\phi\psi\right) =& \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi \\
\underline{\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{E}\right)} =& \left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\vec{E} + \phi\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) \\
\underline{\vec{\nabla}\times\left(\phi\vec{E}\right)} =& \left(\vec{\nabla}\phi\right)\times\vec{E} + \phi\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) \\
\underline{\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)} =& \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left(\underset{\uparrow}{\vec{E}}\times\vec{B}\right) + \vec{\nabla}\cdot}_{\text{wirkt nur auf}}\overbrace{\left(\vec{E}\times\underset{\uparrow}{\vec{B}}\right)}^{=-\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)} \\
=& \vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)
\end{aligned}$$

(Zyklizität des Spatprod. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$)

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)}_{\text{Graßmann Id}} \underset{\uparrow}{=}& \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)\vec{E} - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\vec{B} \quad \text{hier wirkt } \vec{\nabla} \text{ noch auf } \vec{E} \text{ \underline{und} } \vec{B} \text{ nach rechts} \\
=& \vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} - \vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} \\
\underline{\vec{\nabla}\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)} =& \vec{\nabla}\left(\underset{\uparrow}{\vec{E}}\cdot\vec{B}\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{E}\cdot\underset{\uparrow}{\vec{B}}\right) \\
\overset{!}{=}& \vec{E}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) + \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} + \left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} \\
\text{Graßmann} \rightarrow =& \vec{\nabla}\left(\vec{E}\cdot\underset{\uparrow}{\vec{B}}\right) - \underline{\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}} + \vec{\nabla}\left(\underset{\uparrow}{\vec{E}}\cdot\vec{B}\right) - \underline{\underline{\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}}} \\
&+ \underline{\underline{\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}}} + \underline{\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}}
\end{aligned}$$

* Wie bereits in der Def. von div und rot sowie beim Beweis des Poincaré Lemmas gesehen, ist manchmal die Komponentendarstellung einfacher, z.B.:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\left(\phi\vec{E}\right) =& \partial_k\left(\phi E_k\right) = E_k\partial_k\phi + \phi\partial_k E_k \\
\left(\vec{\nabla}\times\left(\phi\vec{E}\right)\right)_i =& \epsilon_{ijk}\partial_j\left(\phi E_k\right) = \epsilon_{ijk}\left(E_k\partial_j\phi + \phi\partial_j E_k\right) \\
\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) =& \epsilon_{ijk}\partial_i E_j B_k = \epsilon_{ijk}\left(B_k\partial_i E_j + E_j\partial_i B_k\right) .
\end{aligned}$$

3.3 Integration in höheren Dimensionen: Linien- und Flächenintegral

[Lang & Pucker: 7.2 & 7.3]

- Wir verallgemeinern nun Kapitel 2.4 zu höheren Dimensionen, d.h. sowohl der Integrationsbereich als auch der Integrand können nun von $D > 1$ Dimensionen abhängen:
  - Raumkurve,
  - Fläche,
  - Volumen.
- **Raumkurven**: Es beschreibe $\vec{r}(t) : t \to \mathbb{R}^n$ die Raumkurve eines Teilchens. In einem infinitesimalen Parameter (=Zeit-) intervall dt beschreibt die Raumkurve den folgenden Abstand:

$$|\vec{r}\,(t+dt) - \vec{r}\,(t)| = dt \left|\frac{\vec{r}\,(t)}{dt}\right| + \mathcal{O}\left(t^2\right) \, .$$

  $\to$ das Aufaddieren dieser Stücke ergibt folgende Taylorentwicklung in Komponenten, dann Vektornorm.
- Definition: Die **Bogenlänge** der Raumkurve $\vec{r}\,(t)$ zwischen t_a und t_b ist definiert durch

$$S \equiv \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{\vec{r}\,(t)}{dt}\right| = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2} \, , \tag{3.20}$$

  dies ist ein gewöhnliches reelles Integral in einer Dimension über eine Funktion von einer Variablen $t \in \mathbb{R}$.
- Definition: Das **Linienintegral** der skalaren Funtion $f\,(\vec{r})$ entlang der Kurve C beschrieben durch die Parametrisierung $\vec{r}\,(t)$, $t \in [t_a, t_b]$, ist gegeben durch

$$\int\limits_C |d\vec{r}|\, f\,(\vec{r}) = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \left|\frac{\vec{r}\,(t)}{dt}\right| f\,(\vec{r}) \;\in \mathbb{R}\, . \tag{3.21}$$

Behauptung: das so definierte Linienintegral hängt nicht von der Parametriesierung ab!
Denn: Sei $\vec{r}(s)$ eine zweite Parametriesierung

$$\Rightarrow \int\limits_{s_a}^{s_b} ds \left|\frac{\vec{r}\,(s)}{ds}\right| f\left(\vec{r}\,(s)\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel für } t(s)}}{\int\limits_{s_a}^{s_b}} ds \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| f\left(\vec{r}\,(t\,(s))\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subst. } s \to t(s)}}{\int\limits_{t_a}^{t_b}} dt \left|\frac{\vec{r}\,(t)}{dt}\right| f\left(\vec{r}\,(t)\right)$$

da die Abb. C (parametrisiert durch s) $\to C$ (parametrisiert durch t) eine Abb. $t(s)$ induziert.
(Wir haben vorrausgesetzt, dass Parametrisierungen monoton und diffbar sind.)

* Wir könne die Bogenlänge auch als Integral über ein Skalarprodukt schreiben:

$$|\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = \vec{r}\,'(t) \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}}_{\text{Einheitsv. } \vec{e}_v} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{e}_v = \int\limits_C d\vec{r} \cdot \vec{e}_v\,.}}$$

Beispiel: Die Raumkurve $\vec{r}\,(\varphi) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, b\varphi)$ parametrisiert eine Schraubenlinie.
Bogenlänge einer Periode:

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left|\frac{d\vec{r}}{d\varphi}\right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{a^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + b^2} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

* In Analogie zum Linienintegral eines Skalarfeldes können wir eines Vektorfeldes $\vec{E}\,(\vec{r})$ definieren:

$$\int\limits_C d\vec{r} \cdot \vec{E}\,(\vec{r}) \equiv \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{E}\,(\vec{r}) \ \in \mathbb{R}\,, \tag{3.22}$$

wobei $\vec{r}(t)$ C parametrisiert.

Beispiel: Betrachte das Vektorfeld $\vec{E}\,(\vec{r}) = c\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_x + c\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_y + d\vec{e}_z$. Das Linienintegral von diesem $\vec{E}\,(\vec{r})$ entlang der obigen Schraubenlinie $\underline{\underline{\text{ist}}}$:

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = (-a\sin\varphi, a\cos\varphi, b)\ ,\ \vec{E}\left(\vec{r}\right)\left(\frac{ca\cos\varphi}{\sqrt{a^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}}, \frac{ca\sin\varphi}{\sqrt{a^2}}, d\right)$$

$$\Rightarrow \int_C d\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_0^{2\pi} d\varphi\left(-a\sin\varphi, a\cos\varphi, b\right)\cdot\left(c\cos\varphi, c\sin\varphi, d\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\left(-ac\sin\varphi\cos\varphi + ac\cos\varphi\sin\varphi + bd\right) = 2\pi bd\,.$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

* in $\mathbb{R}$: $\boxed{\int_a^b dxF'(x) = F(b) - F(a)}$

* für Linienintegrale das

$$\int_C d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi = \phi\left(\vec{r}\left(t_b\right)\right) - \phi\left(\vec{r}\left(t_a\right)\right)\ , \tag{3.23}$$

grad von Skalarfeldern $\phi\left(\vec{r}\right)$, $\vec{r}(t)$ parametrisiert C mit Anfang $\vec{r}\left(t_a\right)$ und Ende $\vec{r}\left(t_b\right)$.
Beweis:

$$\underline{\int_C d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi} = \int_{t_a}^{t_b} dt\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}(t)\right) = \int_{t_a}^{t_b} dt\sum_k \frac{dx_k}{dt}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} = \int_{t_a}^{t_b} dt\frac{d}{dt}\phi\left(\vec{r}(t)\right)$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{\underset{\text{in }\mathbb{R}}{=}} \underline{\phi\left(\vec{r}\left(t_b\right)\right) - \phi\left(\vec{r}\left(t_a\right)\right)}\,.$$

$\Rightarrow$ Für das Integral über Gradienten von Skalarfeldern hängt dises nur von den Endpunkten und nicht vom Weg C ab!
Insbesondere gilt für geschlossene Kurven $\left(\vec{r}\left(t_a\right) = \vec{r}\left(t_b\right)\right)$:

$$\boxed{\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi = 0},$$

C geschlossene Kurve, Integral über geschlossene Kurve $\equiv \oint$.

- Definition: Ein Vektorfeld der Form $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}(t)\right)$ heißt auch **konservatives Kraftfeld**.

  zurück zum obigen *Beispiel*:
  wähle $\phi(x,y,z) = c\sqrt{x^2+y^2} + dz \;\Rightarrow\; \vec{E} = \vec{\nabla}\phi$.
  Die Endpunkte sind $\begin{array}{ll} \phi = 0: & \vec{r}(0) = (a,0,0) \\ \phi = 2\pi: & \vec{r}(2\pi) = (a,0,b\cdot 2\pi) \end{array}$.
  $\Rightarrow\; \phi\left(\vec{r}(2\pi)\right) - \phi\left(\vec{r}(0)\right) = c\sqrt{a^2} + db2\pi - c\sqrt{a^2} = db\cdot 2\pi = \int\limits_C d\vec{r}\vec{E}$.
  Insbesondere gilt für $b=0$: die Schraubenlinie wird zum geschlossenen Kreis
  $\Rightarrow\; \oint\limits_C d\vec{r}\cdot\vec{E} = 0$.

- **Integration über Vektoren**:
  bislang: $\int\limits_C |d\vec{r}|\, f$, $\int\limits_C d\vec{r}\cdot\vec{E}$ skalar, jetzt $\cdot\;\to\;\times$:

$$
\begin{aligned}
\vec{I} = \int\limits_C d\vec{r}\times\vec{E}\left(\vec{r}\right) &\equiv \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{E}\left(\vec{r}(t)\right) \\
&= \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\left(r'_y(t)E_z\left(\vec{r}\right) - r'_z E_y\left(\vec{r}\right), \ldots, \ldots\right), \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

  d.h. die Integrale in den Komponenten sind reelle Integrale in $\mathbb{R}$.

- **Fläche & Normalenvektor**:
  Sei C eine geschlossene Raumkurve in der Ebene $z=0$. Dann ist

$$
\vec{A} \equiv -\frac{1}{2}\oint\limits_C d\vec{r}\times\vec{r} \qquad (3.25)
$$

  ein Vektor $\perp$ zur Ebene (d.h. $\vec{A}\sim\vec{e}_z$) und $\left|\vec{A}\right|$ = Fläche der Ebene.
  Beweisidee:

  - $d\vec{r}$, $\vec{r}$ in x-y-Ebene $\Rightarrow\; d\vec{r}\times\vec{r}$ immer $\parallel \vec{e}_z$
  - Seite 13 im Skript: $|d\vec{r}\times\vec{r}|$ = Fläche des Parallelogramms
    $\Rightarrow\; -\frac{d\vec{r}\times\vec{r}}{2} = \frac{\vec{r}\times d\vec{r}}{2} = +$ Dreiecksfläche $\cdot\vec{e}_z$
  - negative Flächen heben zuviel gezählte Fläche weg.

  Beispiel: Fläche einer Ellipse:
  $\vec{r} = (a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0)$ parametrisiert C in positiver Richtung mit $\varphi\in[0,2\pi]$.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = (-a\sin\varphi, b\cos\varphi, 0)\ ,\ \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \times \vec{r} = \left(-ab\sin^2\varphi - ab\cos^2\varphi\right)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{A} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \times \vec{r} = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\vec{e}_z = \pi ab\vec{e}_z$$

Definition: Ein **Flächenintegral** über den Bereich B in der Ebene $\mathbb{R}^2$: $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ist definiert als

$$\int_B dA f(\vec{r}) = \lim_{\Delta A_k \to 0} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \Delta A_k f(\vec{r}_k)\ . \tag{3.26}$$

(Wir nehmen an, dass der Limes existiert und eindeutig ist.)

* unabhängig von der Parametrisierung
* Integration über gekrümmte Oberflächen später

– Die Wahl $f(\vec{r}) = 1$ ergibt die Fläche B (wie bei der Bogenlänge).

Verschiedene Parametrisierungen:

* erst Streifen in x-Richtung:

$$\int_B dAf = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_a(y)}^{x_b(y)} dx f(x,y)$$

* erst Streifen in y-Richtung:

$$\int_B dAf = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a(x)}^{y_b(x)} dy f(x,y)$$

– manchmal ist eine Richtung einfacher

– andere Lösung: Zusammensetzen

Beispiele

1) Fläche eines Halbkreises
wähle Streifen in y-Richtung mit $y_a(x) = 0$, $y_b(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x_a = -R$, $x_b = R$

$$\Rightarrow \int_B dA = B = \int_{x_a=-R}^{x_b=R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^{R} dx\sqrt{R^2-x^2} \qquad \left(\text{Subst.} \begin{array}{c} x = R\sin\varphi \\ \frac{dx}{d\varphi} = R\cos\varphi \end{array}\right)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi R\cos\varphi \underbrace{\sqrt{R^2\left(1-\sin^2\varphi\right)}}_{R|\cos\varphi|} \overset{(*)}{=} R^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi R^2}{2}$$

(*) partielle Integration (Seite 56) $\int_a^b dt \cos^2(t) = \frac{1}{2}\left[\sin(t)\cos(t)\right]_a^b + \frac{1}{2}(b-a)$

2) Fläche eines Dreiecks:
$\int_B dA$ mit B definiert durch 3 Geraden: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Berechnen wir beide Möglichkeiten:

* Streifen in x-Richtung: $y_a = 0$, $y_b = 1$, $x_a(y) = 0$, $x_b(y) = 1 - y$:

$$\int_{y_a=0}^{y_b=1} dy \int_{x_a(y)=0}^{x_b(y)=1-y} dx = \int_0^1 dy(1-y) = y - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

* Streifen in y-Richtung: $x_a = 0$, $x_b = 1$, $y_a(x) = 0$, $y_b(x) = 1 - x$:

$$\int_{x_a=0}^{x_b=1} dx \int_{y_a(x)=0}^{y_b(x)=1-x} dy = \int_0^1 dx(1-x) = \frac{1}{2}\,.$$

3.4 Oberflächen- und Volumenintegrale

[Lang & Pucker: 7.3]

- Wir betrachten nun eine allgemeine (d.h. z.B. auch gekrümmte) **Oberfläche** im $\mathbb{R}^3$.
- Diese ist 2-dimensional, d.h. die Vektoren, die die Fläche beschreiben, können durch 2 Koordinaten parametrisiert werden:
  $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$; mit $\vec{r}(u,v)$ auch $\vec{r}(u+du,v)$ und $\vec{r}(u,v+dv)$ liegen in der Oberfläche S.

$\Rightarrow$ $\underline{\partial_u \vec{r}, \partial_v \vec{r}}$ sind $\underline{\text{2 Tangentenvektoren}}$ (i.a. linear unabhängig). Der $\underline{\text{Normalenvektor}}$ $\vec{n}$, definiert durch $\vec{n} \cdot \partial_u \vec{r} = 0 = \vec{n} \cdot \partial_v \vec{r}$, ist $\perp$ zu S.

- Definition: $d\vec{A} \equiv dudv \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$ heißt **vektorielles Flächenelement** (gilt f. bel. nicht kartesische Koord.) und es gilt: $d\vec{A} \parallel \vec{n}$, $\left|d\vec{A}\right| = du \cdot dv \cdot$ Fläche des von $\partial_u \vec{r}$ und $\partial_v \vec{r}$ aufgespannten Parallelogramms.
- Definition: Die folgenden **Oberflächenintegrale** sind Flächenintegrale (im Sinne von S. 93) über die Koordinaten u, v mit Integrationsmaß $d\vec{A}$:

$$\text{i)} \int_S \left|d\vec{A}\right| \phi(\vec{r}), \quad \text{ii)} \int_S d\vec{A}\,\phi, \quad \text{iii)} \int_S d\vec{A} \cdot \vec{E}, \quad \text{iv)} \int_S d\vec{A} \times \vec{E}$$

- i) für $\phi \equiv 1$ ergibt dies den **Oberflächeninhalt**
- für S geschlossen (z.B. Kugelfläche) benutzen wir $\oint_S$
- iii) heißen **Flußintegrale**, sie geben an, wieviel von $\vec{E} \perp$ durch S fliesst ($\rightarrow$ Anwendung in Elektro- und Hydromdynamik)
- für S = flache Ebene, z.B. $z = 0$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ reduziert sich das Oberflächen- zum Flächenintegral: $\int_S \left|d\vec{A}\right| \phi = \int_B dxdy\phi$

  Beispiele: $\underline{\text{Oberflächen der Form } z = f(x,y)}$ (z.B. Skalarfeld in $\mathbb{R}^2$) als Höhenfunktion)

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \ \partial_x \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \ \partial_y \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r} = -\partial_x f \vec{e}_x + (-\partial_y f)\,\vec{e}_y + 1\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \ |\partial_x \vec{r} \times \partial_y \vec{r}| = \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \int_S \left|d\vec{A}\right| \phi(\vec{r}) = \int_B dxdy \sqrt{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 + 1}\,\phi(x, y, f(x,y))$$

Anwendung: Oberflächenintegral einer Halbkugel mit Radius: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \underset{z \geq 0}{\Leftrightarrow} z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

- wähle statt Koordinaten (x, y) die sog. **Polarkoordinaten** $\boxed{x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi}$ (oder: gehe vor wie Bsp. 1 S. 93, dann diese Substitution)

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \sqrt{R^2 - \rho^2} \end{pmatrix},$$

$$\partial_\rho \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \frac{-\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \end{pmatrix}, \ \partial_\varphi \vec{r} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial_\rho \vec{r} \times \partial_\varphi \vec{r} = \left(\frac{\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)\vec{e}_y + \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho\, |\partial_\rho \vec{r} \times \partial_\varphi \vec{r}| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \sqrt{\frac{\rho^4\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}{R^2-\rho^2} + \rho^2}$$

$$= 2\pi \int_0^R d\rho \frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 2R\pi \left(-\sqrt{R^2-\rho^2}\right)\Big|_0^R = \underline{\underline{2\pi R^2}}$$

- aus Symmetriegründen ist damit die Oberfläche einer Kugel gegeben durch $\underline{A_{\text{Kugel}} = 4\pi R^2}$.

  Anwendung Berechne den Fluß des (wirbelfreien) Stromes $\vec{j} = \vec{r}$ durch eine Zylinderoberfläche:
  parametrisiere mit $\varphi \in [0, 2\pi]$, $u \in [0, l]$:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ u \end{pmatrix} \qquad \textbf{Zylinderkoordinaten}$$

$$\Rightarrow \partial_\varphi \vec{r} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \partial_u \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_u \vec{r} = R\cos\varphi\, \vec{e}_x - (-R\sin\varphi)\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z$$

$\sim \vec{n}$, immer in x-y-Ebene ✓

$$\Rightarrow \underline{\int_S d\vec{A}\cdot\vec{r}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l du\, (\partial_\varphi \vec{r} \times \partial_u \vec{r})\cdot\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l du R^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \underline{2\pi R^2 l}$$

(für die Zylinderfläche bekommen wir
$|S| = \int_S \left|d\vec{A}\right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l du \sqrt{R^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = 2\pi R l$)

* in Analogie zum Flächenintegral Seite 93 definieren wir das **Volumenintegral**:

$$\int_U dV f(\vec{r}) = \lim_{\Delta V_k \to 0} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \Delta V_k f(\vec{r}_k) \ . \tag{3.27}$$

- wie auf Seite 93 können wir auf verschiedene Weise Streifen in x-, y- und z-Richtung aufsummieren, egal in welcher Reihenfolge:

$$\begin{aligned}\int_U dV f(\vec{r}) &= \int_{z_a}^{z_b} dz \int_{y_a(z)}^{y_b(z)} dy \int_{x_a(y,z)}^{x_b(y,z)} dx \phi(x,y,z) \\ &= \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y_a(x)}^{y_b(x)} dy \int_{z_a(x,y)}^{z_b(x,y)} dz \phi(x,y,z)\end{aligned}$$

Beispiel: Drehkörper.
Die Kurve $y = f(x) > 0$ wir um die x-Achse rotiert. Was ist das Volumen des entsprechenden Drehkörpers von x_a nach x_b?

$$\begin{aligned}V = &\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{y^2+z^2 \le f(x)^2} dydz = \int_{x_a}^{x_b} dx \int_{-f(x)}^{f(x)} dy \int_{-\sqrt{f(x)^2-y^2}}^{+\sqrt{f(x)^2-y^2}} dz \\ =&2\int_{x_a}^{x_b} dx \underbrace{\int_{-f(x)}^{f(x)} dy \sqrt{f(x)^2 - y^2}}_{\text{S. 98: Halnkreis mit Radius } R = f(x) > 0} = 2\int_{x_a}^{x_b} dx \frac{1}{2}\pi f(x)^2 = \pi \int_{x_a}^{x_b} dx f(x)^2\end{aligned}$$

* Wie beim Übergang vom Flächen- zum Oberflächenintegral können wir Volumina durch Volumenelemente mit nicht-kartesischen Koordinaten apporximieren: parametrisiere V durch $\vec{r}(u,v,w)$.

- Definition: Das infinitisimale **Volumenelement** $dV > 0$ wird durch das Spatprodukt

$$dV \equiv dudvdw \, |\partial_u \vec{r} \cdot (\partial_v \vec{r} \times \partial_w \vec{r})| \tag{3.28}$$

bestimmt. (Siehe Seite 14 für endl. Vol.)

- Definition: **Volumenintegrale** sind bestimmte Integrale $\int_U dV\phi = \int dudvdw\,|\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r})|\,\phi$ oder $\int_U dV\vec{E}$ gegeben durch die Parametrisierung $\vec{r}(u,v,w)$ mit Maß dV.

3.5 Krummlinige Koordinaten

[Lang, Pucker: 8.1-8.3]

* Bei der Berechnung von Integralen in $D \geq 1$ haben wir durch Substitution gefunden, dass bestimmte Koordinaten besser geeignet sind, um die Integrale zu lösen.
Der Wechsel z.B. von Flächen- zu Oberflächenintegralen wird ganz allgemein durch die **Jacobi-Determinante** vermittelt (auch Funktional-Determinante):

2D : $$\int_B dxdy\phi(x,y) = \int_B dudv \left.\left|\,|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|\,\right|\right._{(*)} \phi\left(x(u,v),y(u,v)\right)$$ (Ober-) Flächenint. in z-Ebene

($*$) brauchen Betrag, damit pos. Flächenelement $\partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$

Jacobi-Det.: $$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \left|\begin{pmatrix}\partial_u x\\ \partial_u y\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\partial_v x\\ \partial_v y\\ 0\end{pmatrix}\right|$$

$$\text{da} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ 0\end{pmatrix}$$

3D : $$\int_U dxdydz\phi(x,y,z) = \int_U dudvdw \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \phi\left(\vec{r}(u,v,w)\right)$$

Jacobi-Det.: $$\begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x\\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y\\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{vmatrix} \underset{\uparrow(**)}{=} |\partial_u\vec{r}\cdot(\partial_v\vec{r}\times\partial_w\vec{r})|$$

$$\text{da} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(u,v,w)\\ y(u,v,w)\\ z(u,v,w)\end{pmatrix}$$

($**$) Übung 3.1.

wichtige Beispiele:

2D Polarkoordinaten (s.S. 100) in xy-Ebene $\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix}$, $x^2 + y^2 = \rho^2$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy = \int_0^{\infty} d\rho\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \tag{3.29}$$

neue Achsen:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \det M \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, M^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$$

$$\Rightarrow dxdy = dudv\left|\det M^{-1}\right| = dudv\frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \tag{3.30}$$

$\rightarrow$ zurück zum Beispiel 1) S. 98:

$$\text{Fläche des Halbkreises: } A = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} d\rho\rho = \pi\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^R = \frac{\pi}{2}R^2 .$$

* Hilfreich bei der Berechnung von Integralen:

Bsp.: $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}$

$$\Rightarrow I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2-y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho\rho e^{-\rho^2} \quad \text{Subst. } \rho^2 = r$$

$$= 2\pi\frac{1}{2}\int_0^{\infty} dr e^{-r} = \pi\left[-e^{-r}\right]_0^{\infty} = \pi$$

$\Rightarrow \boxed{I = \sqrt{\pi}}$.

3D Zylinderkoordinaten (s.S. 100):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{dxdydz = d\varphi d\rho\rho dz} \quad \text{wie Polarkoord. in } 2D,\ z\text{-Komp. bleibt} \tag{3.31}$$

Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{Integrationsbereich:} \begin{array}{rl} r \geq & 0 \\ \varphi \in & [0, 2\pi] \\ \theta \in & [0, \pi] \end{array}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= + r\sin\theta\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&\quad + r\sin\theta\cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= r\sin\theta\sin\varphi\left(-r\,\underline{\sin^2\theta}\,\sin\varphi - r\,\underline{\cos^2\theta}\,\sin\varphi\right) \\
&\quad + r\sin\theta\cos\varphi\left(-r\,\underline{\sin^2\theta}\,\cos\varphi - r\,\underline{\cos^2\theta}\,\cos\varphi\right) \\
&= - r^2\sin\theta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = -r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{dxdydz = drr^2d\theta\sin\theta d\varphi} \tag{3.32}$$

Krummlinige Koordinaten für grad, div und rot

Ziel: Wir möchten nicht nur bei mehrdim. Integralen zu "besseren" Koordinaten wechseln können, sondern auch für Differentialoperatoren.

Ausgangspunkt: $\vec{r} = \vec{r}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$

- Wie wir schon bei Oberflächen- und Volumenintegralen gesehen haben, spielen die lokalen Vektoren eine wichtige Rolle.
- Tangentialvektoren: $\begin{array}{cccc} & \partial_u\vec{r},\ h_u \equiv |\partial_u\vec{r}|\ ; & \partial_v\vec{r},\ h_v \equiv |\partial_v\vec{r}|\ ; & \partial_w\vec{r},\ h_w \equiv |\partial_w\vec{r}| \\ \Rightarrow & \vec{e}_u = \frac{\partial_u\vec{r}}{h_u}, & \vec{e}_v = \frac{\partial_v\vec{r}}{h_v}, & \vec{e}_w = \frac{\partial_w\vec{r}}{h_w} \end{array}$
- Wenn $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ eine lokale Orthonormalbasis bilden, können wir $\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}\cdot$, $\vec{\nabla}\times$ durch die neuen Koordinaten ausdrücken: $\vec{e}_u\cdot\vec{e}_v = \vec{e}_u\cdot\vec{e}_w = \vec{e}_v\cdot\vec{e}_w = 0$ und wähle rechtshändig $\vec{e}_{\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}} \times \vec{e}_{\begin{smallmatrix} v \\ w \\ u \end{smallmatrix}} = \vec{e}_{\begin{smallmatrix} w \\ u \\ v \end{smallmatrix}}$.

Bemerkung: dies ist nicht immer der Fall, siehe Bsp. S. 103.

- Gradient $\vec{\nabla}$ in (u,v,w): S. 82: Richtungsableitung in u,v,w-Richtung, einfach, z.B.:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}(u,v,w)\right)\right)_{u\text{-Richtung}} =& \vec{e}_u\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_u}\partial_u\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_u}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\\ =&\frac{1}{h_u}\frac{d\phi}{du}\end{aligned}$$

und analog für v- und w-Richtung.

$$\Rightarrow\ \vec{\nabla} = \vec{e}_u\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \vec{e}_v\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \vec{e}_w\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w} \tag{3.33}$$

wirkend auf $\phi(u,v,w)$.

Beispiel: Kugelkoordinaten: sind diese lokal Orthogonal? Ja

$$\begin{aligned}\vec{r} =& \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}\ ,\ \partial_r\vec{r} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\\ \Rightarrow\ h_r =& \sqrt{\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\cos^2\theta} = 1\\ \partial_\varphi\vec{r} =& \begin{pmatrix} r\sin\theta\left(-\sin\varphi\right)\\ r\sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\ ,\ h_\varphi = r\sin\theta\\ \partial_\theta\vec{r} =& \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi\\ r\cos\theta\sin\varphi\\ -r\sin\theta\end{pmatrix}\ ,\ h_\theta = r\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\quad(r>0) \tag{3.34}$$

- Divergenz $\vec{\nabla}\cdot$ in (u,v,w):
  Benutze Identität: $\boxed{h_u\vec{\nabla}u = h_u\left(\vec{e}_u\frac{1}{h_u}\partial_u + \vec{e}_v\frac{1}{h_v}\partial_v + \vec{e}_w\frac{1}{h_w}\partial_w\right)u = \vec{e}_u}$ (da u,v,w unabhängig) in u,v,w: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\underset{\uparrow}{\underline{\vec{e}_u E_u}} + \vec{e}_v E_v + \vec{e}_w E_w\right)$,
  betrachte zunächst nur 1. Teil:

$$
\begin{aligned}
\underline{\vec{\nabla}\cdot(\vec{e}_u E_u)} &\overset{\text{ON}}{=} \vec{\nabla}\left(\vec{e}_v \times \vec{e}_w E_u\right) \overset{\text{Identität }2\times}{=} \vec{\nabla}\cdot\left(h_v h_w \left(\vec{\nabla} v\right) \times \left(\vec{\nabla} w\right) E_u\right) \\
&\underset{\text{regeln}}{\overset{\text{Produkt-}}{=}} \left(\vec{\nabla} h_v h_w E_u\right)\cdot\left(\vec{\nabla} v\right)\times\left(\vec{\nabla} w\right) + h_u h_w E_u \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\left(\left(\vec{\nabla} v\right)\times\left(\vec{\nabla} w\right)\right)}_{\underset{\text{S. 92}}{=}(\vec{\nabla} w)\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} v\right)}_{=0}\underset{\text{S. 91}}{-}(\vec{\nabla} v)\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} w\right)}_{=0}} \\
&\overset{\text{Identität}}{=} \left(\vec{\nabla} h_v h_w E_u\right)\frac{1}{h_v h_w}\underbrace{\vec{e}_v \times \vec{e}_w}_{=\vec{e}_u} \\
&= \frac{1}{h_v h_w}\vec{e}_u\left(\vec{e}_u \frac{1}{h_u}\partial_u + \underset{\uparrow\perp}{\vec{e}_v}\frac{1}{h_v}\partial_v + \underset{\uparrow\perp}{\vec{e}_w}\frac{1}{h_w}\partial_w\right)\left(h_v h_w E_u\right) \\
&= \underline{\frac{1}{h_u h_v h_w}\partial_u\left(h_v h_w E_u\right)}\,,
\end{aligned}
$$

verfahre analog mit $\vec{\nabla}\cdot(\vec{e}_v E_v)$ und $\vec{\nabla}\cdot(\vec{e}_w E_w)$:

$$
\Rightarrow\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\partial_u\left(h_v h_w E_u\right) + \partial_v\left(h_w h_u E_v\right) + \partial_w\left(h_u h_v E_w\right)\right]\,. \tag{3.35}
$$

Beispiel: Kugelkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\partial_r\left(r^2\sin\theta E_r\right) + \partial_\varphi\left(r E_\varphi\right) + \partial_\theta\left(\sin\theta E_\theta\right)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 E_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\partial_\varphi E_\varphi + \partial_\theta\left(\sin\theta E_\theta\right)\right]\,,
\end{aligned}
$$

insbesondere für ein radial-symmetrisches Feld:

$$
\vec{E}_R = f(r)\vec{e}_r\ \Rightarrow\ \underset{\text{einfacher als kartesische Rechnung!}}{\underline{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_R = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(f(r) r^2\right) = f'(r) + \frac{2f(r)}{r}}}
$$

- Rotation $\vec{\nabla}\times$ in (u,v,w):

* wie bei der Herleitung von div betrachten wir zunächst nur 1. Komp.:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{e}_u E_u) &= \vec{\nabla} \times \left(h_u E_u \vec{\nabla} u \right) \\
\overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{regel S. 92}}{}} &= \left(\vec{\nabla} h_u E_u \right) \times \vec{\nabla} u + h_u E_u \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u}_{=0} \\
&= -\frac{1}{h_u} \vec{e}_u \times \left[\frac{1}{h_u} \vec{e}_u \partial_u \left(h_u E_u \right) + \frac{1}{h_v} \vec{e}_v \partial_v \left(h_u E_u \right) + \frac{1}{h_w} \vec{e}_w \partial_w \left(h_u E_u \right) \right] \\
&= -\frac{1}{h_u h_v} \vec{e}_w \partial_v \left(h_u E_u \right) + \frac{1}{h_u h_w} \vec{e}_v \partial_w \left(h_u E_u \right) \,,
\end{aligned}
$$

sowie analog für $\vec{e}_v E_v$ und $\vec{e}_w E_w$,

$$
\Rightarrow \; \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \vec{e}_u & h_v \vec{e}_v & h_w \vec{e}_w \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ h_u E_u & h_v E_v & h_w E_w \end{vmatrix} \,, \tag{3.36}
$$

wobei $\partial_{u,v,w}$ auf alle Funktionen in der letzten Zeile der Determinante wirken.

Beispiel: Zylinderkoordinaten: $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ bilden ON Basis ✓ (Rechtssystem!)

$$
\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \,,\; \partial_\rho \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \,,\; h_\rho = 1 \,,
$$

$$
\partial_\varphi \vec{r} = \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \,,\; h_\varphi = \rho \,,\; \partial_z \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,,\; h_z = 1 \,,
$$

$$
\Rightarrow \; \underline{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix}} \,,
$$

z.B. für Strom $\vec{E} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ S. 90, wähle $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ als z-Achse, $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$
$\Rightarrow \; \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \rho \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \omega \rho \vec{e}_\varphi = \vec{E}$, ω konst.

$$
\Rightarrow \; \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \rho^2 \omega & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)}{\rho} \left[\vec{e}_\rho \partial_z \left(\rho^2 \omega \right) - \vec{e}_z \partial_\rho \left(\rho^2 \omega \right) \right] = 2 \omega \vec{e}_z
$$

- Laplace $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ in (u, v, w):
  benutze grad und div:

$$
\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\partial_u \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \partial_u \right) + \partial_v \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \partial_v \right) + \partial_w \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \partial_w \right) \right] \,. \tag{3.37}
$$

Beispiel: Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\Delta =&\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\partial_r\left(r^2\sin\theta\partial_r\right)+\partial_\varphi\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi\right)+\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right)\right]\\ =&\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right)\\ =&\underline{\underline{\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2+\frac{\cot\theta}{r^2}\partial_\theta\,.}}\end{aligned}$$

3.6 Integralsätze in höheren Dimensionen

[Lang & Pucker: Kap. 9, Schulz: 9.1]

* Zur Erinnerung: Hauptsatz in $\mathbb{R}$ und für Linienintegrale:
$\int_a^b dxF'(x)=F(b)-F(a)$, $\int_C d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi=\phi\left(\vec{r}\left(t_b\right)\right)-\phi\left(\vec{r}\left(t_a\right)\right)$

Können wir dies benutzen, um Integrale um 1 Dimension zu reduzieren?

Beispiel: Zylinder: Volumenintegral über eine Divergenz:

$$I=\int dV\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\int dV\left(\partial_xE_x+\partial_yE_y+\partial_zE_z\right)$$

parametrisiere V auf 3 versch. Weisen (S. 101) um Hauptsatz anzuwenden

$$=\int_{B_{yz}}dydz\int_{x_-(y,z)}^{x_+(y,z)}dx\partial_xE_x+\int_{B_{xz}}dxdz\int_{y_-(x,z)}^{y_+(x,z)}dy\partial_yE_y+\int_{B_{xy}}dxdy\int_{z_-(x,y)}^{z_+(x,y)}dz\partial_zE_z$$

$$=\int_{B_{yz}}dydz\left[E_x\left(x_+,y,z\right)-E_x\left(x_-,y,z\right)\right]$$

$+$ Beitrag auf oberer - Beitrag auf unterer Fläche in B_{yz}

$$+\int_{B_{xz}}dxdz\left[E_y\left(x,y_+,z\right)-E_y\left(x,y_-,z\right)\right]+\int_{B_{xy}}dxdy\left[E_z\left(x,y,z_+\right)-E_z\left(x,y,z_-\right)\right]$$

Unter Benutzung des vektoriellen Flächenelements $d\vec{A}$ (s.S. 99) können wir dies im folgenden Satz formulieren:

$$\textbf{Gaußscher Satz}:\qquad \int dV\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\int_{\partial V}d\vec{A}\cdot\vec{E}\,,\tag{3.38}$$

wobei ∂V der Rand des Volumens ist (z.B. $\begin{array}{lcl} V\text{=Kugel} & \Rightarrow & \partial V\text{=Kugeloberfläche} \\ V\text{=Hohlkugel} & \Rightarrow & \partial V\text{=}\underset{\text{innen \underline{und} außen}}{\text{Kugeloberfläche}} \end{array}$)

Interpretation: Volumenint. über Divergenz = Fluß durch Oberfläche

Beweisidee zum Gaußschen Satz:
zurück zur anschaulischen Bedeutung von Div. (S. 89), Strom durch Volumen ΔV_i (der Länge ϵ)

$$
\begin{aligned}
\Delta V_i \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \propto & \Delta V_i \left\{ \frac{1}{dx} \left[E_x \left(\vec{r}_i + \frac{dx}{2} \vec{e}_x \right) - E_x \left(\vec{r}_i - \frac{dx}{2} \vec{e}_x \right) \right] \right. \\
& + \frac{1}{dy} \left[E_y \left(\vec{r}_i + \frac{dy}{2} \vec{e}_y \right) - E_y \left(\vec{r}_i - \frac{dy}{2} \vec{e}_y \right) \right] \\
& \left. + \frac{1}{dz} \left[E_z \left(\vec{r}_i + \frac{dz}{2} \vec{e}_z \right) - E_z \left(\vec{r}_i - \frac{dz}{2} \vec{e}_z \right) \right] \right\} \\
= & dA_{ix} \left[E_x \left(\vec{r}_i + \frac{dx}{2} \vec{e}_x \right) - E_x \left(\vec{r}_i - \frac{dx}{2} \vec{e}_x \right) \right] + dA_{iy} [\quad] + dA_{iz} [\quad]
\end{aligned}
$$

* bei der Summation über alle ΔV_i heben sich die Beiträge von entgegengesetzten Oberflächen weg, nur die Beiträge an der äußeren Oberfläche bleiben
$\rightarrow$ im Limes $\Delta V \rightarrow 0$ ergibt sich das Oberflächenintegral auf der rechten Seiten.

Anwendung: Volumen eines Körpers als Oberflächenintegral:

$$
V = \int_V dV = \frac{1}{3} \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{r} \underset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{3} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{r} \, .
$$

Beispiel: Kugel mit Radius R:
S. 105: Normalenvektor $\perp$ Oberfläche $\sim \partial_r \vec{r} = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_\theta \vec{r}$,

$$
\Rightarrow \; d\vec{A} = d\theta d\varphi \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_\theta \vec{r} = d\theta d\varphi h_\theta h_\varphi \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\theta = d\theta d\varphi \left| r^2 \sin\theta \right| \vec{e}_r \, ,
$$

Volumen:

$$
\begin{aligned}
V = & \frac{1}{3} \int_{\substack{\partial V \\ \text{Radius } R}} d\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \left| \sin\theta \right| \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{r}}_{= R \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = R} = \frac{1}{3} R^3 2\pi \underbrace{\left[-\cos\theta \right]_0^\pi}_{-\cos\pi + \cos 0 = 2} \\
\Leftrightarrow \; & V = \frac{4\pi R^3}{3} \, .
\end{aligned}
$$

Beispiel: Fluß eines divergenzfreien Stromes in Radialrichtung.

$$\text{Sei } \vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{r^2}\vec{e}_r \overset{\text{Kugelkoord.}}{\underset{\text{S. 106}}{\Rightarrow}} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\frac{q}{r^2}\right) = 0\,, \quad \text{für } r>0\,.$$

Betrachte Volumen V begrenzt duch 2 Kugeloberflächen S_1, S_2
mit Radien $0 < r_1 < r_2$:

$$\Rightarrow\ 0 = \int\limits_V dV\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \int\limits_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{E} = \int\limits_{S_2} d\vec{A}\cdot\vec{E} + \int\limits_{S_1} d\vec{A}\cdot\vec{E}\,.$$

- $\vec{E}$ ist immer $\perp$ zur Kugeloberfläche, d.h. auf S_2 parallel und auf S_1 anti-parallel zu $d\vec{A}$:

$$\Rightarrow \int\limits_{S_2} d\vec{A}\cdot\vec{E} = -\int\limits_{S_1} d\vec{A}\cdot\vec{E} \ \Leftrightarrow\ \int\limits_{S_2}\left|d\vec{A}\right|E_r = \int\limits_{S_1}\left|d\vec{A}\right|E_r$$

"Der Fluß dieses Stromes ist durch jede Kugeloberfläche gleich."

Konsequenzen des Gaußschen Satzes:

1) Sei $\vec{E} = \vec{e}_c\phi(\vec{r})$, mit $\vec{e}_c$ konst., $|\vec{e}_c| = 1 \overset{\text{Prod.regel S. 92}}{\Rightarrow} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{e}_c\cdot\vec{\nabla}\phi$

$$\overset{\text{Gauß}}{\Rightarrow} \int\limits_V dV\vec{e}_c\cdot\vec{\nabla}\phi = \int\limits_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{e}_c\phi \ \Leftrightarrow\ \vec{e}_c\cdot\left[\int\limits_V dV\vec{\nabla}\phi - \int\limits_{\partial V} d\vec{A}\phi\right] = 0\,, \tag{3.39}$$

für beliebige Vektoren $\vec{e}_c \neq \vec{0}$:

$$\int\limits_V dV\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \int\limits_{\partial V} d\vec{A}\phi(\vec{r})\ . \tag{3.40}$$

2) Sei $\underline{\vec{E} = \vec{e}_c\times\vec{B}}$, mit $\vec{e}_c$ wie oben,

$$\overset{\text{S.92}}{\Rightarrow} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{e}_c\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$\Rightarrow \int\limits_V dV\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\vec{e}_c\cdot\int\limits_V dV\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \int\limits_{\partial V}\underbrace{d\vec{A}\cdot\left(\vec{e}_c\times\vec{B}\right)}_{\underset{\text{Zykl.}}{=\vec{e}_c\cdot\left(\vec{B}\times d\vec{A}\right)}}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_c\cdot\left[\int\limits_V dV\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) - \int\limits_{\partial V} d\vec{A}\times\vec{B}\right] = 0\,,$$

$\forall\, \vec{e}_c$:

$$\int_V dV\, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \int_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{B}\,. \tag{3.41}$$

<u>Weitere Konsequenzen: Green'sche Sätze</u>

3) Sei $\phi(\vec{r})$ ein Skalarfeld, das in $V \subseteq \mathbb{R}^3$ die Laplacegleichung erfüllt: $\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ $\forall\, \vec{r} \in V$:

$$\Rightarrow \int_V dV \left|\vec{\nabla}\phi\right|^2 = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \left(\phi\vec{\nabla}\phi\right) \quad \textbf{1. Greenscher Satz}\,. \tag{3.42}$$

<u>Beweis</u>: $\left|\vec{\nabla}\phi\right|^2 = \left(\vec{\nabla}\phi\right) \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right) \underset{\uparrow \Delta\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = 0}{=} \vec{\nabla}\left(\phi\vec{\nabla}\phi\right)$, wende Gauß'satz an auf $\vec{E} = \phi\vec{\nabla}\phi$.

4) Seien $\phi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ mind. $2\times$ differenzierbar. Dann gilt

$$\int_V dV\, (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \left(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi\right) \quad \textbf{2. Greenscher Satz}\,. \tag{3.43}$$

<u>Beweis</u>: $\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi \underset{\uparrow \text{Produktregel}}{=} \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi\right)}_{\vec{E}}$, wende Gauß an auf $\vec{E}$.

* Es gibt weitere Green'sche Sätze im $\mathbb{R}^2$, s. Lang & Pucker: 9.2.

Wir betrachten nun die Reduktion von Oberflächenintegralen auf deren Rand.

<u>Definition</u>: Sei C eine geschlossene Raumkurve. Zusammen mit deren Umlaufsinn definiert dieses eine Fläche S und infinitisimale Flächenelemente $d\vec{A}$. Dann ist $d\vec{r}$ das **Kurvenelement** (s.S. 90), das gegen den Uhrzeigersinn bzgl. $d\vec{A}$ zeigt (D.h. in die Richtung, in die $C = \partial S$ durchlaufen wird.).

Dann gilt der folgende **Stokessche Satz**:

$$\int_S d\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}\,. \tag{3.44}$$

* Wenn S mehrere Ränder hat, gibt es auf der rechten Seite mehrere Beiträge.

- <u>Beweisidee</u>: (benutze Interpret. von rot, s.S. 86)
  Teile S in kleine Rechtecke,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z \approx & \frac{1}{dx}\left[E_y\left(\vec{r}+\frac{dx}{2}\vec{e}_x\right)-E_y\left(\vec{r}-\frac{dx}{2}\vec{e}_x\right)\right]\\ & -\frac{1}{dy}\left[E_x\left(\vec{r}+\frac{dy}{2}\vec{e}_y\right)-E_x\left(\vec{r}-\frac{dy}{2}\vec{e}_y\right)\right]\\ \Rightarrow\ d\vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\approx & d\vec{r}_y\left[\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dx}{2}\vec{e}_x\right)-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dx}{2}\vec{e}_x\right)\right]\\ & -d\vec{r}_x\left[\vec{E}\left(\vec{r}+\frac{dy}{2}\vec{e}_y\right)-\vec{E}\left(\vec{r}-\frac{dy}{2}\vec{e}_y\right)\right]\end{aligned}$$

→ Summiere über alle Rechtecke, benachbarte Beiträge heben sich weg und am Ende bekommen wir die rechte Seite.

<u>Anwendung</u>: Oberflächeninhalt: S in einer Ebene, Normalenvektor $\vec{n}$, $|\vec{n}|=1$ const.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \underline{A} &= \int_S d\vec{A}\cdot\vec{n}_c \overset{\text{S. 88}}{=} \int d\vec{A}\cdot\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times(\vec{n}\times\vec{r})\\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial S} d\vec{r}\cdot(\vec{n}\times\vec{r}) \underset{\text{Zyklizität}}{=} \underline{\frac{\vec{n}}{2}\cdot\int_{\partial S}\vec{r}\times d\vec{r}}.\end{aligned}$$

2 Beispiele:

- Kreis mit Radius R in der z-Ebene:

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \vec{r} = \begin{pmatrix}R\cos\varphi\\ R\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix},\ \frac{d\vec{r}}{d\varphi} &= \begin{pmatrix}-R\sin\varphi\\ R\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix},\\ \vec{r}\times d\vec{r} = R^2\left(\cos^2\varphi-\left(-\sin^2\varphi\right)\right)\vec{e}_z d\varphi &= R^2\vec{e}_z d\varphi\\ \Rightarrow\ \underline{A} = \frac{\vec{e}_z}{2}\int_{\partial S}\vec{r}\times d\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z R^2\int_0^{2\pi}d\varphi &= \underline{\pi R^2}.\end{aligned}$$

- Sei $\vec{B}=\frac{j}{2}\vec{e}_\varphi$, $\rho>0$, in Zylinderkoord. (s.S. 103)

$$\Rightarrow \underline{\vec{\nabla} \times \vec{B}} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \underbrace{\frac{\cancel{\rho} j}{\cancel{\rho}}}_{=\text{const.}} & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow 0 = \int_S d\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \ldots , \tag{3.45}$$

z.B. für Kreisscheiben

$$\Rightarrow 0 = \int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{B} + \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{B} + \int_{R_1} \underbrace{d\vec{r} \cdot \underset{\uparrow \sim \vec{e}_\varphi}{\vec{B}}}_{=0} + \int_{R_2} \underbrace{d\vec{r} \cdot \vec{B}}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \int_{C_2} |d\vec{r}| \, B_\varphi - \int_{C_1} |d\vec{r}| \, B_\varphi = 0$$

"der selbe Fluß entlang jedes Kreisbogens." (Bemerkung: es gilt auch $\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$.)

Anwendung des Satzes von Stokes:
Für einfach zusammenhängende Gebiete S (d.h. ohne Löcher) gilt

i) $\boxed{\begin{array}{c} \vec{E} \text{ ist wirbelfrei in } S \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \vec{E} \text{ hat ein } \textbf{Skalarpotential } \phi \\ -\vec{\nabla}\phi = \vec{E} \end{array}}$

(ϕ ist eindeutig bis auf const.)
"$\Leftarrow$" klar wegen $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$ Poincaré La (S. 87),
"$\Rightarrow$" def. $\phi(\vec{r}) \equiv -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{E}(\vec{s})$ mit $\vec{r}_0$, $\vec{r}$, Weg $\in S$
ϕ ist wohl def., da wegunabhängig:

$$\int_{C_1} d\vec{s} \cdot \vec{E} - \int_{C_2} d\vec{s} \cdot \vec{E} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_S d\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = 0$$

$$\text{für} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\vec{\epsilon}} d\vec{s} \cdot \vec{E} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{s} \cdot \vec{E} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} = -\phi(\vec{r}+\vec{\epsilon}) + \phi(\vec{r}) \underset{\uparrow \text{Taylor (3.14)}}{=} -\vec{\epsilon} \cdot \vec{\nabla}\phi + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) .$$

<u>zurück zum Beispiel 2) auf S. 86:</u> $\boxed{\vec{j} = \vec{r}}$ <u>ist wirbelfrei</u>: $\vec{\nabla} \times \vec{j} = \vec{0}$
$\Rightarrow$ wir können ein Skalarpot. konstruieren:

$$\underline{\text{Lsg:}}\ \vec{j} = -\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}\right) \ \text{ mit } \phi \equiv \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{1}{2}r^2\,,$$
$$\text{da } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\vec{e}_r\,. \tag{3.46}$$

(Dies ist besonders einfach in Kugelkoord.: S. 101 grad: $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \dots$)

ii) $\boxed{\begin{matrix}\vec{B} \text{ ist quellenfrei in } S \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}\vec{E} \text{ hat ein } \textbf{Vektorpotential } \vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{matrix}}$

"$\Leftarrow$" klar wegen $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$ Poincaré Lemma (S. 87)

wichtig: $\vec{A}$ ist nur bestimmt bis auf ein Skalarpotential:

$$\vec{A}_1 \text{ und } \vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla}\chi \text{ ergeben dasselbe } \vec{B}:$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A}_2 = \vec{\nabla}\times\left(\vec{A}_1+\vec{\nabla}\chi\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_1 + \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi}_{=0}$$

"$\Rightarrow$" Idee für diese Richtung in kart. Koordinaten:

- eine geeignete Wahl von χ erlaubt, $A_z = 0$ zu wählen
- wir definieren dann

$$\vec{A}(x,y,z) \equiv \vec{e}_x\left[\int_{z_0}^{z} dz' B_y\left(x,y,z'\right) - \int_{y_0}^{y} dy' B_x\left(x,y',z\right)\right] - \vec{e}_y\int_{z_0}^{z} dz' B_x\left(x,y,z'\right)$$

und man kann dann zeigen, dass $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}(x,y,z)$ gilt (benutze $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$).

* Die beiden Funktionen in i) & ii) ϕ und $\vec{A}$ heißen **Eichpotentiale** und spielen eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik (Maxwell-Gleichungen), sowie später in der Quantenfeldtheorie.

zurück zum Beispiel 1) auf S. 85: $\vec{j} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ ist quellenfrei: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$:
$\Rightarrow$ wir können ein Vektorpotential $\vec{A}$ konstruieren:
wähle Zylinderkoordinaten mit z-Achse in $\vec{\omega}$-Richtung, d.h.

$$\vec{j} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \omega\vec{e}_z\times\underbrace{\left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\right)}_{=\vec{r}} = \omega\rho\vec{e}_\varphi\,, \text{ suche } \vec{j} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\,.$$

Der Ansatz $A_\rho = \omega\rho z$ zusammen mit $\vec{\nabla}\times$ in Zylinderkoord. (S. 103) ergibt

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ \omega\rho z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega\rho\vec{e}_\varphi \,, \quad \underline{\vec{A} = \omega\rho z \vec{e}_\rho} \,.$$

4 Fourier-Transformation

4.1 Fourier-Reihe

[Schulz: 12.1, Lang & Pucker: 13]

* wichtige Methode zur Untersuchung von Funktionen und exp. Daten, Lösung von Diff.gl. etc. So können wir z.B.
  - periodische Funktionen nach Teilfrequenzen zerlegen (Grund- und Obertöne)
  - Funktionen durch endlich viele periodische Funktionen approximieren (statt Taylor)

  Definition: Die Funktion $f(x) \in \mathbb{R}$ heißt **periodisch** mit **Periode** $L \gg 0$, wenn gilt:

$$f(x + nL) = f(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

  Es kann f eine Funktion periodisch in der Zeit (Schwingungen o. Wellen), in einem Winkel (Polarkoord.) oder im Raum sein (period. Kristall).

- Komplexe Form der Fourier-Reihe:
  Integrierbare, periodische Funktionen $f(x)$ mit Periode L haben die Darstellung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \\ \text{mit } c_n &= \frac{1}{L}\int_0^L dx f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

  (Konvergenzkriterien für diese Reihe s. Lang & Pucker.)
  In der Tat ist diese Darstellung periodisch:

-

$$f(x + mL) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{e^{i\frac{2\pi n}{L}(x+mL)}}_{=e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\underbrace{e^{i2\pi nm}}_{=1}} = f(x),$$

  da $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

- Projektion auf die Koeffizienten c_n: mult. $f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi}{L}mx}$, $\int\limits_0^L dx \cdot$

$$\Rightarrow \int\limits_0^L dx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} \left(= \int\limits_0^L dx f(x) e^{-i\frac{2\pi m}{L}x} \right)$$

$$\overset{\text{abs. Konv.}}{\underset{\text{der Reihe}}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int\limits_0^L dx e^{i\frac{2\pi}{L}x(n-m)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{n,m} L = c_m L$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} L & n = m \\ \frac{L}{2\pi i(n-m)} e^{i\frac{2\pi}{L}x(n-m)} \Big|_0^L & n \neq m \end{array} \right\} = L\delta_{n,m} \,.$$

Sinus- und Cosinus-Reihe (= reelle Form der Fourier-Reihe)
unter Benutzung der Euler-Formel können wir auch equivalent schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) =& c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} \\ f(x) =& c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(c_n + c_{-n})}_{a_n} \cos\left(\frac{2\pi i n}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} i \underbrace{(c_n - c_{-n})}_{b_n} \sin\left(\frac{2\pi i n}{L}x\right) \,, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mittelwert.: $c_0 = \frac{1}{L}\int\limits_0^L dx f(x)$, $a_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi i n}{L}x\right)$, $b_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi i n}{L}x\right)$

Eigenschaften:

- $f(x) = f^*(x)$ reell $\Leftrightarrow$ $c_n = c_{-n}$:

$$f^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-\frac{2\pi i n}{L}x} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} c_{-n'}^* e^{\frac{2\pi i n'}{L}x}$$

$$c_n^* = \frac{1}{L}\int\limits_0^L dx f^*(x) e^{\frac{2\pi i n}{L}x} = c_{-n}$$

- $\underbrace{f(x) = f(-x) \text{ sym. } \Leftrightarrow b_n = 0}_{\text{reine Cosinus-Reihe}}$:

$$b_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L dx f(-x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) = \frac{2}{L}\int\limits_{-L}^0 dx\, \underbrace{f(x)(-)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)}_{\text{period. } x\to x+L} = -b_n$$

- $f(x) = -f(-x)$ antisym. $\Leftrightarrow \underset{\text{reine Sinus-Reihe}}{a_n = 0}$:
  Beweis analog.

Beispiel: $\underline{f_1(x) = x}$ für $x \in\ (0,1]$, periodisch fortsetzen,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ c_0 &= \int\limits_0^1 dx x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\\
c_{n\neq 0} &= \int\limits_0^1 dx x e^{-i2\pi nx} = \left[\frac{x}{-2\pi in}e^{-i2\pi nx}\right]_0^1 - \underbrace{\int\limits_0^1 dx 1\frac{e^{-i2\pi nx}}{-2\pi in}}_{=0} \overset{\frac{1}{-i}=i}{=} \frac{i}{2\pi n} \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ a_n =& c_n + c_n^* = 0\\
b_n =& i\left(\frac{i}{2\pi n} - \frac{-i}{2\pi n}\right) = \frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

$f_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(2\pi nx)$

- $\underset{\text{(nicht absolut!)}}{\text{konvergiert langsam}}$, $f'(x)$ hat keine konvergente Reihe

* Fortsetzung von $f(x)$ als symmetrische Funktion mit Periode $\underline{L=2}$
$\rightarrow\ \underline{f_2(x) = |x|}$ für $x \in\ [-1,1] \qquad \Rightarrow\ b_n = 0$

$$\Rightarrow \; c_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dx|x| = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int\limits_{-1}^{1} dx|x| \cos\left(\frac{\cancel{2}\pi n x}{\cancel{2}}\right) = 2\int\limits_{0}^{1} dx x \cos(\pi n x)$$

$$= 2\left[\frac{x}{\pi n}\sin(\pi n x)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^1 dx 1 \sin(\pi n x)$$

$$= \frac{2}{(\pi n)^2}\left[\cos(\pi n x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{2}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} 0 & n = 2l \\ 2 & n = 2l+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; \underline{f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}\cos(\pi(2l+1)x)}$

- konvergiert besser, $f'(x)$ hat Fourier-Darstellung

* wir könnten $f(x)$ auch antisymmetrisch fortsetzen
$\underline{f_3(x) = x}$ auf $x \in [-1, 1]$:
$\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ $\underline{f_3(x) = -\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n}\sin(\pi n x)}$

- ähnlich langsame Konvergenz ("Sägezahn" wie f_1)

4.2 Integral-Transformationen - Fourier $\sim$

[Lang & Pucker: 14.1, 14.3-4, Schulz: 12.2]

* Wir möchten nun Funktionen ohne Periodizität zerlegen, wie z.B. ein Gaußsches Wellenpaket.
$f(x) \sim e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}}$

→ Betrachte den Limes: Periode $L \to \infty$:
gegeben komplexe Fourier-Reihe:

$$\underline{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}, \; \underline{c_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}, \; x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$$

Schreibe als Riemann'sche Summe und ersetze durch Integral:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta K_n \tilde{f}(K_n)\, e^{iK_n x}\ ,\ \text{mit } K_n = \frac{2\pi n}{L}\ ,\ \Delta K_n = \frac{2\pi}{L}\ ,$$

$$\tilde{f}(K_n) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x) e^{-iK_n x}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{L\to\infty}$:
Def.:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \\ \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \qquad (4.4)\end{aligned}}$$

heißt **Fourier-Transformation**, mit Fourier-Transformierten $\tilde{f}(k)$ und **inverser Fourier trafo** $f(x)$.

Bemerkung: es werden auch symmetrische konventionen verwendet:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} F(k) e^{ikx}\ ,\ F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx}$$

* Idee: das zu lösende Problem (z.B. Diff.gl.) wird nach der Integral trafo (Fourier trafo) einfach und kann dann oft algebraisch gelöst werden, im sog. k-Raum (=Impulsraum). Die Schwierigkeit ist dann oft die Rück- (o. inverse) trafo.
$\rightarrow$ dafür gibt es wir für Stammfunktionen Tabellen.

Problem: nicht jede Funktion ist so einfach Fourier-transformierbar, wegen der Konvergenz d. Integrale (z.B. $f(x)$ =const.!).

$\rightarrow$ es gibt weitere Beispiele für Integraltrafo's, die dann Rechnung tragen:

- **Laplace-Transformation** von $f(x)$

$$\boxed{F(p) = L(f)(p) \equiv \int_0^{\infty} dt f(t) e^{-pt} \qquad (4.5)}$$

(hier ist z.B. $f(x)$ =const. erlaubt)

- **Mellin-Transformation** von $f(x)$

$$\boxed{F(p) = M(f)(p) \equiv \int_0^\infty dt f(t) t^{p-1} \qquad (4.6)}$$

* $\underline{\text{alle 3 Integral-trafos sind linear!}}$ Trafo $(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{Trafo}(f) + \beta \mathrm{Trafo}(g)$
Aber: für die Rčktrafo z.B. von Laplace benötigen wir d. komplexe Analysis
→ im Folgenden beschränken wir uns auf die Fourier-Trafo (FT).

Eigenschaften der Fourier-Trafo:

i) $f(x) \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \tilde{f}^*(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{+ikx} = \tilde{f}(-k)$

ii) Zusammenhang:

Produkt ↔ **Faltung** (Konvolution)

$$\underline{(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)} \quad \text{und} \quad \underline{(f * g)(x)(x)} = \underline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy f(x-y) g(y)} \underset{y \to x-y}{=} \underline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy g(x-y) f(y)}$$

und deren FT:

$$* \quad \underline{\widetilde{(f * g)}(k)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) e^{-ikx+iky-iky}$$
$$\underset{x'=x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) e^{-iky} = \underline{\tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k)} \qquad (4.7)$$

"FT faktorisiert Faltung"

* gegeben $\left(\tilde{f} * \tilde{g}\right)(k) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{f}(k-q) \tilde{g}(q)$, wende Rücktrafo an:

$$\overset{\text{FT}}{\Rightarrow} \ \underline{\widetilde{\left(\tilde{f} * \tilde{g}\right)}(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{f}(k-q) \tilde{g}(q) e^{ikx-iqx+iqx}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} e^{ik'x} \tilde{f}(k') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \tilde{g}(q) = \underline{f(x) \cdot g(x)} \qquad (4.8)$$

"FT einer Faltung ergibt Produkt"

* FT können auch in höheren Dimensionen betrachtet werden (3D, 4D + Minkowski) z.B.:

$$\underline{\tilde{f}\left(\vec{k}\right)} = \underline{\prod_{j=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} dx_j e^{-ik_j x_j} f\left(\vec{r}\right) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} dV e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f\left(\vec{r}\right)}$$

$$\underline{f\left(\vec{r}\right)} = \underline{\int \frac{dV_k}{(2\pi)^3} \tilde{f}\left(\vec{k}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}} \quad \text{Volumenint. im 3D k-Raum} \tag{4.9}$$

Beispiel: Gauß-Verteilung:

$\boxed{f(x) = A\text{exp}\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2}\right]}$, Berechne die Fourier-trafo $\tilde{f}(k)$:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} = A \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{exp}\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta^2} + ikx\right]$$

$$= A \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{exp}\left[-\frac{1}{\Delta^2}\left(x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + ikx\Delta^2\right)\right]$$

"quadratische Ergänzung" im Exponenten

$$= -\frac{1}{\Delta^2}\left[\left(x - x_0 + \frac{ik\Delta^2}{2}\right)^2 - \left(x_0 - \frac{ik\Delta^2}{2}\right)^2 + x_0^2\right]$$

$$= -\frac{1}{\Delta^2}\left[\left(x - x_0 + \frac{ik\Delta^2}{2}\right)^2 + x_0 ik\Delta^2 + \frac{k^2}{4}\Delta^4\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(k) = A e^{-ikx_0 - \frac{k^2}{4}\Delta^2} \underbrace{\Delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\Delta} e^{-\frac{x'^2}{\Delta^2}}}_{=\Delta\sqrt{\pi}\text{, S. 99, mit } y=\frac{x'}{\Delta}}, \quad \text{mit } x' = x - x_0 + \frac{ik\Delta^2}{2} \text{ (Subst. erlaubt: komplexe Analysis)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{f}(k) = A\Delta\sqrt{\pi} e^{-ikx_0 - \frac{k^2\Delta^2}{4}}} = \text{Phase} \cdot \text{Gauß}$$

d.h. $f \overset{\text{FT}}{\to} \tilde{f} \overset{\text{inverse FT}}{\to} f$ funktioniert.

"Unschärferelation" in der Quantenmechanik:

$$\begin{array}{ccc} f \text{ Wellenpaket im Ortsraum} & \leftrightarrow & \tilde{f} \text{ Wellenpaket im Impulsraum} \\ \Delta \text{ breit} & & \frac{2}{\Delta} \text{ schmal} \end{array}$$

Beispiel: exponentieller Zerfall:

$\boxed{f(x) = Ae^{-\frac{|x|}{\Delta}}}$, $\quad A, \Delta > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} = A \int_{0}^{\infty} dx e^{-\frac{x}{\Delta} - ikx} + A \int_{-\infty}^{0} dx e^{+\frac{x}{\Delta} - ikx} \\
&= A \frac{-1}{ik + \frac{1}{\Delta}} e^{-\frac{x}{\Delta} - ikx} \Big|_0^{\infty} + A \frac{1}{\frac{1}{\Delta} - ik} e^{\frac{x}{\Delta} - ikx} \Big|_{-\infty}^{0} = A \left(\frac{1}{ik + \frac{1}{\Delta}} + \frac{1}{\frac{1}{\Delta} - ik} \right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{f}(k) = \frac{2A\Delta^{-1}}{k^2 + \Delta^{-2}}}$ Lorenz-Kurve

wieder "Unschärferelation"

* Wie bei der Fourier-Reihe für die c_n's müssen wir hier noch die Rücktransformation überprüfen, s.S. 114

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-iqx} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx - iqx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{i(k-q)x}} \overset{!}{=} \tilde{f}(q) \\
&\qquad = \delta(k-q) = \begin{cases} 0 \text{ für } k \neq q \ (\approx k \not\in [q - \epsilon, q + \epsilon]) \\ \int_{q-\epsilon}^{q+\epsilon} dk \delta(k-q) = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

4.3 Diracsche Deltafunktion $\delta(x)$

$\delta(x)$ ist strenggenommen keine Funktion, sondern macht nur Sinn, wenn sie unter einem Integral steht. Solche "Funktionen" heißen **Distributionen**. Wie sieht $\delta(x)$ (näherungsweise) aus?

Einige Darstellungen der Diracschen Deltafunktion $\delta(x)$

* alle haben gemeinsam, dass wir den Limes einer sehr stark bei x konzentrierten Funktion bilden:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i x} e^{ikx}\Big|_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}}$$

$\boxed{\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\pi x}}$

* mit unseren Beispielen von eben können wir im Limes $\Delta \to 0$ weitere erzeugen:

$\boxed{\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}}}$, entsprechend $\delta\left(x - x_0\right)$

$\boxed{\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon} e^{-\frac{|x|}{\epsilon}}}$

oder formal $\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}}$

$\to$ die Fourier-trafo der konstanten Funktion $f(x) = 1$ (∞ breit) ist δ (∞ schmal).

- $\underline{f(x) = 1} \Rightarrow \underline{\tilde{f}(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \cdot 1 \underset{x\to x'=-x}{=} \underline{2\pi\delta(k)}$
  $= 2\pi\delta(-k)$ symmetrisch!
  sowie umgekehrt:
- $\underline{f(x)} = \delta(x) \;\Rightarrow\; \underline{\tilde{f}(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx}\delta(x) = \underline{1}$

Rechenregeln für die δ-Funktion

- um nicht von speziellen Eigenschaften einer best. Darstellung abzuhängen, bestimmen wir dies mittels Integration von $\delta(x)$ mit einer bel. **Testfunktion** $T(x)$. Diese soll bel. oft diffbar sein und hinreichend schnell verschwinden: $\lim_{x\to\pm\infty} T(x) = 0$
- $\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dx T(x)\delta(x-y) = T(y)}$ Definition von $\delta(x)$
- $\underline{\int_{-\infty}^{\infty} dx T(x)\delta'(x-y)} = \underbrace{T(x)\delta(x-y)}_{=0}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx T'(x)\delta(x-y) = \underline{-T'(y)}$
  analog: $\int_{-\infty}^{\infty} dx T(x)\delta^{(n)}(x-y) = ... = (-)^n T^{(n)}(y)$
- $$\underset{\text{für } a\neq 0}{\int_{-\infty}^{\infty} dx T(x)\delta(ax)} \underset{y=ax}{=} \frac{1}{a} \int_{-\infty\,\text{sign}(a)}^{+\infty\text{sign}(a)} dy T\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y) \;= \frac{1}{a}T(0) = \begin{cases} +1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$
  $$= \frac{1}{|a|}T(0)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)}$

insbesondere für $a = -1$ haben wir $\boxed{\delta(-x) = \delta(x)}$, wie bereits auf Seite 121, d.h. $\delta(x)$ ist symmetrisch.

- Sei <u>$f(x)$ eine Funktion mit einfacher Nullstelle bei $x = x_0$</u>: $f(x_0) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 0 + (x - x_0) f'(x_0) + \mathcal{O}\left((x - x_0)^2\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx T(x) \delta(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx T(x) \delta\left((x - x_0) f'(x_0) + \overset{\text{da } \delta \text{ so stark lokalisiert}}{\cancel{\mathcal{O}\left((x - x_0)^2\right)}}\right)$$

$$f'(x_0) = a \qquad = \int_{-\infty}^{\infty} dx T(x) \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|} = \frac{T(x_0)}{|f'(x_0)|}$$

$\boxed{\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)}$

- Wenn $f(x)$ mehrere einfache Nullstellen $x_1, ..., x_n$ auf $\mathbb{R}$ hat, können wir in der Nähe einer jeden entwickeln: $\boxed{\delta(f(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_j)|}\delta(x - x_j)}$

<u>Definition</u>: <u>Stufen-</u> o. <u>Heaviside-Funktion</u>:

$$\theta(x - y) = \begin{cases} 1 & x > y \\ 0 & x < y \end{cases}, \tag{4.10}$$

bei $x = y$ ist θ undef., wir können z.B. $\frac{1}{2}$ o. 1 wählen.

- Die Ableitung von θ ist nicht definiert bei $x = 0$. <u>Aber</u>: als <u>Distribution</u> betrachtet ist θ die Stammfunktion von δ:
sei $T(x)$ eine Testfunktion ($\in \mathcal{C}^\infty$):

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx T(x) \theta(x - y) = \int_{y}^{\infty} dx T(x) \qquad \text{wende } -\frac{d}{dy} \text{ an}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx T(x) \left(-\frac{d}{dy}\right) \theta(x - y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx T(x) \theta'(x - y) = T(y)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\theta'(x-y) = \delta(x-y)}$ oder $\int\limits_{-\infty}^{x} dx' \delta\left(x'-y\right) = \theta(x-y)$

- Dirac-Deltafunktion in mehreren Dimensionen:
- $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Rightarrow\; \underline{\overset{\downarrow\text{Dimension}}{\delta^{(2)}}\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right) \equiv \delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)}$
  definiert als Distribution in $d = 2$-dim. Volumen-Integralen $\int dxdy$
- entsprechend in d Dimensionen $\boxed{\delta^{(d)}\left(\vec{x}\right) = \delta\left(x_1\right)\delta\left(x_2\right)...\delta\left(x_d\right)}$ in d-dim. Volumenintegralen.
  Dim $d = 2$: Polarkoordinaten $\delta^{(2)}\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right) = \frac{1}{\rho}\delta\left(\rho-\rho_0\right)\delta\left(\varphi-\varphi_0\right)$, $\vec{x} = \rho e^{i\varphi}$
  $d = 3$: Kugelkoordinaten: $\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right) = \frac{1}{r^2}\delta\left(r-r_0\right)\delta\left(\varphi-\varphi_0\right)\delta\left(\cos\theta-\cos\theta_0\right)$
  check: $\int dxdydz f\left(\vec{x}\right)\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right) \underset{\text{S. 99}}{=} f\left(\vec{x}_0\right)$
  analog in Zylinderkoordinaten.
- Anwendungsbeispiele zur Lösung von Integral- u. Differentialgl.:

* Integralgl. vom Faltungstyp (typisch in der Störungstheorie):

$$f(x) = h(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy K(x-y) f(y) \quad \text{(mit FT von } h(x),\, K(x) \text{ bekannt)}$$

$$\overset{\text{FT}}{\Rightarrow} \; \tilde{f}(k) = \tilde{h}(k) - \tilde{K}(k)\tilde{f}(k), \quad \text{wegen Konvolution u. S. 118}$$

$$\Leftrightarrow \; \tilde{f}(k) = \frac{\tilde{h}(k)}{1+\tilde{K}(h)},$$

hat die Lösung $\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\frac{\tilde{h}(k)}{1+\tilde{K}(h)}}$

* Methode der Greenschen Funktionen in 3 Dimensionen

Gesucht: Lösung $\phi\left(\vec{r}\right)$ der inhomogenen Differentialgl. $L\phi = f(x)$, wobei L ein Differentialoperator ist.

Beispiel: Löse $\boxed{\Delta\phi\left(\vec{r}\right) = 4\pi\rho\left(\vec{r}\right)}$ Poisson-Gleichung

für $\phi\left(\vec{r}\right)$ Skalarpotential (gesucht!) vom elektrischen Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}\right)$, zu einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho\left(\vec{r}\right)$.

Definition: Zur Konstruktion benutzen wir die sogenannte **Greensche Funktion** zum entprechenden Differentialoperator:

$$LG\left(\vec{r}\right) = \delta^{(3)}\left(\vec{r}\right) , \tag{4.11}$$

hier: $\boxed{\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}-\vec{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')}$ $(*)$

<u>Behauptung</u>: dann gilt für die <u>Lösung</u> $\boxed{\phi(\vec{r}) = \int dV' G(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')}$, denn

$\underline{\Delta_{\vec{r}}\phi(\vec{r})} \underset{\substack{\text{vertausche}\\ \Delta\ \&\ \int}}{=} \int dV' \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}') = -4\pi \int dV' \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}') = \underline{-4\pi\rho(\vec{r})}$

<u>Bestimmung von G mittels FT:</u>

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{G}\left(\vec{k}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}, \quad \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$

- $\Delta_{\vec{r}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = -\vec{k}^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\Rightarrow (*) : \quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \underbrace{\left[-\vec{k}^2 \tilde{G}\left(\vec{k}\right) + 4\pi\right]}_{\substack{=0\\ \text{d.h. im }\underline{\text{Fourierraum}}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{G}\left(\vec{k}\right) = \frac{4\pi}{\vec{k}^2}}$$

* <u>Rücktrafo</u>:

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{4\pi}{\vec{k}^2} = \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{4\pi}\,|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

spez. Lösung (statisch) $\Rightarrow$ $\boxed{\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$

denn: in <u>Kugelkoord.</u> von $\vec{k}$, mit $\vec{r}$ als z-Achse:

$$f(\vec{r}) \equiv \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\vec{k}^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{e^{ikr\cos\theta}}{k^2} \underset{z=\cos\theta}{=} 2\pi(-) \int_{+1}^{-1} dz \int_0^{\infty} dk e^{ikrz}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dk \frac{1}{-ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) = \frac{4\pi}{r} \int_0^{\infty} dk \frac{\sin(kr)}{k} \underset{\text{S. 57}}{=} \frac{4\pi}{r} \cdot \frac{\pi}{2} \tag{4.12}$$

- für die allgemeine Lösung müssten wir noch die Lsg der homogenen, d.h. der <u>Laplace-Gl. $\Delta\phi = 0$</u> addieren. Diese heißen <u>harmonische</u> Fkt.

- <u>S. 104</u>: Δ in Kugelkoordinaten: $\underline{\Delta_r \frac{1}{r}} = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(r^2 \partial_r\right) \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(\frac{r^2(-1)}{r^2}\right) \underline{= 0\,, \quad r > 0}$

  für bel. r gilt: $\boxed{\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}\left(\vec{r}\right)}$.