Rechenmethoden der Physik

Vorlesungsskript

Prof. Dr. Gernot Akemann

Fakultät für Physik
Universität Bielefeld

Inhaltsverzeichnis

0 Inhaltsübersicht

0.1 Literatur: einige Standardwerke

- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (10. Aufl.), Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- H. Schulz, *Physik mit Bleistift* (6. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2006.
- C.B. Lang und N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* (2. Aufl.), Spektrum Akad. Verl., Heidelberg, 2005.
- I.N. Bronstein und K.A. Semendjaev, *Taschenbuch der Mathematik* (8. Aufl.), Verlag Harri Deutsch, 2012.
- G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger* (18. Aufl.), Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 2014.

→ Semesterapparat

0.2 Übersicht

1. Lineare Algebra
2. Analysis in 1 Dimension
3. Analysis in ≥ 1 Dimension
4. Fourier-Transformation

1 Lineare Algebra

Lit.: Gerd Fischer, *Lineare Algebra*

1.1 Vektoren und Skalare

Gruppe G: Menge G mit Verknüpfung $+ : \; G \times G \to G$

G 0 abgeschlossen $\forall\, a, b \in G$: $\; a + b \in G$

G 1 + assoziativ $(a + b) + c = a + (b + c)$

G 2 $\exists$ neutrales Element e: $\forall a \in G$: $e + a = a$

G 3 $\forall a$: $\exists$ inverses a': $a' + a = e$

G ist abelsch, wenn $\forall a, b$: $a + b = b + a$

Körper K: Menge K mit 2 Verknüpfungen $(K, +, \,\cdot\,)$

K 1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $e = 0$, $a' = -a$

K 2 $K^* \equiv K \setminus \{0\}$ ist eine Untergruppe: $K^* \subset K$ bzgl. $\cdot$
und $(K^*, \cdot)$ ist abelsch, neutr. Element $\equiv 1$, $a' = a^{-1}$

K 3 Distributivgesetze
$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) \quad &= a \cdot b + a \cdot c\,, \\ \Rightarrow (a + b) \cdot c \quad &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

Beispiele:
$K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ mit üblicher Addition und Multiplikation. Es gilt:

$$\begin{aligned} &e, a' \text{sind eindeutig}\,, \\ &\forall\, a \in K : a \cdot 0 = 0\,, \\ &\forall\, a, b \in K : a \cdot b = 0 \;\Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0\,. \end{aligned}$$

Vektorraum über K (K-Vektorraum): K Körper, V Menge mit 2 Verknüpfungen $+, \cdot$;

- $+$ Addition $V \times V \to V$: $\vec{v}, \vec{w} \in V \to \vec{v} + \vec{w} \in V$
- $\cdot$ Multiplikation mit Element aus dem Körper $K \times V \to V$: $a \in K$, $\vec{v} \in V \to a \cdot \vec{v} \in V$ mit:

  V 1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, mit $e \equiv \vec{0}$ Nullvektor und inversem Element $-\vec{v}$ zu $\vec{v}$, so dass $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

  V 2 Distributivgesetze:

$$
\begin{aligned}
(a+b) \cdot \vec{v} &= a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}\,, \\
a(b \cdot \vec{v}) &= (ab) \cdot \vec{v}\,, \\
a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}\,, \\
\text{und } 1 \cdot \vec{v} &= \vec{v}\,, \ \text{wobei } 1 \in K\,.
\end{aligned}
$$

Die Elemente von K heißen Skalare (z. B. m, T, ...), die von V Vektoren und werden mit $\vec{\ }$ gekennzeichnet (z. B. Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, Impuls $m \cdot \vec{v} = \vec{p}$, Drehimpuls $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$, ...)

Beispiel:
$K = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $\underset{\text{oder } V = \text{Polynome}}{V = \mathbb{R}^n}$, $\vec{v}$ n-Tupel in $\mathbb{R}^n$.

- Um zu einer expliziten Darstellung von Vektoren zu gelangen (u. a. um mit ihnen konkret zu rechnen) müssen wir eine Basis einführen
- Vektorenaddition u. skalare Multiplikation iteriert: (Geometrische Bedeutung → Ü)

Linearkombination: $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i \in V$
die Vektoren $\vec{v}_1$, ...,$\vec{v}_k \neq \vec{0}$ sind linear unabhängig falls gilt

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \forall\, i = 1, ..., k: \ a_i = 0\,, \tag{1.1}$$

gibt es eine Lösung für (1.1) mit mind. einem $a_j \neq 0$, so sind die Vektoren linear abhängig:
$\vec{v}_j = -\frac{1}{a_j} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} a_i \vec{v}_i$.

Basis (Fundamentalsystem):
Die Menge von Vektoren $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ bildet eine Basis von V falls

B 1 sie sind linear unabhängig,

B 2 sie spannen V auf: $V = \text{span}\,(\vec{e}_i)_{i=1,\ldots,n}$: $\forall \vec{v} \in V\ \exists v_1, \ldots, v_n \in K$ mit $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i$.

Dann ist die <u>Dimension</u> $\dim V = n$

- eine Wahl der Basis ist nicht eindeutig, z. B. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - \vec{e}_2\}$ ist auch eine Basis

- <u>nach Wahl</u> einer Basis sind die <u>Komponenten</u> v_i eines Vektors $\vec{v}$ bzg. dieser Basis eindeutig!
  Dann

$$\begin{aligned}
&\exists\, v_1, \ldots, v_n; w_1, \ldots, w_n \text{ mit} \\
&\quad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{e}_i \\
&\Rightarrow \vec{0} = \vec{v} - \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} (v_i - w_i)\, \vec{e}_i, \vec{e}_i \text{ linear unabh. } \Rightarrow \forall_{i=1,\ldots,n}\,, v_i = w_i\,.
\end{aligned}$$

Beispiele:
$\mathbb{R}^3$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, Basis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$;
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 3-Tupel mit <u>kanonischer Basis</u> $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$, $\vec{e}_z = (0,0,1)$ und Addition komonentenweise (sowie Multiplikation)

- die Menge der Polynome mit maximalen Grad n ist ein $(n+1)$-dim. Vektorraum

- Phasenraum eines Teilchens in der klass. Mechanik $\mathbb{R}^6 \ni \{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}$
  $\rightarrow$ höhere Dim. für mehr Teilchen

$\underset{\text{(inneresProdukt)}}{\textbf{Skalarprodukt}}$: die Multiplikation von $\begin{array}{lc} \vec{v}, \vec{w} \in V & V \times V \rightarrow K \\ \text{Abb. in K} & (\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in K \end{array}$
heißt Skalarprodukt falls gilt:

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{w}$ <u>abelsch</u> (es gibt auch <u>nicht abelsch</u>: $K = \mathbb{C}$: $\vec{v}^* \cdot \vec{w}$),

- $\vec{v}\,(a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2) = a_1 \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + a_2 \vec{v} \cdot \vec{w}_2$ linear,

- $\left.\begin{array}{ll} |\vec{v}|^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v} & \geq 0 \\ |\vec{v}|^2 = 0 & \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} \end{array}\right\}$ positiv definit, $|\vec{v}|$ ist die **Norm** ("Länge") von $\vec{v}$, es gilt **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}| \,. \tag{1.2}$$

(Denn $0 \leq |\lambda\vec{v}+\vec{w}|^2$,
oBdA $\vec{v} \neq \vec{0}$, wähle $\lambda = -\vec{v}\cdot\vec{w}/|\vec{v}|^2$ u. Gl. $\cdot|\vec{v}|^2$
$\Rightarrow 0 \leq -\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)^2 + |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$.)

Dreiecksungleichung:

$$|\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| \,. \tag{1.3}$$

(Denn $|\vec{v}+\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + 2\,\vec{v}\cdot\vec{w} + |\vec{w}|^2 \leq |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}\cdot\vec{w}| + |\vec{w}|^2 \leq \left(|\vec{v}|+|\vec{w}|\right)^2$,
oder geom. Beweis für $\mathbb{R}^2$.)

- 2 Vektoren $\vec{v},\vec{w} \in V$ heißen **orthogonal** falls $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$.
  Wir definieren einen **Winkel** θ zwischen 2 Vektoren:

  $$\text{für } \vec{v},\vec{w} \neq \vec{0}: \ \cos\theta := \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \,, \tag{1.4}$$

  wegen Cauchy-Schwarz (1.2) gilt $|\cos\theta| \leq 1$.

- insbesondere haben wir für $\theta = \pi/2$: $\vec{v} \perp \vec{w}$ Orthogonalität.

Orthonormale (ON) Basis: gegeben eine Basis $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ von V, gilt

$$\forall_{i,j=1,\dots,n} \text{ mit } i \neq j : \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \,, \text{so ist diese } \underline{\text{orthogonal}}. \tag{1.5}$$

Ist zusätzlich $\forall_{i=1,\dots,n}\ |\vec{e}_i| = 1$ ist sie <u>orthonormal</u>.
(Können wir immer durch Normierung erzielen $\vec{e}_i \to \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}$, da $\forall_i\ \vec{e}_i \neq \vec{0}$ (lin. unabh.!).)

- aus einer beliebigen Basis $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ kann immer eine orthn. Basis rekursiv konstruiert werden: **Gram-Schmidt Verfahren**:

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_1 &:= \vec{a}_1\,, \\
\vec{b}_2 &:= \vec{a}_2 - \frac{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1\right)}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1\,, \\
&\;\vdots \\
\vec{b}_k &:= \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\left(\vec{a}_k \cdot \vec{b}_i\right)}{|\vec{b}_i|^2}\vec{b}_i
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

mit $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = 0$ für $i \neq j$, dann $\vec{e}_j = \vec{b}_j/|\vec{b}_j|$ ist ON Basis.

- In einer ON Basis gilt:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{w} &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \\
&= v_i w_i \text{ (Einsteinsche Summenkonvention über gleiche Indizes)},
\end{aligned}
$$

wegen

$$
\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases} \quad \textbf{Kronecker Delta}\,. \tag{1.7}
$$

- bisher hatten wir $\begin{array}{ll} \text{skalare Mult.} & K \times V \to V : \; a \cdot \vec{v} \\ \text{Skalarprodukt} & V \times V \to K : \; \vec{v} \cdot \vec{w} \end{array}$.
  Gibt es weitere Multiplikationen, die wieder in V führen?
  Ja!: $\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \text{ "="} \; \mathbb{C} & : z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C} \text{ Mult. komplexer Zahlen } z = \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \; \to \; \text{Ü} \\ \mathbb{R}^3 & : \text{Vektorprodukt} \end{array}$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt o. äußeres Produkt) auf $V = \mathbb{R}^3$

$$
\text{"}\times\text{"}: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.8}
$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $\begin{array}{rrl} \underline{\text{antisymmetrisch}}: & \vec{u} \times \vec{v} = & -\vec{v} \times \vec{u} \quad \left(\Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}\right)\,, \\ \underline{\text{linear}}: & \vec{u} \times (a\vec{v} + b\vec{w}) = & a\,(\vec{u} \times \vec{v}) + b\,(\vec{u} \times \vec{w})\,. \end{array}$

- Wenn wir "$\times$" auf einer ON Basis defeinieren, ist es für alle Vektoren auf $\mathbb{R}^3$ definiert:

$$\begin{array}{c} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \\ {\scriptstyle 2 \quad\;\; 3 \quad\;\; 1} \\ {\scriptstyle 3 \quad\;\; 1 \quad\;\; 2} \end{array} \quad \text{zyklisch} .$$

→ Figur 1 (Rechtshändige ON Basis)

In einer rechtshändigen ON Basis gilt:

$$\begin{aligned}
(\vec{u} \times \vec{v}) &= (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3) \times (v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3) \\
&\overset{\text{linear}}{=} (u_1v_2 - u_2v_1)\underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + (u_2v_3 - u_3v_2)\underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} + (u_3v_1 - u_1v_3)\underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} \\
&= \underline{(u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{e}_3}\,, \\
\leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v})_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} u_j v_k\,. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Total anti-sym. Epsilon-Tensor (3. Stufe: 3 Indizes)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn je 2 (oder mehr) Indizes gleich} \\ +1 & \text{, wenn } ijk \text{ zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \\ -1 & \text{, wenn } ijk \text{ nicht zyklische Permutationen von } \{1,2,3\} \end{cases} \qquad (1.10)$$

3 Indizes $\Rightarrow$ $3! = 6$ Permutationen:

+	-
ϵ_{123}	ϵ_{132}
231	321
312	213

Vorzeichen ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung. Skalarprodukt und Vektorprodukt spielen eine wichtige Rolle in der Elektrodynamik, mit Ableitungen als Komponenten.

(geometrische) **Eigenschaften des Vektorprodukts**:

- $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$,
- $0 \overset{!}{=} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$
  sowie $0 = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (denn $\vec{u} \to \vec{v}$, $\vec{v} \to \vec{u}$ oben, antisym.) (falls $\neq 0$!)
  $\Rightarrow$ $(\vec{u} \times \vec{v})$ ist senkrecht zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$, d. h. zur von $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ aufgespannten Ebene (rechtshändig),

  → Figur 2 (Normale und Winkel von/zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$.)

- Flächenbestimmung:

$$
\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 =& (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 \\
=& \ldots = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \left(1 - \cos^2 \theta\right) \,, \\
\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| =& |\vec{u}||\vec{v}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\vec{u}||\vec{v}|| \sin \theta|
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

= Fläche des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

→ Figur 3 (Parallelogramm $\vec{u}$, $\vec{v}$, θ.)

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\vec{u} =& \; \tfrac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y) && \Rightarrow |\vec{u}|^2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \\
\vec{v} =& \; \vec{e}_z && \Rightarrow |\vec{v}|^2 = 1 \\
\vec{u} \cdot \vec{v} =& \; 0 && \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{spannen Einheits-}\\ \text{quadrat auf}\end{array} \\
\vec{u} \times \vec{v} =& \; \tfrac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times \vec{e}_z = \tfrac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_y + \vec{e}_x) && \begin{array}{l} | \cdot \vec{u} = 0 \\ | \cdot \vec{v} = 0 \end{array} \\
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 =& \; \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 && \text{Fläche} = 1
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt, dass diese $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ eine neue ON Basis bilden.

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, wenn:

$$
\begin{aligned}
& \vec{u} \parallel \vec{v} \\
\Rightarrow & \; \vec{v} = |\vec{v}| \, (\pm 1) \, \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \\
\Rightarrow & \; (\vec{u} \times \vec{v})_i = \sum_{j,k} \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{anti}-} \underbrace{u_j u_k}_{sym.} (\pm 1) \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}
\end{aligned}
$$

(oder mit: $\theta = 0, \pi$)

$$
\text{Kombinationen von} \left\{ \begin{array}{l} \text{Skalarprodukt und Vektorprodukt ?} \\ \text{Vektorprodukt und Vektorprodukt ?} \end{array} \right.
$$

Spatprodukt: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \qquad V \times V \times V \to K$

- <u>Zyklizytät</u> $\overset{1)}{=} \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) \qquad \overset{2)}{=} \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ denn:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j,k}^{n} \epsilon_{ijk} v_j w_k \\
&\text{Idee: } \epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} \text{ , endliche Summen können immer umgeordnet werden} \\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{k,i}^{n} \epsilon_{jki} w_k u_i \qquad 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} w_k \sum_{i,j}^{n} \epsilon_{kij} u_i v_j \qquad 2)
\end{aligned}$$

  (Später: schreibe Spatprodukt mit Determinante)

- es gibt weitere Identitäten bei anti-zyklischer Vertauschung von $(\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{w} \times \vec{v})$

- "<u>Vertauschbarkeit</u>" $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \overset{!}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$,
  denn: 2) oben, Skalarprodukt ist kommut. $= \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

- <u>Volumenbestimmung</u>
  Volumen = Fläche × Höhe
  Höhe = $\cos\theta \cdot |\vec{u}|$ → Figur 4, Parallelepiped (= Spat)
  $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \cos\theta |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|$

- das von $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ aufgespannte Spatvolumen ist $\neq 0$
  $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind linear unabhängig
  (denn alle wechselseitigen Kreuzprodukte müssen $\neq 0$ sein)

Weitere Eigenschaften des Vektor- und Skalarproduktes:

- <u>Graßmann-Identität</u>

$$\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w} \tag{1.12}$$

  (Beweis → Übung)

- Lagrange-Identität

$$(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 \times \vec{v}_1) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_2) - (\vec{u}_1 \times \vec{v}_2) \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{v}_1) \tag{1.13}$$

  (Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Jacobi-Identität

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} \tag{1.14}$$

  (Beweis $\rightarrow$ Übung)

- Aus der Jacobi-Identität folgt, dass das Vektorprodukt i.A. nicht zyklisch ist
  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, d.h. Klammern sind wichtig!
  Im Gegensatz dazu hatten wir $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

* Wir kommen später auf diese Formeln zurück in der Differential- und Integralrechnung in 3 Dimensionen.

* weitere Multiplikationen von Vektoren die $V \rightarrow V$ abbilden (in bel. Dim.):
lineare Abbildungen und Matrixmultiplikation

1.2 Matrizen

lineare Abbildung $M : \begin{array}{c} V \rightarrow V \\ \vec{v} \rightarrow \vec{w} = M(\vec{v}) \end{array}$ auf K-Vektorraum V, wenn gilt

$L\,1$ $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad M(\vec{v} + \vec{w}) = M(\vec{v}) + M(\vec{w})\,,$

$L\,2$ $\forall\, \vec{v} \in V, \forall a \in K: \quad M(a \cdot \vec{v}) = a \cdot M(\vec{v})\,.$

Darstellung der linearen Abbildung: Matrix

- wähle ON Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$, so dass $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_j = v_j \vec{e}_j$

  $\Rightarrow\ \vec{w} = \sum_{k=1}^{n} w_k \vec{e}_k = M(\vec{v}) \overset{L\,1,\,2}{=} \sum_{j=1}^{n} v_j M(\vec{e}_j) \qquad |\vec{e}_i \cdot\,, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$

  $\Rightarrow\ w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{e}_i M(\vec{e}_j) = M_{ij} v_j$, wobei $\vec{e}_i M(\vec{e}_j) \equiv M_{ij} \in K$, damit Resultat in K und M_{ij} Darstellung von M in Basis $\{\vec{e}_i\}$.

Beispiele:

– lineares Gleichungssystem: $\vec{w}$, M gegeben:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}v_1 + \ldots + M_{1n}v_n \\ \vdots \\ M_{i1}v_1 + \ldots + M_{in}v_n \\ \vdots \\ M_{n1}v_1 + \ldots + M_{nn}v_n \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1j} & \ldots & M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & \vdots & \ddots & M_{ij} & \ddots & M_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & M_{nj} & \ldots & M_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M}_1 \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_i \cdot \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{M}_n \cdot \vec{v} \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{M}_i$ der i-te Zeilenvektor ist.

– Nullmatrix: $0_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$,

– Einheitsmatrix: $\mathbb{1}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $M_{ij} = \delta_{ij}$.

- Im Allgemeinen betrachten wir im folgenden nur quadratische Matrizen $M\,\square$.
- Rechteckige Matrizen (z.B. in der Finanzmathematik) $\left(\updownarrow \begin{array}{l} \text{Zeitreihen} \\ \text{Firmen} \end{array} \right)$

  Beispiele:

–

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{also } M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 .$$

–

$$M \quad - \quad n \times m \;\text{ Matrix: } \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n .$$

- Transponierte Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji}$
  (definiert für quadratisches und rechteckiges $M \quad \Rightarrow MM^\top$ quadratisch)
  insbesondere für Vektoren:

$$\begin{aligned} \vec{v} \in V \text{ als } n \times 1 \text{ "Matrix": } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ SpaltenVektor}\,, \\ v^\top = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \text{ Zeilenvektor}\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

- Skalarprodukt als Matrixprodukt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i w_i = \left(v_1, \dots, v_n\right) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v^\top w \qquad \text{Abbildung von } \mathbb{R}^n \to \underset{=K}{\mathbb{R}^1}\,.$$

- Symmetrische Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = +M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,
  antisymmetrische Matrix: $\left(M^\top\right)_{ij} = M_{ji} = -M_{ij}$, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.
- Operationen von Matrizen: M, N: $V \to V$
  - elementweises Addieren $(M+N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$ wichtig: gleiche Dimension
  - mit Skalaren Multiplizieren $(aM)_{ij} = aM_{ij}$
- Hintereinanderausführung: $\vec{v} = N\vec{u}$, $\vec{w} = M\vec{v}$:

$$\begin{array}{rll} \Rightarrow \vec{w} = & M\left(N\vec{u}\right) \Rightarrow w_i = M_{ij} N_{jk} v_k & \text{ist \underline{assoziativ}} \\ & & \text{A(BC)=(AB)C} \\ \text{aber i.A. } \neq & N\left(M\vec{u}\right) \quad \left(= N_{ij} M_{jk} u_k\right) & \text{und \underline{distributiv}} \\ & & \text{A(B+C)=AB+AC} \end{array}$$

- Vertauschen von 2 Matrizen: Kommutator $[M, N] = MN - NM$

- Eigenschaften von "$\top$"

  * $\left(M^\top\right)^\top = M$
  * $(M+N)^\top = M^\top + N^\top$
  * $(MN)^\top = N^\top M^\top \qquad \left(\text{denn } \begin{aligned} \left((MN)^\top\right)_{ij} &= M_{jk}N_{kj} = \left(N^\top\right)_{ik}(M)_{kj} \\ &= \left(N^\top M^\top\right)_{ij} \end{aligned}\right)$

  $\Rightarrow$ z.B. $MM^\top$ ist symmetrisch

- In der Quantenmechanik brauchen wir Matrizen mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$
  $\rightarrow$ betrachte $K = \mathbb{C}$ Vektorraum, z.B. $V = \mathbb{C}^n$:

  – konjungierte Matrix $\quad (M^*)_{ij} = (M_{ij})^* \quad *$ komplexe Konjugation
  – adjungierte Matrix $\quad \left(M^\dagger\right)_{ij} = (M_{ij})^\dagger = \left(M^\top\right)^*_{ij} \quad \dagger$ $\underset{\text{(engl.dagger)}}{\text{Kreuz}}$
  – selbstadjungierte oder hermitesche Matrix $\quad M^\dagger = M$

- wegen $(z^*)^* = z$ hat "$\dagger$" dieselben Eigenschaften wie "$\top$"
  (Notation Mathematik: oft $z^* \rightarrow \bar{z}$, $M^\dagger \rightarrow M^*$)

Beispiel:
die Pauli-Matrizen sind hermitesch:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Funktionen von Matrizen

- viele wichtige Funktionen in der Physik besitzen eine Taylorreihendarstellung, die auf ganz $\mathbb{R}$ (oder sogar $\mathbb{C}$) konvergiert
  Beispiele:

  * $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
  * $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, etc.
    $(e^{ix} = \cos x + i \sin x)$

  Damit definieren wir z.B. $\left(e^M\right)_{ij} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (M^n)_{ij}$,
  wegen $AB \neq BA$ gilt aber i.A. $e^{AB} \neq e^{BA}$ (nicht kommutierende Matrizen)
  oder allgemeiner: $\quad F(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad \Rightarrow \quad F(M) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j M^j$.

- Insbesondere sind einfache Beispiele P_k Polynome vom Grad k:
  $a_j = 0 \quad \forall j > k: \quad P_2(M) = a\mathbb{1} + bM + cM^2$, wobei a, b und c Skalare $\in K$.

Das transponierte $M^\top$ einer Matrix M ist wichtig z.B. bei

Drehungen: lineare Abbildung (gegeben durch Matrixmultiplikation), die das Skalarprodukt invariant läßt (und damit insbesondere die $\underset{=\text{Länge}}{\text{Norm}}$ aller Vektoren!):

$$
\begin{aligned}
&\vec{x} \to \vec{x}' = O\,\vec{x} \quad (= Ox \text{ als Spaltenvektor}) \text{ mit} \\
&\vec{x}\cdot\vec{y} \stackrel{!}{=} \vec{x}'\cdot\vec{y}' = (x')^\top y' = (O\,x)^\top (O\,y) = x^\top O^\top O\,y \stackrel{!}{=} x^\top y \\
&\Rightarrow O^\top O = \mathbb{1}\,.
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

Matrizen, deren inverse Matrix $O^{-1} = O^\top$, heißen orthogonal. Es gilt auch $O\,O^\top = \mathbb{1}$.
(O: orthogonale Transformation)

- für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, z.B. $\mathbb{C}^n$ läßt sich mit $\vec{u}, \quad \vec{v} \in \mathbb{C}^n$: $\vec{u}^* \cdot \vec{v}$ ein (nicht kommutatives) Skalarprodukt definieren, das eine positiv definite Norm hat.
  Dies wird durch folgende lineare Abbildung invariant gelassen:

$$
\begin{aligned}
&\vec{u} \to \vec{u}' = U\vec{u}\,, \quad \vec{v} \to \vec{v}' = U\vec{v} \\
&\Rightarrow (\vec{u}')^* \cdot \vec{v}' = (Uu)^{\top *} \cdot Uv = u^{\top *}U^{\top *}Uv \stackrel{!}{=} u^{\top *}v \\
&\Rightarrow U^\dagger U = \mathbb{1}\,,
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

  solche Matrizen heißen unitär. Es gilt auch $UU^\dagger = \mathbb{1}$.
  (U: unitäre Transformation)

Drehung der Basis
Sei $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine ON Basis: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
$\Rightarrow \quad \vec{e}_i{}' = O\vec{e}_i$ bildet eine neue ON Basis da $\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij}$, wenn O orthogonal ist $O^\top O = \mathbb{1}$, und da $1 = |\vec{e}_i| = |\vec{e}_i{}'|$.
Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$ mit kanonischer Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$: Drehung um

$$
\underset{z\text{-Achse}}{D_{z,\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{s} & 0 \\ \mathrm{s} & \mathrm{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad
\underset{y\text{-Achse}}{D_{y,\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{c} & 0 & -\mathrm{s} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{s} & 0 & \mathrm{c} \end{pmatrix}} \quad
\underset{x\text{-Achse}}{D_{x,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c} & -\mathrm{s} \\ 0 & \mathrm{s} & \mathrm{c} \end{pmatrix}} \tag{1.19}
$$

um Winkel ϕ im positiven Sinn, $\mathrm{c} = \cos\phi$, $\mathrm{s} = \sin\phi$.

Abbildungen von Matrizen in den Körper K:

Spur (Sp) einer Matrix (engl. trace (tr)), M $n \times n$ Matrix:

$$\mathrm{Sp}M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} = M_{ii} \quad \underline{\text{Summe der Diagonalelemente.}} \tag{1.20}$$

Es gilt:

* $\mathrm{Sp}\left(M^\top\right) = \mathrm{Sp}M$ ($\top$ "spiegelt" M an der Diagonalen, die Diagonale ist invariant) $\left(= \left(M^\top\right)_{ii} = M_{ii}\right)$
* $\mathrm{Sp}\,(MN) = \mathrm{Sp}\,(NM)$ für M, N $n \times n$ Matrizen (denn $\mathrm{Sp}\,(MN) = M_{ik}N_{ki} = N_{ki}M_{ik} = \mathrm{Sp}\,(NM)$)
  $\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(LMN) = \mathrm{Sp}\,(MNL) = \mathrm{Sp}\,(NLM)$
* Die Spur ist invariant unter einer orthogonalen Transformation der Basis:

- $\vec{e}_i' = O\vec{e}_i$, welche Komponenten hat $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$ in der neuen Basis?
-
$$\begin{aligned} \vec{v} =& v_i\vec{e}_i = v_i'\vec{e}_i' \qquad (\vec{v} \text{ wird nicht gedreht, nur die Basis}) \\ \Rightarrow \; v_i' =& \vec{e}_i' \cdot \vec{v} = (Oe_i)^\top v = e_i^\top 0^\top v = \left(O^\top v\right)_i \\ \Leftrightarrow \; \underline{v_i'} =& O_{ik}^\top v_k = \underline{O_{ki}v_k} \end{aligned} \tag{1.21}$$

- Matrixelemente in alter Basis: $M_{ij} = \vec{e}_i M \vec{e}_j$
  in neuer Basis:

$$\begin{aligned} M_{ij}' =& \vec{e}_i' \cdot M \cdot \vec{e}_j' = (Oe_i)^\top MOe_j = \vec{e}_i \left(O^\top MO\right)\vec{e}_j = \left(O^\top MO\right)_{ij} \\ \Leftrightarrow \; \underline{M_{ij}'} =& O_{ik}^\top M_{kl}O_{lj} = \underline{O_{ki}O_{lj}M_{kl}} \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(M') = \mathrm{Sp}\left(O^\top MO\right) = \mathrm{Sp}\left(\underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}} M\right) = \mathrm{Sp}\,(M)$$

- dito für unitäre Trafos.

Tensoren: Verallgemeinerung von Vektoren, MAtrizen, definiert durch Trafo:
$T_{i_1,...,i_k}$ ist ein <u>Tensor k-ter Stufe</u>, wenn er wie folgt unter O orthog. transformiert:

$$T'_{i_1,...,i_k} = O_{l_1 i_1} ... O_{l_k i_k} T_{l_1,...,l_k} \,. \tag{1.23}$$

Beispiele:

	Skalar $a \in K$	Vektor v_i	Matrix M_{ij}	ϵ_{ijk}-Tensor
Tensor	0-ter Stufe	1-ter Stufe	2-ter Stufe	3-ter Stufe

R_{ijkl} Riemann-Tensor $\rightarrow$ Allgemeine Relativitätstheorie
Tensor 4-ter Stufe

Determinante einer <u>quadratischer $n \times n$ Matrix M</u>: $\det(M) \in K$.

- Um det zu definieren schreiben wir M ausgedrückt durch n Spaltenvektoren:
  $M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ m_1 & m_2 & ,..., & m_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$.
- Die Determinante von M ist durch folgende Eigenschaften definiert [K. Weierstraß]:

  D 1 <u>$\det(M)$ ist linear</u> in jeder Spalte:

  a) $$\det\left(m_1, ..., m_j = m'_j + m''_j, ..., m_n\right) = \begin{array}{l} \det\left(m_1, ..., m'_j, ..., m_n\right) \\ + \det\left(m_1, ..., m''_j, ..., m_n\right) \end{array} ,$$

  sowie

  b) $\det(m_1, ..., \alpha m_j, ..., m_n) = \alpha \det(m_1, ..., m_j, ..., m_n)$ für $\alpha \in K$,

  D 2 <u>$\det(M)$ ist alternierend</u>, d.h. $\det M = 0$ falls 2 Spalten gleich:
  $\det\left(m_1, ..., \underset{i-\text{te}}{m_i}, ..., \underset{j-\text{te}}{m_i}, ..., m_n\right) = 0$,

  D 3 <u>$\det(M)$ ist normiert</u>, d.h. für die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n\times n}$ gilt:
  <u>$1 = \det(\mathbb{1}_{n\times n})$</u> $\quad (= \det(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ für $\{\vec{e}_i\}$ die kanonische ON Basis).

* Aus D 1 folgt, dass sich 2 Matrizen, die sich in <u>genau einer</u> Spalte unterscheiden addieren lassen.
Im Allgemeinen gilt aber $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$, für A, B beliebige $n \times n$ Matrizen.

- Die folgenden Eigenschaften von det folgen aus D 1 - D 3,
  für alle Beweise siehe z.B. Gerd Fischer, *Lineare Algebra*.

* Für M $n \times n$, $\alpha \in K$ gilt $\underbrace{\det(\alpha M)}_{\substack{\uparrow \\ \text{punktweise mult.} \\ \text{aller Matrix-Elemente}}} = \alpha^n \det(M)$.

* Für $M = (m_1, ..., m_n)$ mit $\exists i$: $m_i = \vec{0}$ gilt $\det(M) = 0$.

* $\det(m_1, ..., m_i, ..., m_j, ..., m_n) = -\det(m_1, ..., \underset{i\text{-te}}{m_j}, ..., \underset{j\text{-te}}{m_i}, ..., m_n)$

* det ist invariant unter Addition von Spalten mit $i \neq j$:
  $\det(m_1, ..., \underset{i\text{-te}}{m_i + \alpha\, m_j}, ..., m_j, ..., m_n) = \det(m_1, ..., m_i, ..., m_j, ..., m_n)$.

* Ist M eine obere Dreiecksmatrix $M = \begin{pmatrix} x_1 & - & \\ & \diagdown & | \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$, so gilt: $\det(M) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$

Satz: Die Determinante exisitiert und ist eindeutig, und es gilt für

$$\det(M_{ij}) = \sum_{\substack{\sigma \\ \uparrow \text{ alle Permutationen}}} \text{sign}(\sigma) M_{1\sigma(1)} \cdot ... \cdot M_{n\sigma(n)}\,, \tag{1.24}$$

[G.W. Leibniz].

Permutationen: σ ist eine Permutation von $(1, 2, ..., n) \to (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)) \equiv (i_1, i_2, ..., i_n)$

- $\underline{\sigma \text{ ist gerade}}$ (symmetrisch), wenn sie aus einer geraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = +1$

- $\underline{\sigma \text{ ist ungerade}}$ (antisymmetrisch), wenn sie aus einer ungeraden Anzahl von Paarvertauschungen besteht $\Rightarrow \text{sign}(\sigma) = -1$

- Wir können sign (Permutationen) mit dem <u>Levi-Cevita-Symbol</u> schreiben (total anti-sym. Tensor n-ter Stufe):

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ gerade Permutation} \\ -1 & \sigma \text{ ungerade Permutation} \\ 0 & 2 \text{ oder mehrere Indizes gleich (also } \underline{\text{keine}} \text{ Permutation)} \end{cases} \tag{1.25}$$

$$\Rightarrow \det(M_{ij}) = \left(\sum_{i_1, ..., i_n = 1}^{n} \right) \epsilon_{i_1 \ldots i_n} M_{1 i_1} \ldots M_{n i_n} \tag{1.26}$$

Beispiel $n = 2$:

$\exists\ n! = 2$ Permutationen $\begin{array}{ll} (1,2) \to (1,2) & \text{Identität, gerade (0 Paar vertauscht.)} \\ (1,2) \to (2,1) & \text{ungerade (1 Paar vertauscht)} \end{array}$

$$\Rightarrow\ \det \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = +M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \underbrace{\epsilon_{12}}_{=1} M_{11}M_{22} + \underbrace{\epsilon_{21}}_{=-1} M_{12}M_{21}$$

$(\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0)$

Beispiel $n = 3$:

$\exists\ n! = 3! = 6$ Permutationen, wir kennen ϵ_{ijk} schon (1.10), (zeige, dass es daselbe ist, wie Levi-Cevita.)

$\Rightarrow\ \det(M) = \epsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}$,

oder
$$\det(M_{ij}) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} M_{11}M_{22}M_{33} + M_{12}M_{23}M_{31} + M_{13}M_{21}M_{32} \\ \\ -M_{13}M_{22}M_{31} - M_{11}M_{23}M_{32} - M_{12}M_{21}M_{33} \end{array}$$

$=$ Sarrussche Regel $\searrow + \nearrow -$

- für $n \geq 4$ gibt es keine einfache Regeln mehr

Weitere Eigenschaften für beliebiges n:

* $\det\left(M^\top\right) = \det M$

$$\begin{aligned} \det\left(M^\top\right) &= \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma) M_{\sigma(1)1} \ldots M_{\sigma(n)n} && \text{↲ Umordnung} \\ &= \sum_\sigma \operatorname{sign}\left(\sigma^{-1}\right) M_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots M_{n\sigma^{-1}(n)} = \det(M)\,, && \text{da } \sigma \to \sigma^{-1} \text{ bijektiv ist} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Alle Eigenschaften von det gelten auch für Zeilenvektoren (inkl. die Definition darüber)

* Multiplikationssatz für Determinanten

$$M\,,\ N\ n \times n\ \Rightarrow \det(M \cdot N) = \det(M)\det(N) \tag{1.27}$$

$\Rightarrow$ Reihenfolge der Matrizen in der det egal
Insbesondere folgt $= \det(N \cdot M)$

und für invertierbares M:

$$\exists\ M^{-1}\ :\ MM^{-1} = \mathbb{1}\ \Rightarrow\ \det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{\det(M)}\ \left(= (\det(M))^{-1}\right) \tag{1.28}$$

$$\text{denn:} \quad M = \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & \ldots & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} | \\ m_1 \\ | \end{matrix} = M_{j1} \quad \text{etc.}$$

$$\text{dito} \quad N = \begin{pmatrix} | & & | \\ n_1 & \ldots & n_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} | \\ n_i \\ | \end{matrix} = N_{ji} \quad \text{etc.}$$

$$(M \cdot N)_{ij} = M_{ik} N_{kj} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ M_{ik_1} N_{k_1 1} & M_{ik_2} N_{k_2 1} & \ldots & M_{ik_n} N_{k_n 1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Linearkombination von Vektoren $\begin{matrix} | \\ m_{kn} \\ | \end{matrix} \uparrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \det(M \cdot N) &\underset{\text{det Linear}}{=} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \det(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n}) \, N_{i_1 1} \ldots N_{i_n n} \\ &\underset{\text{det antisym.}}{=} \sum_{i_1, \ldots, i_n} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \det(m_1, \ldots, m_n) \, N_{i_1 1} \ldots N_{i_n n} \\ &= \det(M) \cdot \det(N) \end{aligned}$$

- wie schon die Spur ist auch die Determinante invariant unter Orthogonalen (und unitären) Transformationen:

$$\begin{matrix} M' = O^\top M O \\ \text{mit } O^\top O = \mathbb{1} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \det(M') &= \det\left(O^\top M O\right) \\ &= \det\left(\underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}} M\right) = \det(M) \end{aligned}$$

dito für $M' = U^\dagger M U$ mit $U^\dagger U = \mathbb{1}$.
(oder sogar für jede Ähnlichkeits-trafo $M' = P^{-1} M P$ mit $P^{-1} P = \mathbb{1}_{n \times n}$)

Eigenschaften von inversen Matrizen:
Falls es für eine $n \times n$ Matrix M eine $n \times n$ Matrix N gibt mit $NM = \mathbb{1}_{n \times n}$, dann ist $N \equiv M^{-1}$ die inverse Matrix zu M. M heißt dann nicht singulär, regulär oder invertierbar.

* es gilt $MN = \mathbb{1}_{n \times n}$ (Rechtsinverse = Linksinverse)
(denn: $w = Mv \ \Rightarrow \ Nw = NMv = v \ \Rightarrow \ w = Mv = MNw$
$\Rightarrow \ (MN)_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{oder} \quad MN = \mathbb{1}_{n \times n}$)

* wenn M^{-1} exisitiert, ist dies eindeutig
(denn: seien N, N' beides inverse, so gilt:
$N' = N' \mathbb{1}_{n \times n} = N' (MN) = \mathbb{1}_{n \times n} N = N$)

* $\boxed{\left(M^{-1}\right)^{-1} = M}$ (denn $MM^{-1} = \mathbb{1}_{n \times n}$ also $M = \left(M^{-1}\right)^{-1}$)

* $\boxed{(M_1 M_2)^{-1} = M_2^{-1} M_1^{-1}}$ (vertauscht die Ordnung wie $\top$, $\dagger$)
  (denn: $M_2^{-1} M_1^{-1} M_1 M_2 = M_2^{-1} M_2 = \mathbb{1}_{n\times n}$, also $M_2^{-1} M_1^{-1} = (M_1 M_2)^{-1}$)

- wir kennen Beispiele für reguläre Matrizen bereits:

$$\begin{array}{rlll} \text{orthogonal } \sim, & \text{mit } O^\top O = \mathbb{1}_{n\times n}\,, & \text{d.h. } O^\top = O^{-1} & \Rightarrow\; OO^\top = \mathbb{1} \\ \text{unitär } \sim, & \text{mit } U^\dagger U = \mathbb{1}_{n\times n}\,, & \text{d.h. } U^\dagger = U^{-1} & \Rightarrow\; UU^\dagger = \mathbb{1} \end{array}$$

- *Beispiel* dafür, dass Matrizen zu sich selbst invers sein können (und $\neq \mathbb{1}_{n\times n}$ selbst sind):
  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_{n\times n}$, d.h. $\sigma_x^{-1} = \sigma_x$
  dasselbe gilt für σ_y und σ_z

- Wie findet man die inverse einer Matrix (wenn sie existiert)?
  Dies hängt eng mit der allgemeinen Berechnung von Determinanten zusammen!

Berechnung von Determinanten für allgemeine Dimension

1. Laplacescher Entwicklungssatz M $n\times n$ Matrix

   a) Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det\left(\hat{M}_{ij}\right)}_{\equiv \text{Kofaktor: } \mathrm{cof}(M)_{ij}}\,, \tag{1.29}$$

   wobei $\hat{M}$ wie M ohne i-te Zeile und ohne j-te Spalte ist, d.h. $(n-1)\times(n-1)$ Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & \cancel{M_{1j}} \dots & M_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \cancel{M_{i1}} & \dots & \cancel{M_{ij}} \dots & \cancel{M_{in}} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & \cancel{M_{in}} \dots & M_{nn} \end{pmatrix} ;\; (-1)^{i+j} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline + & - & + & - & \\ \hline - & + & - & + & \\ \hline + & - & + & & \\ \hline & & & + & \\ \hline & & & & + \\ \hline \end{array}$$

   Spezialfall einer Hankelmatrix $A_{ij} = A_{i+j}$
   Spezialfall einer Toeplitzmatrix $B_{ij} = B_{i-j}$

   b) Entwicklung nach i-ten Zeile:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} (-1)^{i+j} \det\left(\hat{M}_{ij}\right)\,, \tag{1.30}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{denn aus Def.:} \quad \det M = \sum_{i_1,\dots,i_n} \epsilon_{i_1\dots i_n} M_{1i_1}\dots M_{ni_n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \sum_{i_i=1}^{n} M_{ii_i} \underbrace{\sum_{i_1,\dots,\cancel{i_i},\dots,i_n} \underbrace{\epsilon_{i_1\dots i_n}}_{\pm 1\, \epsilon_{i_1\dots\cancel{i_i}\dots i_n}} M_{1i_1}\dots\cancel{M_{ii_i}}\dots M_{ni_n}}_{\pm\det\hat{M}_{ij}} \end{array} \right)$$

a) $\Rightarrow$ b) durch $\top$

Beispiel:

- wähle immer Zeile (Spalte) mit vielen Nullen:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \boxed{0} \end{vmatrix} = \begin{cases} +0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 27 \\ \\ +0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 27 \end{cases}$$

c) Entwicklung nach <u>Blöcken</u>:
entwickle $n \times n$ Matrix nach $m \times m$ Unterblöcken $(m < n)$

– es gibt $N = \binom{n}{m}$ Möglichkeiten Unterblöcke zu wählen:

$$\det M = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_\rho \det B_j \det C_j \,, \tag{1.31}$$

wobei ϵ_ρ Vorzeichen um Zeilen von B in diese Reihenfolge zu bringen
$\det C_j$ Komplementäre Matrix: M nach Streichung der Zeilen und Spalten von B

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \text{ in } 2\times 2 \text{ Blöcke: } \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{24}{2\cdot 2} = 6$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det M = &+\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix}\begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ e & h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} \\ &+\begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i & l \\ m & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i & k \\ m & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix}\begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. <u>Gaußscher Algorithmus</u> (sehr effektiv für $n \geq 4$)
<u>Idee</u>: bringe Matrix M durch Zeilen- (oder Spalten-) umformungen auf obere Dreiecksmatrix-

Form, ändert nicht , aber dann $\det M$ = Produkt der Diagonalelemente:
Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{7}{2}) \\ \leftarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{16-7}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} = 27$$

Anwendung Blockmatrizen

- gegeben A, B, C, D $n \times n$ Matrizen

  $$\boxed{\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}}$$

  (denn: Laplaceentwicklung nach Blöcken)
- für A regulär ($\exists\, A^{-1}$) gilt:

  $$\boxed{\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det\left(D - CA^{-1}B\right)}$$

  (denn: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$, benutze $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ sowie Eigenschaften oben)
- außer der Spur und der Determinante gibt es weitere Abb. $M \to K$ Körper

* für A $2n \times 2n$ antisymmetrisch deiniere die
<u>Pfaffsche Determinante</u> (engl. Pfaffian):

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} A_{i_1 i_2} \dots A_{i_{2n-1} i_{2n}}$$
$$(\text{vgl. } \det(A) = \quad \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} A_{1\, i_1} A_{2\, i_2} \dots A_{2n\, i_{2n}})$$

und es gilt $\boxed{(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det(A)}$.

Anwendung: $\mathrm{Pf} A$ "=" $\det \tilde{A}$, $\tilde{A}$ $n \times n$ Matrix mit $\tilde{A}_{ij}$ Quaternionen, Majorana-Fermionen

Bestimmung der Inversen einer Matrix (falls diese existiert!)

- brauchen <u>det$M$ und Kofaktor-Matrix</u> $(-1)^{i+j}\det\hat{M}_{ij}$ dazu:

$$\det M = \sum_{j_1,\dots,j_i,\dots,j_n} \epsilon_{j_1\dots j_n} M_{1j_1}\dots \underbrace{M_{ij_i}}_{i-\text{te}}\dots M_{nj_n}$$

betrachte für $k \neq i$ für festes i

$$f_i(k) = \sum_{j_1,\dots,j_n} \underbrace{\epsilon_{j_1\dots j_n}}_{\text{antisymm. u. Vert.}} \overset{\text{Argument } k\downarrow\downarrow\text{ Index } i}{M_{1j_1}\dots M_{kj_i}\dots M_{kj_k}\dots M_{nj_n}} = 0$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

symm. u. Vert. v. j_i und j_k

für $f_i(i) = \det M$, d.h. $f_i(k) = \delta_{ki}\det M$

$$= \sum_{j_i=1}^{n} M_{kj_i} \underbrace{\sum_{j_1,\dots,\cancel{j_i},\dots,j_n} \epsilon_{j_1\dots j_n} M_{1j_1}\dots\cancel{M_{ij_i}}\dots M_{nj_n}}_{=(\mathrm{adj}M)_{j_i i} = (\mathrm{Cof}\,(M))_{ij_i}}, \qquad \text{siehe (1.29)}$$

$$\text{Adjunkte} = (\text{Kofaktor})^\top$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j_i=1}^{n} M_{kj_i}\,(\mathrm{adj}M)_{j_i i} = (\mathbb{1}_{n\times n})_{ki}\det M$$

$\Rightarrow$ haben inverse Matrix $\uparrow$ zu M falls $\det M \neq 0$.

Satz: $\det M \neq 0 \;\Leftrightarrow\; M$ ist regulär, d.h. besitzt M^{-1}:
"$\Rightarrow$"$\det M \neq 0$

$$\Rightarrow\; M^{-1} = \frac{\mathrm{adj}M}{\det M}$$

"$\Leftarrow$" $\exists\, M^{-1}:\; MM^{-1} = \mathbb{1}:$

$$\Rightarrow\; \det\left(MM^{-1}\right) = \det M \cdot \det M^{-1} = 1$$

da M^{-1} exisitiert, ist $\det M^{-1} < \infty \;\Rightarrow\; \det M \neq 0$.

Beispiel: $n = 2$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = ad - bc \overset{!}{\neq} 0$ $\quad \begin{array}{|c|c|} \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$

$\Rightarrow\; \mathrm{cof}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{adj}(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\; M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad \text{check!}$$

Matrix-Inversion durch Gauß-Jordan Verfahren

- dient auch zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

$$
\begin{aligned}
Mv = w = \mathbb{1}w\,,\ \det M \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, M^{-1}: \quad M^{-1}Mv = v = M^{-1}w \\
\Leftrightarrow\ M_{11}v_1 + M_{12}v_1 + ... + M_{1n}v_n = w_1 \\
\vdots \\
M_{n1}v_1 + ... + M_{nn}v_n = w_n
\end{aligned}
$$

* Gleichungssysteme ändern sich nicht, wenn wir:

- Gleichungen vertauschen,
- Gleichungen mit einer konstanten $c \neq 0$ multiplizieren,
- Linearkombinationen von Gleichungen bilden.

Beginne mit der 1. Spalte, o.B.d.A. $M_{11} \neq 0$

- teile 1. Gl. durch M_{11}
- Subtrahiere $M_{j1}\cdot$ 1. Gl. von den übrigen Gleichungen

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
1v_1 + ... \\
0v_1 + M'_{22}v_2 \\
\vdots \\
0v_1 +
\end{array}
$$

- wähle die 2. Spalte, o.B.d.A. $M'_{22} \neq 0$, normiere durch Gl.$\cdot 1/M'_{22}$, usw

* wir machen dieselben Umformungen auf der rechten Seite mit $\mathbb{1}$
$\Rightarrow$ am Ende $\mathbb{1}v = M^{-1}w$.
(Diese Umformungen lassen sich auch durch Matrixmult. darstellen.)

$$
\begin{array}{rcc|cc}
M = & 2 & 3 & 1 & 0 \\
 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
\frac{1}{2}\cdot & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
-\mathrm{I} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
\hline
 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
2\cdot & 0 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & -3 \\
 & 0 & 1 & -1 & 2
\end{array}
$$

$$\text{check: } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung lineare Gleichungssysteme:

$$
\text{es gilt} \quad \begin{array}{c} M \text{ ist regulär} \\ \text{d.h. } \exists\, M^{-1} \\ \text{d.h. } \det M \neq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{das lin. Gleichungssystem} \\ M\,v = 0 \\ \text{hat nur die triviale Lsg: } v = 0 \end{array}
$$

(denn $\Rightarrow\ \exists\, M^{-1}$, mult. $M\,v = 0 \ \Rightarrow\ M^{-1}M\,v = v = 0$
"$\Leftarrow$" müssen Injektivität zeigen: sei $w = M\,v$, dann ist v eindeutig:
Annahme $\exists\, v_{1,2}$ mit $w = M\,v_1 = M\,v_2 \ \Rightarrow\ M\,(v_1 - v_2) = 0 \ \Rightarrow\ v_1 - v_2 = 0$)

Konsequenz: Das lineare Gleichungssystem $M\,v = w$ hat eine eindeutige Lösung $v = M^{-1}w$ genau dann, wenn $\det M \neq 0$

* Falss $\det M = 0$ gibt es nicht triviale Lösungen v_a mit $M\,v_a = 0$. Also können wir zu einer speziellen Lösung v_s mit $M\,v_s = w$ bel. Linearkomb. der v_a addieren: Lösung $v = \sum\limits_a c_a v_a + v_s$ (wie bei lin. Diff. gl.).

Anwendung lineare Unabhängigkeit

- die Menge von n Vektoren $\vec{m}_{i=1,\ldots,n}$ in einem V K-Vektorraum mit $\dim V = n$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\det\,(m_1, m_2, \ldots, m_n) \neq 0$.

  (denn lin. unabh.: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \vec{m}_i = \vec{0}$ hat nur die triviale Lsg.: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{0}$

  $$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & \ldots & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{0}, \text{ mit obigen Satz ist dies equiv. zu } \det(\quad) \neq 0\,)$$

1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

I.A. verändert die lineare Abb. M den Vektor auf den sie angewendet wird $M\,\vec{v} = \vec{w}$ mit $\vec{w} \neq \vec{v}$ (z.B. bei Drehungen). Es gibt besondere Vektoren, die in sich selbst übergehen (z.B. die Drehachse), diese charakterisieren M.

- Sei M eine Matrix, die auf den K-Vektorraum V wirkt.
  Gibt es ein $\lambda \in K$ und ein $\vec{v} \in V$ mit $\underline{\vec{v} \neq \vec{0}}$, so dass $\boxed{M\,\vec{v} = \lambda\vec{v}}$,
  so heißen $\underline{\lambda \text{ Eigenwert von } M}$, $\underline{\vec{v} \text{ Eigenvektor von } M}$ mit Eigenwert λ.

* Der Eigenwert $\lambda = 0$ kann vorkommen:
$\exists\,\vec{v} \neq \vec{0}\ :\ M\,\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = 0$ ($\Rightarrow$ $\det M = 0$), aber der Nullvektor ist kein Eigenvektor!

* ein Eigenvektor ist nicht eindeutig bestimmt:
für $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ ist auch $\alpha \cdot \vec{v}$ Eigenvektor ($\alpha M\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v}$)

Beispiele $M = \mathbb{1} \;\Rightarrow\; \lambda = 1$ ist Eigenwert $\forall\,\vec{v} \in V$
insbesondere für alle n linear unabhängige Basisvektoren

* Wir hatten bereits folgende Equivalenzen gesehen:

i) M ist regulär

ii) $\det M \neq 0$

iii) die Spalten (Zeilen) von M sind linear unabh.

iv) $M\,\vec{v} = 0$ hat nur die Lösung $\vec{v} = \vec{0}$

zusätzlich gelten als equivalent:

v) $M\,\vec{v}_1 = M\,\vec{v}_2 \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

vi) alle Eigenwerte λ_i von M sind $\neq 0$

(denn iv) $M\,\vec{v} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{v} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \nexists\,\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $M\,\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ vi))

Wie bestimmen wir Eigenwerte und Eigenvektoren?
Suche $M\,\vec{v} = \lambda\vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$
$\Leftrightarrow\; (M - \lambda\mathbb{1})\,\vec{v} = \vec{0}\,,\ \vec{v} \neq \vec{0}$

$$\Leftrightarrow\; \det\underbrace{(M - \lambda\mathbb{1})}_{M_{ij}-\lambda\delta_{ij}} = 0 \tag{1.32}$$

* für einen n-dim. Vektorraum V ist:

$$\underset{\in K}{P_n}(\lambda) \equiv \det\left(M - \lambda \mathbb{1}\right) = \det\left(m_1 - \lambda \vec{e}_1, ..., m_n - \lambda \vec{e}_n\right) \tag{1.33}$$

ein Polynom in λ von Grad n und heißt charakteristisches Polynom (schreibe und multipliziere det aus)

* $\rightarrow$ wir wollen die Säkulargleichung $\boxed{P_n(\lambda) = 0}$ lösen

* Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom von Grad n $P_n(\lambda)$ mit reellen (o. komplexen) Koeffizienten hat genau n Nullstellen $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
hier $P_n(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda - \lambda_1\right) \cdot ... \cdot \left(\lambda - \lambda_n\right)$, λ_i nicht notwendig verschieden

$\rightarrow$ damit wir alle Lösungen von $P_n(\lambda) = 0$ als Eigenwerte nutzen können, betrachten wir nun i.A. $K = \mathbb{C}$.
(eine Matrix M mit $M_{kl} \in \mathbb{R}$ kann komplexe Lsg. λ_i haben,
obwohl $\det(M - \lambda) = P_n(\lambda) \in \mathbb{R}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$)

* zu gegebenen λ_i können wir dann Eigenvektoren $\vec{v}_i$ finden mit $\left(M - \lambda_i \mathbb{1}\right) \vec{v}_i = 0$
Normiere diese zur Länge $1 = |\vec{v}_i| \quad = \left(\underset{\text{kompl. Skalarprod.}}{v_i^* v_i = v_i^\dagger v_i}\right)$

Beispiel:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det(M - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow\; \lambda_1 = +i\sqrt{2}\,,\; \lambda_2 = -i\sqrt{2}\,,$ M hat keine reellen Eigenwerte!

$$(M - i\mathbb{1}\sqrt{2})\vec{v}_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv_1\sqrt{2} + v_2 \\ -2v_1 - iv_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow\; v_2 = i\sqrt{2}v_1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Normierung: $|\vec{v}|^2 = 1{\cdot}1{+}i(-i)2 = 3$

$$(M - (-i)\mathbb{1}\sqrt{2})\vec{v}_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 1 \\ -2 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_1\sqrt{2} + w_2 \\ -2w_1 + iw_2\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow\; w_2 = -i\sqrt{2}w_1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ist normiert.

"Skalarprodukt" hier $\vec{v}_1^\dagger \cdot \vec{v}_2 = (v_1^*, v_2^*) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \left(1 \cdot 1 + i \cdot i\sqrt{2}^2\right) \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ sind linear unabh.

ist das immer so?

* Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ $(\neq \vec{0})$ mit Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind linear unabh.:
  sei $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$, $\quad M\cdot,\ \lambda_1\cdot,\ \lambda_2\cdot$

$$\begin{array}{rrcl} & \alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{v}_2 = & \vec{0} & \\ \Rightarrow & \lambda_1\left(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2\right) = & \vec{0} & \overset{I-II}{\Rightarrow} \quad \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{\vec{v}_2}_{\neq \vec{0}} = \vec{0} \\ & \lambda_2(\qquad\qquad\quad) = & \vec{0} & \quad \text{dito für } \alpha_1 \end{array}$$

* es gilt sogar: $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}$ Eigenvektoren mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ sind paarweise lin. unabh. (Beweis mit Induktion), so dass für dim$V = m$ gilt: wenn $m = n$ bilden eine Basis.

* Es ist equivalent:

  i) $\exists$ Basis von V aus Eigenvektoren von M

  ii) $\exists$ Basis von V in der $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, d.h. $M_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ (keine Summe)

  Matrizen M für die dies gilt, heißen diagonalisierbar.

Eigenschaften der Eigenwerte und des charakteristischen Polynoms

*
$$\det(M) = \lambda_1 ... \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.34}$$

det von M ist das Produkt ihrer Eigenwerte

(denn: $$\begin{aligned} P_n(\lambda) = & \det\left(M - \lambda \mathbb{1}_{n\times n}\right) = \det \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 - \lambda e_1 & ... & m_n - \lambda e_n \\ | & & | \end{pmatrix} \\ = & (-)^n (\lambda - \lambda_1) ... (\lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ nehme auf beiden Seiten nur die Terme der Ordnung λ^0 (setze $\lambda = 0$)

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} | & & | \\ m_1 & ... & m_n \\ | & & | \end{pmatrix} = (-)^n(-\lambda_1)...(-\lambda_n) = \lambda_1 ... \lambda_n$$)

*
$$\mathrm{Sp} M = \lambda_1 + ... + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1.35}$$

Spur von M ist die Summe ihrer Eigenwerte (denn: benutze Linearität von det in $P_n(\lambda)$ und betrachte Terme der Ordnung λ^{n-1} in $P_n(\lambda)$:

$$(-\lambda)^{n-1}\left[\det\begin{pmatrix} | & & & \\ m_1, & e_2, & ..., & e_n \\ | & & & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & | & & \\ e_1, & m_2, & ..., & e_n \\ & | & & \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} & & & | \\ e_1, & ..., & e_{n-1}, & m_n \\ & & & | \end{pmatrix}\right]$$

$$= (-)\lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n} M_{ii} = (-)^{n+1}\lambda^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n) \qquad)$$

d.h. es gilt $P_n(\lambda) = (-)^n\left(\lambda^n - \lambda^{n-1}\mathrm{Sp}(M) + ... + \lambda^0\det(M)\right)$

Beispiel 2×2 (kennen alle Koeffizienten von $P_2(\lambda)$):

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} P_2(\lambda) = &\ \det(M - \lambda\mathbb{1}_{2\times 2}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ = &\ \lambda^2 - \lambda\underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Sp}(M)} + \underbrace{ad-bc}_{\det(M)} \end{aligned}$$

* Die Eigenwerte von M vor und nach einer orthogonalen (unitären) Transformation sind dieselben, d.h. sie sind invariant
  (denn: $M' = O^\top M O$, $v' = O^\top v$, mit v Eigenvektor $M\,v = \lambda v$
  $\Rightarrow\ \underline{M'v'} = O^\top M\underbrace{OO^\top}_{=\mathbb{1}} v = O^\top M\,v = O^\top\lambda v = \lambda v'$
  d.h. die transf. Matrix M' hat einen Eigenvektor v' mit demselben Eigenwert λ.
  Dasselbe gilt für unitäre Trafos, der Beweis, dass $\vec{e}_i' = U\,\vec{e}_i \ \Rightarrow\ v' = U^\dagger v$ geht genauso wie in (1.21))

Satz von Caley-Hamilton:
Jede $n\times n$ Matrix erfüllt ihre eigene Säkulargleichung

$$P_n(M) = 0_{n\times n} \tag{1.36}$$

(hier ist gemeint: $P_n(\lambda) = \sum_{l=0}^{n} a_l\lambda^l \ \rightarrow$ Polynom einer Matrix M
(nicht $P_n(M) = \det(M - M\mathbb{1}) \in K$!)

Idee: führe die Wirkung von $P_n(M)$ auf Eigenvektoren zurück:
Annahme: wir können einen beliebigen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ in eine Basis aus Eigenvektoren darstellen $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} b_k\vec{v}_k$, mit $Mv_k = \lambda v_k$

$\Rightarrow\ \forall\, k = 1, ..., n$ gilt $P_n(M)\vec{v}_k = \sum_{l=0}^{n} a_l M^l\vec{v}_k = \sum_{l=0}^{n} a_l\lambda_k^l\vec{v}_k = \underbrace{P_n(\lambda_k)}_{=0}\vec{v}_k = \vec{0}$

$\Rightarrow\ P_n(M)\vec{v} = \vec{0}\ \Rightarrow\ \forall\,\vec{v}\in V \quad P_n(M)\vec{v} = \vec{0}$ d.h. $P_n(M) = 0_{n\times n}$)

Eigenschaften von Matrizen

* Sei M symmetrisch $M = M^\top$ mit $M_{ij} \in \mathbb{R}$, $^{(\Rightarrow M=M^\dagger)}$ dann gilt:

  i) die Eigenwerte von M sind reell ($\rightarrow$ betrachte M auf $K = \mathbb{R}$-Vektorraum)

  ii) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

  (denn:

  – zu i) sei $v \in V$ mit $Mv = \lambda v$, betrachte das Skalarprodukt:
  $\left(v^\dagger M v\right)^\dagger = v^\dagger \left(v^\dagger M^\dagger\right)^\dagger = v^\dagger M v = \lambda v^\dagger v$, $v^\dagger v = |\vec{v}|^2 > 0$
  sowie $= \left(v^\dagger \lambda v\right)^\dagger = \lambda^* \left(v^\dagger v\right)^\dagger = \lambda^* v^\dagger v \;\Rightarrow\; \lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}$
  Die Kombination $v^\dagger M v$ heißt quadratische Form (auf $\mathbb{R}$: $v^\top M v$).

  – zu ii) Sei $Mv_1 = \lambda_1 v_1$, $Mv_2 = \lambda_2 v_2$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$
  $\Rightarrow\; (Mv_2)^\top = v_2^\top \underbrace{M^\top}_{=M} = \lambda_2 v_2^\top$ (Spaltenvektor)
  Betrachte $v_2^\top M v_1 = v_2^\top \lambda_1 v_1 = \lambda_2 v_2^\top v_1 \;\Rightarrow\; \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} v_2^\top v_1 = 0$,
  also ist $v_2 \perp v_1$ bzgl. unseres reellen Skalarproduktes.)

* Bei einer orthogonalen Matrix O mit $O_{ij} \in \mathbb{R}$ gilt für alle Eigenwerte $|\lambda_i| = 1$
  $i = 1, ..., n$
  d.h. liegen auf dem Einheitskreis

  (denn: sei v Eigenvektor: $Ov = \lambda v \;\overset{\dagger}{\Rightarrow}\; v^\dagger O^\dagger = v^\dagger O^\top = \lambda^* v^\dagger$
  $\Rightarrow\; v^\dagger \underbrace{O^\top O}_{=\mathbb{1}_{n\times n}} v = v^\dagger \lambda^* \lambda v = v^\dagger v = |\vec{v}|^2 > 0$
  $\Rightarrow\; |\lambda|^2 = 1$
  Dasselbe gilt für die Eigenwerte einer unitären Matrix U mit $U_{ij} \in \mathbb{C}$.)

* Sei M hermitesch, $M = M^\dagger$, mit $M_{ij} \in \mathbb{C}$, dann gilt:

  i) die Eigenwerte von M sind reell

  ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal (bzgl. komplexem Skalarprodukt)

  Der Beweis geht wie bei reell-symmtrischen Matrizen, mit komplexen Skalarprodukt in ii).
  In der Quantenmechanik wird die Hamiltonfuntion durch einen Operator = Matrix ersetzt. Ist dieser hermitesch, so sind dessen Eigenwerte = Energien reell!
  (aber: reelle Eigenwerte $\not\Rightarrow\; M = M^\dagger$)
  Bsp $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$

Diagonalisierung von Matrizen:

- Wir hatten bereits gezeigt, dass für eine orthogonale Trafo O gilt (1.21) $\vec{e}_i' = O\vec{e}_i$
  $\Rightarrow$ die Matrixelemente M_{ij} und die Vektorkomponenten v_i transformieren wie ein Tensor 2. bzw. 1. Stufe in die neue Basis:
  $M'_{ij} = \left(O^\top M O\right)_{ij} = O_{ki} O_{lj} M_{kl}$
  $v'_i = \left(O^\top v\right)_i = O_{ki} v_k \qquad \Rightarrow \; v^\top \to (v')^\top = v^\top O$
  Skalare sind invariant.

* Wir konstruieren jetzt zu jeder reellen symmetrischen $n \times n$ Matrix M eine orthogonale Trafo O, die diese diagonalisiert:

wir nehmen an, dass alle n Eigenwerte λ_i von M paarweise verschieden sind $\Rightarrow$ die Eigenvektoren $\vec{v}_i$ sind paarweise orthogonal und bilden eine Basis (Seite 33), wir wählen diese als orthonormal $\vec{v}_i \to \vec{v}_i / |\vec{v}_i|$
(sollten 2 oder mehr λ_i entarten, nehmen wir an, dass sich die $\vec{v}_i$ in diesem entarteten Unterraum trotzdem ON wählen lassen)

definiere $O \equiv \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$, dann gilt

$$M = \begin{pmatrix} - & m_1 & - \\ & \vdots & \\ - & m_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^\top v_1 & & m_1^\top v_n \\ m_2^\top v_1 & \dots & m_2^\top v_n \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{m_n^\top v_1}_{Mv_1} & \dots & \underbrace{m_n^\top v_n}_{Mv_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow O^\top M O = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^\top v_1 & \dots & \lambda_n v_1^\top v_1 \\ \lambda_1 v_2^\top v_1 & & \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 v_n^\top v_1 & \dots & \lambda_n v_n^\top v_n \end{pmatrix}$$

wegen $v_i^\top v_j = \delta_{ij}$ gilt :

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot 1 & & & 0 \\ & \lambda_2 \cdot 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \cdot 1 \end{pmatrix}$$

aus diesem Grund gilt, dass $O^\top O = \mathbb{1}_{n \times n}$.

D.h. diese orthogonale Trafo diagonalisiert $M \to O^\top M O = M'$.

Die Diagonalelemente von M' sind die Eigenwerte von M (und M').

* Auf diese Weise lässt sich für jede koplexe hermitesche Matrix $M = M^\dagger$, $M_{ij} \in \mathbb{C}$ eine unitäre Trafo aus den (komplexen) Eigenvektoren konstruieren, die M diagonalisiert.

Anwendung Diagonalisierung: **Hauptachsentransformation**.
Betrachte die quadratische Form $\boxed{f\left(x_1, ..., x_n\right) = x^\top M\, x}$ mit M $n \times n$ Matrix, $M_{ij} \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$.
O.B.d.A. können wir M als symmetrisch wählen:

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i M_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \left(x_i \frac{1}{2} M_{ij} x_j + x_i \frac{1}{2} \underset{i \leftrightarrow j}{M_{ij} x_j} \right) \qquad \text{(Indizes umbenennen)} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \frac{1}{2} \underbrace{\left(M_{ij} + M_{ji}\right)}_{=\frac{1}{2}\left(M+M^\top\right)} x_j \qquad \text{(symmetrische Matrix, antisymmetrischer Anteil: } \frac{1}{2}\left(M - M^\top\right))
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ wir können die Matrix einer quadratischen Form diagonalisieren!
Da die Gleichung $x^\top M\, x = c \in \mathbb{R}$ ein Skalar ist, bleibt sie invariant:

$$
\left.\begin{array}{lll} x \to & O^\top x & = x' \\ M \to & O^\top M\, O & = M' \end{array}\right\} x'^\top M' x' = \left(O^\top x\right)^\top O^\top M\, O O^\top x = x^\top O O^\top M O O^\top x
$$
$$
= x^\top M\, x\,.
$$

Aber: wenn M' diagonal ist die Gleichung in Koordinaten x' <u>viel einfacher</u>:

$$
M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow x'^\top M' x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \left(x'_i\right)^2 = c\,.
$$

Der <u>Rang der quadratischen Form</u> ist die Zahl der $\lambda_i \neq 0$.
Für maximalen Rang n beschreibt die quadratische Form ein Ellipsoid, in den neuen Koordinaten x' ist dieses in Hauptachsenform.

Beispiel $n=2$: Finde die Hauptachsenform für die quadratische Form:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2+4xy-y^2=6 \\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x-y \end{pmatrix} = 6 \end{aligned}$$

($\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschreibt dieselbe quadratische Form, läßt sich aber i.A. nicht diagonalisieren durch O orthog. Trafo $\rightarrow$ symmetrische $\tilde{M}$, ergibt M)
<u>Gesucht</u>: Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren v_i von M (denn: $v_i \Rightarrow O$ orth. $\Rightarrow x' = O^\top x$, zusammen mit λ_i folgt quadratische Form im neuen System).

$$\begin{aligned} \det\left(M-\lambda \mathbb{1}_{2\times 2}\right) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow -(2-\lambda)(1+\lambda)-4 &= \lambda^2-\lambda-2-4=0 \\ \lambda_\pm &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 3 & "+" \\ -2 & "-" \end{cases} \end{aligned}$$

$$M\,v_+ = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v_+ = 3v_+ \Leftrightarrow \begin{aligned} 2\,v_{+\,1}+2\,v_{+\,2} &= 3\,v_{+\,1} \\ 2\,v_{+\,1}-v_{+\,2} &= 3\,v_{+\,2} \end{aligned} \Rightarrow v_+ = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M\,v_- = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v_- = -2v_- \Leftrightarrow \begin{aligned} 2\,v_{-\,1}+2\,v_{-\,2} &= -2\,v_{-\,1} \\ 2\,v_{-\,1}-v_{-\,2} &= -2\,v_{-\,2} \end{aligned} \Rightarrow v_- = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_+ \neq \lambda_-$
Seite 35: $v_+^\top v_- = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ ✓ orthogonal

$I)$ $O_I = \begin{pmatrix} v_+ & v_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $O_I^\top = O_I$, $\underline{\det O_I = \frac{1}{\sqrt{5}^2}(-4-1) = -1}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$

O_I ist eine Drehspiegelung, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ kein Rechtssystem

$$\Rightarrow f\left(x',y'\right) = 3\,{x'}^2 - 2\,{y'}^2 = 6$$

$II)$ wähle $\underline{O_{II} = \begin{pmatrix} v_- & v_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$, $\quad O_{II}^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \det O_{II} = +1$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$

$O_{II} \;\rightarrow$ eigentliche Drehung

$$\Rightarrow \; f\,(x', y') = -2\,{x'}^2 + 3\,{y'}^2 = 6$$

$\Leftrightarrow \; y' = \pm\sqrt{2 + \frac{2}{3}\,{x'}^2}$, $\quad$ Test:

$$\begin{aligned} M' =& O^\top M\,O = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Eine klassische Frage der Linearen Algebra ist: wann läßt sich eine Matrix M diagonalisieren?

Haben bereits gesehen:

$$\begin{aligned} M = M^\top \text{ reell} \Rightarrow \exists\, O \text{ orth.: } \overset{=O^{-1}}{O^\top}\, M\,O = M' \text{ diag} \\ M = M^\dagger \text{ komplex} \Rightarrow \exists\, U \text{ unitär: } U^\dagger M\,U = M' \text{ diag.} \end{aligned}$$

Was ist wenn M dies nicht erfüllt? Unter Umständen gibt es trotzdem eine Ähnlichkeitstrafo A mit $A^{-1} M\,A = M'$ diagonal.

* Wir haben bereits gesehen, dass ein solches A die Determinante (und Spur) invariant läßt und damit insbesondere auch die Eigenwerte: $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 1$.

* Es gibt ein solches A (A^{-1} ex.), wenn die Eigenvektoren $\vec{v}_j$ von M eine Basis von V bilden (s. Seite 33). Eine hinreichende Bedingung ist, dass alle λ_i paarweise verschieden sind. Dann ist $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

* Beachte, dass nicht jede $n \times n$ Matrix auch n Eigenwerte hat (Bsp. S. 32 $K = \mathbb{R}$) oder deren Eigenvektoren lin. unabhängig sind.
  Für Matrizen in der Physik ist dies aber i.A. der Fall.

weitere Anwendungen:
Sei M diagonalisierbar: $\exists\, A \;:\; A^{-1} M\,A = M'$ diag
$\Rightarrow$ A diagonalisiert auch Funktionen von M, z.B.:

$$\begin{aligned} A^{-1}\exp(M)A =& A^{-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}M^l\right)A = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\underbrace{\underline{A^{-1}M\,A}_{\ldots}A^{-1}M\ldots MA}_{l \text{ mal}} \\ =& \exp\left(M'\right) = \exp\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} \qquad \text{(Konvergenz OK)}\,. \end{aligned}$$

<u>Für solche M gilt:</u>

* $\underline{\det\left(\exp(M)\right) = \exp\left(\mathrm{Sp}(M)\right)\ \in\ K}$ denn: $\det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix} = e^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot e^{\lambda_n} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$

* $\underline{\ln\left(\det(Q)\right) = \mathrm{Sp}\left(\ln(Q)\right)\ \in\ K}$
  definiere $Q \equiv \exp(M)$ sowie den matrixwertigen ln als Umkehrfunktion hier von $M \equiv \ln Q$. Dann folgt dies aus der ersten Eigenschaft.

2 Analysis in einer Dimension

2.1 Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Betrachte reellwertige Funktionen $f(x)$ einer Variable $x \in A \subseteq \mathbb{R}$
Def.: $f(x)$ hat bei $x = x_0$ den **Grenzwert** f_0 genau dann, wenn $\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f_0| < \epsilon \tag{2.1}$$

(schreibe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f_0$).

- $f(x)$ muss diesen Wert f_0 nicht annehmen, z.B. $f(x) \equiv \frac{\sin(x)}{x}$ für $x > 0$.
  Die Def.: $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ergibt $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Def.: $f(x)$ ist **stetig** bei $x = x_0$ genau dann, wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f\,(x_0) \tag{2.2}$$

"Vertauschbarkeit der Limites".

"physikalische Definition": $f(x)$ ist stetig auf Interval I, wenn sie gezeichnet werden kann, ohne abzusetzen.

Rechenregeln: f, g stetig und c =const.:

$$\begin{aligned}
\lim cf &= c \lim f \\
\lim(f+g) &= \lim f + \lim g \\
\lim f \cdot g &= \lim f \cdot \lim g \\
\lim\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\lim f}{\lim g}\,, \qquad \text{falls } \lim g \neq 0 \\
\text{sowie:}\qquad f\,(g(x)) &\ \text{stetig}\,, \\
f^{-1}(x) &\ \text{stetig}\,, \qquad (\text{falls } f' \not\equiv 0)
\end{aligned}$$

Zwischenwertsatz: $f(x)$ stetig auf $I = [a,b]$ $(a < b)$, $x, y \in I \Rightarrow$ f nimmt jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.
Insbesondere für $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ hat f dann mindestens eine Nullstelle!
Def.: $f(x)$ hat bei $x = x_0$ die **Ableitung** $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \partial_x f(x_0)$ genau dann, wenn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{exisitert und } = f'(x_0) \, . \tag{2.3}$$

Dann ist f diffbar in x_0.
(Unterscheide später totale und partielle Ableitung; $f''(x) = f^{(2)(x)}$, entsprechend $f^{(n)}(x)$)

anschaulich $\rightsquigarrow$ Tangentensteigung

es gilt: f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

Bsp.: $f(x) = x$

Rechenregeln: f, g diffbar. c =const.:

- ∂_x ist linear:

$$\begin{aligned} \partial_x (c \cdot f) =& c\, \partial_x f \, , \\ \partial_x (f + g) =& \partial_x f + \partial_x g \end{aligned}$$

- Produkt- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \partial_x (f \cdot g) =& (\partial_x f)\, g + f\, (\partial_x g) \, , \\ \partial_x \left(\frac{f}{g}\right) =& \frac{(\partial_x f)\, g - f\, (\partial_x g)}{g^2} \, , \qquad \text{für } g \neq 0 \end{aligned}$$

- Kettenregel:

$$\partial_x (f \circ g) = \partial_x g\,(f(x)) = \left.(\partial_y g(y))\right|_{y=f(x)} \cdot (\partial_x f(x)) \, .$$

- Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, mit $f^{-1}(f(x)) = x$

$$\Rightarrow \partial_y f^{-1}(y) = \left.\frac{1}{\partial_x f(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)} \qquad \text{(benutze Kettenregel für } f^{-1}(f(x)) = x)$$

Bemerkung: Die Ableitung aller elementaren Funktionen (x^α, e^x, $\ln x$, $\sin(\mathrm{h})x$, $\cos(\mathrm{h})x$, $\tan(\mathrm{h})x$, $\arcsin(x)$, arsinh$x$, $\arccos(x)$, arcosh$x$, ...) ist wieder eine "elementare Funktion", z.B.:

$$\partial_x \tanh(x) = 1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}\,.$$

2.2 Einige Sätze der Differentialrechnung

globale Eigenschaften: **Mittelwertsatz**: f stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b) (b¿a) $\Rightarrow\ \exists\, x_0 \in (a,b)$, so dass

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b-a) \tag{2.4}$$

(Spezialfall $f(b) = f(a) \ \Rightarrow\ \exists\, x_0$ mit $f'(x_0) = 0$: Satz von Rolle $\Uparrow$ $g(x) \equiv \begin{array}{l} f(x) - f(a) \\ -(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}$, beweise diesen zunächst mit $f \neq$const. hat mindestens ein Minimum oder Maximum)

- ähnlich: erster Term in Taylorreihe

Erweiterter Mittelwertsatz: f, g wie oben $\Rightarrow\ \exists\, x_0 \in\ (a,b)$ mit

$$f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) = g'(x_0)\,(f(b) - f(a)) \tag{2.5}$$

(oben hatten wir $g(x) = x$).
Beweis mit Satz von Rolle und $h(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))$.

Wichtige Konsequenz: **Regel von l'Hôspital**:
$f(a) = g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$, f, g diffbar in Umgebung von $a \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a} \overset{\downarrow\,''0/0''}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,. \tag{2.6}$$

Beweis mit erw. MWsatz:

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,, \quad a < x_0 < b \text{ dann } \lim b \to a \ \Rightarrow\ x_0 \to a$$

- Falls $f'(a) = g'(a) = 0$ kann l'Hôpital iteriert werden.

- Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ wähle in l'Hôpital:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{f(x)}\,, \quad \tilde{g}(x) = \frac{1}{g(x)}\,, \quad \text{d.h. ''}\infty/\infty\text{'' wird zu ''}0/0\text{''}$$

Partielle und totale Ableitung

- betrachte Funketionen von mehreren Variablen, z.B.: $f = f(x,a) = ax^2$, $g(x,y) = ax^2 + bxy + y^2$ quadratische Form.
- die **parteille Ableitung** ist definiert durch Ableitung nach einer Variablen unter Festhaltung aller anderen:

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{a=\text{const.}} = 2ax$$
$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = \left.\frac{df}{da}\right|_{x=\text{const.}} = x^2$$

- bei der **totalen Ableitung** werden alle Funktionen abgeleitet, die von einer Variablen abhängen:
  Bsp.: zeitabhängiges Potential $V(x,t) = \frac{1}{2}x(t)^2 - t\cdot b$, $x(t)$ zeitabhängige Koordinaten

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\equiv \dot{x}(t)} \frac{dV}{dx} + \frac{\partial V}{\partial t} = \dot{x}\,x(t) - b$$

- Implizite Gleichung: falls $y(x)$ als Lösung der Gleichung $g(x,y) = \text{const.}$ definiert wird, heißt $y(x)$ **implizite Funktion**. Deren Ableitung kann durch die totale Ableitung mit der Kettenregel bestimmt werden:
  Bsp. von oben:

$$0 = \frac{dg(x,y)}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}$$
$$= 2ax + by + y'(x)\underbrace{(bx + 2cy(x))}_{\neq 0}$$
$$\Rightarrow\ y'(x) = -\frac{2ax + by}{2cy + bx}$$

d.h. wir bestimmen die Ableitung, ohne vorher die Lösung $y(x)$ bestimmt zu haben!

2.3 Taylor-Entwicklung und Reihen

Für $f^{(n)}$ stetig auf $I = [a, b]$, und diffbar auf (a, b) $\exists\, f^{(n+1)}$ gilt die **Taylor-Formel**:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2.7}$$

Taylor-Polynom Lagrange-Restglied R_n

mit $a < x_0 < x \leq b$.
($n = 0$: Mittelwertsatz) Beweis mit erweitertem MWsatz.

Insbesondere gilt für $f(x)$ ∞ oft diffbar: wenn $\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} \text{Restglied} = 0 \ \underline{\text{und}} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \text{Taylor-Polynom konvergiert} \end{array}\right.$ die folgende Darstellung als
Taylor-Reihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\,. \tag{2.8}$$

* Für Analysis in $\mathbb{C}$ ($\simeq \mathbb{R}^2$) folgt aus der Existenz der ersten Ableitung die <u>aller</u> Ableitungen sowie die Taylorreihen Darstellung für <u>analytische Funktionen</u>.

* *Bsp.* für Taylorreihen:

$$\text{auf } \mathbb{R}: \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k\,, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (a = 0 \text{ hier})$$

$$\text{auf } I = (-1,1): \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \xleftarrow{\partial_x} \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

* *Gegenbeispiel*: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ hat <u>keine</u> Taylorreihe bei $x = 0$

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \begin{array}{ll} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} & \exp(-\infty) = 0 \\ \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} & \exp\left(0^-\right) = 1 \end{array}$$

<u>obwohl</u>:

- alle Ableitungen existieren, $\equiv 0$ bei $x = 0$

$$f' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \,, \quad f'' = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \,, \, \ldots \,, \quad f^{(n)} = \left(\ldots (-)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

– $\lim\limits_{n\to\infty}$ Taylor-Polynom $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{0}{k!} x^k = 0$ konvergiert $\to 0$

Aber: Rest R_n wächst mit n:

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} x^{n+1} = \left(\ldots + \frac{(n+2)x^{n+1}}{x_0^{n+2}} \right) e^{-\frac{1}{x_0^2}} \quad \nearrow$$

Es gilt: ist eine Funtion $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ durch eine konvergente Reihe definiert und existiert deren Taylorreihe um $x = a$, so sind diese beiden gleich:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \,.$$

* Die **Konvergenz von Reihen** wird anhand von Vergleichskriterien entschieden:

  Majorantenkriterium: ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent ($\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} c_n$ existiert) und gilt $\forall\, k \geq k_0 \quad |a_k| \leq c_k$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent** (d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert)

  Minorantenkriterium: ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ divergent und gilt $\forall\, k \geq k_0 \; a_k \geq d_k > 0$, so ist auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

  Quotientenkriterium: gibt es ein $q < 1$ (> 1) mit $\forall\, k \geq k_0 \; \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ ($\geq q$), so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent (divergent)

Der Beweis geht auf die geometrische Reihe zurück, die auch oft im Majorantenkriterium verwendet wird. Es gibt weitere Kriterien, doch nicht immer treffen diese eine Aussage (z.B. wenn $q = 1$).

Wichtig: mit absolut konvergenten Reihen können wir wie mit endlichen Reihen (=Polynomen) rechnen, d.h. wir können addieren, umordnen, dividieren, multiplizieren, sowie termweise differenzieren und integrieren (die letzten beiden erfordern die Vertauschung von $\underline{\underline{2}}$ Grenzwerten).

Bsp. **Cauchysche Produktformel** für zwei absolut konvergente Reihen:

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k}\right) . \tag{2.9}$$

2.4 Integralrechnung

Umkehroperation zur Differentiation (nicht eindeutig!) $F(x) \underset{\int dx}{\overset{\partial_x}{\rightleftarrows}} f(x)$

Def.: Sei $f(x)$ stetig $\forall\, x \in I = (a,b)$, $(a < b)$. Die **Stammfunktion** bzw. das **unbestimmte Integral** von $f(x)$ ist eine diffbare Funktion $F(x)$ mit

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \forall\, x \in I$$

$$\text{wir schreiben} \quad F(x) = \int dF = \underset{\text{unbest.}}{\int} dy f(y) \quad \left(\int^{x} dy f(y)\right) .$$

($\Rightarrow$ das Integral einer stetigen Funktion ist diffbar!)
Die Stammfunktion ist nicht eindeutig: $F'(x) = f(x) = G'(x) \Rightarrow \partial_x\left(F(x) - G(x)\right) = 0$
$\Rightarrow F(x) = G(x) + \text{const.}$ Integrationskonstante.

* Die Differentiation von aus elementaren Funktionen zusammengesetzten Funktion ist dank Produkt-, Quotienten- und Kettenregel i.A. immer einfach auszuführen (sogar für implizite Funktionen). Die Umkehr = Integration aber i.A. nicht:
$\Rightarrow$ Erraten der Stammfunktion - wenn es sie gibt!

$\exists$ Ausnahmen, z.B.

$$f_n(x) = x^n\,, \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n'(x) = nx^{n-1}$$

$$\text{und umgekehrt} \quad F_n(x) = \frac{1}{(n+1)} x^{n+1} \Rightarrow F_n'(x) = f_n(x)$$

(später mehr).

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Vorraussetzungen wie oben in der Def.:

$$\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)\,, \tag{2.10}$$

a, b Integrationsgrenzen (bestimmtes Integral), d.h. die Integrationskonstante, die verschiedene Stammfunktionen unterscheidet, fällt heraus.

Interpretation: MWSatz angewandt auf Stammfunktion $F(x)$:

$$F\left(x+\Delta x\right) = F(x) + \underbrace{F'\left(x_0\right)\Delta x}_{f(x_0)\cdot\Delta x} + \ldots$$

$$\text{und } F\left(x+\Delta x\right) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} dy f(y) = \text{Fläche unter der Kurve von } f(x)\,.$$

* Zusammensetzen von $\int_a^b dx f(x)$ aus vielen kleinen Teilstücken $\to$ Riemannsche Summe.

Bsp.: $f(x)$ auf $I = (0,1)$:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \text{const. alle mögl. Stammfkt.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx x = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^2}{2} + \text{const.}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

(oder $\left(\frac{x^2}{2} + \text{const.}\right)\Big|_0^1$)

Sätze zur Integralrechnung:

* Integration ist linear (aus Linearität von ∂_x für Stammfunktion):

$$\int_a^b dx\,(c\,f(x)) = c\int_a^b dx f(x) \text{ für } c \text{ konstant}$$
$$\int_a^b dx\,(f(x)+g(x)) = \int_a^b dx f(x) + \int_a^b dx g(x)$$
$$\underset{I_1}{\int_a^b} dx f(x) + \underset{I_2}{\int_b^c} dx f(x) = \underset{I_1 \cup I_2}{\int_a^c} dx f(x) \text{ } (F(b) \text{ fällt heraus im Hauptsatz})$$

* Integration ist orientiert:

$$\int_a^b dx f(x) = -\int_b^a dx f(x) \text{ (aus HS)}$$
$$\text{und insbes. für } a=b: \quad \int_a^a dx f(x) = 0$$

* Differentiation nach Grenzen:

$$\partial_x \int_a^x dy f(y) = f(x)$$
$$\partial_x \int_x^b dy f(y) = -f(x)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Sei $f(x)$ stetig auf $I=(a,b)$: $\Rightarrow\ \exists\, x_0 \in I$ mit

$$\int_a^b dx f(x) = f(x_0)\,(b-a)\,. \tag{2.11}$$

(denn: $F(b)-F(a) = F'(x_0)\,(b-a)$ MWS für $F(x)$)

* Lesen wir die Liste der bekannten Ableitungen in umgekehrter Reihenfolge erhalten wir eine Liste von Stammfunktionen:

$f(x)$	$\int dx g(x)$	e^x	$\underset{x>0}{\ln x}$	$\cos x$	$\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tan x$	$\tanh x$
$f'(x)$	$g(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$	$\frac{1}{\cosh(x)^2}$

$f(x)$	$\int dx g(x)$	$\overset{=\sin^{-1}(x)}{\arcsin x}$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\text{arsinh} x$	$\text{arcosh} x$	$\overset{=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\text{artanh} x}$
$f'(x)$	$g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x^2-1}$	$\underset{=\partial_x \text{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{1-x^2}}$

Stammfunktion nicht immer eindeutig:

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
\Rightarrow \arcsin x &= \underset{\uparrow\text{const.}}{\frac{\pi}{2}} \underset{\uparrow\text{Vor.}}{-} \arccos x
\end{aligned}
$$

* durch Umkehrung der Produkt-, Quotienten-, oder Kettenregel können wir die Stammfunktion erraten:

$\int dx g(x)$	$e^{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$g(x)$	$f'(x)e^{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

* das Integral von Kombinationen von elementaren Funktionen lässt sich <u>nicht</u> immer durch elementare Funktionen ausdrücken → definiere <u>neue Funktionen</u>:
z.B.

$$
\begin{aligned}
\text{erf}(x) &\equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy e^{-y^2}\,, \quad x > 0 \quad \underline{\text{Errorfunktion}} \\
\Gamma(x) &\equiv \int_0^\infty dy y^{x-1} e^{-y}\,, \quad \underline{\text{Gammafkt.}}\ (\text{verallg. Fakultät: } \Gamma(n+1) = n! \text{ für } n \in \mathbb{N}) \\
E_1(x) &\equiv \int_x^\infty dy \frac{1}{y} e^{-y}\,, \quad \underline{\text{exponentielles Integral}} \\
Li_2(x) &\equiv -\int_0^x dy \frac{1}{y} \ln(1-y)\,, \quad 0 < x < 1 \quad \underline{\text{Dilogarithmus}}
\end{aligned}
$$

→ wir benötigen den Begriff des <u>uneigentlichen Integrals</u>:

$$\int_a^\infty dx f(x) \equiv \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx f(x)\,, \quad \text{falls limes ex. } (<\infty) \text{ ist } f \text{ integrierbar auf } [a,\infty)$$
$$\int_{-\infty}^b dx f(x) \equiv \lim_{a\to-\infty} \int_a^b dx f(x)\,, \quad \text{falls limes ex. } (<\infty) \text{ ist } f \text{ integrierbar auf } (-\infty,b]$$
$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x) \equiv \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}} \int_a^b dx f(x)\,, \quad \text{falls limes ex. } (<\infty) \text{ ist } f \text{ integrierbar auf } (-\infty,\infty)$$

($\lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}$ unabhängig von einander), oder $\lim\limits_{a\to 0} \int_a^b dx f(x)$ falls $f(a=0)$ nicht definiert.
Im Gegensatz dazu def. <u>Hauptwert-Integral</u> z.B.

$$\fint_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \equiv \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} dx f(x)$$

(<u>P</u>rincipal <u>V</u>alue)

* es gibt Funktionen , für die $\fint_{-\infty}^{\infty}$, aber nicht $\int_{-\infty}^{\infty}$ existiert! (Bsp.: $f(x) = x^3$)

Bsp.: uneigentliche Integrale: bei $x = 0$:

$$\underline{\int_0^1 dx \ln x} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 dx \ln x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 dx \partial_x \left(x\ln x - x\right)$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[x \ln x - x\right]_\epsilon^1 = 1\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 1 - \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+} (\epsilon\ln\epsilon - \epsilon)}_{=0} = \underline{-1}$$

$$\underline{\int_0^\infty dx e^{-x}} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b dx e^{-x} = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b$$
$$= -\lim_{b\to\infty} e^{-b} + \underbrace{e^0}_{=1} = \underline{1}$$

* ein und dieselbe Funktion kann auf einem Interval I_1 integrierbar sein und auf einem anderen I_2 nicht, z.B. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Wdhlg Integration in 1D:

- HS $\int\limits_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$, $F'(x) = f(x)$ Stammfunktion
- Liste von Stammfunktionen zu elementeren Funktionen und deren Umkehrfunktionen
- Neue Funktionen durch $\int$ von elementaren Funktionen
- uneigentliche Integrale $\int\limits_a^\infty, \int\limits_{-\infty}^b, \int\limits_{-\infty}^\infty = \lim\limits_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}} \int\limits_a^b$
- Hauptwertintegrale:

$$\text{z.B. } ⨍_{-\infty}^{\infty} = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \quad \underline{\text{Gleichzeitiger}} \text{ Limes der Grenzen}$$

Beispiele:

- $f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{1}{4}x^4$

$$\Rightarrow ⨍_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} dx x^3 = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-a}^{a} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{4}\left(a^4 - (-a)^4\right)$$
$$\text{aber } \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \int_a^b dx x^3 = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}} \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) \text{ ex nicht!}$$

- $\int\limits_0^1 dx \ln x$ ...

- "doppeltes Hauptwertintegral": $f(x) = \frac{1}{x^3}$ nicht definiert bei $x = 0$

$$\fint_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^3} = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ a\to\infty}} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} dx \frac{1}{x^3} + \int_{+\epsilon}^{+a} dx \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ a\to\infty}} \left(\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} \right]_{-a}^{-\epsilon} + \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} \right]_{\epsilon}^{a} \right)$$

$$= \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ a\to\infty}} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(-\epsilon)^2} - \underline{\underline{\frac{1}{(-a)^2}}} \right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\underline{\underline{a^2}}} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \right] = 0$$

$\underline{\underline{\quad\quad}}$ heben sich weg, gehen aber beide gegen 0

dagegen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^3} = \lim_{\substack{\epsilon,\,\delta\to 0\\ a,\,b\to\infty}} \left(\int_{-a}^{-\delta} dx \frac{1}{x^3} + \int_{\epsilon}^{b} dx \frac{1}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{\substack{\epsilon,\,\delta\to 0\\ a,\,b\to\infty}} \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{(-\delta)^2} - \underset{\to 0}{\frac{1}{(-a)^2}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{b^2}} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \right) \qquad \underline{\underline{\text{ex. nicht}}}$$

2.5 Integrationsmethoden

∃ Vielzahl an Lit. zu Integraltafeln, z.B. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, London (6th Ed 2000), sowie software
→ wir wollen selbst verstehen, wie es geht!

i) **Variablentransformation oder Substitution**

Sei φ eine diffbare und invertierbare Funktion. Dann gilt:

$$I = \int_a^b dx f(x) = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt \varphi'(t) f(\varphi(t)) \tag{2.12}$$

durch Substitution $x = \varphi(t) \quad (\varphi^{-1}(x) = t)$.

Denn: Sei $F(x)$ Stammfunktion zu $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$. Definiere $\tilde{F}(t) \equiv F(\varphi(t))$, dann

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} F'(x)\big|_{x=\varphi(t)} = \varphi'(t) f(\varphi(t))$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} dt \varphi'(t) f(\varphi(t)) = \left[\tilde{F}(t)\right]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(b)\right)\right) - F\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(a)\right)\right) = I\,.$$

* In vielen Fällen findet man zuerst die Umkehrfunktion $\varphi^{-1}(x) = t$.
* Schreibweise zum Merken:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \varphi'(t)dt\,, \quad \text{Grenzen:} \begin{array}{l} x = a \;\leftrightarrow\; t = t_a = \varphi^{-1}(a) \\ x = b \;\leftrightarrow\; t = t_b = \varphi^{-1}(b) \end{array}$$

Beispiele:

- $$\int\limits_a^b dx(1+cx)^4 = \int\limits_{1+ca}^{1+cb} dt \frac{1}{c} t^4 = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{5}t^5\right]_{1+ca}^{1+cb} = \frac{1}{5c}\left((1+cb)^5 - (1+ca)^5\right)$$

  wähle $t = 1 + cx = \varphi^{-1}(x) \quad \leftarrow$ Translation und Skalierung

  $$\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{c}(t-1)\varphi(t)\,, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{c}\,, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{c} \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{dt}{c}$$

- $$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \int\limits_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} dt 2\cancel{t} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} = 2\,[t]_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} = 2\left(\sqrt{1+b} - \sqrt{1+a}\right)$$

  wähle $t = \sqrt{1+x}$ "Substituiere was kompliziert ist"

  $$\Leftrightarrow\; x = t^2 - 1 = \varphi(t)\,, \quad \varphi'(t) = 2t = \frac{dx}{dt}$$

Anwendung: Integrale über rationale Funktionen in $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$I = \int\limits_a^b dx \frac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}\,,$$

$P(\sin(x), \cos(x))$ und $Q(\sin(x), \cos(x))$ Polynome in x und y, d.h. enthält auch $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Beispiel:

$$\int_a^b dx \frac{1}{\sin x} = \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} dt \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \ln(t)\Big|_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} = \ln\left(\frac{\tan\left(\frac{b}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}\right)$$

$$\text{Substituiere } \begin{array}{c} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi^1(x) \\ x = 2\arctan(t) = \varphi(t) \end{array} \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Mittels Additionstheorem für sin, cos, tan gilt:

$$\boxed{\sin(x) = 2\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \tfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tfrac{2t}{1+t^2}}$$

dito: $\boxed{\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$, $\boxed{\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}}$.

D.h. für

$$I = \int_{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}^{\tan\left(\frac{b}{2}\right)} dt \underbrace{\left(\frac{2}{1+t^2}\right) \frac{P\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{Q\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}}_{\text{rationale Fkt in } t \text{, lösbar!}},$$

ii) **Int.-Methode mittels Partialbruchzerlegung**

Seien $g_n(x)$ Polynom v. Grad n, $h_m(x)$ Polynom v. Grad m, $f(x) = \frac{g_n(x)}{h_m(x)}$,
oBdA: g_n, h_m haben keine gemeinsamen Nullstellen, $n < m$
$\Rightarrow$ $\exists$ eindeutige Zerlegung:

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + ... \quad (\rightsquigarrow \int \text{ einfach}) \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + ..., \end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei $h_m(x) = \underbrace{(x-a_1)^{k_1} ... (x-a_r)^{k_r}}_{\text{reelle Nullstellen}} \underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} ... (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}_{\text{komplexe Nullstellen}}$,
(Fundsatz d. Alg.)

$m = k_1 + ... + k_r + 2l_1 + ... + 2l_s$

- für nicht entartete Nullstellen von $h_m(x)$ wie $(x-a)$, (x^2+px+q) können wir die Stammfunktion so bestimmen (k_1, $l_1 > 1$ später).

*

$$\frac{A}{x-a} = A\frac{d}{dx}\ln|x-a| \quad \left(\begin{array}{ll} x > a\,, & A\frac{1}{x-a} \\ x < a\,, & A\frac{d}{dx}\ln(a-x) = -A\frac{1}{a-x} = \frac{A}{x-a} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \int^x dy \frac{A}{y-a} = A\ln|x-a|$$

* komplexe Nullstelle $x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ mit $\frac{p^2}{4} - q < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{Bx+C}{x^2+px+q} =& \frac{B}{2}\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(C - \frac{B}{2}p\right)\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} \\ =& \frac{B}{2}\frac{d}{dx}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{\left(C-\frac{B}{2}p\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int^x dy \frac{By+c}{y^2+py+q} = \frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{\left(C-\frac{B}{2}p\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}}\right)$$

Beispiele:

- $$\begin{aligned} \int^x dy \frac{1}{y^2-a^2} =& \int^x dy \frac{1}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y+a}\right) \\ =& \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) = \frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|} \end{aligned}$$

(oder artanh $\left(\frac{y}{a}\right)$ für $\left(-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{1-\frac{y^2}{a^2}}$)

- $$\begin{aligned} \int^x dy \frac{y}{y^2-a^2} =& \int^x dy \frac{y}{(y-a)(y+a)} = \int^x dy \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-a} + \frac{1}{y+a}\right) \\ =& \frac{1}{2}\ln\left|x^2-a^2\right| \end{aligned}$$

- $$\int^x dy \frac{y^2}{y^2-a^2} = \int^x dy \left(1 + \frac{a^2}{y^2-a^2}\right) \qquad \text{kennen wir schon}$$

- $\int\limits_0^1 dy \frac{1}{y^2+y+1}\,, \quad \frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0 \quad \text{keine reelle Nullst.}\,, \quad \begin{matrix} B = 0 \\ C = 1 \end{matrix}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \quad \left(= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}
$$

iii) **Integration mittels Ableitung nach Parameter**